КВАНТ
ЖУРНАЛ

1988

1 - 12

НОМЕР
1

Квант
1988
1
Основан в 1970 году

В номере:

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

2 К нашим читателям
3 *В. Г. Болтянский.* Программы перебора
8 *М. И. Каганов.* Много или мало?
16 *А. Б. Геллер.* Нужна ли альпинисту физика?

Задачник «Кванта»

21 Задачи М1081 — М1085, Ф1093 — Ф1097
24 Решения задач М1061 — М1064, Ф1073 — Ф1077
30 Самопересечения замкнутой ломаной

«Квант» для младших школьников

35 Задачи

Школа в «Кванте»
Физика 8, 9, 10:

36 Об одной удивительно живучей ошибке
38 Проводники в электростатическом поле
39 Интерференция и интерферометры

Математический кружок

42 *С. М. Львовский, А. Л. Тоом.* Разберем все варианты

Наш календарь

48 Генрих Герц и электромагнитные волны

Искусство программирования

51 *А. А. Дуванов, Ю. А. Первин.* Язык Лого. Урок 4: Структура данных в Лого
47 О дальнейшей работе Заочной школы программирования

55 **Варианты вступительных экзаменов**

Информация

57 Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу
58 Новый прием на заочное отделение Малого мехмата
59 Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

61 **Ответы, указания, решения**
«Квант» улыбается *(60)*

Наша обложка

1, 4 *«Волшебный глобус» — еще одна математическая головоломка Э. Рубика.*

2 *Строительство Вавилонской башни (изображенное на картине Питера Брейгеля Старшего) стало, согласно библейскому преданию, причиной разноязычия народов Земли. О причине появления огромного количества компьютерных языков предания еще не сложены. Об одном из таких языков — языке Лого — рассказано на с. 51.*

3 *Шахматная страничка*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1988

Дорогие читатели!

Многие из вас хорошо знакомы с нашим журналом, с его разделами и материалами. Но есть и такие, кто в этом году впервые стал подписчиком «Кванта». Мы надеемся, что каждый из вас найдет для себя в журнале что-то нужное и интересное.

В каждом номере мы рассказываем о достижениях науки и ее практических применениях, о фундаментальных понятиях физики и математики. В рубрике «Новости науки» помещаем сообщения о новейших научных достижениях. Тем, кто любит физические эксперименты и хочет научиться делать простые приборы, предназначены материалы рубрики «Лаборатория «Кванта». Любителям математических задач — статьи «Математического кружка». В разделе «Школа в «Кванте» вы найдете статьи, которые разъясняют наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса.

Каждый месяц мы предлагаем читателям нестандартные, на наш взгляд, задачи по физике и математике. Решение этих задач, помещаемых в рубрике «Задачник «Кванта», требует умения мыслить самостоятельно, творчески. Ежегодно журнал проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса награждаются Дипломом «Кванта» и получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Многие материалы журнала предназначены будущим абитуриентам. Это статьи раздела «Практикум абитуриента» и задачи рубрики «Варианты вступительных экзаменов».

В каждом номере журнала вы найдете рубрику «Квант» для младших школьников». Здесь мы даем занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько сообразительности, внимательности, умения мыслить логически. Статьи, публикуемые в этом разделе, интересны, как правило, и старшеклассникам.

Регулярно появляются в журнале материалы, рассказывающие об олимпиадах школьников и учащихся ПТУ, информация о заочных и вечерних школах при различных вузах страны...

Объем нашего журнала достаточно большой, и рассказать коротко о его содержании трудно. Сегодня вы знакомитесь с первым номером. Понравится ли он вам? Чего вы вообще ждете от журнала? О чем хотели бы прочитать на его страницах? Мы надеемся узнать это из ваших писем.

ПРОГРАММЫ ПЕРЕБОРА

Член-корреспондент АПН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

Не правда ли, паровоз «бегает» лучше человека — во всяком случае, быстрее? И если нужно попасть в другой город, вы с удовольствием прибегнете к его помощи. Есть у человека и много других помощников. Роботы переносят тяжелые детали к месту обработки, средства связи помогают передавать информацию, часы отвечают на вопрос «сколько времени?» и т. д.

А есть новые, сравнительно недавно появившиеся помощники, облегчающие человеку интеллектуальную деятельность. Это — компьютеры. Они не только могут быстро произвести расчет, но и справляются с задачами, при размышлении над которыми человек производит перебор вариантов, осуществляет поиск путей решения, выполняет логические операции. Конечно, компьютер не в буквальном смысле «мыслит» так же, как человек (ведь и паровоз «бегает» по-своему, а не шагает, как мы). Хотя свою «мыслительную» деятельность компьютер послушно выполняет в соответствии с программой, заранее составленной человеком, но, благодаря огромному быстродействию, со многими задачами он справляется гораздо быстрее человека. И не только с вычислительными задачами, но и с такими, для решения которых приходится подумать и поломать голову. Рассмотрим пример.

Задача 1. *Сколько существует двузначных чисел, сумма квадратов цифр которых делится на 13?*

Конечно, для решения можно осуществить «тупой» перебор: двузначных чисел не так уж много, и если их одно за другим перебрать и проверить, для каких из них сумма квадратов цифр делится на 13, то мы сможем найти ответ. Однако это долго и скучно. И мы применяем логическое рассуждение, позволяющее более легко и красиво получить решение. Для этого составим следующую табличку:

цифра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ее квадрат	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81
остаток	0	1	4	9	3	12	10	10	12	3

В нижней строке записаны остатки от деления чисел второй строки на 13. Надо подобрать две цифры, сумма квадратов которых делится на 13, т. е. две цифры, стоящие в верхней строке, для которых сумма соответствующих чисел нижней строки равна 13. Например, можно взять цифры 1 и 5 (под ними в нижней строке стоят 1 и 12); получаем два двузначных числа 15 и 51, удовлетворяющих требуемому условию. Можно также взять цифры 1 и 8 (под которыми также подписаны 1 и 12) — это дает еще два искомых числа (18 и 81). Еще одну комбинацию цифр составляют 2 и 3 (под ними записаны 4 и 9), что дает еще два числа (23 и 32). Наконец, можно скомбинировать одну из цифр, под которой записано число 3, с цифрой, под которой записано число 10. Всего получаем 14 искомых чисел:

15 и 51, 18 и 81, 23 и 32, 46 и 64,
47 и 74, 69 и 96, 79 и 97.

Хотя здесь надо было немножко подумать и сообразить, как найти путь решения, но, конечно, такое решение лучше, чем «тупой» перебор.

А что если бы мы, подобно компьютеру, могли выполнять сотни тысяч или даже миллионы операций в секунду? Целесообразно ли было бы в этом случае ломать голову над поиском пути решения? Не проще ли было бы при таком быстродействии просто перебрать числа от 10 до 99? Видимо, проще!

Рассмотрим на примере задачи 1, как с помощью компьютера решаются задачи перебора. Мы приведем программу на весьма распространенном и употребительном языке программирования Бейсик (см. учебник информатики для 10 кл., с. 71). Но прежде дадим описание имеющейся в Бейсике *встроенной функции* INT. Вот пример записи:

A=INT(56/13)

Она означает, что переменной A присваивается значение, равное целой части дроби 56/13 (от английского слова *integer* — целый). Так как 56/13= =4,30769..., будем иметь A=4.

Теперь приведем программу *) решения задачи 1:

```
10 FOR N=10 TO 99
20 A=INT(N/10)
30 B=N-10*A
40 S=A*A+B*B
50 R=S-13*INT(S/13)
60 IF R=0 THEN PRINT N;
70 NEXT N
80 END
```

Комментарий. Строки программы пронумерованы, причем не подряд, а через 10 номеров. Этот прием очень удобен: если в процессе записи программы обнаружится, что вы пропустили какие-либо операции, нужные для решения, то их можно будет потом записать в виде строк с промежуточными номерами.

Строка 10 содержит оператор цикла, который как раз предназначен для осуществления перебора. Он означает приказ осуществить последовательный перебор всех натуральных чисел от 10 до 99 (т. е. всех двузначных чисел) и для каждого из них осуществить деятельность, указанную в последующих строках. Строка 70 — окончание деятельности, проводимой с очередным двузначным числом, т. е. приказ перейти к следующему числу.

Теперь рассмотрим промежуточные строки 20—60, описывающие деятельность, проводимую с числом N. Строка 20 содержит встроенную функцию INT, о которой было сказано выше. Таким образом, переменной A присваивается значение, равное целой части числа N/10, т. е. A — цифра десятков двузначного числа N. Следовательно (звездочкой в Бейсике обозначается умножение), 10*A есть число N, округленное до десятков, т. е. число, получающееся, если в N последнюю цифру заменить нулем. Теперь ясно (строка 30), что B — цифра единиц числа N. Таким образом (строка 40), переменной S присваивается значение, равное сумме квадратов цифр двузначного числа N. Строка 50 означает, что переменной R присваивается значение, равное остатку от деления числа S на 13. Наконец, строка 60 завершает деятельность с очередным числом N: если остаток равен нулю, т. е. сумма квадратов цифр числа N делится на 13, то НАПЕЧАТАТЬ число N. Если же остаток не равен нулю (иначе говоря, если условие, содержащееся в строке 60, не выполнено), то эта строка игнорируется, т. е. мы переходим к следующей строке. Заметим, что в конце строки 60 стоит точка с запятой. Это означает (в соответствии с синтаксисом языка Бейсик), что следующее число будет печататься рядом, в той же строке.

Когда компьютер выполнит проверку для всех требуемых чисел (и напечатает на дисплее те из них, которые дают решение задачи), он переходит к следующей строке 80, т. е. работа программы на этом заканчивается.

Если у вас есть доступ к компьютеру (например, во время экскурсии на вычислительный центр), попросите программиста войти в режим интерпретатора языка Бейсик и наберите эту программу, а затем наберите директиву RUN (по-английски — бежать), означающую указание осуществить «пробежку» по программе. Через пару секунд вы увидите на дисплее двузначные числа, сумма квадратов цифр которых делится на 13. Только они будут расположены не парами, как в «ручном» решении, а по возрастанию.

Задачи

2. Найдите двузначное число, равное сумме цифры его десятков и квадрата цифры единиц.

3. Если к сумме цифр двузначного числа прибавить квадрат этой суммы, то снова получится это двузначное число. Найдите все такие числа.

---

*) Программы в этой статье написаны на языке Бейсик MSX.

4. Квадрат трехзначного числа оканчивается тремя цифрами, которые как раз составляют взятое число. Найдите все такие числа.

5. Найдите четырехзначное число, которое при делении на 133 дает в остатке 125, а при делении на 134 дает в остатке 111.

6. Припишите к 523*** три такие цифры справа, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, на 8 и на 9.

7. Припишите к ***999 три такие цифры слева, чтобы полученное шестизначное число делилось на 13, на 17 и на 19.

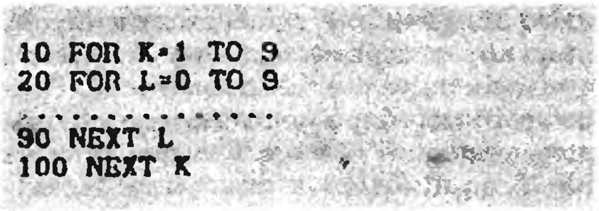
Рассмотрим теперь еще одну задачу, решение которой позволит нам познакомиться с дальнейшими приемами программирования на языке Бейсик.

Задача 8. *Долгожитель (т. е. человек, проживший более ста лет) заметил, что если к сумме квадратов цифр его возраста прибавить число его дня рождения (т. е. какое-то из чисел от 1 до 31), то получится как раз его возраст. Сколько лет долгожителю?*

Вот программа для решения этой задачи:

```
10 FOR K=1 TO 9
20 FOR L=0 TO 9
30 FOR M=0 TO 9
40 N=100*K+10*L+M
50 S=K*K+L*L+M*M
60 IF N<S+1 GO TO 90
70 IF N<S+32 THEN PRINT N;
80 NEXT M
90 NEXT L
100 NEXT K
110 END
```

Комментарий. Здесь вместо одного используются три вложенных друг в друга цикла. Рассмотрим строки 10, 20, 90, 100:



```
10 FOR K=1 TO 9
20 FOR L=0 TO 9
...............
90 NEXT L
100 NEXT K
```

Начав деятельность при $K=1$, мы сразу же попадаем во внутренний цикл (строки 20 и 90), и пока он не закончится, мы не перейдем через строку 90 дальше, т. е. не перейдем к следующему значению K. Таким образом, при $K=1$ мы переберем все значения $L=0,1, ..., 9$, затем перейдем к $K=2$ и снова переберем все значения $L=0,1, ..., 9$ и т. д. Отсюда ясно, что строки 10, 20, 90, 100 обеспечивают перебор всех пар K, L (в указанных пределах). Далее, внутри имеется еще третий цикл по M (строки 30, 80). Вместе эти три цикла дают перебор всех троек K, L, M (в указанных пределах). Теперь строка 40 показывает, что в результате этого мы перебираем все трехзначные числа от 100 до 999.

Строки 50—70 предназначены для проверки, годится ли исследуемое трехзначное число в качестве возраста долгожителя. Прежде всего вычисляется S — сумма квадратов цифр этого трехзначного числа (строка 50). Если $N<S+1$, то рассматриваемое трехзначное число не годится и, более того, увеличивая цифру единиц M, мы подавно будем получать непригодные числа. Поэтому в строке 60 применен оператор *условного перехода:* если $N<S+1$ то ПЕРЕЙТИ к строке 90. Если же условие $N<S+1$ не выполнено, т. е. $N>S$, то надо еще проверить, на сколько единиц число N больше S. Если N превосходит S на 32 или более, то разность $N-S$ не может быть числом дня рождения. Поэтому лишь при условии $N<S+32$ число N годится в качестве возраста долгожителя (и тогда его следует напечатать).

Введите эту программу в компьютер, и вы узнаете возраст долгожителя: ему 109 лет.

Задачи

9. Найдите трехзначное число, квадрат которого оканчивается тремя одинаковыми цифрами, отличными от нуля.

10. Подставьте в записи 42*4* вместо звездочек такие цифры, чтобы полученное пятизначное число делилось на 72.

11. Найдите четырехзначное число, являющееся точным квадратом, у которого две первые цифры одинаковы и две последние тоже одинаковы.

Указание. В языке Бейсик имеется встроенная функция SQR, которая предназначена для извлечения квадратного корня; иначе говоря, оператор M=SQR(A) присваивает переменной M значение, равное квадратному корню из значения переменной A.

12. В магазине имеется мастика в ящиках по 16 кг, 17 кг, 21 кг. Как некоторой организации получить 185 кг мастики, не вскрывая ящики?

13. Великий математик Пьер Ферма, много занимавшийся вопросами теории чисел, высказал гипотезу, что все числа вида

$$2^{(2^n)}+1 \qquad (*)$$

(n натуральное) являются простыми. При $n=1$, 2, 3, 4 справедливость этого утверждения несложно проверяется, а при $n=5$ проверка «вручную» становится слишком трудной. Однако другой великий математик, Леонард Эйлер, остроумным искусственным приемом установил, что как раз при $n=5$ утверждение Ферма является ошибочным, т. е. число (*) оказывается в этом случае составным. Напишите программу, позволяющую при $n=5$ убедиться в правильности утверждения Эйлера, т. е. найти делитель числа (*), отличный от этого числа и единицы.

Указание. По обычной программе, написанной на языке Бейсик, компьютер производит расчеты с шестью значащими цифрами. Между тем число (*), получающееся при $n=5$, имеет 10 значащих цифр. Учтите это при составлении программы. Запись 2∧16 означает: возвести 2 в 16-ю степень.

14. Найдите все трехзначные числа, равные сумме кубов своих цифр.

15. В трехзначном числе зачеркнули первую цифру слева; когда полученное двузначное число умножили на 7, получилось исходное трехзначное число. Найдите его.

16. В трехзначном числе, все цифры которого нечетны, зачеркнули среднюю цифру. Оказалось, что полученное двузначное число является делителем исходного числа. Найдите все такие трехзначные числа.

Указание: строка

10 FOR A=1 TO 9 STEP 2

означает, что A пробегает числа с шагом 2 (т. е. 1, 3, 5, ...).

17. Сумма цифр трехзначного числа кратна 7. Само число также делится на 7. Найдите все такие числа.

Указание: запись R<>0 означает, что R не равно нулю.

18. Четырехзначное число, а также число, записанное теми же цифрами в обратном порядке, оба являются точными квадратами. Найдите эти числа.

19. Решите следующие арифметические ребусы (вместо каждой буквы надо подставить некоторую цифру, причем одинаковые буквы означают одинаковые цифры, а различные буквы — различные цифры):

а) КТО + КОТ = ТОК;

б) $АВВА = АА^2 + ВВ^2$;

в) КИО * ИО = ТОКИО.

20. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении числа на 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Нередко при решении задач на компьютере применяются *рабочие переменные*, которым в программе отводится роль «счетчиков», «накопителей», «хранителей» промежуточных результатов. Рассмотрим это на следующих примерах.

Задача 21. *Найдите наибольшее значение суммы* M^2+N^2, *когда* M *и* N *пробегают все значения от* 1 *до* 100, *удовлетворяющие условию* $|N^2-MN-M^2|=1$.

Решение дается следующей программой:

```
10 P=0
20 FOR M=1 TO 100
30 FOR N=1 TO 100
40 IF ABS(N*N-M*N-M*M)<>1 GO TO 90
50 S=M*M+N*N
60 IF S>P THEN P=S
70 IF S>P THEN K=M
80 IF S>P THEN L=N
90 NEXT N
100 NEXT M
110 PRINT P.K,L
120 END
```

Комментарий. Здесь использована встроенная функция ABS, предназначенная для нахождения модуля (или, как раньше говорили, абсолютной величины) числа; иначе говоря, оператор H=ABS(Q) присваивает переменной H значение $|Q|$. Далее, P, K, L — рабочие переменные («хранители»), предназначенные для того, чтобы в процессе работы программы некоторое время сохранять полученные промежуточные результаты. Переменная P предназначена для хранения достигнутого значения M^2+N^2: первоначально P=0 (строка 10), а каждый раз, когда (при наложенных на M, N условиях) получается сумма квадратов, большая, чем она была раньше, переменной P присваивается новое значение, равное этой сумме квадратов. Одновременно переменные K, L получают (и хранят до следующего изменения) те значения M, N, при которых это большее значение суммы квадратов было получено. После всего перебора печатается наибольшее значение суммы квадратов и те M, N, при которых оно было достигнуто. Заметим, что между буквами P, K, L поставлены в строке 110 запятые (а не точки с запятыми): при таком способе печати выносимые на дисплей числа отстоят друг от друга дальше (каждое число занимает 15 позиций).

Задача 22. *Сколько существует «счастливых» шестизначных билетиков (т. е. таких, у которых сумма* *трех первых цифр равна сумме трех последних)?*

Возможно, читатель лихо напишет программу, содержащую шесть вложенных циклов (первая цифра пробегает значения от 0 до 9, вторая — тоже от 0 до 9 и т. д.). Но не будем спешить. Такая написанная «в лоб» программа требует очень много машинного времени, а оно слишком дорого! В самом деле, всего имеется миллион возможностей, и каждую из них надо обсчитать (найти сумму первых трех цифр, сумму трех последних, сравнить). Получаются десятки миллионов операций! Составим, однако, программу более идейно. Сумма первых трех цифр (и сумма трех последних) может принимать значения от 0 до 27. Если, скажем, имеется 75 комбинаций первых трех цифр, дающих сумму цифр 14 (и столько же комбинаций последних трех цифр, дающих сумму цифр 14), то это даст 75*75 «счастливых» билетиков: каждую из таких комбинаций первых трех цифр можно сопоставить с каждой комбинацией последних трех. Значит, следует подсчитать, сколько имеется комбинаций трех цифр, дающих сумму цифр S, где S может меняться от 0 до 27, возвести это число комбинаций в квадрат и просуммировать эти квадраты по S от 0 до 27. Эта сумма и даст искомое число счастливых билетиков (правда, увеличенное на единицу, поскольку билета с номером 000000 не бывает). При таком способе написания программы потребуется перебрать 28*10*10*10 = = 28 000 возможностей, т. е. существенно меньше миллиона! Но продолжим упрощение идейной линии программы. Если мы для некоторого S ищем количество комбинаций трех цифр, дающих сумму S, то достаточно перебрать возможности только для двух цифр: если сумма первых двух цифр не превосходит S, но отличается от S не более, чем на 9, то третья цифра однозначно определится (как разность между S и суммой двух первых цифр). Значит, при таком подходе нужно будет перебрать лишь 28*10*10 = 2800 возможностей. Наконец, заметим, что если мы имеем некоторый счастливый билетик, то, дополняя все его цифры до 9, мы тоже получим счастливый билетик (например, взяв билетик 457 268, мы получим, дополняя цифры до 9, билетик 542 731). Но если сумма цифр (как первых трех, так и последних трех) во взятом счастливом билетике была S, то в билетике, получающемся дополнением цифр до 9, эта сумма цифр будет равна 27—S. Следовательно, достаточно придавать для S значения от 0 до 13, а потом удвоить найденное число счастливых билетиков (и еще надо не забыть вычесть единицу). Это означает перебор лишь 14*10*10 = 1400 возможностей. При такой идее программы даже «слабенький» компьютер через несколько секунд даст ответ! Как видите, думать над идеей составления программы надо серьезно, и здесь есть содержательные логико-математические задачи. Вот эта программа:

```
10 P=0
20 FOR S=0 TO 13
30 Q=0
40 FOR K=0 TO 9
50 FOR L=0 TO 9
60 IF K+L>S GO TO 90
70 IF K+L<S+10 THEN Q=Q+1
80 NEXT L
90 NEXT K
100 P=P+Q*Q
110 NEXT S
120 PRINT 2*P-1
130 END
```

Комментарий. Здесь Q — рабочая переменная, играющая роль «счетчика»: каждый раз, когда первые две цифры K, L пригодны для получения требуемой суммы S, эта возможность засчитывается, т. е. новое значение переменной Q (строка 70) равно ее прежнему значению, увеличенному на 1. Переменная P — «накопитель»: если мы уже подсчитали, сколько имеется возможностей осуществления данной суммы S (последнее значение переменной Q как раз будет давать это число возможностей), то надо возвести это число возможностей в квадрат и прибавить этот

(Окончание см. на с. 34)

1
2
3
4
5
6

В этом номере мы публикуем статью известного физика-теоретика, специалиста по физике твердого тела, профессора М. И. Каганова. В ней автор на простых примерах знакомит читателя с тонким, граничащим с интуицией искусством оценок, без которого невозможна работа сегодняшнего физика-теоретика на его пути к неведомому.

Статья написана в системе единиц СГС (сантиметр — грамм — секунда). В школе эту систему уже давно не изучают, однако профессиональные физики обычно пользуются именно ею (а не знакомой школьникам СИ). Дело в том, что при написании формул в этой системе единиц появляющиеся в них коэффициенты имеют ясный физический смысл. Подумав, редакция не решилась переводить формулы статьи в СИ, так как при этом аромат настоящей физики, веющий от нее, был бы безвозвратно утерян.

МНОГО ИЛИ МАЛО?

(Рассуждения физика-теоретика о числах)

Доктор физико-математических наук
М. И. КАГАНОВ

Однажды я задумался, сколько книг человек может прочитать за жизнь. Оценил я это число так. Скажем, человек читает 60 лет. В году 52 недели. Пусть в неделю человек прочитывает две книги. Значит, около 100 в год. Итого примерно 6000 книг за жизнь. Это число, не обсуждая, как оно получилось, я назвал разным людям. «Так мало!» — сказали одни. «Неужели так много?!» — удивились другие. И я подумал: в нас нет запрограммированной чувственной оценки чисел. Только сравнивая одно число с другим, только придавая числу определенный смысл, мы ощущаем его величину. Число прочитанных книг, конечно, имеет вполне определенный смысл (это не просто безымянные 6000), но ощутить его (оценить, сказать — много это или мало) может только тот, кто сумеет подобрать сравнение, например, задумавшись: «А сколько книг в неделю (месяц, год,...) читаю я?»...

Физика имеет дело с именованными величинами. Любая физическая величина имеет размерность. Существует специальный раздел физики, изучающий принципы размерности, системы единиц, эталоны этих единиц и т. д. Должен признаться, всегда этот раздел физики мне казался достаточно скучным. Может быть, из-за того, что из него много фактов надо держать в голове: как связаны между собой джоуль и эрг, чем отличается эрстед от гаусса, сколько кулонов в единице заряда по системе СГС и т. д., и т. п. Но, как ни грустно, без этого обойтись нельзя. Приходится, переходя от одних значений к другим, выражать их в определенных единицах и притом в одинаковых. Сравнивая магнитное поле, созданное сверхпроводящим соленоидом, с магнитным полем Земли, оба поля надо выразить в одних единицах: в гауссах или в теслах — безразлично, отношение полей от этого не зависит. А ведь именно отношения физических величин нам, как правило, и важны, так как именно они (безразмерные отношения) определяют то, что физики любят называть «физикой явления». Эту мысль мы разовьем ниже, а сейчас еще несколько слов о размерных величинах.

Задумывались ли вы о том, почему все физические величины могут быть выражены через единицы длины (сантиметр), времени (секунду) и массы (грамм)? Это относится и к электрическим, и к магнитным величинам, и к тепловым, и к оптическим.*) В физике нет величин, которые нельзя было бы записать через сантиметр, секунду и грамм. Ответ на вопрос, почему все физические величины выражаются через грамм, сантиметр и секунду, может показаться неожиданным. Дело в том, что это связано с определением физики. Физика занимается теми явлениями, которые могут быть описаны с помощью сантиметра, секунды и грамма. Сантиметр и секунда нужны для описания движения в пространстве (кинематика), а грамм необходим для связи этого движения с силой, вызывающей движение (динамика). Вспомните, что по закону Ньютона сила равна ускорению, умноженному на массу. Конечно, существует множество явлений, которые мы не можем описать с помощью физических величин. Например, всё, что относится к развитию человеческого общества — к истории, экономике и т. п. Исследование этих явлений, требующее иногда сложных математических методов, не принадлежит физике. И конечно, физика не исчерпывается измерениями. Фундаментальную роль в ней играют представления, положения, законы, иногда выраженные в виде математических уравнений, а иногда ограничивающиеся словесной формулировкой. Вот яркий пример: все тела состоят из молекул, молекулы из атомов, атомы из ядер и электронов, а ядра из протонов и нейтронов. В этой фразе — огромная информация, концентрация многовекового изучения природы, изучения, основанного на измерении величин, которые (все!) могут быть выражены через сантиметр, секунду и грамм.

---

*) Например, размерность тока — $[I]=[Q]/\text{с}$, а размерность заряда Q можно найти, воспользовавшись законом Кулона: $[Q]^2/[R]^2=[F]$, где F — сила. Так как $[F]=\text{г}\cdot\text{см}/\text{с}^2$, то $[Q]=\text{г}^{1/2}\cdot\text{см}^{3/2}/\text{с}$. Отсюда $[I]=\text{г}^{1/2}\cdot\text{см}^{3/2}/\text{с}^2$. Так размерность всех электрических величин можно выразить через грамм, сантиметр и секунду.

К основным законам природы, несомненно, следует отнести законы сохранения. Кроме хорошо известных — закона сохранения энергии и импульса — существуют и более экзотические. Например, закон сохранения барионного заряда, утверждающий, что число частиц типа протон или нейтрон не изменяется при взаимодействии между частицами.*) Или другой пример: состояние атомных и субатомных частиц характеризуется некоторой величиной, которую называют волновой функцией. Чаще всего ее обозначают греческой буквой ψ. Волновая функция ψ — функция координаты $\vec{r}$. Так как все точки пустого пространства эквивалентны, то любую точку можно избрать за начало координат. Так вот, функция $\psi(\vec{r})$ согласно уравнениям квантовой механики может быть либо четной, либо нечетной —

$$\text{либо } \psi(-\vec{r})=\psi(\vec{r}),$$
$$\text{либо } \psi(-\vec{r})=-\psi(\vec{r}),$$

причем, что бы с частицей ни происходило, это свойство волновой функции сохраняется. Говорят, что существует закон сохранения четности. Если у частицы четная волновая функция, то такой частице можно приписать четность $+1$, если волновая функция нечетная — то -1. Кроме того, волновая функция нескольких не взаимодействующих друг с другом частиц есть произведение волновых функций отдельных частиц, а ее четность — произведение четностей отдельных частиц. Это дает возможность обобщить закон сохранения четности на весьма сложные случаи. Например: сталкиваются две частицы — четная и нечетная, а в результате рождаются новые частицы; если их две, то одна из них должна быть четной, а другая нечетной, а если три, то все они могут быть нечетными. Для нас важно: сохраняется безразмерное число $+1$ или -1.

Но для проверки этого и подобных утверждений необходимы измерения. Для этого что-то должно двигаться за счет действия на это «что-то» каких-то сил. И мы опять приходим к физическим величинам, размерность которых может быть сведена к сантиметру, секунде, грамму. Я очень не хотел бы, чтобы меня восприняли как «врага» безразмерных чисел. Наоборот: одна из задач этой статьи — убедить читателя в пользе и даже необходимости безразмерных

---

*) Античастицам приписывается барионный заряд обратного знака (у протона и нейтрона барионный заряд равен 1, у антипротона и антинейтрона -1).

комбинаций размерных величин. Более того. Истинно безразмерные числа, т. е. не являющиеся комбинациями размерных величин, тоже часто встречаются в физике. Трудно найти формулы, в которые не входят трансцендентные числа e и π, не говоря уже просто о самых различных численных множителях, входящих в любую формулу.

Вернемся к физическим величинам, обладающим той или иной размерностью. Задача физической теории — связать различные физические величины соотношениями, которые допускают экспериментальную проверку. Например, желая проверить, как изменяется со временем путь s, проходимый частицей, движущейся с постоянным ускорением a, мы должны сравнить свои измерения с формулой

$$s(t)=v_0t+\frac{at^2}{2}=v_0t\left(1+\frac{at}{2v_0}\right), \quad (1)$$

где v_0 — начальная скорость частицы. Это — очень простая формула. Но и она (как все формулы в физике!) требует, чтобы все входящие в нее величины имели соответствующие размерности: если s измеряется в сантиметрах, а t — в секундах, то v_0 — в см/с, а a — в см/с^2. Но пусть мы хотим не только проверить эту формулу, но и выяснить: как сказывается на характере движения частицы ускорение? Для этого удобна вторая форма записи (когда v_0t мы вынесли за скобки). Из нее видно: сначала (при $t \ll 2v_0/a$) роль ускорения незначительна — частица практически движется с постоянной скоростью v_0, зато потом (при $t \gg 2v_0/a$) частица «забывает», какая у нее была начальная скорость,— ее движение определяется ускорением. Как видите, нельзя однозначно ответить на вопрос, большое или маленькое ускорение у частицы. Ответ зависит от того, какой этап движения нас интересует. А выяснили мы это, сравнив с единицей безразмерное отношение $at^2/2v_0t=at/2v_0$. Строго говоря, отбрасывая первое или второе слагаемое, надо было бы учесть, с какой точностью измеряет пройденный путь наш прибор, и разрешить себе пренебрегать соответствующим слагаемым только в том случае, если оно окажется меньше относительной ошибки измерения. Мы больше не будем вдаваться в подобные тонкости, хотя они очень важны при анализе реальных экспериментов.

При решении реальных задач мы часто должны упрощать — без этого попросту задачу решить нельзя. Упрощение всегда основано на пренебрежении малыми членами по сравнению с большими. Но для того чтобы что-то отбросить, надо произвести сравнение членов, а сравнивать можно только величины одной размерности. Сказанное формулирует первое (основное) правило пользования размерными величинами. Многие физики так боятся это правило нарушить, что, начиная решать задачу, сразу обезразмеривают входящие в нее величины.

Вернемся к движению частицы с постоянным ускорением. Давайте время будем измерять в единицах $2v_0/a$ (т. е. введем вместо времени t «безразмерное время» $\tau=at/2v_0$), а пройденный путь — в единицах $2v_0^2/a$ (т. е. введем «безразмерную длину» $\sigma=\frac{a}{2v_0^2}s$). Тогда формула (1) предельно упростится:

$$\sigma=\tau(1+\tau). \quad (2)$$

Переход от формулы (1) к формуле (2) и называется обезразмериванием. Преимущество такого подхода очевидно: изучив зависимость σ от τ, мы узнаем, как движется частица с любым постоянным ускорением, какую бы начальную скорость она ни имела.

Надо признаться: в сложных случаях не всегда рекомендуют обезразмеривать формулы, так как, проверяя размерность *до* и *после* вычисления, легко найти ошибку или убедиться, что вычисление, по-видимому, проделано правильно.

Для того чтобы сформулировать еще одно правило, которое необходимо учитывать при упрощениях, основанных на существовании в формуле (в уравнении) малой величины, чуть усложним формулу (1), считая, что в момент времени $t=0$ тело находилось в точке с координатой s_0:

$$s(t)=s_0+v_0t+at^2/2. \qquad (1')$$

Теперь расстояние будем измерять в единицах s_0, а время — в единицах s_0/v_0. Тогда

$$\sigma=1+\tau+\varepsilon\tau^2, \qquad (2')$$

где $\varepsilon=as_0/2v_0^2$ — безразмерная величина.

Прежде всего обратим внимание на то, что, избери мы прежние единицы для времени и расстояния, мы получили бы другое уравнение —

$$\sigma=\sigma_0+\tau(1+\tau),$$

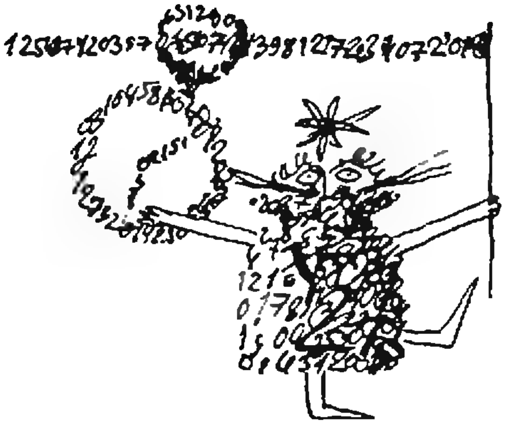
с другой безразмерной величиной $\sigma_0=as_0/2v_0^2$, входящей в формулу. Уже этот факт достоин подчеркивания: как правило, есть разные способы обезразмеривания, и нужно выбирать тот, который удобнее. Итак, пусть безразмерная величина ε в уравнении (2′) очень мала ($\varepsilon \ll 1$); ну, скажем, $\varepsilon \approx 10^{-3}$ или и того меньше. На минуточку представьте себе, что ε стоит множителем не перед τ^2, а перед какой-нибудь сложной функцией «безразмерного времени» τ. Сколь упростилась бы формула, если бы, воспользовавшись тем, что величина ε мала, мы отбросили слагаемое, содержащее ε. Но мы понимаем (вернувшись от (2′) к (2)), что это означало бы полностью пренебречь ускорением, или, в более общих терминах, пренебречь специфическими чертами изучаемого движения.*) Именно этого делать нельзя! Выливать воду из ванночки надо осторожно — можно выплеснуть купающегося в ней ребеночка.

До сих пор мы имели дело с известным законом движения и манипулировали входящими в формулу известными величинами. Теперь подумаем о значительно более сложной проблеме. Давайте мысленно перенесемся в доквантовую эру. Опыты Резерфорда показали: во-первых, атом — сложная система, масса атома сосредоточена в его положительно заряженном ядре, причем масса ядра M в тысячи раз превышает массу отрицательно заряженного электрона m (электрон уже открыт, и заряд его измерен, он равен $e=-4{,}8\cdot 10^{-10}$ ед. заряда СГСЕ$=-1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл), во-вторых, внутри атома (на расстояниях $\sim 1\,\text{Å}=10^{-8}$ см) действует закон Кулона.

Итак, мы знаем, что внутри атома, состоящего из тяжелого ядра — протона и легкого электрона (для простоты ограничимся атомом водорода), действует закон Кулона. Кроме того, известно (было известно и в доквантовую эру!), что все атомы водорода одинаковы, т. е. имеют одинаковые размеры ($\sim 10^{-8}$ см). Обозначим размер атома водорода через a_0. И постараемся понять: почему $a_0 \sim 10^{-8}$ см? Для этого выразим a_0 через характеристики составных частей атома — заряд e и массы электрона m и протона M. Массу протона, по-видимому, можно исключить, считая, что протон покоится, а электрон движется вокруг него (в действительности обе частицы движутся вокруг общего центра тяжести, но поправки, связанные с этим, весьма малы). Остаются величины m и e. Но легко проверить (про-

---

*) Не говорю уже о формальной неправильности пренебрежения слагаемым $\varepsilon\tau^2$ при больших значениях τ. Думаю, это совершенно понятно. И все же: $\varepsilon\tau^2$ становится порядка единицы или больше ее только при $\tau \gtrsim 1/\sqrt{\varepsilon}$. Это время стремится к бесконечности, когда $\varepsilon \to 0$. Представим себе, что мы изучаем некий процесс, который длится небольшое конечное время, а выяснилось, что слагаемое $\varepsilon\tau^2$ достигает значения единицы тогда, когда наш процесс уже давно закончился. Конечно, в этом случае без зазрения совести это слагаемое можно опустить.



верьте!), что из них нельзя «построить» комбинацию размерности длины.

Вывод таков: классическая физика не может установить «природу» размеров атома. К этому, в настоящее время хорошо известному, выводу можно прийти и другими путями. И известен «выход из положения». Его обеспечила квантовая, или атомная, механика. Не входит в нашу задачу рассказывать о квантовой механике в этой статье. Напомним только, что квантовая механика ввела в физику новую мировую постоянную — постоянную Планка $\hbar$, равную $\sim 10^{-27}$ г · см^2/с, и вернемся к атому водорода. В нашем распоряжении теперь три величины: m, e и $\hbar$, а из них легко построить величину размерности длины:

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2} \approx 0{,}4 \cdot 10^{-8} \text{ см}. \qquad (3)$$

Мы без оговорок приравняли выведенную комбинацию размеру a_0, так как с хорошей точностью она действительно равна размеру атома водорода.

Теперь несколько серьезнее задумаемся о логике вывода формулы (3). Не решая задачи, не задумываясь над тем, какими уравнениями описывается движение электрона в атоме, только зная, какие величины (a_0, e, $\hbar$, m) должны входить в неизвестное уравнение, мы решаемся сделать вывод, зафиксированный формулой (3). Какие у нас для этого основания?

Ясно, что уравнение, которое нам придется решать для определения размера атома, будет содержать в виде неизвестной величины (x) безразмерную комбинацию*), т. е. $x = a_0 me^2/\hbar^2$, а величина x должна быть найдена путем решения какого-то уравнения, скажем $f(x) = 0$. Но откуда у нас уверенность, что корень этого уравнения порядка единицы? Ведь легко себе представить, что x_0 — корень уравнения $f(x_0) = 0$ — какое-нибудь огромное или, наоборот, очень маленькое число. А тогда $a_0 = x_0\hbar^2/me^2$ либо значительно больше, либо значительно меньше истинных размеров атома; т. е., попросту говоря, ничего о размере атома мы сказать не можем. Здесь нас выручают интуиция, привычка, опыт. В большинстве случаев искомый корень уравнения действительно оказывается порядка единицы, и тогда наши соображения, основанные на анализе размерности, подтверждаются точным расчетом.

Но бывает и иначе.

В моей практике встретился такой случай. С моим учителем И. М. Лифшицем мы теоретически исследовали свойства вещества, в котором происходят деления радиоактивных ядер (свойства тепловыделяющих элементов реактора). Это непростая задача — выяснить, как влияют на свойства тела происходящие в нем (в случайных местах, в случайные моменты времени!) радиоактивные распады. Но оказалось, что, зная энергию, которую несут осколки ядер, можно воспользоваться соображениями размерности и оценить (прикинуть) результат сравнительно просто. Интуиция подсказала, что результат следует проверить точным расчетом. Оказалось, точное значение отличается от оценки (прикидки) множителем $(2\pi)^{-5} \approx 10^{-4}$(!). Я думаю, что если бы точный расчет был более сложен, чем это было в действительности, и нам пришлось бы ограничиться оценками, то мы в конце концов нашли бы (и без расчета) множитель $(2\pi)^{-5}$ — ведь его появление отнюдь не случайность ...

---

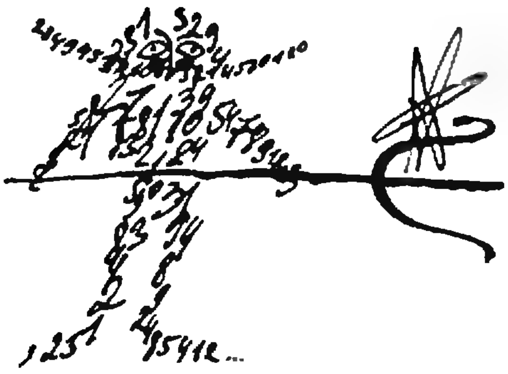
*) Сколько-нибудь сложная функция, аргумент которой — размерная величина,— вообще бессмысленная вещь. Ведь, как правило, функция задается рядом. Например, $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$ А складывать можно только величины одной размерности.

А вот другой — противоположный — пример. И. М. Лифшиц и А. В. Погорелов (вы знаете А. В. Погорелова как автора учебника и книг по геометрии) исследовали закономерности деления тяжелых ядер. Аналогия с каплями обычной жидкости и соображения размерности помогли сравнительно просто решить задачу и получить ответ с точностью до безразмерного множителя. Авторам хотелось думать, что неизвестный безразмерный множитель близок к единице (насколько я помню, И. М. Лифшиц был в этом уверен). А. В. Погорелов сконструировал специальный прибор, позволяющий с помощью «обычной» жидкости измерить ту величину, которую оценили теоретически. Оказалось, что искомый множитель равен 1,1 (!).

Что следует из этих двух примеров? Только то, что надо проявлять осторожность при оценках, основанных на соображениях размерности. Проявлять осторожность, но ни в коем случае не отказываться от методов, основанных на этих соображениях.

Когда речь идет об области физики, занимающейся такими явлениями, для понимания которых достаточно использовать известные законы природы (т. е. они описываются с необходимой точностью известными уравнениями), методы размерности служат наводящими соображениями, подспорьем интуиции. С бо́льшими или меньшими трудностями можно произвести соответствующий расчет и получить точный ответ. Соображения размерности приобретают особую роль, когда физик выходит в непознанную область, когда нет строгих уравнений, на которые можно опереться, и можно только прикидывать, оценивать и угадывать. Эта деятельность физиков-теоретиков требует особого чутья, основанного на глубоком знании всей структуры физики, понимании того, что можно подвергать сомнению (пересмотру), а что незыблемо, отказ от чего разрушает (буквально) все здание физики. Наука значительно более консервативна, чем кажется тем, кто смотрит на нее со стороны, восхищается ее успехами, кому кажется, что наука все может, что ей все доступно. Наука описывает реально существующий Мир, управляемый реально существующими законами. Эти законы наука постепенно, в мучительных поисках постигает. Построение логически непротиворечивой картины Мира — столь сложная задача, что надо с трепетной осторожностью относиться к каждой детали этой картины, непрестанно задавая себе вопрос, не нарушу ли я что-то во всей картине, если предположу нечто новое, необходимое (как мне кажется) для объяснения какого-то факта?..

Я понимаю, что последний абзац выглядит совершенно абстрактным. И все же не хочу приводить примеры — главным образом потому, что не чувствую себя специалистом в той физике, из которой эти примеры следовало бы черпать: из физики элементарных частиц, из космологии. Хочу только обратить внимание на следующее. Одну и ту же размерность имеют совершенно различные величины: расстояние между Москвой и Нью-Йорком и размер атома водорода, время обращения Нептуна вокруг Солнца и период колебаний атомов в молекуле водорода, масса протона и масса электрона и т. д., и т. п.— примеры можно множить до бесконечности. Разделив размерную величину на величину той же размерности, мы получим безразмерное число. Можно задать вопрос: почему получилось именно это число, а не какое-нибудь другое? Ясно, что так как число отношений бесконечно, то и число вопросов тоже бесконечно. Надо ли все их задавать? И нужно ли на них отвечать? — Ответ дает только опыт. Опыт отдельного человека и опыт всей физики. В ходе развития науки перечень вопросов изменяется вместе с перечнем ответов на них, причем,



естественно, вопросы несколько опережают ответы, правда, опережают не слишком значительно. Дело в том, что правильно сформулированный вопрос, как правило, несет в себе ответ. Иногда вопрос выглядит совершенно невинным, а ответ на него очень сложен. Чего уж проще: почему отношение массы протона M_p к массе электрона m_e равно 1838? А ответ на этот вопрос, насколько я знаю, не известен. Или другое знаменитое число — так называемая постоянная тонкой структуры

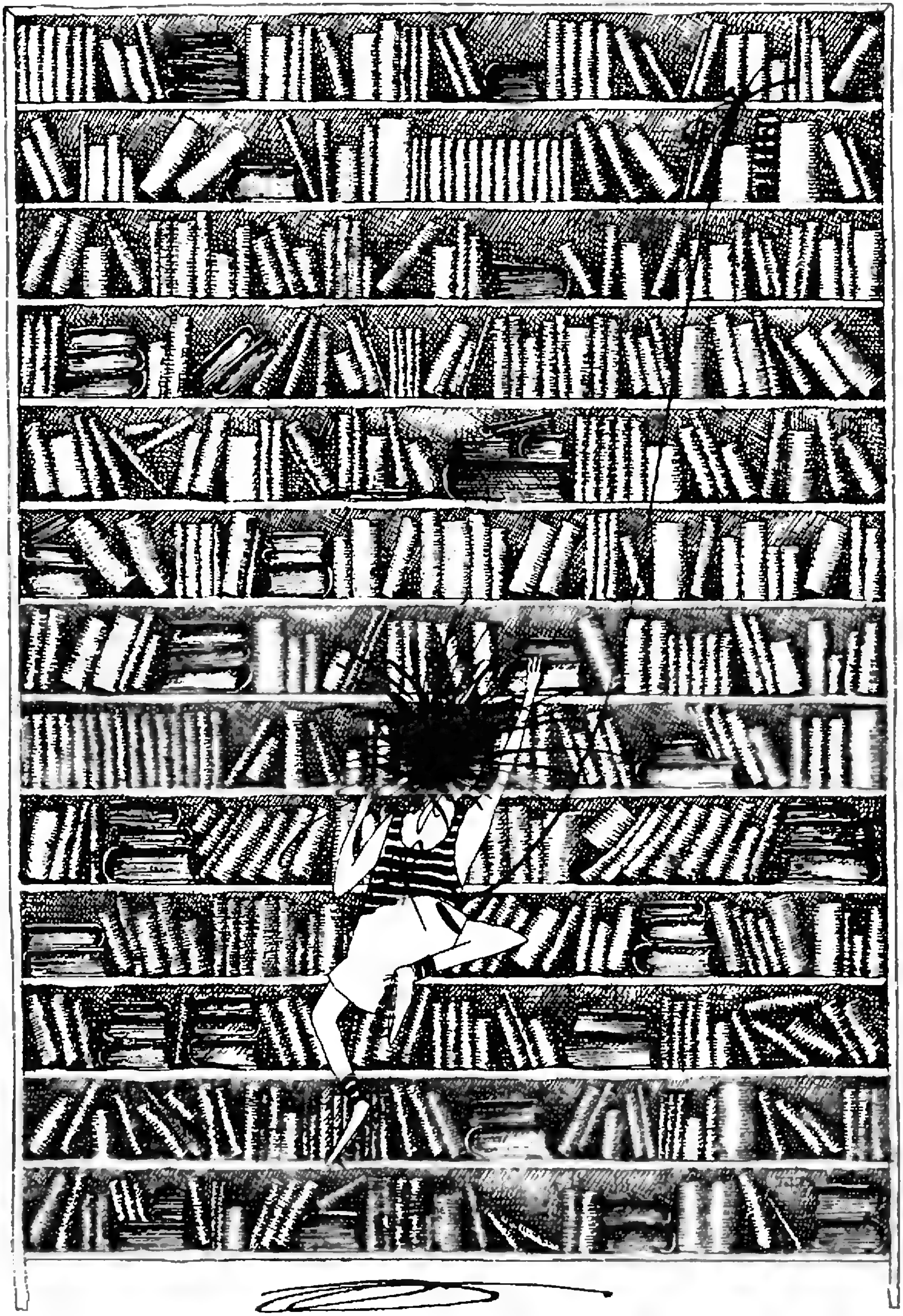
$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} = \frac{1}{137}.$$

Постоянную тонкой структуры так и называют — одна сто тридцать седьмая! Почему 1/137 — современная наука даже не формулирует. Но использует α многократно. Относительная малость заряда ($e^2 = \hbar c/137 < \hbar c$) приводит буквально к бесконечному числу следствий.

137, а тем более 1838 — числа, значительно большие единицы. Могут ли они быть следствием теории, корнем какого-либо уравнения? А ведь можно указать пример, который приводит к буквально астрономическому числу. Отношение силы электростатического отталкивания друг от друга двух протонов к силе гравитационного притяжения между ними — $e^2/(M_p^2 G)$,— конечно, безразмерное число. Оно равно 10^{36} (!). Решая такое уравнение, можно надеяться получить такое фантастическое число? Сейчас делается попытка построить суперфизику, объединяющую все взаимодействия между частицами. По-видимому, она — эта будущая наука — должна «выдать» в виде ответа это грандиозное число. Возможно, правда, в этом не будет ничего удивительного: просто (?!) искомой величиной будет не само отношение, а, скажем, $\ln\ln(e^2/(M_p^2 G)) \approx$ $\approx 4{,}4$. Но это уже не соображение, а фантазирование... А я хотел бы предостеречь читателя от различных неоправданных сравнений величин одной размерности и обнаружения каких-то мистических соотношений. Попытка ответить на вопрос, чему должно быть равно то или другое отношение двух размерных физических величин, должна основываться на глубоком знании предмета — озарение здесь не поможет, поверьте мне!

* * *

Эти рассуждения трудно закончить. В любой области своей деятельности физик (и теоретик, и экспериментатор) сталкивается с числами. Одними он должен воспользоваться, другие должен определить. Встречаясь с числами всегда и везде, он привыкает к ним и часто пользуется ими, не задумываясь, откуда они возникли, почему они такие, а не другие. Это означает, что он — физик — хорошо знает свою область, что у него есть интуиция, что он умеет почти бессознательно выбрать из физики (из огромного запаса накопленного в ней знания) именно то, что нужно для понимания изучаемого явления. Но если его спросить, почему он отбросил все остальное, он задумается и, *аргументируя* числами, покажет, что отброшенное не должно играть существенной роли. Иногда он ошибается. И если ошибка не тривиальна, то понимание ошибки, ликвидация противоречия может привести к открытию... Об этом стоит помечтать...



НУЖНА ЛИ АЛЬПИНИСТУ ФИЗИКА?

Кандидат технических наук
А. Б. ГЕЛЛЕР

Люди, покоряющие горные вершины, обычно романтики. А сами горы с их белыми вершинами настолько величественны, что любые слова о физических объяснениях тех или иных явлений, возникающих в горах, о расчетах и обоснованиях каких-то конкретных ситуаций иногда кажутся смешными. Чем-то вроде формулы для стихов или алгоритма для создания живописного полотна.

И все-таки мы попытаемся решить одну такую задачу и на ее примере показать, как физика помогает альпинистам. Пребывая еще на равнине, сидя за письменным столом, можно решать вопросы безопасности в горах. Итак, мы собираемся в горы. Разумеется, мы должны хорошо подобрать и подогнать необходимое снаряжение, запастись скальными и ледовыми крючьями, хорошими веревками...

Альпинистская веревка, как и большинство других предметов снаряжения в современном спорте,— сложное инженерное «сооружение». Мы расскажем в этой статье, почему альпинистам нужны специальные веревки и как они «работают» в горах. Но сначала обсудим типичную и, увы, нередко возникающую при восхождениях или на тренировках ситуацию.

На рисунке 1 схематически показано движение связки-двойки. Первый альпинист, назовем его Алексеем, поднялся по скале на высоту $L=5$ м выше второго, которого зовут Виктором. Алексей забил в точке A крюк, который является точкой страховки, а затем поднялся еще на $l_0=2{,}5$ м. Внезапно Алексей сорвался. Виктор же очень прочно закрепил свой конец веревки, и Алексей повис на ней.

Вопрос, который нас интересует: какими свойствами должна обладать веревка, чтобы Алексей остался невредим?

Конечно, первым делом (пока мы еще дома) стоит заглянуть в какой-нибудь справочник, где приводятся характеристики спортивного снаряжения. Так мы узнаем, что для веревки диаметром 10 мм прочность, т. е. сила, которую нужно приложить, чтобы порвать ее, равна $P=1{,}5\cdot10^4$ Н. Известно также, что максимальное усилие, которое выдерживает человеческое тело,— $F_{\max}=5\cdot10^3$ Н. Нам понадобится еще масса альпиниста с рюкзаком M. Будем считать, что $M=100$ кг, это вполне разумная оценка.

Казалось бы, для безопасности Алексея достаточно, чтобы веревка была прочной. Тогда при падении он останется цел, так как веревка не порвется. Но вспомним, что человек, упавший с высоты 10 м (высота третьего этажа), чаще всего разбивается, если падает на твердую землю. Если же он упадет на стог сена или в глубокий сугроб, то скорее всего отделается просто испугом. Срыв альпиниста, повисшего на нерастяжимой веревке, тоже приведет к удару в конце его полета, даже если он и не долетит до основания скалы. Поэтому напрашивается вывод: скорость, которую приобрел человек при падении, нужно погасить

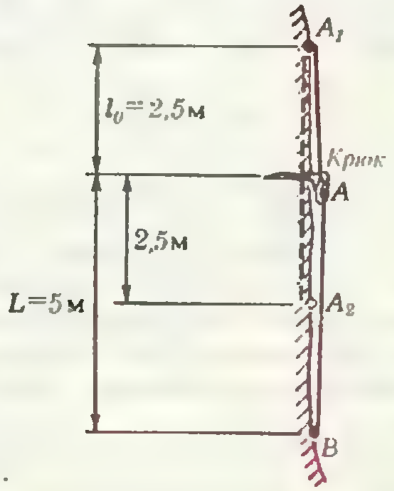


Рис. 1.

плавно. Вот мы и попробуем понять, как это сделать.

Можно считать, что при срыве скорость Алексея в точке A_1 равна нулю и его падение почти до точки A_2 есть просто свободное падение (веревка не натянута!). В точке A_2 его скорость равна $v_0=gt$, где t — время падения. За это время Алексей пролетит расстояние $gt^2/2=2l_0$; так что $t=\sqrt{4l_0/g}$, и $v_0=g\sqrt{4l_0/g}=2\sqrt{gl_0}$.

Скорость v_0 гасится более или менее плавно где-то вблизи точки A_2 за счет растяжения веревки. В тот момент, когда веревка натянулась и начала растягиваться, скорость Алексея $v=v_0$, а когда удлинение веревки стало максимальным и падение прекратилось, $v=v_к=0$. Если время, за которое будет «погашена» скорость, обозначить Δt, то средняя сила, действующая на альпиниста за это время,— $F_{ср}=\frac{M(v_0-v_к)}{\Delta t}$. Величина $\frac{v_0-v_к}{\Delta t}=\frac{v_0}{\Delta t}=a$ имеет смысл среднего ускорения, с которым происходит «торможение». Очевидно, что чем больше начальная скорость и чем меньше время торможения, тем больше сила $F_{ср}$. Но тогда из того, что мы сказали, следует, что веревка, связывающая Алексея и Виктора, должна быть такой, чтобы время Δt до остановки Алексея было достаточно большим. Что значит — достаточно большое время торможения? А это значит, что во всяком случае средняя сила $F_{ср}$, действующая на Алексея со стороны веревки, должна быть меньше, чем то максимальное усилие, которое может выдержать человеческое тело — $F_{max}=5\cdot10^3$ Н. Итак, должно выполняться неравенство

$$F_{max}\geqslant F_{ср}=\frac{Mv_0}{\Delta t},$$

отсюда $\Delta t\geqslant Mv_0/F_{max}$ (Заметим, кстати, что $a=\frac{v_0}{\Delta t}\leqslant\frac{F_{max}}{M}=\frac{5\cdot10^3 Н}{10^2 кг}=50$ м/с^2, а это значит, что a может быть и больше $g\approx10$ м/с^2. Для нашего конкретного примера легко получить, что $\Delta t\geqslant0{,}2$ с.)

Что же может обеспечить необходимое время Δt, а следовательно, и безопасность альпинистов? Только способность веревки хорошо растягиваться. Для упрощения расчетов будем считать, что такое торможение при растяжении веревки есть процесс равнозамедленного движения. Тогда путь, пройденный Алексеем до его задержания (остановки), равен удлинению веревки $\Delta l=a(\Delta t)^2/2$. Подставив сюда $a=v_0/\Delta t$, получим $\Delta t=2\Delta l/v_0$. Комбинируя же эту последнюю формулу с написанным выше неравенством для Δt, придем к неравенству

$$\Delta l\geqslant\frac{Mv_0^2}{2F_{max}}=\frac{M\cdot4gl_0}{2F_{max}}=\frac{2Mgl_0}{F_{max}}.$$

Такова оценка для расстояния, на котором скорость должна быть погашена, чтобы не причинить вреда альпинисту. (При $l_0=2{,}5$ м и $M=100$ кг $\Delta l\geqslant1$ м.) Разделим теперь обе части неравенства для Δl на длину веревки до растяжения $L+l_0$. Отношение $\varepsilon=\Delta l/(L+l_0)$ называется относительной деформацией или просто деформацией. Если в правую часть неравенства

$$\varepsilon\geqslant\frac{2Mgl_0}{(L+l_0)F_{max}}$$

подставить числовые значения для нашей конкретной ситуации, получится, что $\varepsilon\geqslant0{,}13$.

Можно утверждать теперь, что Алексей при срыве не пострадает, если деформация альпинистской веревки больше 13 %. На самом деле хорошая современная альпинистская веревка имеет деформацию при нагрузках порядка 10^4 Н около 40—45 %.

Казалось бы, все теперь ясно. Мы возьмем с собой в горы веревку с необходимыми для безопасности характеристиками, а Виктор может, не задумываясь, жестко закреплять ее.

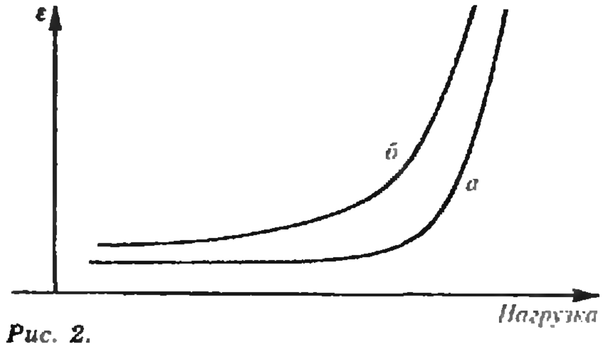


Рис. 2.

Но теперь представьте себя в роли альпиниста, которому необходимо подняться по такой веревке. Это часто приходится делать в альпинистской практике. Идущий первым прокладывает путь по сложному рельефу, используя весь арсенал альпинистской техники. Затем он закрепляет веревку, а все остальные участники восхождения поднимаются уже по ней. Естественно, что веревка под нагрузкой, которая создается альпинистом, растягивается. Чем дальше альпинист находится от точки закрепления, тем больше будет абсолютное удлинение веревки. Ощущения у лезущего по такой веревке будут примерно такие же, как у альпиниста, «подвешенного на резиночке». Это, поверьте, не очень приятно, особенно когда вокруг острые камни! Хорошо бы иметь веревку, у которой зависимость деформации от нагрузки изображается кривой *а* на рисунке 2. Тогда при малых нагрузках веревка почти не растягивалась бы. Это позволяло бы подниматься по закрепленной веревке, как по канату в спортивном зале. При больших нагрузках, наоборот, нам «выгоден» быстрый рост деформации. В самом деле, если область нагрузок, при которых ε быстро растет, примерно та же, что и нагрузки после срыва альпиниста, то веревка «работает» как резина, «принимая рывок на себя».

В природе не существует материалов, которые обладали бы такими характеристиками. Однако сочетания различных материалов позволяют сконструировать веревку, которая обеспечит альпинистам и необходимую безопасность, и удобства при подъеме. Кривая *б* на рисунке 2 — схематическая характеристика реальной веревки.

Разрез такой альпинистской веревки изображен на рисунке 3. Наружная оплетка ее изготовлена специальным образом. Достаточно жесткие и прочные капроновые нити (иногда их заменяют лавсановыми) располагаются под углом к оси веревки. Под нагрузкой эти нити меняют свое направление и постепенно располагаются почти параллельно оси. Внутренняя часть веревки представляет собой сочетание (пучок) нескольких таких же оплеток, но меньшего диаметра. Нити внутри каждой такой оплетки очень прочные, они почти не изменяют свою длину вплоть до разрушения. Количество нитей подбирают так, чтобы они выдерживали нагрузку примерно $3 \cdot 10^3$ Н. При срыве альпиниста, как только нагрузка на веревку превысит эту величину, внутренние жесткие и прочные нити рвутся, а вся веревка в целом растягивается. Разрываясь, жесткие нити оказываются первыми «гасителями» кинетической энергии падающего тела. Существенная часть этой энергии переходит в работу, затраченную на разрыв нитей. Веревкой, которой пользуются после срыва, вполне безопасно можно страховать напарника, а вот подниматься по ней будет, как мы теперь уже понимаем, неудобно.

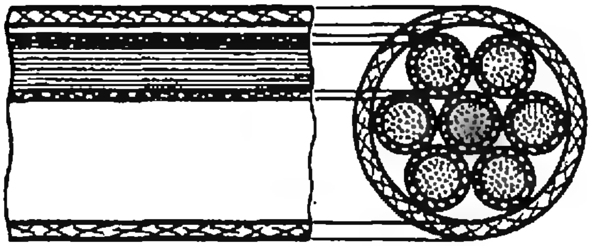


Рис. 3.

Главный вывод, к которому мы пришли, таков: идеальная альпинистская веревка должна быть не только очень прочной, но и хорошо деформироваться. К сожалению, пока промышленность выпускает мало такой веревки. И многим спортсменам-альпинистам приходится пользоваться обычной капроновой веревкой (лет тридцать назад, когда таких веревок тоже было мало, альпинисты пользовались прочными сизалевыми канатами). Прочность у капроновой веревки вполне достаточная, а вот деформация маловата. Она не превышает 15—20% при нагрузках порядка 10^4 Н. Что же это получается? Неужели альпинисты сознательно подвергают свою жизнь опасности, используя непригодное снаряжение?

Ответить на этот вопрос нам опять помогут опыт и физика. Но сначала скажем еще несколько слов о превращениях энергии при подъеме и падении Алексея.

Когда Алексей поднимался выше страхующего его Виктора, он с каждым шагом увеличивал свою потенциальную энергию относительно точки страховки (или относительно Виктора). После срыва эта потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию свободно падающего альпиниста. После падения на всю длину свободной веревки Алексей начинает ее растягивать. Его кинетическая энергия переходит теперь уже в энергию деформации веревки. Ситуация могла бы быть похожей на движение альпиниста на растягивающейся пружине или резинке, если бы веревка была идеально упругой. Будь это так, альпинист после остановки при падении начал бы двигаться снова вверх. Однако такой колебательный процесс на самом деле не реализуется. Под нагрузкой отдельные волокна, из которых сделана веревка, взаимодействуют между собой — трутся друг о друга. Кроме того, и при растяжении волокон выделяется тепло. Колебания, о которых мы могли бы подумать, реально затухают, не успев начаться. Кинетическая энергия упавшего Алексея переходит в тепло, выделяющееся в веревке. Ну а если упругие свойства веревки таковы, что она не может обеспечить плавное замедление упавшего спортсмена? Но тогда такое торможение может осуществить партнер по связке, страхующий своего товарища! Для этого Виктору достаточно «протравить», выпустить под натяжением какую-то часть веревки. Надежность правильной страховки, оказывается, не в том, чтобы как можно прочнее, жестче закрепить веревку, если товарищ сорвался, а в том, чтобы успеть правильно и вовремя регулировать ее натяжение. Как мы уже поняли, в случае хорошей альпинистской веревки происходит переход кинетической энергии падения в тепловую и упругую энергию веревки. Для «плохой» веревки (прочной, но нерастяжимой) та же кинетическая энергия в значительной степени переходит в тепло при трении веревки о руки страхующего. Тепло это может быть довольно большим, поэтому одно из основных правил в альпинизме — «Страхуй в рукавицах!»

Достаточно простые рассуждения показывают, что это правило придумано совсем не зря. Так как мы хотим получить лишь оценку величины выделяющегося тепла, примем условно, что вся энергия падения альпиниста переходит за счет трения веревки о руки страхующего в тепло. Кинетическая энергия падающего альпиниста к моменту, когда начинает «работать» веревка или страхующий его товарищ, равна

$$E_к = Mv_0^2/2 = 2Mgl_0.$$

Подставляя $l_0 = 2{,}5$ м, $M = 100$ кг, $g \approx 10$ м/с^2, получим $E_к \approx 5 \cdot 10^3$ Дж. Вот эта-то энергия и должна перейти в тепло Q. Много это или мало? Давайте посмотрим, какое количество воды можно было бы вскипятить, подведя к нему $Q = 5 \cdot 10^3$ Дж. Тепло, необходимое для нагрева воды от $t_1 = 20$ °C до $t_2 = 100$ °C, равно $Q = cm\ (t_2 - t_1)$. Теплоемкость воды $c = 4{,}2$ Дж/(г · °C), поэтому $m = Q/(c(t_2 - t_1)) \approx 15$ г. Не так уж и мало!

Конечно, мы сделали сейчас довольно грубую оценку. Реально же нужно иметь в виду, что нагреваются не только руки страхующего, но и сама веревка. Но важнее другое. Человеческое тело сравнительно плохо проводит тепло (физик сказал бы: обладает плохой теплопроводностью). Поэтому при страховке голыми руками нагревается и «обжигается» тонкий слой ткани рук. У слова «обжигается» здесь можно было бы кавычки опустить. А вот чтобы не обжечь руки на самом деле, нужно страховать в рукавицах. Теплопроводность материала, из которого сшиты рукавицы, еще меньше, чем тела альпиниста.

Таковы физические основы страховки в горах. Знать их полезно, конечно, не только альпинистам. И теперь вы сами уже наверняка однозначно ответите на вопрос, который стоит в заголовке этой статьи. Удачных вам восхождений!

Задачник „Кванта"

[redacted]

Задачи

M1081 — M1085, Ф1093 — Ф1097

Наш журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 апреля 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1081» или «Ф1093». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M1081. Докажите, что предпоследняя цифра числа 3^n при любом натуральном $n>2$ четна.

В. И. Плачко

M1082. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что равенство

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)$$

выполнено тогда и только тогда, когда либо диагонали AC и BD перпендикулярны, либо одна из них делится точкой O пополам.

А. П. Савин

M1083. Наибольшее из неотрицательных чисел a_1, a_2, ..., a_n равно a.

а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

б) Когда в нем достигается равенство?

Л. Г. Ханин

M1084. Две окружности на плоскости пересекаются в точках A и B. Докажите, что можно выбрать такую точку C, что любая окружность с хордой AC будет пересекать данные окружности (второй раз) в точках, одинаково удаленных от C (причем $C\neq B$).

В. Протасов, ученик 10 класса (Москва)

M1085*. Несколько попарно скрещивающихся прямых, расположенных в пространстве, проектируются на горизонтальную плоскость. Их проекции изображены так, чтобы в точках пересечения было видно, какая точка расположена выше, а какая ниже. Может ли получиться проекция, изображенная на рисунке 1(*а*—*в*)?

С. Л. Табачников

Ф1093. Автомобиль массой $m=1200$ кг, тормозя при выключенной передаче, катится вниз с постоянной скоростью по наклонному участку шоссе с углом наклона α $\left(\sin\alpha=\frac{1}{14}\right)$. Каждое из четырех колес автомобиля имеет внешний радиус R и жестко скреплено с тормозным барабаном радиусом $r=\frac{5}{12}R$, к которому прижимаются с одинаковой силой N тормозные колодки A и A' (рис. 2). Найти N, если коэффициент трения скольжения между барабаном и колодками $k=0{,}4$. Проскальзывание между шинами и шоссе отсутствует.

В. И. Чивилёв

Ф1094. Узкая трубка постоянного сечения образует квадрат со стороной l, закрепленный в вертикальной

Задачник „Кванта"

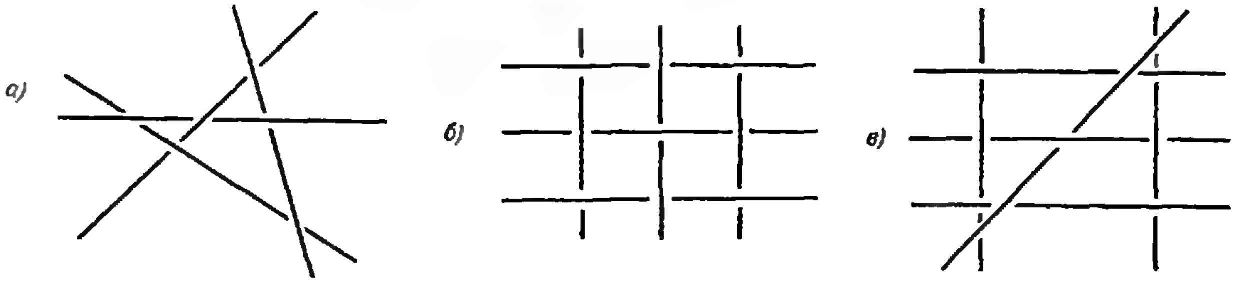


Рис. 1.

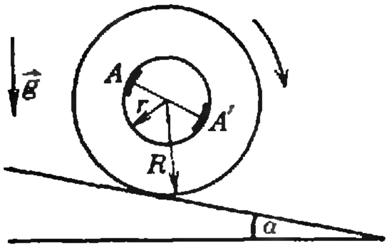


Рис. 2.

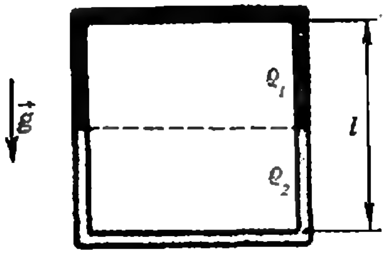


Рис. 3.

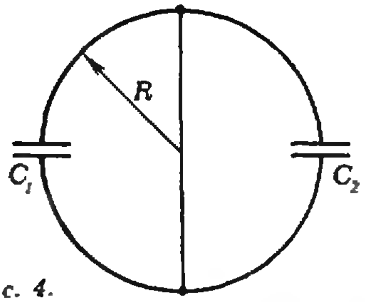


Рис. 4.

плоскости. Трубка заполнена равными объемами двух не проникающих друг в друга жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 3). Вначале более плотная жидкость заполняла верхнюю часть трубки. В некоторый момент жидкости пришли в движение. Найти их максимальную скорость. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g.

Г. В. Меледин

Ф1095. Рассеянный велосипедист не заметил, как случайно наехал на вертикальную стенку. Оценить, при какой минимальной скорости шина при ударе деформируется до металлического обода. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить числовой результат.

Г. В. Федотович

Ф1096. Проволочное кольцо радиусом R имеет проводящую перемычку, расположенную вдоль диаметра. В левую и правую полуокружности включены конденсаторы C_1 и C_2 (рис. 4). Кольцо помещено в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией $B(t)=B_0t/T$, перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и затем прекращают изменять поле. Найти заряды, установившиеся на конденсаторах.

Г. В. Федотович

Ф1097. Для уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на нее наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Какой наименьшей толщины пленку с показателем преломления $n=4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) света, содержащего излучение двух длин волн с $\lambda_1=700$ нм и $\lambda_2=420$ нм, отраженный свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?

В. И. Чивилёв

[redacted]

Problems

M1081—M1085, P1093—P1097

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones.

M1081. Prove that the next to last digit of the number 3^n for any natural $n>2$ is even.

V. I. Plachko

M1082. The diagonals of the convex quadrilateral *ABCD* intersect at the point *O*. Prove that the relation

Задачник „Кванта"

but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than April 15th, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)$$

hold if and only if either the diagonals AC and BD are perpendicular or O is the midpoint of one of them.

A. P. Savin

M1083. The largest of the non-negative numbers $a_1, a_2, \dots, a_n$ equals a.

a) Prove the inequality

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2}{n} \leqslant \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

b) When does it become an equality? *L. G. Khanin*

M1084. Two circles in the plane intersect at the points A and B. Prove that there exists a point C such that any circle with chord AC will intersect the given circles (the second time) at points equidistant from C.

V. Protasov, 10th form student (Moscow)

M1085*. Several non-intersecting and non-parallel lines in space are projected on the horizontal plane. Their projections are drawn so that we can see, at the intersection points, which of the lines is higher, which is lower. Are the projections shown on the figure 1 (*a*), *б*), *в*)) possible?

S. L. Tabachnikov

P1093. An automobile of mass $m=1200$ kg, bracking with the gearshift in neutral, rolls down with constant velocity along an inclined section of the road, whose angle of inclination is α ($\sin\alpha=1/14$). Each of the auto's four wheels is of exterior radius R and is rigidly connected to the brake drum of radius $r=5R/12$ to which the brake shoes A and A' are pressed with equal force N (figure 2). Find the normal force N if the sliding friction coefficient between the drum and the brake shoes is $k=0.4$. The tires don't slide on the road. *V. I. Chivilev*

P1094. A thin pipe of constant section has the shape of a square of side l, fixed in a vertical plane. The pipe is filled by two liquids (which don't mix) of equal volume whose densities are ϱ_1 and ϱ_2 (see figure 3). Originally the heavier liquid occupied the top of the pipe. At some moment the liquids came into motion. Find their maximum velocity. The acceleration of gravity is g. *G. V. Meledin*

P1095. An absent-minded cyclist did not notice how he rode head on into a brick wall. Estimate for what minimal velocity the tire will be deformed right up to the wheel. It is assumed that you correctly understand the phenomenon, find the relevent magnitudes and correctly estimate their numerical values, so as to obtain a numerical answer.

G. V. Fedotovich

P1096. A wire ring of radius R has a conducting connection along a diameter. Capacitors C_1 and C_2 are connected to the semicircles as shown on the figure 4. The ring is placed in a linearly increasing magnetic field of induction $B(t)=B_0t/T$ perpendicular to the ring's plane. At some moment the connection is removed and then the field stops changing. Find the charges established on the capacitors.

G. V. Fedotovich

P1097. In order to decrease the amount of light reflected by a glass surface, the latter is covered by a thin film of lesser refraction index than that of glass. What least thickness of film of refraction index $n=4/3$ will insure that light falling perpendicularly to the surface and containing light waves of wavelengths $\lambda_1=700$ nm and $\lambda_2=420$ nm will be minimally reflected for both wavelengths? *V. I. Chivilev*

Решения задач

M1061—M1064, Ф1073—Ф1077

M1061. *В стране, где больше двух городов, некоторые пары городов соединены непересекающимися дорогами. Известно, что для любых трех городов A, B, C по этой сети дорог можно проехать из A в B, не заезжая в C. Докажите, что на всех дорогах можно установить одностороннее движение так, что из каждого города можно будет проехать в любой другой, двигаясь по установленным направлениям.*

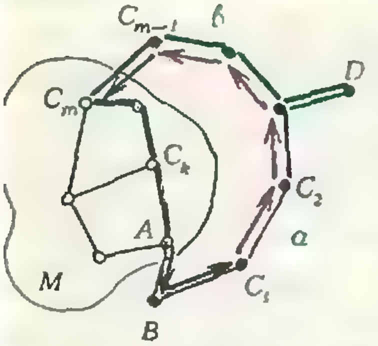
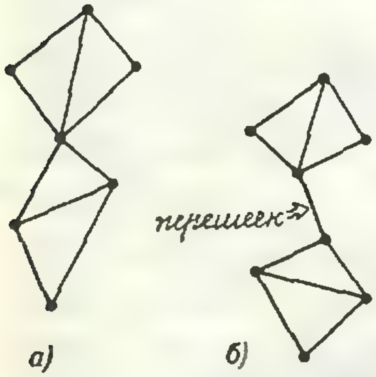


Рис. 1.



а) *б)*

Рис. 2.

Будем устанавливать направления на дорогах постепенно. Пусть это уже сделано для дорог, соединяющих города из некоторого множества M так, что требование задачи выполнено: *из любого города этого множества можно проехать в любой другой из них, следуя по выбранным направлениям.* (Для начала можно считать, что M состоит из одного города, а направления нигде не установлены.) Докажем, что если еще не все города входят в M, то можно выбрать направления еще на нескольких дорогах и увеличить M с соблюдением этого требования.

Ясно, что найдется дорога, соединяющая город A из M с городом B, не входящим в M. Построим путь $c=BC_1C_2...C_kA$ из B в A, не проходящий по дороге AB. Для этого возьмем любой город D, отличный от A и B, и рассмотрим путь a из A в D, не проходящий через B, и путь b из D в B, не проходящий через A (рис. 1). В качестве c можно взять путь, идущий сначала по a — до первого города, общего для a и b, — а потом по b. Пусть C_m — первый из городов C_1, ..., C_k, входящий в M (если таких городов нет, положим $m=k+1$, $C_m=A$). Выберем направления на дорогах AB, BC_1, C_1C_2, ..., $C_{m-1}C_m$ по порядку: от A к B, от B к C_1 и т. д., и присоединим к M города B, C_1, ..., C_{m-1}. Наше условие на нарушится, так как из любого присоединенного города можно попасть в «старое» множество M (дойдя до C_m) и в любой из них можно попасть из M (через A).

Повторяя этот процесс, мы включим в M все города. На оставшихся после этого «неотрегулированных» дорогах (если такие еще будут) направления движения установим произвольно.

Можно рассуждать несколько иначе, доказав сначала, что в условиях задачи любые два города соединены двумя путями, идущими по разным дорогам (это утверждение составляло содержание одной из задач Всесоюзной олимпиады).

Наша задача дает только достаточное условие. Оказывается, верна такая теорема: для того чтобы на дорогах можно было расставить стрелки так, чтобы, двигаясь в предписанных ими направлениях, можно было доехать из любого города в любой другой, необходимо и достаточно, чтобы исходная сеть дорог была связной и не имела перешейков (т. е. после закрытия любой дороги из каждого города можно было бы добраться до любого другого, рис. 2). Эту не очень сложную теорему доказал в 1939 г. Г. Роббинс*), известный, в частности, как соавтор Р. Куранта по замечательной книге «Что такое математика».

В. Е. Колосов, Н. Б. Васильев

---

*) См. теорему 4.4.1 в книге А. А. Зыкова «Введение в теорию графов».— М.: Наука, 1987.

M1062. *а) На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты точки E и D. Прямые BD и CE пересекаются в точке M, AM и BC — в точке P, AM и DE — в точке N. Докажите, что*

$$\frac{PN}{NA}=2\cdot\frac{PM}{MA}.$$

б) На ребрах SA, SB и SC тетраэдра SABC взяты точки D, E и F. Плоскости ABF, BCD и CAE пересекаются в точке M, прямая SM пересекает плоскости ABC и DEF в точках P и N. Докажите, что

$$\frac{PN}{NS}=3\cdot\frac{PM}{MS}.$$

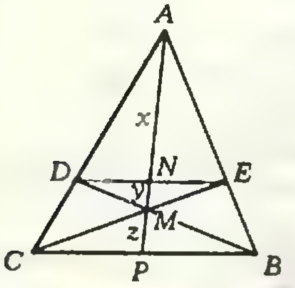


Рис. 1.

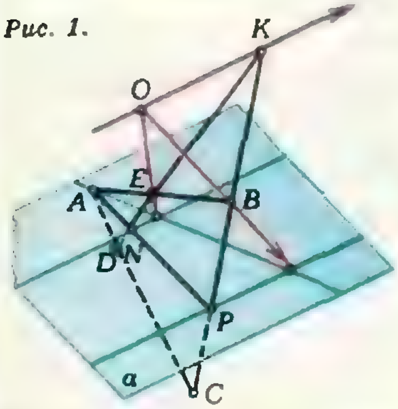


Рис. 2.

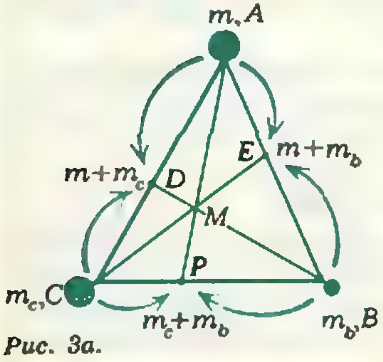


Рис. 3а.

а) Пусть сначала $DE \| BC$ (рис. 1). Положим $AN=x$, $NM=y$, $MP=z$, тогда

$$\frac{PN}{NA}:\frac{PM}{MA}=\frac{z+y}{x}\cdot\frac{x+y}{z}=$$

$$=\frac{xz+y(x+y+z)}{xz}=1+\frac{y}{z}\cdot\frac{x+y+z}{x}=2, \qquad (*)$$

поскольку из гомотетичности треугольников MBC и MDE, ABC и ADE следует, что

$$\frac{y}{z}=\frac{MN}{MP}=\frac{DE}{BC}=\frac{AN}{AP}=\frac{x}{x+y+z}.$$

Общий случай сводится к рассмотренному частному с помощью центральной проекции. Предположим, что прямые DE и BC пересекаются в точке K. Проведем через AP произвольную плоскость α, не совпадающую с ABC, и выберем точку O так, чтобы прямая OK была параллельна α (рис. 2). При центральной проекции из центра O на плоскость α все точки прямой AP проектируются сами на себя (и отношения PN/NA и PM/MA сохраняются), а прямые DE и BC, очевидно, проектируются в параллельные — как говорят, точка K «уходит на бесконечность». В результате из произвольной конфигурации, удовлетворяющей условию задачи, получается рисунок 1. Эта задача относится к проективной геометрии, в которой изучаются свойства фигур, сохраняющиеся при центральных проекциях. Пример понятия из этой области геометрии — *двойное отношение* произвольных четырех точек P, A, N, M одной прямой, равное, по определению, величине в левой части (*). Попробуйте доказать, что оно действительно не меняется при центральных проекциях.

Можно решать задачу и с помощью центра масс (о применении этого понятия в геометрии см. статью В. Г. Болтянского и М. Б. Балка «Центр тяжести облегчает решение» в «*Кванте*» *№ 4 за* 1984 г.). Поместим в вершину A некоторую массу m, а в вершины B и C — такие массы m_b и m_c, чтобы центр всех трех масс попал в точку M. Для этого надо взять $m_b=(AE/BE)m$, $m_c=(AD/BD)m$. (Действительно, центр масс m и m_b — это точка E, поэтому общий центр лежит на отрезке CE; аналогично показывается, что он лежит и на BD.) Центр масс m_b и m_c лежит на пересечении AM и BC, т. е. в точке P, причем $PM/MA=m(m_b+m_c)$ (рис. 3, *а*). Теперь добавим в точку A еще одну массу m. Общий центр масс сместится из M в некоторую точку отрезка MA. В то же время, группируя одну массу m с m_c, а другую — с m_b (рис. 3, *б*), находим, что он должен лежать на DE, т. е. в точке N. Наконец, группируя m_c и m_b, получаем, что $PN/NA=2m(m_b+m_c)=2PM/MA$.

б) Эта задача тоже проективная, и ее можно было бы решать аналогично предыдущей — свести к случаю $DEF \| ABC$. Но обосновать такое решение в рамках элементарной геометрии трудно. Приведем векторное решение (рис. 4).

Для любой точки X обозначим вектор $\overline{SX}$ через $\overline{X}$.

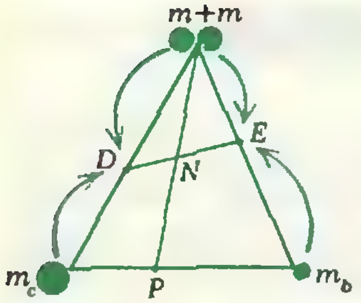


Рис. 3б.

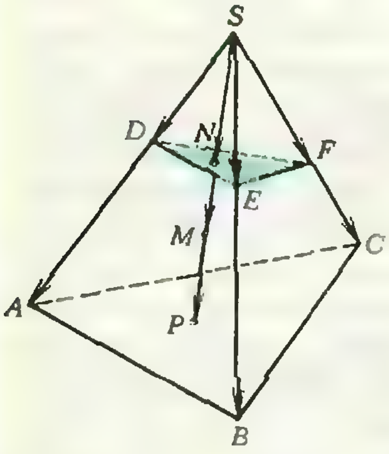


Рис. 4.

Пусть $\bar{P}=m\bar{M}=n\bar{N}$, $\bar{A}=\alpha\bar{D}$, $\bar{B}=\beta\bar{E}$, $\bar{C}=\gamma\bar{F}$ (т. е. $m=SP:SM$, $n=SP:SN$ и т. д.). Разложим вектор $\bar{P}$ по некомпланарным векторам $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$:

$$\bar{P}=x\bar{A}+y\bar{B}+z\bar{C}. \tag{1}$$

Тогда

$$x+y+z=1. \tag{2}$$

Действительно, вектор $\overline{AP}$ лежит в плоскости ABC, поэтому при некоторых y_1 и z_1 $\overline{AP}=y_1\overline{AB}+z_1\overline{AC}=y_1(\bar{B}-\bar{A})+z_1(\bar{C}-\bar{A})$, значит, $\bar{P}=\bar{A}+\overline{AP}=(1-y_1-z_1)\times\bar{A}+y_1\bar{B}+z_1\bar{C}$. А так как коэффициенты в (1) определяются однозначно, $y_1=y$, $z_1=z$, $x=1-y-z$. Таким образом, равенство (2) — это необходимое (а также и достаточное) условие того, что точка P лежит в плоскости ABC.

Запишем это условие для точки N в плоскости DEF и для точки M, которая лежит в трех плоскостях — ABF, BCD и CAE. Из разложения $n\bar{N}=\bar{P}=x\alpha\bar{D}+y\beta\bar{E}+z\gamma\bar{F}$ получаем, что $x\alpha/n+y\beta/n+z\gamma/n=1$, т. е.

$$x\alpha+y\beta+z\gamma=n; \tag{3}$$

из разложения $m\bar{M}=\bar{P}=x\bar{A}+y\bar{B}+z\gamma\bar{F}$ — что

$$x+y+z\gamma=m.$$

И, аналогично, — еще два равенства:

$$\alpha x+y+z=m,$$

$$x+\beta y+z=m.$$

Складывая три последних равенства и учитывая (2) и (3), находим, что

$$n+2=3m.$$

Остается выразить отношения отрезков в условии задачи через m и n:

$$\frac{PN}{NS}:\frac{PM}{MS}=\frac{PS-NS}{NS}:\frac{PS-MS}{MS}=\frac{n-1}{m-1}=\frac{3m-3}{m-1}=3.$$

Задачу б) можно решать и с помощью центра масс, как задачу а).

В. Н. Дубровский

М1063. *Сколько существует различных целых чисел, которые можно представить в виде разности $a-\bar{a}$, где a — n-значное натуральное число ($10^{n-1}\leqslant a<10^n$), $\bar{a}$ — число, полученное при записи цифр a в обратном порядке? Например, если $a=1917$, то $a-\bar{a}=1917-7191=-5724$. Укажите*

Ответ: а), б) $18\cdot19=342$; в) $18\cdot19^{\frac{n}{2}-1}$ при четном n, 1 при $n=1$, $18\cdot19^{\frac{n-3}{2}}$ при остальных нечетных n.

Пусть a — n-значное число, $a=a_{n-1}\cdot10^{n-1}+a_{n-2}10^{n-2}+\ldots+a_0$, тогда $\bar{a}=a_0\cdot10^{n-1}+a_1\cdot10^{n-2}+\ldots+a_{n-1}$ и

$$a-\bar{a}=d_1(10^{n-1}-1)+d_2(10^{n-2}-10)+\ldots$$
$$\ldots+d_k(10^{n-k}-10^{k-1}), \tag{1}$$

где $k=n/2$ при четном n и $k=(n-1)/2$ при нечетном n, а $d_i=a_{n-i}-a_{i-1}$. Поскольку $1\leqslant a_{n-1}\leqslant9$, $0\leqslant a_i\leqslant9$ при $i=0, 1, \ldots, n-2$, числа d_i удовлетворяют нера-

ответ для: а) $n=4$; б) $n=5$; в) любого натурального n.

венствам

$$-8\leqslant d_1\leqslant 9,\ -9\leqslant d_l\leqslant 9 \text{ при } l=2,\ 3,\ \dots,\ k. \qquad (2)$$

Таким образом, любая разность $a-a$ представима в виде (1), где коэффициенты d_l выбираются из интервалов (2), что можно сделать $18\cdot 19^{k-1}$ способами. Поскольку для каждого из таких наборов $d_1, \dots, d_k$, очевидно, можно указать числа a, удовлетворяющее (1), причем, как будет показано, коэффициенты $d_1, \dots, d_k$ в (1) определяются однозначно, число значений разности $a-a$ тоже равно $18\cdot 19^{k-1}$.

Итак, докажем единственность представления (1) (при условиях (2)). Пусть для каких-то двух наборов $d_1, \dots, d_k$ и $d'_1, \dots, d'_k$ значения выражений в правой части (1) совпадают. Приравнивая нулю разность этих выражений и полагая $r_l=d_l-d'_l$, получим

$$r_1(10^{n-1}-1)+r_2(10^{n-2}-10)+\dots+r_k(10^{n-k}-10^{k-1})=0. \qquad (3)$$

Ясно, что $|r_l|\leqslant 18$. Допустим, что $r_1\neq 0$, тогда $r_1=\pm 10$, так как все слагаемые в (3), кроме первого, делятся на 10. Подставим в (3) $r_1=\pm 10$:

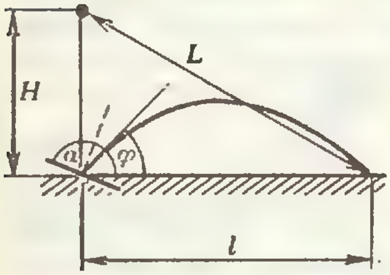
$$10^{n-1}-1=|r_2(10^{n-3}-1)+\dots+r_k(10^{n-k-1}-10^{k-2})|<$$
$$<18(10^{n-3}+10^{n-4}+\dots+1)<2\cdot 10^{n-2}.$$

Но $10^{n-1}-1>2\cdot 10^{n-2}$ при всех $n\geqslant 2$, поэтому r_1, а значит, и первое слагаемое в (3) равно нулю. Повторяя это рассуждение для $r_2, r_3, \dots, r_k$, получим, что $r_2=\dots=r_k=0$, т. е. $d_l=d'_l$ при всех l.

Г. О. Эльстинг

Решения задачи М1064 см. на с. 30.

Ф1073. *Маленький упругий мячик отпускают с высоты $H=1$ м над полом, а на его пути закрепляют пластинку, от которой он отскакивает. Какая скорость будет у мячика в момент удара о пол? Как нужно расположить пластинку, чтобы мячик ударился о пол как можно дальше от начальной точки? Чему равно это максимальное расстояние?*



Скорость мячика в момент удара о пол не зависит от того, где и как установлена пластинка (удар о пластинку упругий), и определяется из закона сохранения энергии:

$$mgH=m\frac{v^2}{2}\Rightarrow v=\sqrt{2gH}.$$

Определим, где и как нужно установить пластинку, чтобы расстояние от начальной точки траектории мячика до места его удара о пол было максимальным.

Понятно, что пластинка должна быть установлена так, чтобы сразу после удара вектор скорости мячика был направлен под углом $\varphi=45^\circ$ к горизонту. Значит, угол между векторами скоростей мячика непосредственно перед ударом и сразу после удара — 45°, нормаль к пластинке должна составлять с горизонтом угол $45^\circ+22{,}5^\circ=67{,}5^\circ$, т. е. пластинка должна быть установлена под углом $\alpha=90^\circ+67{,}5^\circ=157{,}5^\circ$ к горизонту.

Очевидно, что дальность отлета мячика будет тем больше, чем больше скорость мячика в момент удара. А эта скорость тем больше, чем дальше находится пластинка от начальной точки траектории мячика. Следовательно, пластинка должна быть установлена на полу (см. рисунок). При этом скорость мячика сразу после удара будет $v=\sqrt{2gH}$, дальность отлета мячика от пластинки будет

$$l = \frac{v^2}{g} = 2H,$$

и следовательно, максимальное расстояние между начальной и конечной точками траектории мячика —

$$L = \sqrt{l^2 + H^2} = H\sqrt{5} \approx 2{,}24\ \text{м}.$$

А. В. Хельвас

Ф1074. *Папа Карло сделал для Буратино колпак из тонкой жести. Колпак имеет форму конуса высотой $H=20$ см с углом $\alpha=60°$ при вершине. Будет ли этот колпак держаться на голове у Буратино, если эта голова — гладкий шар диаметром $D=15$ см?*

Для решения задачи нам необходимо, во-первых, определить положение центра масс колпака. С этой целью разобьем мысленно колпак на стопку узких колец одинаковой ширины dH (рис. 1). При этом масса колец нарастает линейно вниз от вершины к основанию колпака. Центр масс каждого кольца находится на его оси. «Сплющим» мысленно колпак так, что каждое кольцо превратится в равнобедренную трапецию, а весь конус превратится в равнобедренный треугольник. Центр масс каждой составной части колпака останется на месте (на оси), поэтому и центр масс всей системы останется на месте. Но, как известно, центр масс треугольной пластины находится в точке пересечения медиан. Следовательно, центр масс колпака находится на его оси на расстоянии $^2/_3\,H$ от вершины.

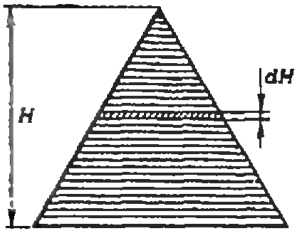


Рис. 1.

Положение равновесия системы будет устойчивым, если при небольшом ее смещении из положения равновесия центр масс поднимается (потенциальная энергия системы увеличивается); тогда система, предоставленная сама себе, возвращается в исходное положение равновесия.

В нашем случае для того, чтобы колпак занимал устойчивое положение равновесия на голове Буратино, его центр масс (точка M на рисунке 2) должен оказаться ниже центра головы Буратино (точка O). Следовательно, должно выполняться условие $AM > AO$, т. е.

$$\frac{2}{3}H > \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}H > \frac{R}{\frac{1}{2}},$$

или $H > 3R = 22{,}5$ см. А по условию $H = 20$ см. Значит, колпак не будет держаться на голове Буратино.

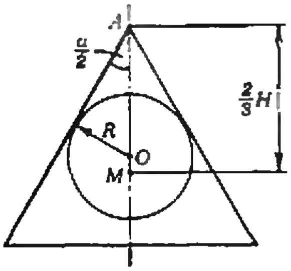


Рис. 2.

С. С. Кротов

Ф1075. *Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые три минуты записывать температуру. Данные этого опыта приведены в таблице 1. Затем он охладил воду, положил в сосуд не-*

Из приведенных таблиц видно, что температура не линейно зависит от времени. Следовательно, необходимо учитывать теплоотвод в комнату, который пропорционален разности температур сосуда и комнаты. Уравнение теплового баланса при этом имеет вид

$$c \cdot \Delta t = W \cdot \Delta\tau - \alpha(t - t_0) \cdot \Delta\tau,$$

где c — теплоемкость сосуда со всем его содержимым, t — температура сосуда, τ — время, $W = IU$ — мощность кипятильника, α — коэффициент пропорциональ-

большой металлический образец и вновь провел измерения. Результаты этого опыта приведены в таблице 2.
Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение в сети $U=35$ В, ток через кипятильник $I=0{,}2$ А, температура в комнате $t_0=20$°C.

Таблица 1 t, °C	*Таблица 2* t, °C
25,2	22,6
26,4	23,8
27,6	25,0
28,7	26,0
29,7	27,0
30,6	28,0
31,5	28,9
32,3	29,8
33,1	30,6

ности. Так как в этом уравнении два неизвестных — c и α, выберем два различных значения температуры t (t_1 и t_2), найдем вблизи них значения величин $k_1=\left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)_1$ и $k_2=\left(\frac{\Delta t}{\Delta\tau}\right)_2$ и запишем теперь уже два уравнения:

$$c\ k_1=W-\alpha(t_1-t_0),$$
$$c\ k_2=W-\alpha(t_2-t_0).$$

Отсюда найдем c:

$$c=W\,\frac{(t_2-t_0)-(t_1-t_0)}{k_1(t_2-t_0)-k_2(t_1-t_0)}.$$

Подставляя в это выражение данные из таблицы 1, найдем теплоемкость сосуда с водой:

$$c_1\approx 770\ \text{Дж/К}.$$

Воспользовавшись таблицей 2, найдем теплоемкость сосуда с образцом:

$$c_2\approx 890\ \text{Дж/К}.$$

Теплоемкость образца —

$$c=c_2-c_1\approx 120\ \text{Дж/К}.$$

Так как ищется маленькая разница двух больших величин, определенных неточно, при расчетах допустим довольно значительный разброс результатов: от 100 до 130 Дж/К.

Л. П. Баканина

Ф1076. *Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр (он состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных резисторов). Подключив его к батарее на пределе 1 В, мы получаем показание $U_1=0{,}7$ В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим показание $U_2=2{,}6$ В. Что получилось бы на пределе 100 В? Известно, что при неизменном освещении солнечная батарея ведет себя как обычный источник, последовательно к которому подключен резистор большого сопротивления.*

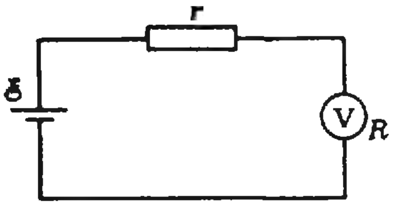
Это совсем простая задача. Обозначим сопротивление вольтметра на пределе 1 В через R_1. Тогда на пределе 10 В его сопротивление $R_2=10\,R_1$, а на пределе 100 В — $R_3=100\,R_1$. Обозначим ЭДС батареи $\mathcal{E}$, ее внутреннее сопротивление — r. Тогда имеем (см. рисунок):

$$U_1=\frac{\mathcal{E}}{r+R_1}R_1=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{R_1}};\quad U_2=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{10R_1}};$$

$$U_3=\frac{\mathcal{E}}{1+\frac{r}{100R_1}}.$$

Решая совместно эти уравнения, находим:

$$U_3\approx 3{,}6\ \text{В}.$$



А. Р. Зильберман

Ф1077. *По одной из гипотез звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гра-*

Рассмотрим частицу пыли сферического облака, находящуюся на расстоянии R от центра облака. На нее, как известно, действуют силы тяготения со стороны только тех частиц, которые находятся внутри сферы радиусом R (см., например, решение задачи 87 в книге *витационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью* $\varrho = 2\cdot 10^{-20}$ *г/см*^{3}. *Можно считать, что при сжатии частицы не обгоняют друг друга. Гравитационная постоянная* $G = 6{,}67\times 10^{-11}$ *Н·м*^{2}*/кг*^{2}.

И. Ш. Слободецкого и В. А. Орлова «Всесоюзные олимпиады по физике»). Поскольку, по условию задачи, частицы не обгоняют друг друга, суммарная масса, притягивающая нашу частицу, остается неизменной. Предположим, что вся эта масса сосредоточена в центре облака. Тогда задача сведется к нахождению времени падения частицы на притягивающий центр.

Будем рассматривать движение частицы к центру как предельный случай движения по очень вытянутому эллипсу, большая полуось которого равна $R/2$, и сравним это движение с обращением по круговой орбите радиусом R. Воспользуемся третьим законом Кеплера:

$$\frac{T_к^2}{T_э^2} = \frac{R^3}{(R/2)^3},$$

где $T_к$ — период движения по круговой орбите, $T_э$ — по эллиптической орбите. Период $T_к$ найти легко с помощью второго закона Ньютона и закона всемирного тяготения:

$$\frac{mv^2}{R} = F_т = G\frac{mM}{R^2} = G\frac{m\varrho\cdot\frac{4}{3}\pi R^3}{R^2},$$

откуда $T_к = \frac{2\pi R}{v} = \sqrt{\frac{3\pi}{G\varrho}}$, и

$$T_э = \frac{T_к}{2^{3/2}} = \sqrt{\frac{3\pi}{8G\varrho}}.$$

Мы получили, что период $T_э$ не зависит от R. Следовательно, и время падения частицы на притягивающий центр (время образования звезды), равное половине периода обращения по эллиптической орбите, не зависит от радиуса облака космической пыли и равно

$$\tau = \frac{T_э}{2} = \sqrt{\frac{3\pi}{32G\varrho}} \approx 1{,}5\cdot 10^{13}\ \text{с} \approx 10^6\ \text{лет}.$$

В. Е. Скороваров

Самопересечения замкнутой ломаной

В этой заметке мы приведем решение задачи М1064 и обсудим некоторые близкие задачи.

М1064. *Какое максимальное количество точек самопересечения может иметь замкнутая n-звенная плоская ломаная, если: а) n нечетно; б) n четно? (Предполагается, что никакие три вершины не лежат на одной прямой и что никакие три звена не пересекаются в одной точке.)*

Ответ: а) $n(n-3)/2$; б) $n(n-4)/2+1$.

Надо доказать, что рассматриваемое число самопересечений не может быть больше указанных значений, и привести примеры ломаных, для которых эти значения достигаются.

Ясно, что два звена ломаной пересекаются не более чем в одной точке и что смежные звенья не пересекаются (т. е. не имеют общих точек, кроме общей вершины). Всего замкнутая n-звенная ломаная имеет $n(n-1)/2$ пар звеньев, в том числе n пар смежных звеньев. Таким образом, число точек самопересечения не превосходит

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Если n нечетно, то n-звенная ломаная с таким числом самопересечений существует: достаточно в правильном n-угольнике провести все n диагоналей, наименее удаленных от центра (см. рисунок 1 для $n=5$ и $n=7$). Эти звенья составляют замкнутую n-звенную ломаную, все не-

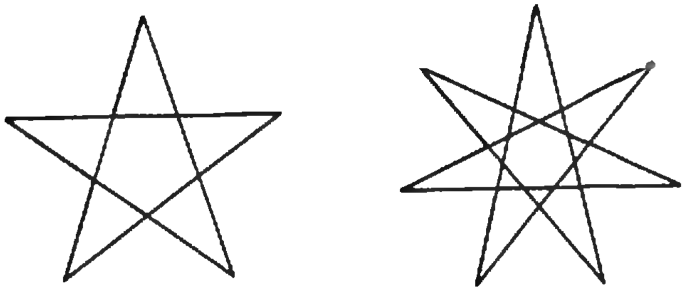


Рис. 1.

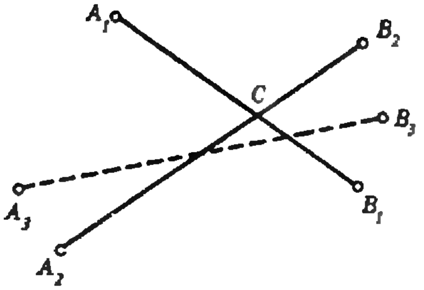


Рис. 2.

смежные звенья которой пересекаются (в разных точках). Задача а) решена.

Пусть теперь n четно. Занумеруем вершины данной n-звенной ломаной подряд, начиная с любой, и обозначим через A множество вершин с четными номерами и через B множество вершин с нечетными номерами. Любое звено ломаной идет из некоторой точки множества A в некоторую точку множества B. Пусть l — прямая, содержащая некоторое звено. Если это звено пересекает все несмежные с ним звенья, то все вершины с четными номерами лежат по одну сторону от l (мы не принимаем, конечно, во внимание вершин рассматриваемого звена, которые лежат на l). Значит, множества A и B лежат по разные стороны от прямой l и при этом имеют с ней по одной общей точке. Таких прямых существует не более двух. Этот факт представляется мне очевидным, но для любителей строгих рассуждений я приведу его доказательство (см. рис. 2).

Пусть есть три такие прямые. Точнее, пусть A_1, A_2, $A_3 \in A$ и B_1, B_2, $B_3 \in B$ — такие точки, что множества A и B лежат по разные стороны от каждой из прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Так как точки A_2, B_2 лежат по разные стороны от прямой A_1B_1, а точки A_1, B_1 лежат по разные стороны от прямой A_2B_2, то пересекаются *отрезки* A_1B_1 и A_2B_2; пусть C — точка пересечения.

Точка A_3 лежит по ту же сторону от прямой A_1B_1, что точка A_2, и лежит по ту же сторону от прямой A_2B_2, что точка A_1; значит, она содержится в угле A_1CA_2. По аналогичным причинам точка B_3 лежит в угле B_1CB_2. Значит, прямая A_3B_3 не пересекает хотя бы один из отрезков CA_1, CA_2 и не пересекает хотя бы один из отрезков CB_1, CB_2. Пусть она не пересекает CA_i и CB_j (на рисунке это CA_2 и CB_1); тогда точки A_i и B_j лежат от нее по одну сторону, что противоречит предположению.

Итак, имеется не более двух звеньев, которые пересекают все несмежные с ними звенья. Значит, по крайней мере $n-2$ звена не пересекают хотя бы одно из несмежных с ними звеньев; следовательно, имеется по крайней мере $(n-2)/2$ пар непересекающихся несмежных звеньев и общее число точек самопересечения не превосходит

$$\frac{n(n-3)}{2}-\frac{n-2}{2}=\frac{n(n-4)}{2}+1.$$

Остается при любом четном n построить n-звенную ломаную с $n(n-4)/2+1$ самопересечениями.

Проведем в правильном n-угольнике все диагонали, ближайшие к его центру, но не проходящие через центр. (При четном $n/2$ они образуют замкнутую ломаную, при нечетном $n/2$ — две замкнутые ломаные, симметричные друг другу относительно центра.) Каждая из этих диагоналей пересекает все несмежные с ней диагонали, кроме одной — параллельной ей; это дает $n(n-4)/2$ пересечений. Сотрем две параллельные диагонали, а их концы соединим крест-накрест. (См. рисунок 3 для $n=6$ и $n=12$. Тонкие сплошные линии — это ближайшие к центру не проходящие через центр диагонали правильного n-угольника. Пунктирные линии — выбрасываемые диагонали. Жирные сплошные линии — диагонали, которыми они заменяются. Сплошные тонкие и жирные линии составляют нашу ломаную.) Число пересечений увеличится на 1, причем, как легко проверить, n проведенных отрезков образуют замкнутую ломаную. Задача б) решена.

Приведем еще несколько задач, по форме похожих на разобранную задачу. Прежде всего, можно расширить класс рассматриваемых ломаных, разрешив ломаной распадаться на несколько замкнутых ломаных. Чтобы придать задаче более естественную форму, мы сформулируем ее так. *На плоскости фиксированы n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые из этих точек соединены отрезками, причем каждая точка соединена ровно с двумя другими. Каково наибольшее возможное чис-*

(Окончание см. на с. 34)

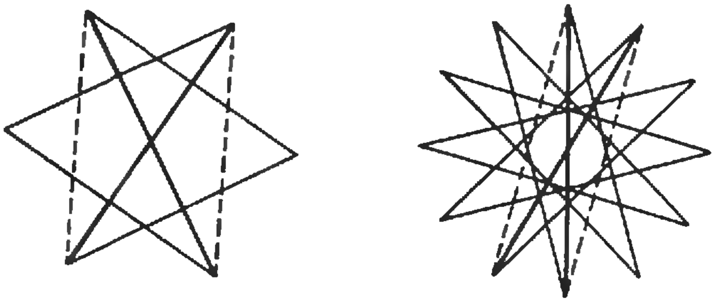


Рис. 3.

19
EMC

2
3
4
5
6
7
88

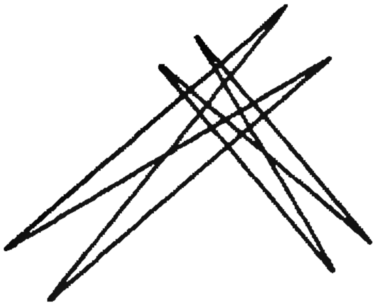


Рис. 4.

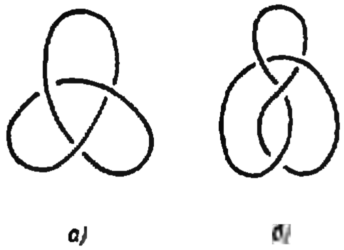


Рис. 5.

ло точек пересечения этих отрезков (общие концы не считаются точками пересечения)?

В этой задаче ответ не совпадает с предыдущим ответом. Например, на рисунке 4 показана ситуация, в которой $n=8$, а число точек пересечения равно 18. В то же время число точек самопересечения 8-звенной замкнутой ломаной, по доказанному, не превосходит 17.

Различные задачи можно поставить в связи с самопересечениями пространственных ломаных. Вообще-то ясно, что у n-звенной замкнутой пространственной ломаной число точек самопересечения не может быть больше, чем максимальное число точек самопересечения в плоском случае: спроектировав ломаную на подходящую плоскость, мы получим n-звенную плоскую ломаную, у которой самопересечений не меньше, чем до проектирования. С другой стороны, если даны три звена нашей ломаной, любые два из которых пересекаются или имеют общий конец, то эти три звена лежат в одной плоскости. Это наблюдение позволяет доказать без труда, что n-звенная ломаная с предельным числом самопересечений обязательно является плоской. Ввиду этого возникают два содержательных пространственных аналога нашей задачи.

1. *Каково наибольшее возможное число точек самопересечения n-звенной замкнутой пространственной ломаной, про которую дополнительно известно, что: а) она не является плоской, б) никакие три ее звена не лежат в одной плоскости?*

Задача б) интересна тем, что в ее решении (во всяком случае, известном мне) более простым является случай четного n, а не нечетного, как для плоской ломаной.

Впрочем, резонно возразить, что для пространственной ломаной самопересечения вообще являются противоестественными. Зато для нее естественны заузливания (я не привожу никаких определений, их можно найти, например, в «Кванте» № 3 за 1981 г.). В качестве простого упражнения читатель может доказать такое утверждение.

Замкнутая пространствена ломаная, имеющая менее 6 звеньев, не может быть заузлена; замкнутая 6-звенная ломаная может быть заузлена. Однако заузленная 6-звенная ломаная может быть только «трилистником» (см. рис. 5, *а*). Следующий по сложности узел — «восьмерка» (см. рис. 5, *б*).

2. *Каково наименьшее число звеньев заузленной пространственной ломаной типа восьмерки?*

Вообще интересно связать минимальное число звеньев ломаной, принадлежащей данному типу узлов, с другими инвариантами этого типа узлов (см. «Квант» № 3 за 1981 г. и № 7 за 1975 г.). Об этом можно сказать слишком много, и поэтому я не скажу больше ничего.

Д. Б. Фукс

Программы перебора

(Начало см. на с. 7)

квадрат к ранее подсчитанному числу счастливых билетиков для меньших значений S. Это осуществляется в строке 100. Наконец, когда цикл по S (от 0 до 13) завершен, нужно удвоить полученное число P и вычесть 1.

Задачи

23. Сколько слагаемых суммы 1+2+3+... ... надо взять, чтобы получилось трехзначное число, состоящее из одинаковых цифр?

24. Сколько есть целых чисел от 1 до 1988, которые не делятся ни на одно из чисел 6, 10, 15?

25. Найдите наименьшее натуральное число M, обладающее тем свойством, что сумма квадратов одиннадцати последовательных натуральных чисел, начиная с M, является точным квадратом.

26. Сколькими способами можно разменять рубль медными монетами (достоинством 1, 2, 3, 5 копеек)?

27. В последовательности 19886138... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предыдущих цифр. Через сколько цифр снова встретится начальная комбинация 1988 (иначе говоря, сколько цифр в периоде)?

28. Пусть X — сумма кубов десяти последовательных натуральных чисел, а Y — сумма этих же натуральных чисел. Докажите, что X^2-Y^2 делится на 300.

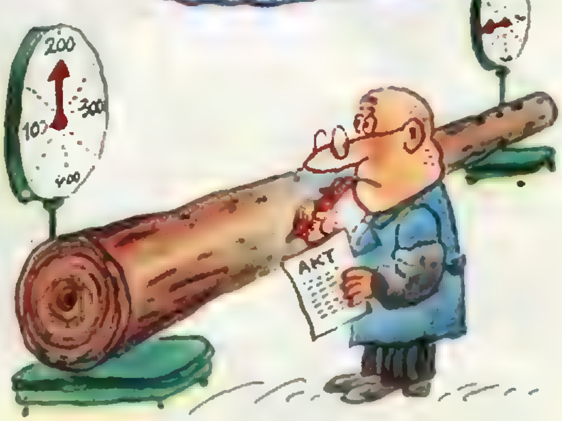
29. Определите а) наибольшее, б) наименьшее значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр. Для каких чисел это наибольшее (наименьшее) значение достигается?

30. Найдите четырехзначное число, в четыре раза меньшее числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке.

Задачи

1. Моему племяннику в x^2 году исполнится x лет. В каком году он родился?

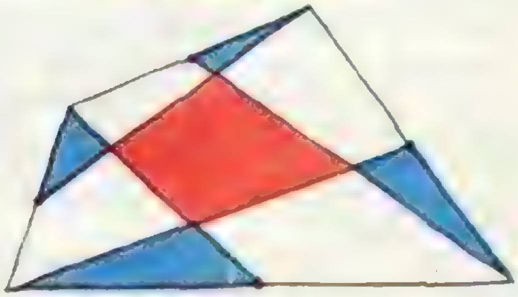
2. Бревно положили одним концом на одни весы, а другим концом — на другие. Первые весы показали 200 кг, а вторые — 100 кг. Сколько весит бревно? Где находится его центр тяжести?



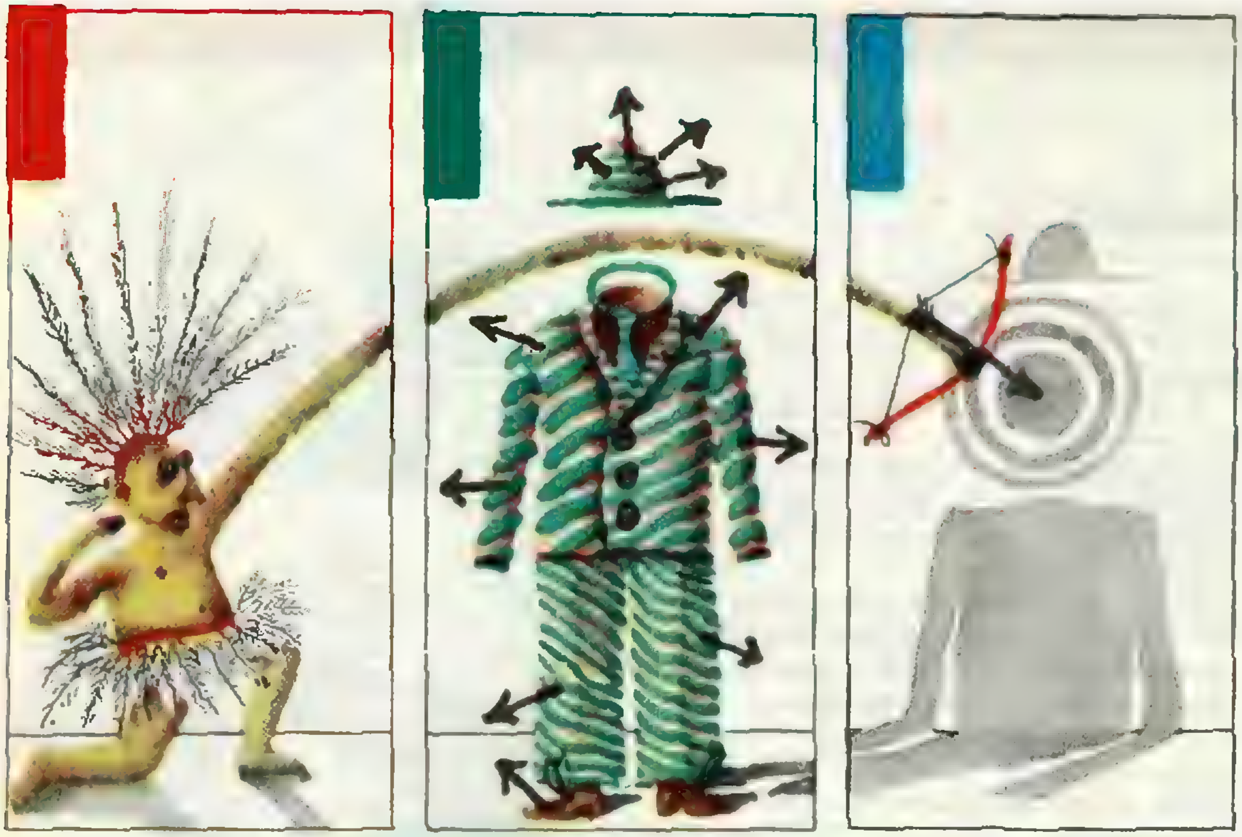
3. Кощей Бессмертный зарыл клад на глубину 1 м. Этого ему показалось не достаточно, он отрыл клад, углубил колодец до 2 м и снова зарыл. Этого ему опять показалось мало, он отрыл клад, углубил колодец до 3 м и зарыл. Затем он проделал то же, углубив колодец до 4 м, потом до 5 м, 6 м и т. д. Известно, что колодец глубиной n метров Кощей вырывает за n^2 дней. Известно также, что на 1001-й день Кощей умер от непосильной работы. На какой глубине остался клад? (Временем, нужным для закапывания колодца, пренебречь.)

4. Два числа называются зеркальными, если одно число получается из другого перестановкой цифр в обратном порядке. Например, 123 и 321. Произведение двух зеркальных чисел равно 92 565. Какие это числа?

5. В выпуклом четырехугольнике отметили середины сторон и соединили их с вершинами так, как показано на рисунке. Покажите, что площадь красного четырехугольника равна сумме площадей синих треугольников.



Эти задачи нам предложили Л. Д. Курляндчик, В. Д. Вьюн, Д. Б. Фукс, А. В. Васин, В. В. Произволов.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Об одной удивительно живучей ошибке» предназначена восьмиклассникам, «Проводники в электростатическом поле» — девятиклассникам, «Интерференция и интерферометры» — десятиклассникам.

Об одной удивительно живучей ошибке

Представим себе такую сценку на уроке физики.

Учитель. Камень брошен под углом к горизонту и движется по параболической траектории (сопротивлением воздуха пренебрегаем). Какие силы действуют на камень в тот момент, когда он оказывается в некоторой точке параболы?

Ученик. Прежде всего камень испытывает действие силы тяжести. (Небольшая пауза.) Кроме того, на камень действует *сила бросания*, направленная по касательной к траектории.

Учитель. Как известно, сила есть мера взаимодействия тел. Сила тяжести обусловлена притяжением камня к Земле. Тут все ясно. А какое тело действует на камень с силой бросания?

Ученик. Предположим, что камень бросили рукой. Значит, рука и обусловливает силу бросания.

Учитель. Но ведь взаимодействие между камнем и рукой прекратилось, как только камень оказался в полете. Можно накопить скорость, энергию; силу же накопить нельзя. Прекратилось взаимодействие — и в тот же момент исчезла и соответствующая сила.

Ученик (немного растерянно). Получается, что на камень в полете действует только сила тяжести?

Учитель. Именно так. Если, разумеется, не принимать во внимание взаимодействие камня с воздухом.

Приведенная сценка является очень типичной. И не только в школе. Из года в год многие абитуриенты дают на поставленный вопрос неправильный ответ — тот самый, который дал и наш ученик. Ошибку нередко допускают также студенты, сдавая экзамен по механике.

Живучесть и распространенность рассматриваемой ошибки объясняется не только плохим знанием физики. Есть здесь, как представляется, и причины психологического характера. Во-первых, на уровне житейских ситуаций мы привыкли к тому, что для поддержания движения тела на него необходимо действовать какой-нибудь силой. При этом забывается, что сила нужна лишь для компенсации трения. Во-вторых, мы живем в достаточно быстром ритме и часто, ох как часто, желаем получить результат немедленно. При этом мы просто не хотим принимать во внимание... инерцию, инертность.

— В каком направлении в данный момент времени действует сила, в таком направлении и должен лететь в этот момент камень. Изменится направление силы, тотчас должно стать другим и направление движения. Если бы на камень действовала только сила тяжести, он должен был бы лететь вниз. А он летит не вниз, значит, кроме силы тяжести есть еще сила.— Возможно, примерно такие мысли мелькают в нашей голове,и возникает та самая ошибка.

Мы любим критиковать инертность, отождествляем ее с ленью,нежеланием действовать. Однако встанем на точку зрения физики и попробуем представить, как выглядел бы мир, в котором инерция вдруг исчезла. Чтобы тело двигалось в таком мире, надо было бы все время прикладывать к нему силу. Прекратилось воздействие — тут же прекратилось движение. Сила направлена вправо — тело движется вправо. Направление силы сменилось на противоположное — и в тот же момент тело движется уже в обратном направлении. Можно сказать, что здесь все определяется только данным моментом времени (только силами, действующими в данный момент), важны лишь сиюминутные воздействия, сиюминутные указания. Здесь нет «памяти» о прошлом, прошлое нисколько не влияет на настоящее. И соответственно настоящее совершенно не влияет на будущее. Мир без инерции — это мир, где нет причинно-следственных связей.

Но вернемся к нашему камню. Когда его бросали, на него, конечно, действовали какой-то силой. Теперь он в полете, но «помнит» о прошлом: характер его движения (в частности, высота и дальность полета) определяется не только силой тяжести, но также и той силой, которая действовала на камень раньше. Именно поэтому камень не летит вниз, а следует по параболической траектории. Говоря строгим языком науки, движение камня в данный момент определяется как силой, действующей на него в этот момент, так и начальными условиями — направлением и модулем скорости, которую он имел в начальный момент полета. Недаром задачи такого типа обычно начинаются словами: «Тело бросили с такой-то скоростью под таким-то углом к горизонту...» Эти самые начальные условия как раз и выражают результат действия сил в прошлом. Через них прошлое влияет на настоящее.

Очевидно, что изменение приложенной к телу силы приводит к изменению движения тела. Важно, однако, что изменение движения тела происходит с учетом того, как оно двигалось раньше. Сила определяет непосредственно не скорость тела, а ускорение, т. е. изменение скорости. Получается, что знаменитый второй закон Ньютона — тот самый, где впервые в физике появляется масса (мера инертности тела),— есть по сути дела закон, выражающий принцип причинности в механике.

Вот к каким глубоким выводам можно прийти, обсуждая движение камня, брошенного под углом к горизонту.

Л. В. Тарасов

Проводники в электростатическом поле

«Хочу сообщить вам новый и страшный опыт, который никак не советую повторять... Вдруг моя правая рука была поражена с такой силой, что все тело содрогнулось, как от удара молнии. ...Одним словом, я думал, что пришел конец ... Ради французской короны я не согласился бы еще раз подвергнуться столь жуткому сотрясению...» Это слова из воспоминаний лейденского профессора Мушенбрека, приведенные в книге В. Карцева «Приключения великих уравнений». Мушенбрек в 1745 году ставил опыты по электричеству и получил простейший конденсатор, названный впоследствии лейденской банкой. Во время опытов профессор и подвергся «столь жуткому сотрясению» в результате разряда конденсатора через человеческое тело, являющееся, как известно, проводником.

Тот факт, что в природе существуют проводники, обогащает окружающий нас мир разнообразными электрическими явлениями, среди которых есть и далеко небезопасные. Проводники занимают важное место при изучении электромагнетизма.

Рассмотрим подробно случай, когда заряженный неподвижный проводник находится во внешнем электростатическом поле (созданном посторонними неподвижными зарядами). В проводнике рано или поздно все заряды перестанут перемещаться, и наступит равновесие (так как в противном случае мы получили бы вечный двигатель в результате непрерывного выделения тепла при движении зарядов). Для такого заряженного и помещенного во внешнее электростатическое поле проводника будут справедливы утверждения, приведенные ниже.

1. Поле внутри проводника. В любой точке внутри проводника напряженность электрического поля равна нулю. Действительно, при невыполнении этого условия свободные заряды в проводнике под действием сил поля пришли бы в движение, и равновесие было бы нарушено.

2. Распределение заряда в проводнике. Для того чтобы ответить на вопрос о распределении заряда в проводнике, нам надо уточнить некоторые свойства силовых линий электростатического поля. Напомним, что силовая линия электрического поля (в том числе и электростатического) — это воображаемая линия в пространстве, проведенная так, чтобы касательная к ней в каждой точке совпадала с вектором напряженности электрического поля в этой точке. Опыт изучения электростатических полей дает основание заключить, что силовые линии этих полей непрерывны и не замкнуты, они могут начинаться только на положительных зарядах и оканчиваться только на отрицательных и не могут начинаться (заканчиваться) в точке пространства, где нет зарядов. При графическом изображении поля некоторой системы зарядов число силовых линий, начинающихся или заканчивающихся на каком-либо заряде, пропорционально модулю этого заряда. Отсюда следует, что из любого заряда обязательно выходят (или входят в него) силовые линии.

После сказанного о силовых линиях возвратимся к вопросу о распределении заряда в проводнике. Выделим мысленно произвольный достаточно малый объем ΔV внутри проводника (рис. 1). Предположим, что этот объем имеет заряд (для определенности, положительный). Тогда из выделенного объема будут выходить силовые линии, т. е. вблизи него будет существовать электрическое поле. Но поля внутри проводника нет. Поэтому выделенный объем должен быть нейтрален. А поскольку этот объем взят нами в произвольном месте внутри проводника, то можно утверждать, что вся «внутренность» проводника нейтральна и, следовательно, весь заряд проводника находится на его поверхности.

3. Поле снаружи проводника вблизи его поверхности. Вектор напряженности электростатического поля в лю-

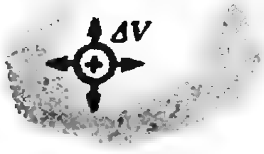


Рис. 1.

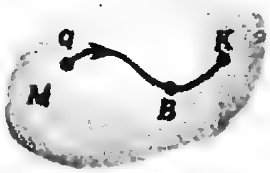


Рис. 2.

бой точке снаружи проводника вблизи его поверхности направлен перпендикулярно поверхности, что другими словами можно сказать так: силовые линии поля входят в проводник и выходят из него под прямым углом к поверхности проводника. В противном случае существовала бы составляющая вектора напряженности поля вдоль поверхности проводника, на свободные заряды на поверхности проводника действовала бы сила, имеющая составляющую вдоль поверхности. В результате этого по поверхности проводника стали бы двигаться заряды, что нарушило бы равновесие.

4. Распределение потенциала в проводнике. Покажем, что разность потенциалов любых двух точек проводника, включая точки поверхности, равна нулю. Пусть есть произвольные точки *M* и *K* внутри проводника. Перенесем мысленно из точки *M* в точку *K* пробный заряд *q* по некоторой траектории *MBK*, лежащей внутри проводника (рис. 2). Силы поля не совершат работы над перемещаемым зарядом *q*, так как поля внутри проводника нет. Поэтому разность потенциалов $\varphi_M - \varphi_K = 0$. Если точки *M* и *K*, одна или обе, лежат на поверхности проводника, то доказательство того, что разность потенциалов между ними равна нулю, аналогично.

Так как разность потенциалов любых двух точек проводника равна нулю, то потенциал всех точек проводника, включая точки поверхности, один и тот же. Поэтому говорят о потенциале проводника, не указывая конкретной его точки. Поскольку все точки поверхности проводника имеют одинаковый потенциал, поверхность проводника будет эквипотенциальной поверхностью.

5. Полость внутри проводника. Удалим из внутренней области проводника часть вещества. Так как удаляемое вещество нейтрально, то следует ожидать, что электростатическое поле во всех точках вне проводника, внутри проводника и в возникшей полости не изменится. И это будет действительно так, причем на внутренней поверхности проводника (на поверхности полости) зарядов не будет. Весь заряд проводника сосредоточится на внешней поверхности проводника, а наличие полости внутри проводника не скажется на распределении заряда по внешней поверхности. Поле в полости и в проводнике будет отсутствовать. Потенциал всех точек проводника и полости окажется одинаков.

Короче говоря, полый проводник, имеющий заряд и помещенный во внешнее электростатическое поле, ведет себя так же, как и соответствующий сплошной. Доказательство этого утверждения приводить не будем, но заметим, что оно подтверждено многочисленными опытами, проведенными еще Г. Кавендишем (1731—1810) в конце XVIII века и М. Фарадеем (1791—1867) в начале XIX века.

В. И. Чивилёв

Интерференция и интерферометры

Световая волна, прошедшая через тело (или отраженная от его поверхности), несет огромную информацию об этом теле: его размерах, плотности, форме и т. д. Но проблема состоит в том, что эта информация зашифрована в характеристиках волны, меняющихся с колоссальной скоростью как в пространстве, так и во времени. Ведь электромагнитная волна, частным случаем которой является свет, представляет собой распространяющиеся колебания электрического и магнитного полей. Скорость распространения $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, а частота колебаний напряженности электрического поля (E) или индукции магнитного поля (B) в световой волне порядка 10^{14} Гц.

В этой ситуации единственный способ извлечь информацию — это сравнить прошедшую через тело волну с другой (стандартной, или, как ее называют иначе, опорной волной), поле в которой колеблется с такой же частотой. Тогда фактор времени как бы исключается, и из картины, быстро меняющейся во времени, мы получаем устойчивую статическую картину. Именно такую картину мы можем наблюдать при интерференции когерентных волн.

Чтобы разобраться в том, что именно происходит при интерференции, нам надо кое-что вспомнить. Прежде всего: волна наряду со скоростью распространения c и частотой ω (или периодом колебаний $T=2\pi/\omega$) характеризуется длиной волны $\lambda=cT=2\pi c$.

Хотя величина напряженности электрического поля E в каждой точке волны непрерывно меняется, значения напряженностей в двух различных точках однозначно связаны друг с другом. Так, например, если расстояние между двумя точками равно или кратно длине волны λ (иногда говорят: кратно четному числу полуволн), то значения напряженностей в этих точках всегда одинаковы. (Все время меняются, но все время остаются равными.) В точках, расстояние между которыми равно $\lambda/2$ (или кратно нечетному числу полуволн), значения напряженностей отличаются только знаком (рис. 1).

Теперь легко понять, что́ происходит при интерференции волн. Рассмотрим две плоские волны равной амплитуды и длины, распространяющиеся под некоторым углом друг к другу. Слово «плоская» означает, что поверхностями равной напряженности (или равной фазы) в такой волне являются плоскости. На рисунке 2 показаны два источника таких волн S_1 и S_2 и плоскости равной напряженности в какой-то момент времени. Будем считать, что источники синхронизированы так, что в любой момент времени напряженности E_1 и E_2 в точках, где эти источники расположены, одинаковы: $E_1=E_2$.

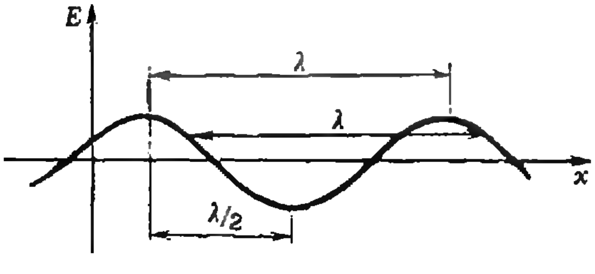


Рис. 1.

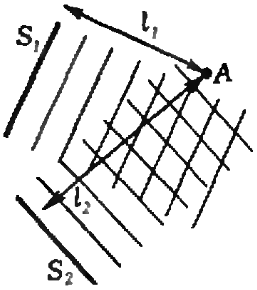


Рис. 2.

Возьмем в пространстве произвольную точку A. Расстояние от этой точки до источников S_1 и S_2 обозначим соответственно через l_1 и l_2. Здесь нам придется рассмотреть несколько вариантов.

Предположим для начала, что на длине l_1 укладывается четное, а на длине l_2 — нечетное число полуволн. Тогда напряженность первой волны в точке A равна напряженности в месте расположения источника этой волны: $E_{A1}=E_1$, а напряженность второй волны в точке A противоположна по знаку напряженности в месте расположения второго источника: $E_{A2}=-E_2$. Но так как $E_1=E_2$ (условие синхронизации источников), то очевидно, что $E_{A1}=-E_{A2}$ и суммарная напряженность в такой точке равна нулю. Напомним еще раз: все напряженности колеблются со временем, но указанные равенства сохраняются во все моменты времени. Совершенно аналогичная ситуация будет, если на длине l_1 укладывается нечетное, а на длине l_2 — четное число полуволн. Раз суммарная напряженность, создаваемая обеими волнами, в точке A равна нулю, то и освещенность в этой (и аналогичных ей точках) будет нулевая.

Если количество полуволн, укладывающихся на расстояниях l_1 и l_2, одинаковой четности (либо на обоих расстояниях четное, либо на обоих нечетное), то напряженности первой и второй волн в точке *A* всегда одинаковы и взаимно усиливаются. В таких точках освещенность будет максимальной.

Можно сформулировать общее правило: если разность хода — разность l_1 и l_2 — двух волн до некоторой точки равна нечетному числу полуволн, то освещенность в этой точке минимальна:

$$l_1-l_2=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

— условие минимума.

В случае, когда разность хода равна четному числу полуволн, освещенность в соответствующей точке будет максимальна:

$l_1-l_2=2k\frac{\lambda}{2}$ — условие максимума.

Поместим теперь на пути этих интерферирующих волн экран. Очевидно, что на нем возникнут чередующиеся темные и светлые полосы, соответствующие условиям минимумов и максимумов освещенности. Это и есть интерференционная картина.

Очень важно подчеркнуть, что интерференционная картина определяется не столько тем, какой путь проходит каждая из интерферирующих волн до той или иной точки экрана, сколько тем, какое количество полуволн укладывается на этом пути. Это важно потому, что скорость световой волны (а значит, и длина волны) зависит от показателя преломления той среды, в которой волна распространяется: $\lambda=vT=(c/n)T$. Здесь $v=c/n$ — скорость света в среде, а n — показатель преломления среды. Понятно поэтому, что если на пути одной из волн (например, первой) поставить какой-нибудь прозрачный предмет, то число полуволн, укладывающихся на расстоянии l, изменится из-за изменения длины волны внутри тела. Интерференционная картина при этом деформируется, причем тем сильнее, чем больше толщина предмета.

Возвращаясь к началу нашей заметки, можно сказать, что с помощью интерференции мы перевели информацию о прозрачном теле из быстро меняющихся характеристик волны в статические характеристики интерференционной картины.

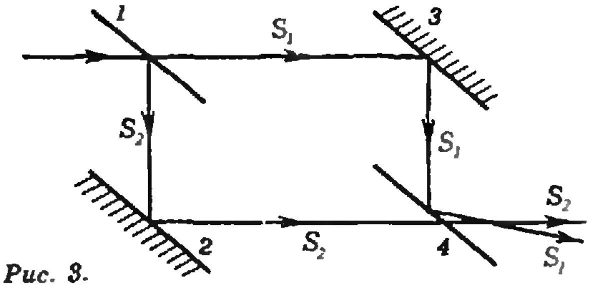


Рис. 3.

Практически это делается с помощью интерферометров. Существует довольно много типов таких приборов. В задачу любого интерферометра входит формирование двух (или более) когерентных волн и последующее их сведéние с целью получения интерференционной картины.

Схема одного из интерферометров (он называется интерферометром Маха—Цендера) приведена на рисунке 3.

Плоская волна падает на полупрозрачное зеркало *1* и частично отражается, а частично проходит сквозь него. Тем самым мы получаем две когерентные волны S_1 и S_2. Сведéние их осуществляется с помощью обычных зеркал *2* и *3* и полупрозрачного зеркала *4*. Отражение от зеркал *2* и *3* волны падают на полупрозрачное зеркало *4*. Волна S_2 проходит сквозь зеркало *4*, а волна S_1 отражается от него. Всегда можно подобрать положение зеркал так, чтобы на выходе зеркала *4* получить две волны, распространяющиеся друг по отношению к другу под некоторым, как правило небольшим, углом. Тогда в соответствии со сказанным выше на экране Э возникнет интерференционная картина. Помещая теперь на пути одной из волн (S_1) изучаемый прозрачный объект, мы будем наблюдать искажение этой картины, по которому и можно судить о свойствах этого объекта.

Е. Е. Городецкий, А. А. Лапидес

Математический кружок

Разберем все варианты

С. М. ЛЬВОВСКИЙ,
кандидат физико-математических наук
А. Л. ТООМ

> *Метод тут примерно такой, как при поисках одной горошины в мешке гороха: прежде всего необходимо терпение, молодой человек.*
> К. Чапек. «Купон»

Когда в младших классах ученики впервые начинают решать задачи по математике, им специально подбирают такие задачи, которые решаются заранее преподанными методами, и получается один определенный ответ. На олимпиадах подбирают задачи, которые имеют неожиданное, но простое и красивое решение.

Но Природа не считается с нашими вкусами. Поэтому профессионал-математик, решая задачи, возникающие в ходе развития естествознания, постоянно сталкивается с задачами, которые то не имеют решения, то имеют много решений, то требуют непривычных, а подчас и громоздких, «некрасивых» методов решения.

Таким «некрасивым» методом ученики младших классов часто считают *метод перебора*. Некоторые даже думают, что метод перебора — это «неправильный» метод, и им решать задачи якобы нельзя. На самом деле задачу можно решать любым способом, лишь бы получить верный и обоснованный ответ. Найти все ответы и доказать, что других нет,— это и значит решить задачу. А оказаться этих ответов может сколько угодно: один, несколько, ни одного или бесконечно много.

Конечно, метод перебора случаев, о котором идет речь в этой заметке, необходимо применять с умом, а не как попало. Прежде всего заметим, что любой перебор, который один человек или все человечество когда-либо сможет осуществить,— это конечный перебор, и никакая вычислительная техника этого не изменит. Но даже конечный перебор осуществим лишь в ограниченных пределах. Фактически при решении задач «вручную», при помощи авторучки и бумаги, можно перебрать десяток, ну — сотню вариантов. Компьютер увеличивает это число до тысяч, ну — миллионов. Однако сплошь и рядом возникают задачи, решение которых методом перебора приводит к гораздо большему числу вариантов. Уже простые настольные игры типа шахмат дают такое число позиций, с которым не справится никакая машина. Поэтому искусство программирования, как и искусство решать математические задачи, включает умение сокращать перебор до осуществимых масштабов.

Сплошной перебор всех вариантов осуществим лишь в самых простых случаях. Дж. Свифт остроумно высмеял его в своей книге «Путешествия Гулливера». В пятой главе третьей части он описывает машину, осуществлявшую перебор всевозможных словосочетаний (см. рис. 1): «Профессор показал мне множество фолиантов, исписанных подобными отрывочными фразами; на основании этого богатейшего материала профессор рассчитывал составить полный обзор всех искусств и наук». Сатира Свифта метила во вполне реальную цель: создание «думающих» машин, связанное с идеей перебора. Еще в XII веке рыцарь-монах Раймунд Луллий сконструировал машину для механического доказательства всех положений Христианства и отправился с ней к маврам, уверенный, что эта «наука» обратит их в истинную веру. Идеи Луллия интересовали Джордано Бруно и Лейбница, мечтавшего о таком прогрессе науки, который позволит не спорить, а вычислять.

Великий немецкий ученый Лейбниц (1646—1716), бывший старшим современником Свифта (1667—1745), всю жизнь развивал идею «всеобщей характеристики», т. е. равного по точности математике описания всех процессов человеческого мышления. В полной мере эта идея не осуществлена по сей день и, может быть, никогда не будет осуществлена. Но математизация многих сторон человеческой деятельности, несомненно, происходит. А вместе с этим все более широкое применение получают и основные математические идеи, в том числе идея перебора вариантов.

Задача 1. *На складе стоят 5 станков массой соответственно* 1500 *кг,* 1020 *кг,* 800 *кг,* 750 *кг и* 600 *кг. Требуется увезти часть из них на машине грузоподъемности 3 тонны, загрузив ее максимально, но не перегрузив. Какие станки надо погрузить на машину?*

Решение. Предположим, что мы решили не брать самый тяжелый станок. Тогда масса остальных станков 1020+800+750+600=3170 кг, что больше трех тонн. Значит, придется оставить еще какой-нибудь станок. Мы захватим самый большой вес, если оставим самый легкий станок — в 600 кг. Надо, конечно, еще

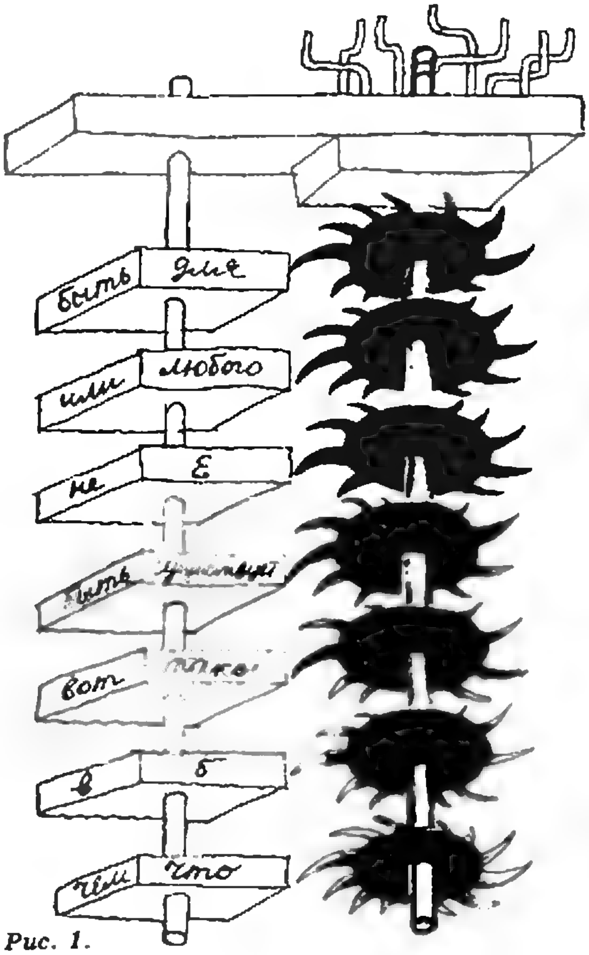


Рис. 1.

проверить, сможет ли трехтонка увезти оставшиеся станки: $1020+800+750=2570$ кг<3 т. Итак: если не брать самый тяжелый станок, то мы увезем, самое большее, 2570 кг. Пусть теперь мы погрузили на машину станок в 1500 кг; тогда в машине еще остается места на 1500 кг. Уложиться в эти 1500 кг можно взяв только один станок, что даст нам, самое большее, 1020 кг (а всего в грузовике будет 2520 кг), либо взять два станка, что даст, самое большее, $800+600=1400$ кг, а всего на грузовике будет 2900 кг.

Сравнивая все варианты, мы видим, что последний — наилучший. Итак, надо погрузить станки массой

1500 кг, 800 кг, и 600 кг.

Подобный прямой перебор не всегда возможен. Чаще приходится применять его в сочетании с другими методами. Вот пример.

Задача 2.*) *Найдите все натуральные трехзначные числа, каждое из которых обладает следующими двумя свойствами:*

— первая цифра в 3 раза меньше последней его цифры;

— сумма самого числа с числом, получающимся из него перестановкой второй и третьей его цифр, делится на 8 без остатка.

Здесь прямо применить метод перебора значило бы перебрать все трехзначные числа и выбрать из них те, которые удовлетворяют условию. Делать это вручную — все равно, что искать иголку в стоге сена или нужную горошину в мешке гороха. Правда, с помощью компьютера перебрать все трехзначные числа недолго, но «спортивнее» решать простые задачи простыми средствами: это заставит нас выработать приемы сокращения перебора; кстати, эти приемы резко увеличат наши возможности, когда у нас будет компьютер.

Данную задачу мы начнем решать алгебраически и прибегнем к перебору лишь тогда, когда удастся свести ее к немногим случаям.

Решение. Пусть x — цифра сотен, y — цифра десятков искомого числа. Тогда цифра его единиц равна $3x$. Очевидно, $3x\leqslant 9$, откуда $x\leqslant 3$. Нулем первая цифра числа быть не может. Значит, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. Эти три возможности мы рассмотрим по отдельности, но сначала запишем второе условие, обозначая тремя точками ($\vdots$) выражение «делится на»:

$$((100x+10y+3z)+(100x+30x+y))\ \vdots\ 8,$$

т. е.

$$(200x+33x+11y)\ \vdots\ 8.$$

Мы нарочно оставили $200x$ и $33x$ отдельными слагаемыми. Так легче заметить, что $200x$ можно отбросить (так как $200\ \vdots\ 8$) и записать это условие так:

$$(33x+11y)\ \vdots\ 8,$$

или

$$11(3x+y)\ \vdots\ 8.$$

Для этого необходимо и достаточно, чтобы $3x+y$ делилось на 8. Теперь приступим к перебору, который вполне осуществим, так как состоит всего из трех случаев.

1) $x=1$. Тогда $3+y\ \vdots\ 8$. Это будет при $y=5$.

2) $x=2$. Тогда $6+y\ \vdots\ 8$. Это будет при $y=2$.

3) $x=3$. Тогда $9+y\ \vdots\ 8$. Это будет при $y=7$.

Итак, задача имеет три ответа: 153, 226, 379.

Задача 3. *Решите в натуральных числах уравнение*

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1.$$

Напомним, что *натуральными* называются целые положительные числа. Решить уравнение в натуральных числах — значит найти все его решения, в которых неизвестные принимают натуральные значения. Сплошным перебором, рассматривая все тройки натуральных чисел по отдельности, решить эту задачу вообще невозможно: таких троек бесконечно много. Поэтому, прежде чем приступить к перебору, необходимо как-то свести дело к конечному числу случаев. Нам будет удобнее провести перебор, если мы чуть-чуть изменим условие задачи.

---

*) Предлагалась на вступительном экзамене в МГУ (факультет психологии) в 1984 г.

Задача 3′. *Решите в натуральных числах систему*

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,\\ x\leqslant y\leqslant z.\end{cases}$$

Решение задачи 3′. Очевидно,

$$\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z}.$$

Предположим сначала, что $x>3$. Тогда

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{x}\geqslant\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

что противоречит условию. Итак, x не может равняться ничему иному, кроме 1, 2 и 3. (Видите, как резко мы сократили перебор!)

1) $x=1$. Тогда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0,$$

чего не может быть.

2) $x=2$. Тогда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}.$$

Если $y>4$, то

$$\frac{1}{4}>\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{4}+\frac{1}{4},$$

чего не может быть. Итак, y не может равняться ничему иному, кроме 2, 3 и 4. Подставляя каждое из этих значений, убеждаемся, что $y=2$ не годится, а два другие значения дают два ответа: (2, 3, 6) и (2, 4, 4).

3) $x=3$. Тогда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{3}.$$

Если $y>3$, то

$$\frac{1}{3}>\frac{1}{y}\geqslant\frac{1}{z},$$

откуда

$$\frac{1}{y}+\frac{1}{z}<\frac{1}{3}+\frac{1}{3},$$

чего не может быть. Итак, в данном случае надо рассмотреть для y только одно значение 3, что дает еще один ответ: (3, 3, 3).

Все случаи разобраны. Задача 3′ решена. Она имеет три ответа: (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3).

В отличие от нее, задача 3 имеет другой список ответов, получающихся из этих всевозможными перестановками. Вот ответ задачи 3:

(2, 3, 6), (2, 6, 3), (3, 2, 6),
(3, 6, 2), (6, 2, 3), (6, 3, 2),
(2, 4, 4), (4, 2, 4), (4, 4, 2), (3, 3, 3).

(В каждом из этих ответов первое число — значение x, второе — значение y, третье — значение z.)

В задачах, которые мы до сих пор разбирали, необходимо было найти все ответы, удовлетворяющие данному условию. Но бывают задачи, в которых спрашивается только, **существует** ли объект, для которого выполняются определенные условия. Для того чтобы доказать, что такого объекта не существует, необходимо разбирать все случаи или проводить общее рассуждение. Для того же чтобы доказать, что такой объект существует, достаточно привести всего один пример. Вот две задачи такого типа.

Задача 4. *Известно, что для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ выполняются следующие три условия:*

$$\angle A=\angle A',\ AB=A'B',\ BC=B'C'.$$

Могут ли треугольники ABC и $A'B'C'$ быть неравны?

Ответ: могут.

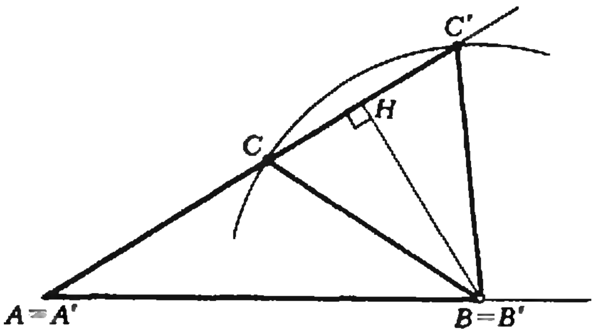


Рис. 2.

14
21
28
35
42
49
56
63
70
77
84
91
98

Рис. 3.

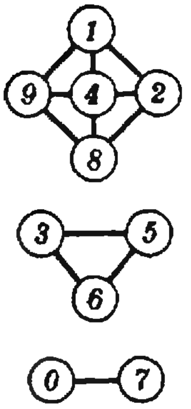


Рис. 4.

Доказательство. Построим два неравных треугольника, для которых верны равенства в условии. Возьмем острый угол A и отложим на одной его стороне отрезок AB (рис. 2). Проведем окружность с центром B и радиусом, который меньше, чем AB, но больше, чем расстояние от точки B до другой стороны угла. Эта окружность пересечет другую сторону угла в двух точках, которые мы обозначим C и C'. Треугольники ABC и ABC' не являются равными, хотя для них выполняются три написанные выше условия.

Задача 5. *Можно ли выписать по кругу k различных цифр так, чтобы из каждых двух соседних можно было составить число, делящееся на 7? Здесь k целое, $3 \leqslant k \leqslant 10$.*

Фактически здесь предлагается восемь различных задач для восьми различных значений k. Но решать их удобно все вместе при помощи следующего приема.

Выпишем все двузначные числа, делящиеся на 7 (рис. 3). Затем нарисуем на бумаге все десять цифр и соединим линиями те из них, которые составляют какое-нибудь из написанных чисел (рис. 4). Расставить требуемым образом k цифр — все равно, что обойти k различных кружков и вернуться в начало пути.

Как видите, все цифры распались на три «островка». Теперь ясно, что больше пяти цифр расставить требуемым образом нельзя. А три, четыре или пять цифр расставить можно. Запишите требуемые расстановки самостоятельно.

Задачи

1. О треугольнике ABC были сделаны четыре утверждения:
а) треугольник ABC равносторонний;
б) треугольник ABC прямоугольный;
в) $AB = BC$;
г) $AB = 2AC$.
Известно, что два из этих утверждений верны, а два другие неверны. Чему может равняться периметр треугольника ABC, если самая короткая его сторона равна единице?

2. Найдите два числа, квадрат каждого из которых на единицу больше другого числа.

3. Чему может равняться периметр треугольника ABC, если известно, что $\angle A = 60°$, $AB = 8$, $BC = 7$?

4. Решите в целых положительных числах уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz = 20.$$

5. Улитка проползла отрезок длиной в метр и остановилась. Потом повернула на 90°, проползла еще отрезок длиной в метр и остановилась. Так она сделала 6 раз подряд: проползла 6 прямолинейных отрезков длиной в метр, поворачивая после каждого на 90° вправо или влево. Каково может быть расстояние между началом и концом ее пути?

6. Найдите все трехзначные числа, каждое из которых в 19 раз больше суммы своих цифр.

7. На солнечной поляне греются ужи, воробьи, мыши, жуки и пауки. У всех вместе ног вчетверо больше, чем голов. Если ужи уползут, то ног останется впятеро больше, чем голов. У мышей и жуков вместе ног впятеро больше, чем голов. У жуков и пауков вместе сто ног. Сколько каких животных на поляне? (Надеемся, что все знают, сколько у кого ног: у ужа — 0, у воробья — 2, у мыши — 4, у жука — 6, у паука — 8.)

8. Расстояние AB равно 225 км. В 12 часов дня из A в B выезжает автобус и одновременно из B в A выезжает автомобиль. Автобус прибывает в B в 6 часов вечера того же дня, причем делает в пути 4 остановки через равные промежутки времени на 15 минут каждую. Автомобиль едет весь путь без остановок и встречает автобус на расстоянии 90 км от A. Какова может быть скорость автомобиля?

9. Можно ли расположить цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 по кругу так, чтобы из каждых двух соседних цифр можно было составить простое двузначное число? (Напоминаем, что натуральное число называется простым, если оно имеет ровно два делителя: себя и единицу.)

10. Найдите три числа, квадрат каждого из которых на 3 больше, чем сумма двух других чисел.

11. Все вершины некоторого четырехугольника лежат внутри квадрата, сторона которого равна 1.
а) Может ли периметр этого четырехугольника быть больше 5?
б) Может ли периметр этого четырехугольника быть больше 6?

12. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Спустя некоторое время из пункта A вслед пешеходу выехал велосипедист. Проехав час,

он догнал пешехода, сразу повернул назад, приехал в A, сразу поехал в B и прибыл туда одновременно с пешеходом. Пешеход потратил 6 часов на путь от A до B. Во сколько раз скорость велосипедиста больше скорости пешехода?

13. Две взаимно перпендикулярные прямые разрезают окружность на четыре дуги, две наименьшие из которых содержат 30° и 45°. Сколько градусов содержат две другие дуги?

14. На экране кино винт самолета кажется неподвижным. Сколько оборотов в секунду мог делать винт во время съемки? Съемка велась с частотой 24 кадра в секунду. У винта 2 лопасти.

15. В океане расположены 5 островов A, B, C, D, E. Некоторые расстояния между ними известны: $AB=BC=CA=3$ км, $CD=DE=EC=8$ км, $BD=11$ км. Каково расстояние AE?

16. Три отрезка длиной 1 проходят через одну точку. Их концы служат вершинами несамопересекающегося шестиугольника. Может ли его периметр быть: а) больше 5? б) больше 6?

17. Существует ли многоугольник площадью в квадратный сантиметр, который нельзя поместить ни в какой прямоугольник площадью в квадратный километр?

18. а) Картонный пакет молока имеет форму треугольной пирамиды, все шесть ребер которой имеют длину a. Опишите, как разрезать его так, чтобы после разворачивания получился картонный прямоугольник, и вычислите его длину и ширину.

б) Существует ли неправильная треугольная пирамида, которую можно разрезать так, чтобы после разворачивания получился прямоугольник?

19. Можно ли расположить девять цифр от 1 до 9 в клетки квадратной таблицы размером 3×3 клетки так, чтобы в каждых двух соседних (имеющих общую сторону) клетках стояли две цифры, из которых можно составить число, делящееся на 7 или на 13?

20. Можно ли расставить девять цифр от 1 до 9 в клетки квадратной таблицы размером 3×3 клетки так, чтобы сумма цифр в каждой строке и в каждом столбце была одна и та же?

О дальнейшей работе Заочной школы программирования

Заочная школа программирования завершает публикацию учебных материалов в «Кванте» и первый цикл занятий — рассказ о языке программирования Лого. Конечно, в четырех уроках на страницах журнала трудно было сделать этот рассказ полным. О некоторых типовых механизмах программирования, существующих, в частности, в Лого (операции ввода, обработке логических знаний, понятии файла и др.), вы узнаете из последующих уроков, изучая другие языки программирования (Рапиру, Си, Пролог).

Следующие уроки Заочной школы будут рассылаться учащимся ЗШП один раз в месяц в виде отдельных брошюр размером 21×15 см. Поэтому в свои письма вам следует вкладывать конверты соответствующего размера (допускаются самодельные) со своим точным адресом и с наклеенной на них 10-копеечной маркой.

В школе создано 9 секций. Задания 5-го и последующих уроков следует высылать по адресу соответствующей секции. Мы сообщаем нашим читателям адреса секций ЗШП, указывая в скобках, какие районы и области страны соответствуют определенной секции.

Московская секция ЗШП: 109028 Москва, В. Вузовский пер., 3/12, МИЭМ (Москва и Московская область).

Северо-Западная (*Ленинградская*) секция ЗШП: 190000 Ленинград, ул. Герцена, 67, ЛИАП, кафедра ЭВМ (Ленинградская, Архангельская, Брянская, Вологодская, Калининская, Калужская, Мурманская, Новгородская, Псковская, Смоленская, Тульская области; прибалтийские республики и Белоруссия, Карельская и Коми АССР).

Южная (*Симферопольская*) секция ЗШП: 333036 Симферополь, ул. Ялтинская, 4, Симферопольский университет (Курская, Белгородская, Воронежская, Липецкая, Тамбовская, Ростовская области и Краснодарский край; Украина и Молдавия).

Уральская (*Свердловская*) секция ЗШП: 620219 Свердловск, ул. К. Либкнехта, 9, Пединститут (Свердловская, Челябинская, Оренбургская, Пермская, Курганская области; Башкирская и Удмуртская АССР).

Поволжская (*Горьковская*) секция ЗШП: 603019 Горький, Кремль, Обком ВЛКСМ (Горьковская, Владимирская, Ивановская, Костромская, Рязанская, Астраханская, Волгоградская, Ульяновская, Саратовская, Пензенская, Кировская, Куйбышевская области; Татарская, Марийская, Мордовская и Чувашская АССР).

Среднеазиатская (*Алма-Атинская*) секция ЗШП: 480051 Алма-Ата, пр. Ленина, 114, Республиканский Дворец пионеров (Казахстан и республики Средней Азии).

Кавказская (*Тбилисская*) секция ЗШП: 380002 Тбилиси, ул. Камо, 52, ВЦ Министерства просвещения (Грузия, Армения, Азербайджан; Ставропольский край; Дагестанская, Северо-Осетинская, Чечено-Ингушская и Калмыцкая АССР).

Сибирская (*Красноярская*) секция ЗШП: 660036 Красноярск, Академгородок, ВЦ СО АН СССР (Новосибирская, Кемеровская, Омская, Тюменская области; Красноярский край и вся территория, восточнее Красноярского края).

Переславская секция ЗШП: 152140 Переславль-Залесский, а/я 46 (Ярославская область).

Наш календарь

Генрих Герц и электромагнитные волны

Выдающийся немецкий физик Генрих Герц родился в 1857 году в Гамбурге в семье адвоката. Уже в школьные годы у чрезвычайно хрупкого здоровьем мальчика обнаружилась разносторонняя одаренность — он обладал удивительной памятью, великолепными способностями к рисованию, языкам, техническому творчеству (так, он собственноручно изготовил отличный спектроскоп и другие физические и астрономические приборы), проявлял острый интерес к точным наукам и ботанике. В 1880 году Герц окончил Берлинский университет, блестяще защитив докторскую диссертацию по теоретической электродинамике. Его научным руководителем был в ту пору первый физик Европы Г. Гельмгольц (1821—1894), у которого он последующие три года проработал ассистентом.

Гельмгольц, за свою долгую жизнь занимавшийся множеством проблем физиологии, физики и техники, в это время особенно интересовался электродинамикой. Он разработал свой вариант теоретической электродинамики, соперничавший с предложенными ранее теориями В. Вебера (1804—1891) и Дж. К. Максвелла (1831—1879). В 1879 году Берлинская академия наук по инициативе Гельмгольца выдвинула конкурсную задачу: «Установить экспериментально, существует ли связь между электродинамическими силами и диэлектрической поляризацией». Решение этой задачи, по мысли Гельмгольца, должно было дать ответ, какая из электродинамических теорий соответствует истине. Разумеется, он надеялся, что победа будет за его собственным детищем. Не удивительно, что Гельмгольц предложил взяться за эту задачу Герцу, которого считал самым талантливым из своих многочисленных учеников — тем более, что годом ранее тот уже получил премию Берлинского университета за экспериментальное исследование по электродинамике.

Герц попытался решить задачу, используя электрические колебания, возникающие при разряде конденсаторов и индукционных катушек. Однако сколько-нибудь определенных результатов молодому ученому получить не удалось. И было ясно почему: требовались значительно более высокочастотные — или, как говорили тогда, более быстрые — колебания, чем те, которые умели возбуждать физики в то время.

В 1883 году Герц получил место доцента в Кильском университете, а в 1885 году стал профессором экспериментальной физики Высшей технической школы в Карлсруэ.

Со слов ученого известно, что, потерпев в Берлине неудачу с гельмгольцевской задачей, он все же сохранял надежду отыскать путь к ее решению, и с тех пор все, связанное с электрическими колебаниями, неизменно привлекало его пристальное внимание. Этот устойчивый интерес и сыграл главную роль в том, что сделанное осенью 1886 года случайное наблюдение не только послужило для Герца поводом вернуться к отложенной «до лучших времен» задаче и решить ее, но и стало отправной точкой его пути к замечательному открытию — экспериментальному обнаружению электромагнитных волн.

Что же это было за наблюдение?

В Карлсруэ Герц получил в свое распоряжение физический кабинет с богатой коллекцией научных приборов. Наряду с другими приборами из этого арсенала, ученый в демонстрационных опытах на лекциях использовал и пару индукционных катушек с тонко регулируемым с помощью микрометрического винта искровым промежутком между металлическими шариками на концах обмотки (рис. 1). «Меня поразило,— рассказывал впоследствии Герц, вспоминая, как отлаживал лекционные демонстрации с этими катушками, что для возбуждения искры в одной из катушек не обязательно было подсоединять к другой мощную батарею. Напротив, достаточно было маленькой лейденской банки или даже разряда небольшого индуктора — лишь бы [в искровом промежутке первичной катушки] проскочила искра». Надо сказать, что этот вывод отнюдь не был сделан что называется «сходу». Чтобы утвердиться в нем, Герц доводил ширину искрового промежутка вторичной катушки до сотых долей миллиметра, стал работать в затемненном помещении, наблюдал за крохотными и призрачными искорками через лупу.

Проведя серию в принципе простейших, но глубоко продуманных опытов, Герц пришел к твердому убеждению: искры во вторичной катушке возбуждаются искровым разрядом в первичной катушке не за счет простого индукционного эффекта, а вследствие того, что первичный разряд порождает как раз те самые «очень быстрые электрические колебания», недоступность которых в свое время не позволила ему решить конкурсную задачу Берлинской академии.

Разобравшись в природе явления, ученый понял, как можно эффективно генериро-

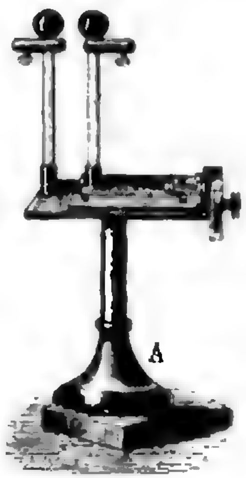


Рис. 1

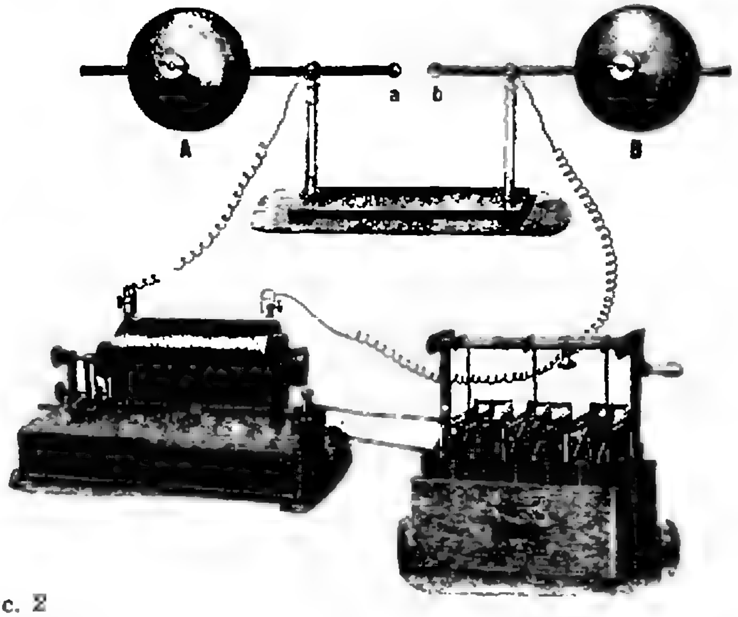


Рис. 2

вать и регистрировать эти колебания. Так в ноябре 1886 года появились простые устройства, вскоре получившие у физиков названия «вибратор Герца» и «резонатор Герца». На рисунке 2 показан вибратор Герца, включенный в последовательную цепь с гальванической батареей и катушкой Румкорфа (высоковольтный трансформатор с низкочастотным механическим прерывателем на входе первичной обмотки). В одном из первых вибраторов, собранных ученым, на концы снабженного посередине искровым промежутком медного провода длиной 2,6 м и диаметром 5 мм были насажены подвижные жестяные шары диаметром 0,3 м. В качестве резонатора использовалась также снабженная искровым промежутком квадратная рамка из медного провода общей длиной 3 м и диаметром 2 мм. Геометрические параметры вибратора и резонатора (кратчайшее расстояние между ними составляло 0,3 м) опытным путем подбирались таким образом, чтобы достигался резонанс, которому соответствовала максимальная длина искры (около 3 мм) в искровом промежутке резонатора.

Воспользовавшись выведенной У. Томсоном (Кельвином) еще в 1853 году формулой для периода собственных колебаний электрического колебательного контура $T=2\pi\sqrt{LC}$ (L и C — соответственно индуктивность и емкость колебательного контура) и справедливо полагая, что в данном случае основной вклад в индуктивность вибратора дает прямой медный провод, а в емкость — концевые жестяные шары, Герц получил для периода колебаний значение $1{,}77\times10^{-8}$ с. Таким образом он с удовлетворением убедился, что его «очень быстрые» колебания действительно более чем в 100 раз «быстрее» самых высокочастотных электрических колебаний, зарегистрированных до него.

Путь к решению задачи Гельмгольца был открыт, и уже летом 1887 года Герц справился с ней следующим простым и эффективным образом. Включив свой вибратор и разместив рядом с ним резонатор, он установил, что искра в искровом промежутке последнего по существу одинаковым образом реагирует на приближение к нему как металлической пластины, так и диэлектрического блока (в первом опыте это была стопка книг длиной 1,5 м, шириной 0,5 м и высотой 1 м, а в последующих использовались асфальт, сухой песок, парафин и другие непроводящие материалы). Но в случае металлической пластины влияние на резонатор связано с высокочастотными токами в металле. Значит, высокочастотные токи возбуждаются и в диэлектрике. Из этого сразу же следовало, что теория Вебера должна быть отброшена.

Однако полученные результаты согласовались не только с гельмгольцевской, но и с максвелловской теорией, к которой Герц чувствовал все возраставшее доверие. Одно из важнейших различий между этими теориями состоит в том, что в случае пустого пространства электрические и магнитные воздействия по Гельмгольцу передаются от точки к точке мгновенно (дальнодействие), а по Максвеллу — посредством распространяющихся с конечной скоростью (близкодействие), равной скорости света в вакууме, электромагнитных волн, отличающихся от световых только более низкой частотой. И Герц задался целью экспериментально выяснить, какое из этих представлений верное.

Снова помогло довольно случайное наблюдение. Экспериментируя со своей излюбленной системой вибратор — резонатор, ученый заметил, что, казалось бы, совершенно естественная картина с ослаблением искры в резонаторе по мере его удаления от вибратора как-то странно нарушается, когда резонатор оказывается вблизи стен помещения или рядом с железной печкой. Лишь после напряженных размышлений и дополнительных опытов Герц осознал, что дело тут в отражении от стен волн, порождаемых в пространстве «очень быстрыми электрическими колебаниями» в вибраторе. А коль скоро это так, то странное поведение искры в резонаторе вблизи стен есть не что иное, как следствие интерференции падающих и отраженных волн. Закрепив на стене заземленный металлический лист (было выяснено, что таким образом условия отражения улучшаются) и установив на некотором расстоянии от него вибратор, Герц стал медленно перемещать резонатор в направлении, перпендикулярном стене. При этом оказалось, что периодически через равные расстояния резонатор попадает в «мертвые зоны», в которых искра отсутствует даже при самых узких зазорах между шариками искрового промежутка. Это говорило о том, что в таких зонах, как писал Герц, «каждое колебание уничтожается другим колебанием, вышедшим позднее, но достигшим той же точки по более короткому пути. Если, однако, более короткий путь требует меньше времени, чем более длинный, то распространение происходит с конечной скоростью». Удвоенное расстояние между мертвыми зонами — это длина волны. В одном из первых подобных опытов непосредственно измеренная длина волны λ составила 4,5 м. По формуле $T=\lambda/c$, где c — скорость света, Герц нашел для периода колебаний значение $1{,}5\times10^{-8}$ с, которое с учетом точности измерений вполне удовлетворительно согласовывалось со значением $1{,}4\times10^{-8}$ с, найденным для вибратора по формуле $T=2\pi\sqrt{LC}$.

Итак, электромагнитные волны в пустом пространстве, открытые Максвеллом «на кончике пера» еще в 1864 году, в 1888 году стали, наконец, физической реальностью. Позже Герц писал: «Эти опыты очень просты в принципе, но тем не менее они влекут за собой важнейшие следствия. Они рушат всякую теорию, которая считает, что электрические силы перепрыгивают пространство мгновенно. Они означают блестящую победу теории Максвелла. Последняя уже не связывает удаленные друг от друга физические события. Насколько маловероятным казалось ранее ее воззрение на сущность света, настолько трудно теперь не разделить это воззрение ⟨...⟩. Наши опыты сами неуклонно поднимали нас на высоту того горного перевала, который, согласно теории, соединяет область света с областью электричества. Остается пройти несколько шагов дальше и исследовать спуск в область уже изученной оптики».

Эти вызвавшие подлинный восторг всего научного мира «последние шаги» были сделаны Герцем все в том же 1888 году и, конечно, с помощью все той же «неразлучной пары» вибратор — резонатор. Только теперь и вибратор, и резонатор, которым придавалась линейная конфигурация (в сущности та же, что используется в современных дипольных телевизионных антеннах, «украшающих» крыши наших домов), были установлены каждый вдоль фокальной линии параболически изогнутого жестяного листа. Освоившись с техникой возбуждения и регистрации электромагнитных волн, Герц отказался от использования в вибраторе больших металлических шаров относительно высокой электрической емкости и перешел тем самым в более высокочастотную область с длинами волн 0,4—0,5 м.

С помощью усовершенствованной таким образом установки Герц сразу же удостоверился в том, что, подобно световым, его «электрические лучи» поддаются фокусировке параболическими «зеркалами», при этом расстояния, до которых «прощупывается волна», возросли до 16 м. Затем ученый легко продемонстрировал прямолинейность распространения — при перегораживании пути от вибратора к резонатору металлическим экраном искры в искровом промежутке резонатора исчезали. В то же время оказалось, что изоляторы для электромагнитных волн прозрачны. Столь же легко была продемонстрирована полная аналогия с законом отражения света — для этого вибратор и резонатор устанавливали по одну сторону заземленного металлического листа, игравшего роль зеркала, и проверяли равенство углов падения и отражения.

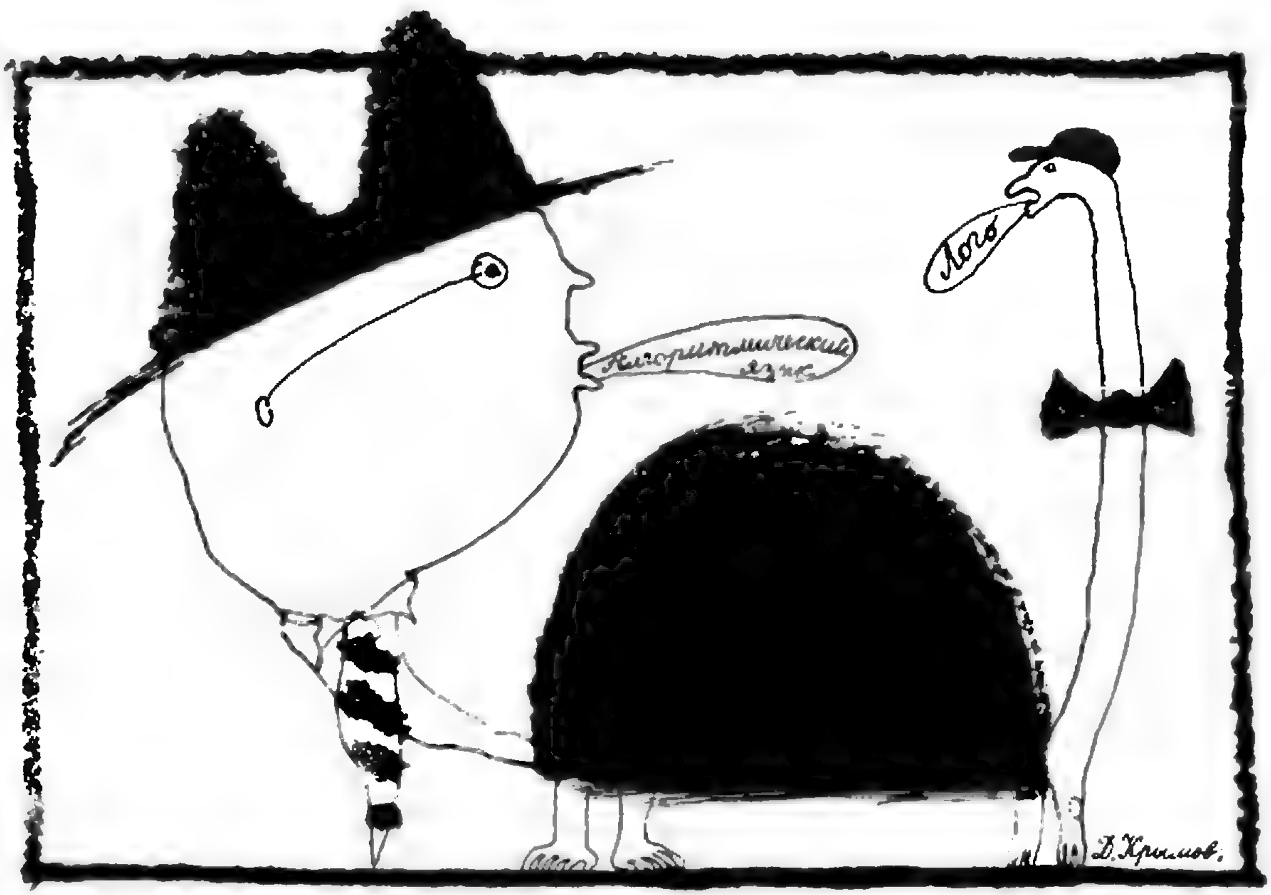
Далее Герц доказал, что, подобно световым, электромагнитные волны поперечны — при повороте резонатора на 90° относительно вибратора искры в приемном устройстве исчезали.

Оставалось еще продемонстрировать возможность преломления. Для этого Герц использовал призму из асфальта массой свыше тонны и с сечением в форме равнобедренного треугольника со стороной 1,2 м и углом при вершине 30°. Согласно максвелловской теории показатель преломления электромагнитных волн в немагнитном диэлектрике определяется соотношением $n=\sqrt{\varepsilon}$, где ε — диэлектрическая проницаемость. Направив «электрический луч» на асфальтовую призму, Герц зарегистрировал его отклонение на 22°, что соответствовало вполне приемлемому значению показателя преломления 1,69.

Герц умер 1 января 1894 года, не дожив до 37 лет. Но как много он успел сделать! Помимо тех работ, которые были упомянуты выше, он провел очень важные исследования катодных лучей, придал уравнениям Максвелла форму, близкую к той, в которой они записываются в наши дни (а исходных трудах Максвелла «опознать» эти уравнения не так-то просто), построил остроумную, хотя и не получившую дальнейшего развития систему механики, свободную от понятия силы, положил начало теоретическому анализу электродинамики движущихся тел — в конечном счете этот анализ завершился в 1905 году созданием специальной теории относительности. Но, конечно, главное научное достижение Герца — экспериментальное открытие электромагнитных волн, великое открытие, в огромной степени обогатившее физику и породившее радио, телевидение, радиолокацию — области техники, без которых наша жизнь теперь просто немыслима.

Важно отметить, что ничего нового по сравнению с тем теоретическим и экспериментальным «багажом», которым располагали физики лет за 10—20 до герцевских исследований, для открытия не понадобилось. Открыть то, что было буквально под руками у множества ученых, но неизменно оставалось незамеченным, Герцу удалось лишь благодаря его филигранному владению искусством физического эксперимента, неистощимой и острой наблюдательности, дотошности и глубокой физической интуиции.

Б. Е. Явелов



Искусство программирования

Язык Лого

А. А. ДУВАНОВ, Ю. А. ПЕРВИН

Урок 4: Структура данных в Лого

Алгоритмический язык и Лого

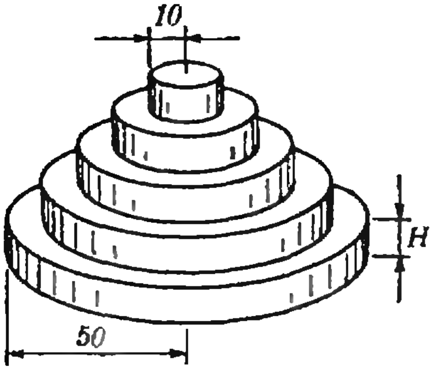
Те из читателей, которые проходят информатику в школе, наверняка сравнивают описываемый в учебнике алгоритмический язык и знакомый по «Кванту» Лого. Легко увидеть сходство обоих языков в средствах графики, условных командах, команде присваивания. Соотношения циклов в Лого и алгоритмическом языке сложнее. От цикла ДЛЯ алгоритмического языка легко перейти к циклу ПОВТОРИ. Так, вычислить объем «пирамиды», составленной из нескольких колец, можно с помощью цикла ДЛЯ:

```
V:=0
ДЛЯ R ОТ 10 ДО 50 ШАГ 10
НЦ
  V:=V+3.14*R**2*H
КЦ
```

На Лого это программируется так:

```
СДЕЛАЙ" V 0
ПОВТОРИ 5
  [СДЕЛАЙ" V СЛОЖИ УМНОЖЬ УМНОЖЬ
УМНОЖЬ R R H 3.14 V]
```

А вот цикл ПОКА, существующий в алгоритмическом языке, не имеет прямого аналога в Лого. В таком цикле вслед за словом ПОКА записывается условие. Это условие — ключ, открывающий вход в тело цикла: если условие истинно, то выполняются команды цикла и вновь проверяется условие; если же условие нарушается, машина переходит к выполнению команды, следующей за циклом. В школьном учебнике информатики приведен алгоритм вычисления НОД с помощью цикла ПОКА. Для того чтобы в Лого реализовать действия, повторяющиеся не фиксированное число раз, а зависящие от



некоторого условия (включающего переменную), надо воспользоваться **рекурсией**. Используйте эту подсказку для выполнения следующего задания.

Задача 1. Напишите на Лого функцию вычисления НОД двух чисел.

Основное сходство, которое роднит алгоритмический язык и Лого, состоит в возможности составлять описания сложного действия из более простых. Такие описания в Лого называются *процедурами*, а в алгоритмическом языке — вспомогательными алгоритмами. Столь же близки понятия *функции* в обоих языках.

Важно, однако, остановиться на различиях. Одним из таких различий является способ возврата значения функции в вызывающую программу. В Лого для этого используется команда ВЕРНИ α. Она заканчивает выполнение функции и возвращает в программу значение выражения α. В алгоритмическом языке нет специальных средств возврата. Выход из функции производится после выполнения последней команды. В качестве результата возвращается значение специальной переменной ЗНАЧ, которая совпадает по типу с типом функции.

В большинстве языков программирования существуют возможности представления и обработки литерных величин, как они называются в алгоритмическом языке. В Лого для величин такого типа существует простое название — «слово». *Слово* — это конечная упорядоченная последовательность символов, отличающихся от пробела. Слову в программе предшествует кавычка, которая не входит в счет символов слова. Слово может быть пустым — в таком слове нет ни одного символа, его обозначение — кавычка, за которой следует пробел (в алгоритмическом языке литерная переменная окаймляется парой кавычек). Примеры слов Лого: "НАДЯ — в слове 4 буквы; "Y — отдельный символ считается словом, состоящим из одного этого символа; "1918—1988 — слово из 9 символов.

Ранее слова были использованы для обозначения имен переменных. По команде СДЕЛАЙ "КЛЕТКА 1 переменная КЛЕТКА получает значение 1. Команда СДЕЛАЙ "КЛЕТКА "СЛОН делает значением переменной КЛЕТКА слово СЛОН. В алгоритмическом языке последняя команда имела бы вид: КЛЕТКА:="СЛОН"

Такие разные слова!

Представьте разговор двух мальчиков. Сережа рассказывает:

—АВВА — это имя, которое я дал своей собаке.

— Забавное имя,— говорит Антон,— а как оно пишется?

— «АВВА» — это так: сначала «А», потом «В», еще «В» и в конце опять «А».

— Она знает свое имя? — интересно узнать Антону.

Сережа рад продемонстрировать способности своей собаки:

— Ну, конечно! АВВА! Вот и она!

Трижды в этом разговоре употреблено слово АВВА и каждый раз — в разной своей роли. АВВА — это имя собаки; «АВВА» — это слово, представляющее собой последовательность букв в строгом порядке; АВВА! — это команда собаке немедленно явиться к своему хозяину. В устной речи разное использование слов можно отметить интонацией. Если же такой разговор надо записать, то для различения разных ролей слова потребуются специальные обозначения — знаки препинания.

В Лого дело обстоит точно так же. Для распознавания смысла используемых в программе слов применяют такие синтаксические правила:

— двоеточие ставят перед именем величины для того, чтобы обозначить значение, принимаемое этой величиной в текущий момент; так :ОТМЕТКА есть значение переменной ОТМЕТКА;

— кавычки ставят перед словом, представляющим собой цепочку символов; по положению такого слова в команде (по контексту) судят о смысле обозначаемого слова; так, в команде присваивания СДЕЛАЙ "КЛЕТКА "СЛОН слово в последней позиции — "СЛОН с кавычкой в начале — есть литерная константа, а слово в предшествующей позиции — "КЛЕТКА — есть имя переменной КЛЕТКА; сравните команду СДЕЛАЙ "КЛЕТКА :СЛОН, где переменная КЛЕТКА получает значение, которое имела переменная с именем СЛОН;

— перед вызовами процедур и функций (так же, как перед командами и операциями) не ставятся ни двоеточие, ни кавычка; запись КЛЕТКА :СЛОН означает вызов процедуры КЛЕТКА с параметром СЛОН.

Займемся обработкой списков

Программисты часто используют термин «данные». Этот термин можно считать синонимом понятия «информация». Обрабатываемая машиной информация может быть организована по-разному. Это либо единичные символы, либо их упорядоченный конечный набор — слово, либо упорядоченная группа слов — *список*, либо какой-нибудь другой более сложный способ объединения символов, слов и списков. Организованную по тому или иному способу информацию называют *структурой данных*.

В алгоритмическом языке каждая структура данных должна быть описана с помощью специального имени — типа величины — нат, вещ, лит и т. д. В Лого нет описания типов, однако каждая из структур алгоритмического языка имеет свои аналоги в Лого. Для представления таблиц и более сложных структур данных Лого использует списки, расширяющие понятие табличной величины алгоритмического языка.

Обработка списков требует совсем иных операций, чем арифметические расчеты. Пусть необходимо запомнить в памяти ЭВМ информацию об учениках класса — список сведений по каждому ученику. Для работы с такой структурой полезно иметь операции, которые позволят вставлять, удалять, находить, изменять элементы списка.

Выборка первого элемента структуры — ПЕРВЫЙ α (или ПРВ α). Аргумент этой операции — слово или список, результат — первый элемент структуры. Например,

```
ПРВ "ЛОГО = "Л,
ПРВ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ]=
= "ЛОГО
```

Структура без первого элемента — КРОМЕПЕРВОГО α (или КПРВ α). Аргумент этой операции — слово или список, результат — структура без первого элемента. Например,

```
КПРВ "ЛОГО = "ОГО
КПРВ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВА-
НИЯ] = [ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ]
```

Последний элемент структуры — ПОСЛЕДНИЙ α (или ПСЛ α). Аргумент этой операции — слово или список, результат — последний элемент структуры. Например,

```
ПСЛ "ЛОГО = "О
ПСЛ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВА-
НИЯ] = "ПРОГРАММИРОВАНИЯ
```

Структура без последнего элемента — КРОМЕПОСЛЕДНЕГО α (или КПСЛ α). Аргумент операции — слово или список, результат — структура без последнего элемента. Например,

```
КПСЛ "ЛОГО = "ЛОГ
КПСЛ [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВА-
НИЯ] = [ЛОГО ЯЗЫК]
```

Включение элемента в начало структуры — ВНАЧАЛО $\alpha\beta$ (или ВНАЧ $\alpha\beta$). Первый аргумент — включаемый элемент, второй — изменяемая структура. Например,

```
ВНАЧ "Л "ОГО = "ЛОГО
ВНАЧ "ЛОГО [ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВА-
НИЯ] = [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВА-
НИЯ]
```

Включение элемента в конец структуры — ВКОНЕЦ $\alpha\beta$ (или ВКОН α β). Первый аргумент — включаемый элемент, второй — изменяемая структура. Например,

```
ВКОН "О "ЛОГ = "ЛОГО
ВКОН "ПРОГРАММИРОВАНИЯ [ЛОГО ЯЗЫК] = [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ]
```

Определение длины структуры — ДЛИНА α. Аргумент этой операции — слово или список; результат — число элементов в структуре. Например,

```
ДЛИНА "ЛОГО = 4
ДЛИНА [ЛОГО ЯЗЫК ПРОГРАММИРОВАНИЯ] = 3
ДЛИНА [[РУЧКИ 3] [ТЕТРАДИ 2] [ПЕНАЛЫ 5]] = 3
```

Для анализа структур данных в Лого, кроме ранее введенных, используются следующие виды условий над структурами:

```
ЧИСЛО? СЛОВО? СПИСОК? ПУСТО?
```

Эти условия проверяют, является ли структура числом, словом, списком или она пуста.

Итак, данные об учениках класса хранятся в виде списка:

```
КЛАСС=
  [[ИВАНОВ ПЕТЯ ПОЛЕВАЯ 35 17]
   [ДАНИЛОВ САША ПУШКИНА 58 2]
        ...]
```

Нужно составить список фамилий всех учеников класса. «Досье» Иванова достанем из списка КЛАСС операцией ПРВ :КЛАСС:

```
[ИВАНОВ ПЕТЯ СТАРОСТА ПОЛЕВАЯ 35 17]
```

Из этого списка нам снова нужен первый элемент:

```
ПРВ ПРВ :КЛАСС = "ИВАНОВ
```

Фамилии мы будем собирать в списке ФАМ:

```
СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС
:ФАМ                                 (1)
```

Команда (1) удлиняет список ФАМ на один элемент. Слово ИВАНОВ добавляется в его конец. А как быть с Петровым? Очень просто: надо укоротить список КЛАСС:

```
СДЕЛАЙ "КЛАСС КПРВ :КЛАСС            (2)
```

и снова выполнить команду (1). А дальше? Все повторяется: за командой (1) нужна команда (2) и т. д., пока весь список КЛАСС не исчерпается. Вот как выглядит описание нужной функции:

```
ЭТО ФАМИЛИИ :КЛАСС :ФАМ
    ПОВТОРИ ДЛИНА :КЛАСС
       [СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ
                          :КЛАСС :ФАМ
        СДЕЛАЙ "КЛАСС КПРВ :КЛАСС
       ]
    ВЕРНИ :ФАМ
КОНЕЦ
```

Составив такое описание, получаем желаемый список фамилий при помощи команды

```
ВЫВЕДИ ФАМИЛИИ :КЛАСС []             (3)
```

Построенная функция — не единственная, которая решает поставленную задачу. Можно предложить ее рекурсивный вариант:

```
ЭТО ФАМИЛИИ :КЛАСС :ФАМ
   ЕСЛИ ПУСТО? :КЛАСС [ВЕРНИ :ФАМ]
   СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС
   :ФАМ
   ВЕРНИ ФАМИЛИИ КПРВ :КЛАСС :ФАМ
КОНЕЦ
```

Здесь команда

```
ЕСЛИ ПУСТО? :КЛАСС [ ВЕРНИ :ФАМ ]
```

обеспечивает окончание рекурсии, когда список КЛАСС будет исчерпан. Команда

```
СДЕЛАЙ "ФАМ ВКОН ПРВ ПРВ :КЛАСС
:ФАМ
```

добавляет очередную фамилию в список ФАМ. Команда

```
ВЕРНИ ФАМИЛИИ КПРВ :КЛАСС :ФАМ
```

делает рекурсивный вызов функции ФАМИЛИИ с укороченным списком КЛАСС.

Задачи 2 и 3. Напишите два варианта функции АДРЕС (рекурсивный и с командой цикла), которая по фамилии выдавала бы в качестве своего значения адрес ученика. Например, результатом вызова АДРЕС :КЛАСС "ИВАНОВ должен быть список [ПОЛЕВАЯ 35 17], а результатом вызова АДРЕС :КЛАСС "ДАНИЛОВ — список [ПУШКИНА 58 2]. Функция должна предусматривать выдачу сообщения [ТАКОГО УЧЕНИКА НЕТ] в случае ошибочной фамилии.

Задача 4. Напишите функцию, вычисляющую общее число слов в списке. Ясно, что стандартная функция ДЛИНА не всегда сработает правильно. Например, число элементов в списке [[ВАСЯ ПЕТЯ] КОЛЯ] — два, в то время как число слов — три.

Внимание! О дальнейшем порядке работы ЗШП читайте на с. 47.

Варианты вступительных экзаменов

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{2}{3}\sqrt{x+9}-\sqrt{\frac{x^2+8x}{x+9}}=\frac{3}{\sqrt{x+9}}.$$

2. Найдите все значения a, при которых расстояние между вершинами парабол $y=x^2+ax+\frac{2}{3}$ и $y=3x^2+5ax+\frac{19}{12}a^2$ больше $\frac{\sqrt{29}}{3}$.

3. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей AC и BD равнобедренной трапеции $ABCD$ касается меньшего основания BC и боковой стороны AB. Найдите площадь трапеции $ABCD$, если известно, что ее высота равна 16, а радиус окружности равен 3.

4. Найдите все решения уравнения

$$\frac{4\cos 4\pi x}{1+3\,\mathrm{ctg}^2\pi x}=-1,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\log_7\log_{\frac{11}{16}}\left(\frac{11}{32}-\frac{13}{8}x-x^2\right)<0.$$

5. В основании пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, в которой $AD=2$, $BC=1$, высота трапеции равна 3. Высота пирамиды проходит через точку O пересечения диагоналей трапеции, $SO=\frac{4}{\sqrt{5}}$. Точка F лежит на отрезке SO, причем $SF:FO=1:3$. Цилиндр, ось которого параллельна апофеме грани SAD, расположен так, что точка F является центром его верхнего основания, а точка O лежит на окружности нижнего основания. Найдите площадь части верхнего основания цилиндра, лежащей внутри пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\log_2(-\sin x)-\log_4\cos x=-\frac{1}{2}+\log_4 3.$$

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC выбраны точки K и L так, что $AK=KL=LB$. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что $CK=\sqrt{2}\,CL$.

3. Касательная к графику функции $y=\frac{27}{2}x^4-\frac{1}{2}$ образует с осью абсцисс угол, равный $\mathrm{arctg}\,2$, и пересекает в точках A и B окружность с центром в начале координат. Найдите радиус этой окружности, если известно, что $AB=1$.

4. Дано уравнение

$$x^2+3xy+3ay^2+\left(\frac{9}{2}-a\right)y+4x+5=0.$$

Найдите все значения a, при которых:

1) это уравнение имеет хотя бы одно решение при $y=2$;

2) найдется хотя бы одна пара чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющая этому уравнению.

5. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) точка P — середина апофемы SD грани SBC. На ребре AB взята точка M так, что $MB:AB=2:7$. Сфера, центр которой лежит на прямой MP, проходит через точки A, C и пересекает прямую BC в точке Q так, что $CQ=m$. Найдите объем пирамиды $SABC$, если известно, что радиус сферы равен $\frac{m}{\sqrt{3}}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Арбуз взвешивают в салоне самолета на пружинных весах один раз перед взлетом, а другой — во время полета самолета вдоль меридиана. Какой должна была бы быть скорость самолета, чтобы показания весов в полете уменьшились на 1/16 по сравнению с их показаниями перед взлетом? Радиус Земли принять равным $R=6400$ км. Вращением Земли вокруг своей оси и высотой полета самолета по сравнению с радиусом Земли пренебречь.

2. Один моль одноатомного идеального газа совершает замкнутый цикл, состоящий из процесса с линейной зависимостью давления от объема, изохоры и изобары (рис. 1). Найдите количество теплоты, подведенное к газу на участках цикла, где температура газа растет. Температура газа в состояниях *1* и *2* равна $T_1=300$ К, отношение объемов на изобаре $V_3/V_1=5/2$, направление обхода цикла указано стрелками. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. При замкнутом ключе K (рис. 2) вольтметр V_1 показывает $U_1=0{,}8\mathcal{E}$ ($\mathcal{E}$ — ЭДС бата-

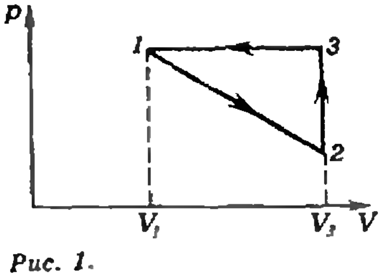


Рис. 1.

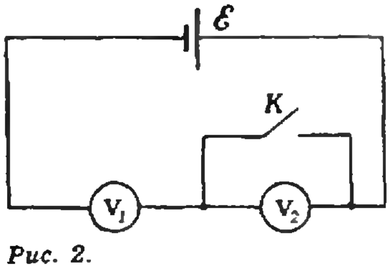


Рис. 2.

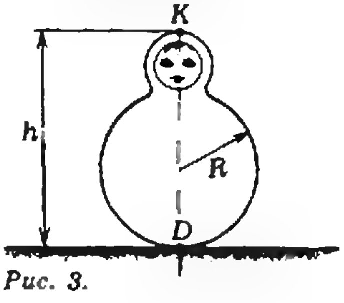


Рис. 3.

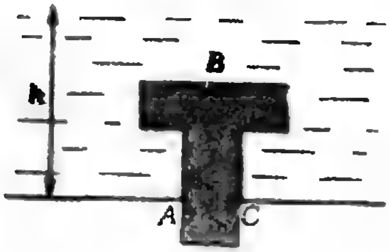


Рис. 4.

реи). Что покажут вольтметры V_1 и V_2 при разомкнутом ключе, если их сопротивления равны?

4. Пучок лазерного излучения мощностью $W=100$ Вт падает на непрозрачную пластинку под углом $\alpha=30°$. Пластинка поглощает 60 % падающей энергии, а остальную энергию зеркально отражает. Найдите абсолютную величину силы, действующей на пластинку со стороны света. Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Вариант 2

1. Детская игрушка-неваляшка (ванька-встанька) представляет собой фигуру высотой $h=21$ см и массой $M=300$ г с симметричным распределением массы относительно оси KD, причем поверхность нижней части неваляшки есть часть сферы радиусом $R=6$ см (рис. 3). Если неваляшку поставить на шероховатую плоскую поверхность, наклоненную под углом $\alpha=30°$ к горизонту, то неваляшка занимает устойчивое положение равновесия, при котором ее ось KD отклоняется от вертикали на угол $\beta=45°$. Какую наименьшую массу пластилина надо прикрепить к макушке неваляшки в точке K, чтобы она потеряла устойчивость на горизонтальной поверхности стола?

2. Подводная опора, забитая в глинистый грунт водоема глубиной $h=3$ м, представляет из себя два соосных цилиндра различных диаметров (рис. 4). Найдите силу, действующую на опору со стороны воды в водоеме, если площадь сечения цилиндра меньшего диаметра, забитого в грунт, $S=1$ м^2, объем части опоры ABC, находящейся в воде, $V=4$ м^3, плотность воды $\rho=1$ г/см^3.

3. Проволочное кольцо, состоящее из двух разнородных тонких проводников в форме полуокружностей одинаковой длины L с равными площадями сечения проводников s, равномерно вращается с частотой ν в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}_0$. Ось вращения кольца проходит по его диаметру и составляет прямой угол с вектором магнитной индукции. Найдите мощность тепловых потерь в кольце, если удельные электрические сопротивления проводников равны ρ_1 и ρ_2.

4. На плоскопараллельную стеклянную пластинку, нижняя грань которой посеребрена, падает под углом $\alpha=30°$ узкий пучок света, содержащий излучение двух длин волн (рис. 5). Показатель преломления стекла для одной длины волны равен n_1, а для другой — $n_2(n_2>n_1)$. В результате преломления на верхней грани, однократного отражения от нижней и еще одного преломления на верхней грани из пластинки выходят два пучка света. Найдите расстояние между пучками, вышедшими из пластинки, если ее толщина H.

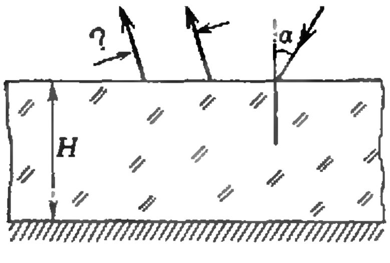


Рис. 5.

Публикацию подготовили
К. А. Букин, В. Н. Дерябкин, В. И. Чивилёв

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1+\frac{5a-3}{x-a}=\frac{5(2a+1)(1-a)}{(x-a)(x-3a+1)}.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x-4\cos x}=\sqrt{1-2\operatorname{ctg} x}\,.$$

3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Верно ли, что плоскости ABC_1 и A_1B_1D перпендикулярны? Дайте обоснование ответа.

4. Какие неравенства называются равносильными? Равносильны ли неравенства $x^2-x<6$ и $(x^2-x)(x^2+1)<6(x^2+1)$? Верно ли, что для произвольных функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ неравенства $f(x)>g(x)$ и $f(x)\cdot h(x)>g(x)\cdot h(x)$ равносильны?

5. При каких значениях a уравнение

$$(a+1-|x-1|)(a+x^2-2x)=0$$

имеет ровно три корня?

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{a+x}{ax^2}=\frac{1}{x(a-1)}+\frac{1}{a(a-1)}.$$

2. При каких значениях x производная функции $y=15\sin x-10\sin 3x+3\sin 5x$ равна нулю?

3. Прямая параллельна плоскости. Верно ли, что все точки прямой равноудалены от плоскости? Дайте обоснование ответа.

4. Приведите определение, изложите с обоснованием свойства функции $y=\cos x$ и построение ее графика.

5. График функции $y=ax^2+bx+c$ пересекает ось x в двух точках, одна из которых лежит между точками (2; 0) и (3; 0), а другая — между точками (—5; 0) и (—4; 0). Этот же график пересекает ось y в точке, лежащей между точками (0; —7) и (0; —6). Определите знаки a, b, c. Что больше: $|a|$ или $|c|$? $|a|$ или $|b|$?

Публикацию подготовил
В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Физика

Задачи устного экзамена

1. Конькобежец массой $M=60$ кг бросает в горизонтальном направлении камень массой $m=2$ кг со скоростью $v=15$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если известно, что коэффициент трения полозьев о лед $\mu=0{,}02$?

2. Льдина площадью поперечного сечения $S=1$ м^2 и высотой $h=0{,}4$ м плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

3. Резиновая камера содержит воздух при температуре $t_1=27$ °C и нормальном атмосферном давлении. На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воды $t_2=4$ °C.

4. В комнате объемом $V=75$ м^3 затопили печь, и температура поднялась с $t_1=16$ °C до $t_2=21$ °C. Давление воздуха в комнате не изменилось и осталось равным $p_0=1$ атм. Какая масса воздуха ушла при этом из комнаты?

5. В сосуд, содержащий $V_1=4{,}6$ л воды при $t_1=20$ °C, бросают кусок стали массой $m_2=10$ кг, нагретый до $t_2=500$ °C. Вода нагревается до $t_3=100$ °C, и часть ее обращается в пар. Найдите массу образовавшегося пара. Удельная теплоемкость воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость стали $c_2=460$ Дж/(кг·К).

6. Лампа мощностью $P=500$ Вт рассчитана на напряжение $U_1=110$ В. Определите величину дополнительного сопротивления, позволяющего включить ее в сеть с напряжением $U_2=220$ В без изменения ее мощности.

7. Вольтметр, подключенный к зажимам источника тока, показал $U_1=6$ В. Когда к тем же зажимам подключили лампочку, вольтметр стал показывать $U_2=3$ В. Что покажет вольтметр, если вместо одной подключить две такие же лампочки, соединенные последовательно?

8. Электродвигатель подъемного крана работает под напряжением $U=380$ В и потребляет ток $I=20$ А. Каков КПД установки, если груз массой $m=1$ т кран поднимает равномерно на высоту $h=19$ м за $t=50$ с?

9. Луч света падает на поверхность воды под углом $\alpha_1=40°$. Под каким углом должен упасть луч на поверхность стекла, чтобы угол преломления оказался таким же? ($n_в=1{,}3$; $n_с=1{,}6$.)

10. Какой длины волны свет падает на поверхность металлической пластины с работой выхода $A=10^{-18}$ Дж, если скорость фотоэлектронов $v=3\cdot10^6$ м/с? Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с, скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовил *О. Ю. Овчинников*

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и Ленинграде.

Цель ВЗМШ — рассказать своим ученикам о многих интересных вещах, связанных со школьным курсом математики, научить решать самые разнообразные задачи, приучить самостоятельно работать с книгой и грамотно, четко и кратко излагать свои мысли на бумаге. Всем успешно окончившим ВЗМШ (в том числе ее филиалы и группы «Коллективный ученик») выдаются соответствующие удостоверения.

Для поступления в ВЗМШ надо успешно выполнить первое задание. Преимуществами пользуются ребята, проживающие в сельской местности, рабочих поселках и небольших городах.

Задание 1. *Изучите статью С. М. Львовского и А. Л. Тоома «Разберем все варианты» в этом номере журнала и постарайтесь решить задачи 1—12 для самостоятельного решения.* Чтобы быть принятым в ВЗМШ, не обязательно решить все 12 задач.

Решения задач следует выполнить на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью; не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради наклейте листок бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя ученика	*Иванов Петр*
Год рождения	*1974*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Ф. И. О. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3, мать — медсестра*
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	*123456 Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1*

В тетрадь надо вложить два листка бумаги размером 6×14 см с четко написанным почтовым адресом, фамилией и именем ученика.

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, что и в статье: сначала условие, потом решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 15 марта 1988 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1988 г., будете получать все дальнейшие задания, которые содержат теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все дальнейшие контрольные работы будут проверяться и подробно рецензироваться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ. Филиалы работают по тем же программам и пособиям, что и московская группа ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по журналу «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать без ограничений с любого месяца в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Задание № 1 надо выслать по адресу: 119823 Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ, на прием или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Ижевск, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Ташкент, Фрунзе, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах — в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Магнитогорск, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне — при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве — при областном Дворце пионеров и школьников, и Заочная физико-техническая школа — при Московском институте стали и сплавов.

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), присылают свои работы по адресу: 197136 Ленинград, Чкаловский пр., 25а, С-З ЗМШ. На прием.

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься по той же программе в группах «Коллективный ученик». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1988 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1988 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно для учащихся I и II курсов СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться в 1988/89 учебном году. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Без контрольной работы, только по заявлениям, принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзной и республиканских, а также победители краевых и областных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении начинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ являются аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;

2) фамилия, имя учащегося;

3) школа и класс (полное название);

4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);

5) фамилия, имя, отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 939-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, КазГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ;

277003 Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1988 году

1. Найдите наименьшее натуральное число $x>1$, которое при делении на 2, 3, 4, 5 и 6 дает в каждом случае остаток 1.

2. Что больше: $\sqrt{3}$ или $\sqrt[3]{5}$?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+vz=1987, \\ yz+zx=1988, \\ xy+zx=1989. \end{cases}$$

4. Докажите, что если $a+b>2$, то $a^8+b^8>2$.

5. Дано уравнение $x_1^{11}+x_2^{11}+\ldots+x_{1987}^{11}=1988$.

а) Найдите все решения в натуральных числах.

б) Докажите, что целых решений бесконечно много.

6. Найдите на гипотенузе прямоугольного треугольника такую точку, чтобы сумма квадратов ее расстояний до катетов была наименьшая.

7. Группа из 11 учеников 7-го класса, среди которых были мальчики и девочки, пошла на дискотеку. Они танцевали, стоя равномерно по кругу и бросая друг другу серпантин. Докажите, что найдется мальчик и два его приятеля (или девочка и две ее подружки), с которыми он (или она) может быть соединен бумажными лентами равной длины.

8. Докажите, что если в четырехугольнике каждый из углов больше 89°, то каждый из них меньше 93°.

9. Проведены две окружности с центром O радиусами r и R: ОКР (O, r) и ОКР (O, R), причем $R>r$. Из точки O выпущены лучи OA_1, OA_2 и OA_3: луч OA_3 лежит внутри острого угла между OA_1 и OA_2. Пусть ОКР $(O, r)\cap OA_1=E$, ОКР $(O, R)\cap OA_1=B$, ОКР $(O, r)\cap OA_3=D$, ОКР $(O, R)\cap OA_2=C$, причем точки B, D и C лежат на одной прямой. Найдите отношение $\overset{\frown}{COD}:\overset{\frown}{EDB}$.

10. Чему равна предпоследняя цифра квадрата целого числа, если последняя цифра равна пяти?

Заочная физико-техническая школа при МИСиСе

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1988/89 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике, а также в профориентации по профилю МИСиСа.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики МИСиСа.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач, а также профориентационные материалы. Присланные учащимися работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся.

Учащиеся, успешно окончившие школу в полном объеме, получают удостоверение, которое дает преимущество при поступлении в МИСиС.

Занятия в ЗФТШ начнутся с 1 октября. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по математике и физике. Заявление и справку вместе с решением первого (вступительного) задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Несколько слов о самом институте. Московский институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической и машиностроительной промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах института обучение строится так, что студенты уже с первого курса приобщаются к самостоятельной научной работе.

Поступив в МИСиС, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела, исследовать свойства вещества при низких температурах, изучать высокотемпературные процессы в жидкостях и твердых телах, создавать сплавы с новыми свойствами и новые полупроводниковые приборы.

Поправка

В «Кванте» № 11 за 1987 г. на с. 49 неверно даны условия упражнений 8 и 9. Правильные условия таковы:

8 (МФТИ, 1986). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x=\sin 2y, \\ 2\sin(4x+8y)\times \\ \times\sin(3x+10y)+ \\ +5\cos(7x+2y)=4. \end{cases}$$

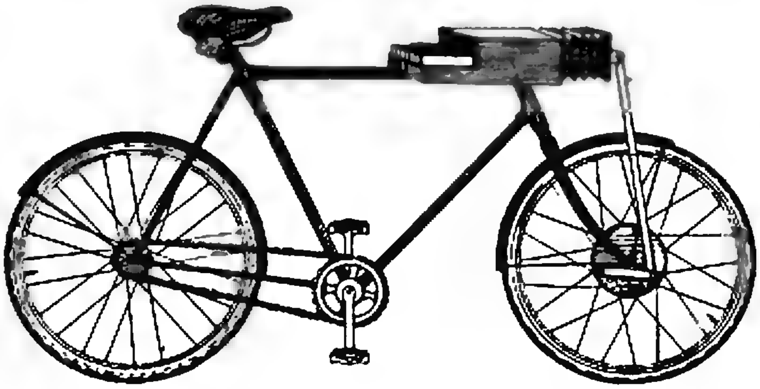
9 (МФТИ, 1982). Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x\cdot\sin y+ \\ +2\operatorname{ctg} x\cdot\cos y=\sqrt{5/2}, \\ 2\operatorname{ctg} x\cdot\sin y- \\ -\operatorname{tg} x\cdot\cos y=\sqrt{5/2}, \end{cases}$$

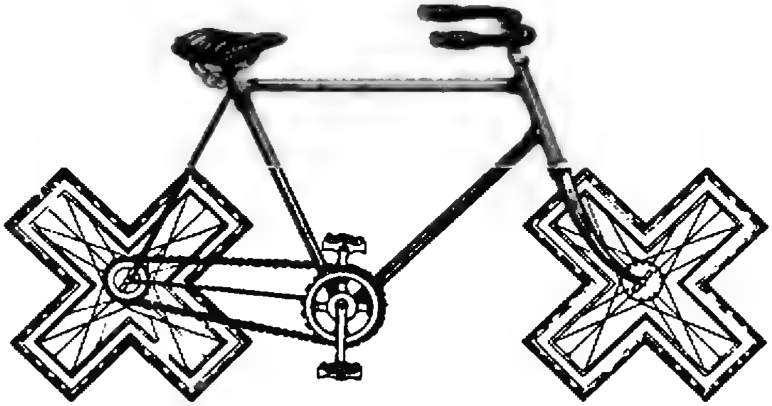
удовлетворяющие условиям $\pi/2<x<3\pi/2$, $0<y<\pi$.

„Квант" улыбается

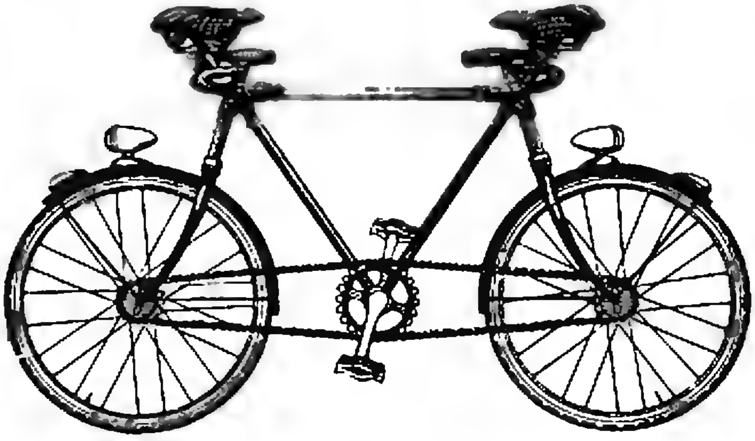
Велосипед придумали давно. Но жизнь предъявляет все новые требования. И нет предела человеческой изобретательности!



Велосипед-гармошка. Руль заменен баяном, что позволяет музыкантам совершенствовать свое искусство на ходу.



Велосипед для езды по ступенькам лестницы.



Симметричный велосипед. Специально созданный, чтобы одинаково двигаться в обоих направлениях.

Из «Каталога несуществующих объектов»

Ответы, указания, решения

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. 9/5. 2. $a\in(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$.

3. 512/3. Указание. Пусть $AD=a$. Так как BD — биссектриса угла B, треугольник ABD равнобедренный ($AB=AD$, рис. 1). Из подобия $\triangle BOC \backsim \triangle AOD$ следует, что $BC=\frac{3}{13}a$. Из прямоугольного треугольника ABH находим a.

4. $\{-1/3;\ -2/3;\ -5/4;\ -4/3\}$. Указание. Заменой $y=\cos 2x$ уравнение приводится к виду $y(4y^2-4y-3)=0$. Выбираем корни этого уравнения, содержащиеся во множестве решений неравенства $(-11/8;\ -7/8)\cup(-3/4;\ -1/4)$.

5. $\arccos 35/37+12/37-2/27$. Решение. Рассмотрим сечение SMN пирамиды плоскостью, перпендикулярной основаниям AD и BC трапеции $ABCD$ (рис. 2). Так как $MN=3$ и $OM/ON=2$, $OM=2$, $ON=1$. Из треугольников MSO и MSN получаем $\angle MSO=\arccos 2/3$, $\angle MSN=\arccos 1/\sqrt{21}$. Из точки F проведем прямую FL, перпендикулярную SM. $FL=SF\sin\angle MSO=1/3$, $FK=1$. Из прямоугольного треугольника FPO находим радиус цилиндра $PO=1$. Так как $PO=FK$, цилиндр имеет единственную общую точку K с гранью SBC. Рассмотрим сечение пирамиды плоскостью, содержащей верхнее основание цилиндра (рис. 3), — это трапеция $K_1L_1L_2K_2$ с основаниями K_1K_2, лежащем в плоскости SAD, и L_1L_2, лежащем в плоскости SAD. Так как $\triangle SAD \backsim \triangle SL_2L_1$ и $\triangle SBC \backsim \triangle SK_2K_1$, получаем $L_1L_2=2/9$, $K_1K_2=2/3$ и $\angle L_1K_1K_2=\operatorname{arctg} 6$. Отсюда следует, что прямые K_1L_1 и K_2L_2 пересекаются в точке Q, лежащей на окружности. Осталось найти площадь фигуры $L_1L_2N_2KN_1$, для чего следует найти площадь сектора FN_1K и площади треугольников N_1QF и QL_1L_2.

Вариант 2

1. $x=-\pi/3+2\pi k\ (k\in Z)$.

2. $\angle B=\arccos\sqrt{2/3}$. Указание. Пусть $\angle B=\varphi$, $BL=c$, $CL=a$, тогда

$$\begin{cases} a^2=c^2+3c^2\cos^2\varphi, \\ 2a^2=4c^2-3c^2\cos^2\varphi, \end{cases}$$

откуда $\cos\varphi=\sqrt{3}/2$.

3. $3/2\sqrt{5}$. Указание. Касательная $y=2x-1$ пересекает ось Ox в точке $C(1/2;\,0)$. Опустив из точки O перпендикуляр OK на хорду AB, находим его длину из треугольника OKC, а затем из треугольника OKB — радиус окружности.

4. 1) $a\leqslant 11/10$; 2) $a\leqslant\frac{3}{2}$, $a\geqslant 15/2$. Указание. 2) Если неравенство $D(y,a)=(9-12a)y^2+(6+4a)y-4\geqslant 0$ (*) имеет решения, то требуемая пара (x,y) существует. При $a=3/4$ неравенство становится линейным. Для того чтобы неравенство (*) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы либо $(2a+3)^2+4(9-12a)\geqslant 0$, либо $a<3/4$ и $(2a+3)^2+4(9-12a)<0$.

5. $\frac{45}{1024}\sqrt{3}m^3$. Решение. Пусть SO — высота пирамиды $SABC$, K — центр сферы, K_1 — проекция этой точки на плоскость ABC. Примем прямые BO и SO за координатные оси y и z соответственно, а прямую, перпендикулярную плоскости SOB,— за ось x. Оси x и y изображены на рисунке 4. Положим $AB=a$, $SO=h$, тогда, проводя необходимые вычисления, получим $A\left(-\frac{a}{2};\ \frac{-a\sqrt{3}}{6};\ 0\right)$, $P\left(\frac{a}{8};\ \frac{a\sqrt{3}}{24};\ \frac{h}{2}\right)$, $M\left(-\frac{a}{7};\ a\frac{4\sqrt{3}}{21};\ 0\right)$.

По условию сфера проходит через точки A и C, поэтому ее центр K лежит в координатной плоскости yz. Так как K лежит на прямой MP, то $\overrightarrow{MK}=\lambda\overrightarrow{MP}$ при некотором λ. λ находим из условия принадлежности конца вектора $\overrightarrow{OM}+\lambda\overrightarrow{MP}$ плоскости yz. Получаем $\lambda=\frac{8}{15}$ и $K(0;\ a\sqrt{3}/9;\ 4/15h)$. Найдем связь между a и m. Сечение сферы плоскостью ABC — окружность, радиус которой определяем по формуле расстояния $AK_1=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{13}{3}}a$ (см. рис. 4). В треугольнике AQC имеем $AQ=2AK_1\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{13}}{3}a$, и, применяя теорему косинусов, получаем уравнение $m^2+a^2-ma=\left(\frac{\sqrt{13}}{3}a\right)^2$, откуда $a=\frac{3}{4}m$. Высоту пирамиды h находим из уравнения $AK=\frac{m}{\sqrt{3}}$. Следовательно, $h=$

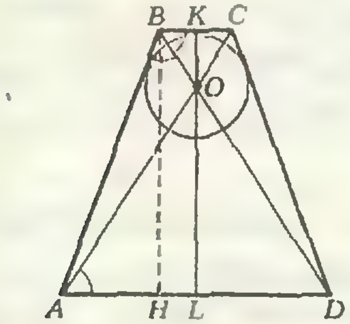


Рис. 1.

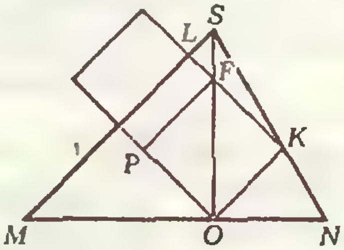


Рис. 2.

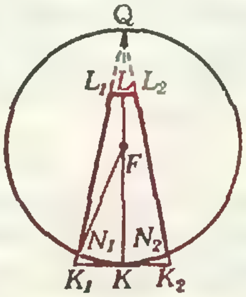


Рис. 3.

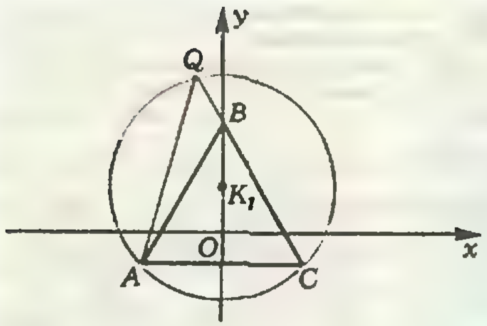


Рис. 4.

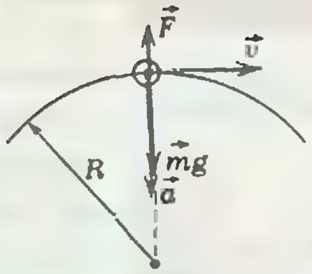


Рис. 5.

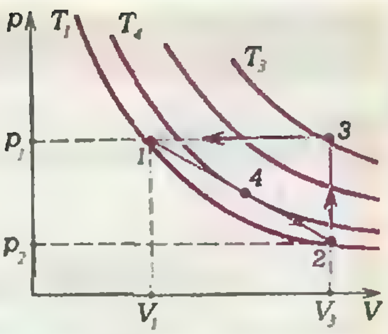


Рис. 6.

$=\frac{5}{4}a$, и объем пирамиды равен $\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\times$ $\times\frac{5}{4}a=\frac{45}{1024}\sqrt{3}m^3$.

Физика

Вариант 1

1. Арбуз движется по окружности радиусом R со скоростью v, равной скорости самолета, и имеет центростремительное ускорение $a=v^2/R$, направленное к центру окружности (рис. 5). На арбуз действуют сила тяжести mg и сила упругости со стороны пружинных весов $F=15mg/16$. Уравнение второго закона Ньютона, записанное в проекциях на радиальное направление, имеет вид $mg-F=ma$. Подставив в последнее равенство выражения для F и a, получаем после простых преобразований

$$v=\sqrt{gR}/4\approx 2\ \text{км/с}.$$

2. Для нахождения участков цикла, где температура растет, проведем ряд изотерм (рис. 6). Теперь наглядно видно, что температура растет на участке *2—3* и на участке *1—4* — части процесса *1—2*. Причем температура T_4 является максимальной для процесса *1—2*. Пусть T_3 — температура газа в точке *3*, а p_1 и p_2 — давления в точках *1* и *2*. Выразим T_3 и p_2 через T_1 и p_1. Для точек *3* и *1* $V_3/T_3=V_1/T_1$, откуда $T_3=T_1V_3/V_1$. По условию $V_3/V_1=5/2$, поэтому $T_3=5T_1/2$. Для точек *2* и *1* $p_2V_3=p_1V_1$, таким образом, $p_2=p_1V_1/V_3=2p_1/5$. Используя первый закон термодинамики для участка *2—3*, найдем количество теплоты, подведенное к газу на этом участке:

$$Q_{23}=\frac{3}{2}R(T_3-T_1)=\frac{9}{4}RT_1.$$

Для определения температуры T_4, давления p_4 и объема V_4 запишем уравнение прямой для процесса *1—2* в виде $p=AV+B$, где $A=(p_1-p_2)/(V_1-V_3)=-2p_1/(5V_1)$, $B=(p_2V_1-p_1V_3)/(V_1-V_3)=7p_1/5$. Итак, искомое уравнение прямой

$$p=-\frac{2}{5}p_1\frac{V}{V_1}+\frac{7}{5}p_1.$$

Исключая из этого уравнения давление p с помощью уравнения Менделеева—Клапейрона $pV=RT$, записанного *для одного моля газа*, получаем зависимость температуры от объема в процессе *1—2*:

$$T=-\frac{2}{5}\frac{p_1}{V_1R}V^2+\frac{7}{5}\frac{p_1}{R}V.$$

Исследование на экстремум этой зависимости дает, что температура максимальна при $V=V_4=7V_1/4$ и равна $T=T_4=49T_1/40$. При этом $p_4=RT_4/V_4=7p_1/10$.

Согласно первому закону термодинамики подведенное к газу на участке *1—4* количество теплоты $Q_{14}=\Delta U+A$, где ΔU — изменение внутренней энергии газа, а A — работа газа. Поскольку

$$\Delta U=\frac{3}{2}R(T_4-T_1)=\frac{27}{80}RT_1,$$

$$A=\frac{p_1+p_4}{2}(V_4-V_1)=\frac{51}{80}p_1V_1=\frac{51}{80}RT_1,$$

имеем

$$Q_{14}=\frac{27}{80}RT_1+\frac{51}{80}RT_1=\frac{39}{40}RT_1.$$

Окончательно суммарное количество теплоты, подведенное к газу на участках, где его температура растет, равно

$$Q=Q_{23}+Q_{14}=\frac{129}{40}RT_1\approx 8\ \text{кДж}.$$

3. Пусть R — сопротивление одного вольтметра, r — внутренее сопротивление источника. При замкнутом ключе ток через вольтметр V_1 равен $\mathcal{E}/(R+r)$, а напряжение на нем равно $\mathcal{E}R/(R+r)$. По условию задачи

$$\mathcal{E}R/(R+r)=0{,}8\mathcal{E}.$$

Отсюда $r=R/4$. При разомкнутом ключе показания вольтметров одинаковы и равны

$$U=\frac{\mathcal{E}}{2R+r}R=\frac{4}{9}\mathcal{E}.$$

4. Пусть $\vec{P}_1$ есть импульс фотонов, падающих в единицу времени на пластинку, $\vec{P}_2$ — импульс отраженных фотонов за единицу времени и $\vec{P}$ — импульс, полученный пластинкой за это же время (рис. 7). Понятно, что $P_1=W/c$, $P_2=0{,}4P_1=0{,}4W/c$. По закону сохранения импульса

$$\vec{P}_1=\vec{P}_2+\vec{P}.$$

Отсюда, используя теорему косинусов, получаем

$$P=\sqrt{P_1^2+P_2^2-2P_1P_2\cos(180^\circ-2\alpha)}=\sqrt{1{,}56}W/c.$$

Полученный пластинкой в единицу времени импульс и есть сила F, действующая на пластинку:

$$F=\sqrt{1{,}56}\,W/c\approx 4{,}16\cdot 10^{-7}\text{ Н}.$$

Вариант 2

1. Ясно, что центр масс неваляшки находится в некоторой точке C на ее оси симметрии (рис. 8). Пусть $OC=x$. На неваляшку на наклонной плоскости действуют сила тяжести $M\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}$. Так как неваляшка находится в равновесии, то сумма моментов всех сил относительно оси, проходящей через точку касания A с наклонной плоскостью, должна быть равна нулю; поэтому точки C и A находятся на одной вертикали. По теореме синусов для треугольника OCA

$$\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(180^\circ-\beta)},\text{ откуда } x=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}R.$$

На горизонтальной поверхности стола при увеличении массы неваляшки на массу пластилина m игрушка потеряет устойчивость (завалится), если центр масс системы неваляшка — пластилин достигнет точки O, т. е. при условии

$$Mx=m(h-R).$$

Отсюда с учетом полученного выражения для x находим искомую массу пластилина

$$m=\frac{R}{h-R}\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}M\approx 85\text{ г}.$$

2. Сила, действующая на опору со стороны воды (в проекции на ось X, направленную вертикально вверх),

$$F=F_A-pS.$$

Здесь $F_A=\rho gV$ — архимедова (выталкивающая) сила, которая действовала бы на часть опоры ABC, если бы эта часть со всех сторон была окружена водой, p — давление в жидкости на глубине h, которое складывается из атмосферного давления $p_0\approx 10^5$ Па и добавочного давления ρgh со стороны воды: $p=p_0+\rho gh$. Таким образом,

$$F=\rho g(V-hS)-p_0S\approx -9\cdot 10^4\text{ Н}.$$

Знак «минус» у проекции силы на ось X означает, что сила, действующая со стороны воды на опору, направлена вниз.

Заметим, что без учета атмосферного давления $F=\rho g(V-hS)\approx 10^4$ Н и сила направлена вверх.

Неучет абитуриентами атмосферного давления при решении задачи не считался существенной ошибкой.

3. Магнитный поток Φ через кольцо меняется со временем t по гармоническому закону $\Phi=B_0S\cos(2\pi\nu t)$, где $S=L^2/\pi$ — площадь кольца. В кольце, имеющем сопротивление $R=L(\rho_1+\rho_2)/s$, возникает ЭДС индукции $e=-\Phi'=2\pi\nu B_0S\sin(2\pi\nu t)$ и ток $i=e/R=2\nu B_0Ls\sin(2\pi\nu t)/(\rho_1+\rho_2)$. Действующее значение тока

$$I=\frac{\sqrt{2}\nu B_0Ls}{\rho_1+\rho_2},$$

следовательно, мощность тепловых потерь в кольце

$$P=I^2R=\frac{2\nu^2B_0^2L^3s}{\rho_1+\rho_2}.$$

4. Ход лучей показан на рисунке 9. Из рисунка $AC=H\,\mathrm{tg}\,\beta_1$. Так как $\sin\beta_1=\sin\alpha/n_1$, то $AC=H\sin\alpha/\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}$. Аналогично $BC=H\sin\alpha/\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}$, $KM=2AB=2(AC-BC)$, $x=KM\cos\alpha=2(AC-BC)\cos\alpha$. Подставив найденные ранее выражения для AC и BC, находим расстояние x между вышедшими из пластинки пучками:

$$x=2H\sin\alpha\cos\alpha)\left(\frac{1}{\sqrt{n_1^2-\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{n_2^2-\sin^2\alpha}}\right)=$$
$$=H\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{4n_1^2-1}}-\frac{1}{\sqrt{4n_2^2-1}}\right).$$

Московский институт электронного машиностроения

Вариант 1

1. $\{a-2;\ 4-2a\}$ при $a\neq -1/2,\ 4/3,\ 1$; $\{5\}$ при $a=-1/2$; $\{-2/3\}$ при $a=4/3$; $\{-1\}$ при $a=1$. Указание. Уравнения приводятся к системе

$$\begin{cases} x^2-(2-a)x-2a^2+8a-8=0,\\ x\neq a,\\ x\neq 3a-1.\end{cases}$$

2. $x_1=\mathrm{arctg}\,2+\pi m$, $x_2=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n$ $(m, n\in Z)$.

Указание. Уравнение равносильно системе $2\sin x-4\cos x=1-2\,\mathrm{ctg}\,x$, $1-2\,\mathrm{ctg}\,x\geqslant 0$.

3. Верно: прямая A_1D перпендикулярна плоскости ABC_1.

4. а) Неравенства равносильны, если множества их решений совпадают.

б) Данные неравенства равносильны.

в) Неверно. Например, если $f(x)=x^2+1$, $g(x)=1$, а $h(x)=-1$.

5. $a=1$ и $a=-1$. Пусть $y=|x-1|$. Тогда $(y-a-1)(y^2-1+a)=0$, откуда $y=a+1$, $y\geqslant 0$, либо $y^2=1-a$, $y\geqslant 0$.

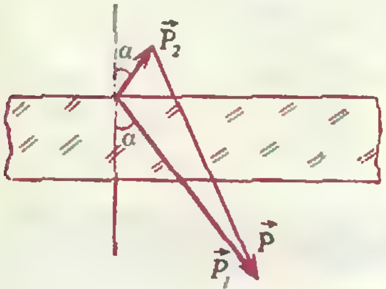


Рис. 7.

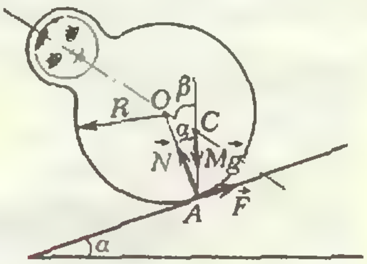


Рис. 8.

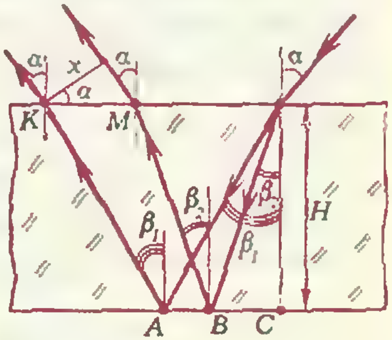


Рис. 9.

Первая система имеет решение при $a \geqslant -1$, вторая при $a \leqslant 1$. Если $a \neq \pm 1$, число решений данного уравнения либо 2, либо 4.

Вариант 2

1. $\{a;\ a-1\}$ при $a \neq 0$, $a \neq 1$.

2. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{6}(2l+1)$ $(k, l \in \mathbb{Z})$.

3. Верно. Пусть A — фиксированная, а B — произвольная точки на прямой l, M и N — проекции этих точек на плоскость α. Тогда $AM \parallel NB$, точки A, B, M, N лежат в одной плоскости и $AM=BN$.

5. $a>0$, $b>0$, $c<0$; $|a|<|b|$, $|a|<|c|$.

Указание. Из условия следует, что $x_1+x_2=-\frac{b}{a}<-1$, $\left|\frac{c}{a}\right|=|x_1x_2|>8$. Поскольку $c=f(0)<0$, $\frac{c}{a}=x_1x_2<0$, получаем $a>0$. Наконец, $-\frac{b}{a}<0$ и потому $b>0$.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

1. $s=m^2v^2/(2\mu gM^2)=0{,}625$ м.
2. $A=gSh^2(\rho_в-\rho_л)^2/(2\rho_в)=8$ Дж.
3. $h=\frac{p_0}{\rho g}\left(2\frac{T_2}{T_1}-1\right)=8{,}5$ м.
4. $m=\frac{p_0VM}{R}\left(\frac{1}{T_1}-\frac{1}{T_2}\right)=1{,}5$ кг.
5. $m=(c_2m_2(t_2-t_3)-c_1m_1(t_3-t_1))/r=0{,}13$ кг.
6. $R=(U_2-U_1)U_1/P=24{,}2$ Ом.
7. $U_3=2U_1/3=4$ В.
8. $\eta=mgh/(UIt)=0{,}5=50\%$.
9. $\alpha_2=\arcsin\left(\frac{n_c}{n_в}\sin\alpha_1\right)=52°$.
10. $\lambda=\frac{hc}{A+mv^2/2}=3{,}9\cdot10^{-8}$ м.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1987, № 10)

Задание 19 (А. Гурвич, 1952 г.). **1. Крd5 Kd2 2. Крd4 K:b3+ 3. Крc3 Kc1! 4. Крd2! Kb3+ 5. Крc2 Ka1+ 6. Крc1!!** (6. Крb2? Cc4! 7. Кр:a1 Cb5 8. Крb2 Крf6 9. Крc3 Крe5 с позиционной ничьей, коня b8 как будто не существует) **6... Крf7 7. Крb2! Cc4 8. Kc6 Cd5 (b5) 9. Kd4!**, и белые выигрывают.

Задание 20 (Р. Рей, 1925 г.). **1. Лf4 Ke6** (1... Cd6 2. Лf6 Ke4 3. Лe6 Kc3+ 4. Крc4, и все кончено) **2. Лf6 Kd4+ 3. Крc4 Cg7 4. Лg6 Kf5 5. Лg5 Ke3+ 6. Крd3 Ch6 7. Лh5+.** Любопытное движение белых и черных фигур (оно называется систематическим) привело в конечном итоге к выигрышу слона благодаря геометрическим мотивам.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин,
Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов,
Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябев,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. В. Дубах, С. В. Иванов, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов,
В. М. Лукин, С. Ф. Лухин, Т. М. Макарова, А. С. Махов,
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Корректор О. М. Березина

Сдано в набор 18.11.87. Подписано к печати 17.12.87.
Т 24293. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр от. 22,10. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,82
Тираж 191 375 экз. Цена 40 коп. Заказ 3184

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

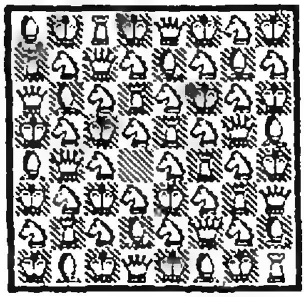
Шахматная страничка

НОВЫЕ РЕКОРДЫ

Напомним сначала несколько рекордов, относящихся к классике шахматной математики. На обычной доске можно расставить так, чтобы одноименные фигуры не угрожали друг другу, самое большее 8 ферзей, или 8 ладей, или 14 слонов, или 16 королей, или 32 коня. Эти рекорды являются абсолютными, то есть побить их невозможно. Однако возникает ряд интересных вопросов, связанных с компоновкой тех или иных рекордных позиций на одной диаграмме. Гроссмейстер занимательной математики Г. Дьюдени придумал позицию, которая объединяет сразу три рекорда: на доске одновременно умещаются 8 ферзей, 8 ладей и 14 слонов. Кроме того, на ней находятся также 21 конь и 8 королей (и те и другие не угрожают друг другу). Итак, мы имеем три рекорда (для ферзей, ладей и слонов), а всего на доске — 59 фигур. Это достижение держалось с прошлого века и считалось незыблемым. И лишь в 1986 году В. Попову из Донецка удалось улучшить его на одну фигуру (см. «Квант», 1986, № 6). В. Попову удалось разместить на одной доске 8 ферзей, 8 ладей, 14 слонов и 21 коня (пока все, как у Дьюдени), но королей стало на одного больше — 9, и общее число фигур — 60. Четыре не занятых поля находились на одной диагонали, что придало позиции своеобразную симметрию.

После этой публикации в редакцию поступило множество писем, в которых читатели предлагали свои позиции, увеличивая общее число фигур. Сразу скажем, что рекорд В. Попова побит не был, при 8 ферзях, 8 ладьях и 14 слонах (требование Дьюдени) количество остальных фигур увеличить не удалось (60).

Многие рекордсмены отказались от того, чтобы на одной диаграмме было сразу три рекорда, это позволило им увеличить общее число фигур до 61, 62 или даже 63. Но и с тремя рекордами (правда, для другого набора фигур) прислано немало позиций, содержащих 61 или 62 фигуры. Суперрекорд установил Бабамурат Курбанов из Таджикистана.



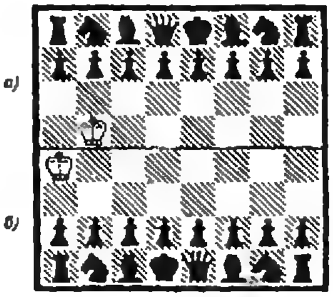
По-прежнему имеем 8 ферзей и 8 ладей, а третий рекорд установлен не для слонов, а для королей — 16. Коней столько же, сколько у Дьюдени и Попова — 21, и еще 10 слонов. Итого, на доске 63 фигуры!

Подводя итоги дискуссии о позиции Дьюдени, заметим, что здесь еще осталось много вопросов.

1. Можно ли увеличить общее число фигур (60) с сохранением трех рекордов для ферзей, ладей и слонов?
2. Можно ли увеличить количество рекордов, представленных на одной диаграмме (вместо трех — четыре или все пять)?
3. Можно ли заполнить фигурами всю доску (одноименные фигуры не должны угрожать друг другу)?

Ради заполнения всей доски можно пойти на уменьшение числа рекордов (вместо трех — два или один) или вообще отказаться от них.

Приведем еще два рекорда, установленные читателем журнала. Следующие две задачи были опубликованы в «Кванте», 1987, № 7.



Р. Таварнани, 1986 г.

а) За какое (наименьшее) число ходов белый король может попасть с b5 на d8?

б) Белый король переставлен с b5 на h5, и доска повернута на 180°. За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с a4 на e1?

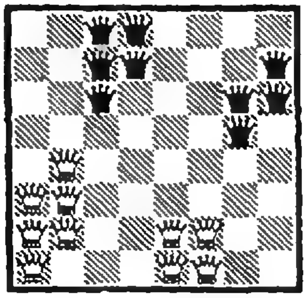
Автор привел «партии», состоящие соответственно из 8 и 12 ходов («Квант», 1987, № 7). Г. Копылов из Брянска укоротил их, первую на один ход, а вторую сразу на три!

а) 1. Крc4 e5 2. Крb3 c5 3. Крa4 Фg5 4. Крa5 a6 5. Крb6 Крe7 6. Крc7 Крf6 7. Крd8, и цель достигнута.

б) 1. Крa5 Кa3 2. Крa6 b1C 3. Крb6 Cb2 4. Крc5 Ch8 5. Крd5 Крc1 6. Крe4 Крb2 7. Крe3 Фc1 8. Кр:f2 d1C 9. Крe1, и вновь король на желанном поле.

В ряде стран проводятся международные конкурсы на составление шахматно-математических задач. Следующая «задача о 19 ферзях» была отмечена специальным призом на одном из них в 1980 году.

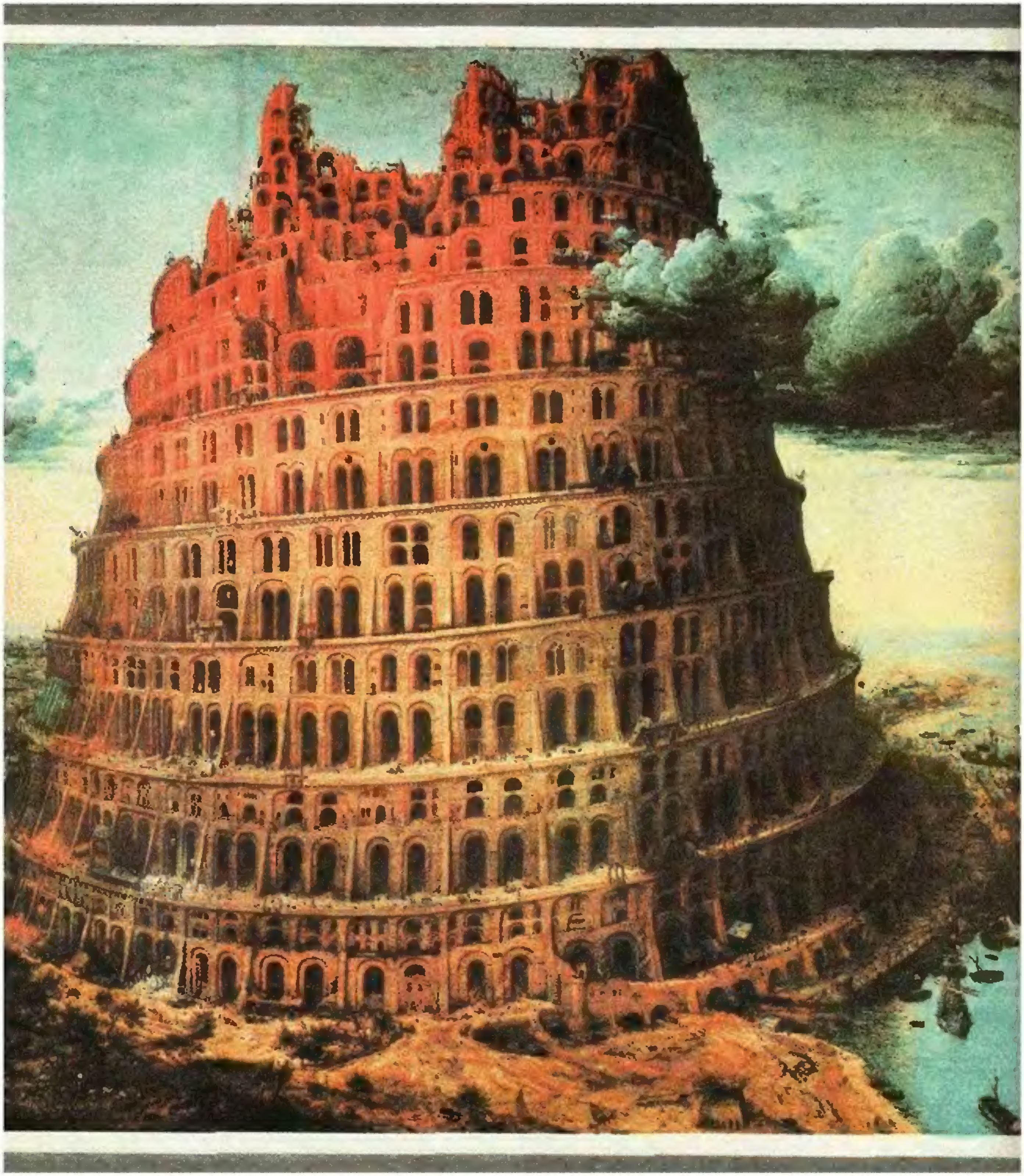
Расставить 10 белых и 9 черных ферзей так, чтобы ни один из них не находился под ударом ферзя противоположного цвета.



Автор позиции В. Франген считал, что это решение единственное (повороты и зеркальные отражения доски не в счет). Однако уже после подведения итогов конкурса он нашел принципиально иную расстановку. Снимем с доски белого ферзя e2 и вместо него добавим черного на h5. Теперь изменим цвет всех ферзей и в результате получим еще одну рекордную позицию.

Может быть, читателям удастся найти другие расстановки 19 ферзей?

Е. Я. Гик



Цена 40 коп.
Индекс 70465

Вы заметили, что на глобусе, изображенном на 1-й с. обложки, Антарктида «переехала» поближе к Африке? А при желании мы могли бы отправить ее в Азию или в Америку ... Этот необычный глобус был изобретен не кем иным, как Эрне Рубиком, вслед за его знаменитым волшебным кубиком. Здесь предлагается перепутать 30 квадратных кусочков поверхности глобуса, передвигая их цепочками по 12 штук вдоль экватора и двух меридианов, а потом восстановить первоначальный порядок. В прошлом году почти все последние страницы обложек «Кванта» были отданы рассказам о перестановочных головоломках и принципах их решения. Чтобы не повторяться, мы сейчас остановимся только на некоторых отличительных особенностях глобуса Рубика.

Прежде всего заметим, что любая пара диаметрально противоположных квадратиков движется всегда согласованно: можно представлять их как основания жесткой четырехугольной призмы. Поэтому достаточно следить только за 15 квадратиками — по одному из каждой пары, например, за северным полушарием и половиной экватора (рис. 1). «Сборку» глобуса можно вести в таком порядке: северное полушарие без экватора и полюса N — экватор без пары E, W (рис. 2) — пара E, W — пара N, S. Первая трудность встретится при сборке экватора. Здесь работает показанная синими стрелками на рисунке 2 операция $K_1=AC^{-3}A^{-1}C^3$, *где A — поворот экватора на 1 квадратик по стрелке (рис. 1),* C^{-3} *— поворот меридиана NE на 3 квадратика против часовой стрелки (рис. 1) и т. д. Но этой операции хватает только, чтобы загнать квадратики на свои места, при этом они могут оказаться повернутыми относительно правильного положения. Развернуть их так, как нужно, позволяет операция* K_2K_3 *(поворот E и S на 90°, N и W — на −90°; см. красные стрелки на рисунке 3), где* $K_2=B^{-3}A^{-3}B^3A^3$, $K_3=C^{-3}A^3C^3A^{-3}$ *(*K_2 *циклически переставляет три пары квадратиков по синим стрелкам — рис. 3,* K_3 *возвращает их обратно повернутыми иначе). Когда установлено все, кроме E, N, W и S, нужно с помощью операции* $F=(K_1A)^5A^5$ *(рис. 2) отправить на место квадратик E и повернуть его описанным выше способом. Остается пара N, S, для которой имеется, казалось бы, 8 разных положений: N может быть на северном или южном полюсе и на каждом из мест допустимы 4 поворота. В действительности возможны только 2 варианта: либо N и S стоят правильно, либо повернуты около оси NS на 180°, причем «плохой» вариант исправляется операцией* $(K_2K_3R)^2$, *где R — поворот всего глобуса на 180° вокруг оси NS. Поясним, почему N (и S) нельзя повернуть на 90° (то, что N не может оказаться на южном полюсе, доказывается с помощью понятия четности перестановки; см обложку «Кванта» № 11, 1987 г.)*

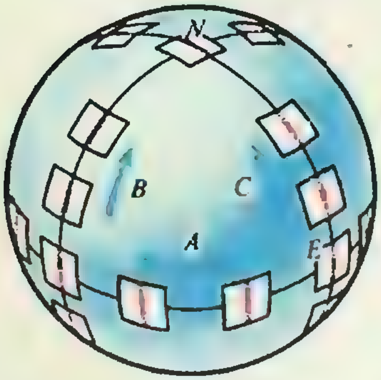


Рис. 1.

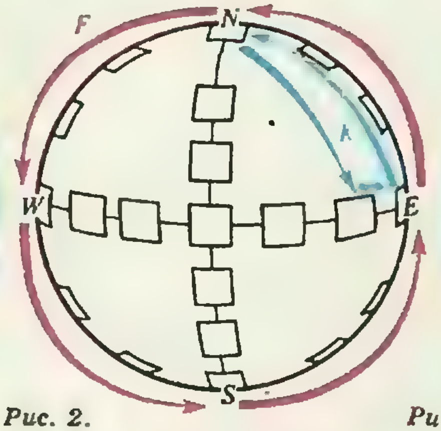


Рис. 2.

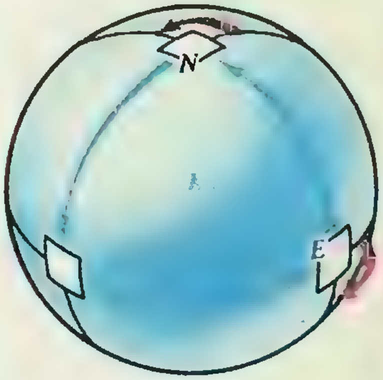


Рис. 3.

Пусть глобус собран. Проведем на каждом квадратике черту вдоль меридиана (на полюсах — вдоль NE; рис. 1). Будем двигать квадратики и следить за числом пар, для которых нарисованная черта оказывается перпендикулярна меридиану (в частности, на полюсах — меридиану NE). Нетрудно доказать, что оно всегда будет четным. Но при повороте одной пары на 90° вокруг ее оси четность этого числа изменяется.

С точки зрения математики интересно не только придумать алгоритм «сборки» глобуса, но и описать все возможные расположения квадратиков. Попробуйте это сделать: докажите, что их число равно $2\cdot 8^{14}\cdot 15!$

В.Н.

НОМЕР
2

Квант
Основан в 1970 году

1988

2

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Я. Б. Зельдович*, *М. Ю. Хлопов.* Пути электромагнитной теории
9 *Б. А. Прудковский.* О консервной банке, пружине и прокатном стане
14 *М. И. Башмаков.* Математические образы в поэзии
17 *Д. Б. Фукс.* О стихотворных размерах

Задачник «Кванта»

26 Задачи М1086—М1090, Ф1098—Ф1102
27 Problems M1086—M1090, P1098—P1102
28 Решения задач М1066—М1069, Ф1078—Ф1082

«Квант» для младших школьников

37 Задачи
38 *А. С. Ярский.* О пользе математики для ковбоев

Калейдоскоп «Кванта»

40 Отражение и преломление

Информация

45 Компьютерный клуб «СПРАЙТ»

Лаборатория «Кванта»

46 *С. М. Белоусов, Р. Н. Герасимов.* Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов

Школа в «Кванте»
Математика 6—10:

50 Сумма углов
52 О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера
55 Сумма углов сферического многоугольника
56 Избранные школьные задачи

Практикум абитуриента

57 *А. И. Черноуцан.* Кинематические связи в задачах динамики
63 *М. Р. Либерзон.* Стереометрические задачи с шарами

66 **Варианты вступительных экзаменов**

73 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(25, 36)*

Наша обложка

1 *На фотографии запечатлен один из моментов падения капли в воду. О том, как можно получить такую фотографию, рассказывается в рубрике «Лаборатория «Кванта».*

2 *«Запрещенное воспроизведение» — так назвал свою картину бельгийский художник Рене Магрит (1898—1967). С точки зрения геометрической оптики такое «воспроизведение» действительно запрещено. Зеркало и глаз «работают» по строгим законам отражения и преломления. А хорошо ли вы знакомы с этими понятиями? Проверить себя вам поможет «Калейдоскоп «Кванта».*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломка «Кольца Рубика».*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1988

Когда эта статья уже готовилась к публикации, не стало одного из ее авторов — умер выдающийся физик-теоретик, трижды Герой Социалистического Труда Яков Борисович Зельдович. Это был человек необыкновенного таланта и эрудиции, внесший огромный вклад в самые различные области физики. Многое делал он и для обучения молодежи, для популяризации научных знаний.

В издательстве «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» готовится к печати книга Я. Б. Зельдовича (в соавторстве с М. Ю. Хлоповым) «Драма идей в познании природы». Статья, которую мы предлагаем сегодня нашим читателям, появилась в результате работы авторов над этой книгой.

ПУТИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ТЕОРИИ

Академик *Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧ*,
доктор физико-математических наук
М. Ю. ХЛОПОВ

Электрический заряд

Еще в древности было известно, что если потереть кусок янтаря, он способен притягивать мелкие предметы. Этот забавный факт терялся в ряду многообразных явлений природы, интересовавших мыслителей древности... Позднее возник термин «электричество», а в XVIII веке было установлено, что существуют два вида наэлектризованных тел. Тела́ одного и того же типа взаимно отталкиваются, два тела разных типов — притягиваются.

Американский ученый Б. Франклин (1706—1790), занимавшийся исследованиями электричества, обратил внимание на показавшееся ему странным явление. Заряженный шарик, помещенный внутрь заряженного металлического куба, не испытывал никакого действия заряда куба. Своим недоумением по этому поводу Франклин поделился с Дж. Пристли (1733—1804), и тот высказал догадку, что, возможно, дело в том, что электрическая сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами — в полной аналогии с широко известным в ту пору законом всемирного тяготения Ньютона. Из этого закона, в частности, следовало, что гравитационная сила, действующая со стороны однородной сферы на тело, которое находится внутри нее, равна нулю.

Согласно закону Ньютона сила гравитационного взаимодействия двух тел оказывалась пропорциональной произведению их масс. В случае электрических тел электрическое воздействие было тем больше, чем больше заряжены тела. Естественно было ожидать, что электрическая сила определяется количеством электричества, содержащегося в электрически заряженных телах,— их электрическим зарядом. В 1785 году Ш. Кулону (1736—1806) удалось измерить силу электрического взаимодействия, которая оказалась обратно пропорциональной квадрату расстояния между зарядами. Зависимость силы от заряда Кулон фактически постулировал. Он предположил, что сила пропорциональна произведению зарядов тел. Для силы $F_э$ взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, получался закон

$$F_э \sim \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

аналогичный закону всемирного тяготения Ньютона —

$$F_{гр} \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Такой закон позволял правильно количественно объяснить многие наблюдавшиеся электрические явления.

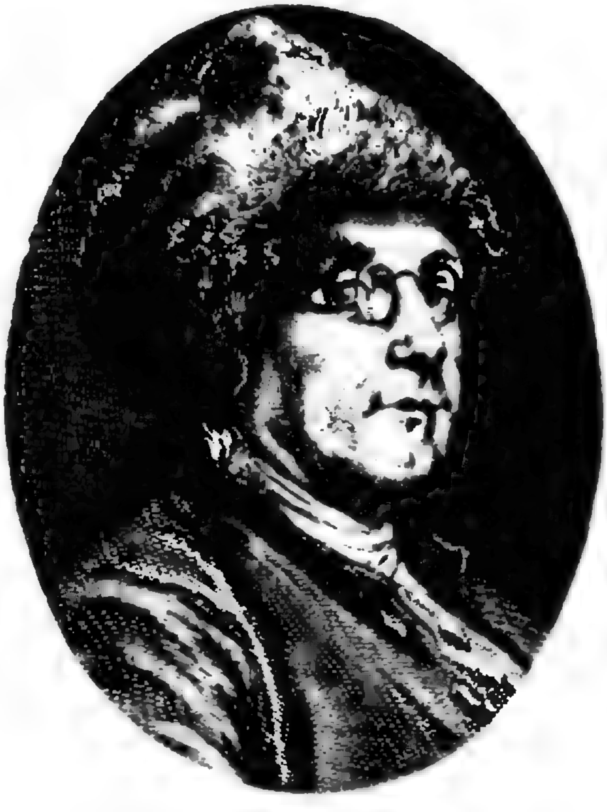
Электрический ток и магнитные явления

Электрический разряд — в буквальном смысле слова яркий пример электрического тока. Но в нашей обыденной жизни мы встречаем бурное грозовое электричество не так уже часто. Когда речь заходит об электрическом токе, нам скорее всего приходит на ум ток в проводах, приносящий свет электрических лампочек, голоса друзей в телефоне, мировые события в телевизоре. Однако в физику «тихий» ток проводов пришел значительно позже тока электрического разряда. Первые опыты по изучению тока проводились именно с разрядами. Изучая разряды молнии или лейденской банки — прообраза современного конденсатора,— Франклин и итальянский физик Дж. Беккариа (1716—1781) наблюдали магнитное действие электрического тока. Железные предметы, находившиеся рядом с проводниками, по которым проходил электрический разряд, намагничивались. Было ясно, что электрические и магнитные явления как-то связаны.

Аналогия в поведении полюсов магнитов и электрических зарядов была очевидной — одноименные полюса, как и одноименные заряды, отталкивались, разноименные — притягивались. Экспериментальные методы, развитые Кулоном, позволили ему измерить силу взаимодействия двух магнитов. Она оказалась обратно пропорциональной квадрату расстояния; как и в случае силы электростатического взаимодействия двух зарядов, Кулон постулировал, что магнитная сила пропорциональна произведению «магнитных зарядов» полюсов. Однако между электрическим зарядом и «магнитным зарядом» пóлюса магнита имелось одно отличие. При электризации тела мы получаем изолированный электрический заряд определенного знака. А в результате намагничивания нельзя получить изолированный магнитный полюс — обязательно получаются сразу два разноименных полюса. Намагниченное тело не может обладать изолированным «магнитным зарядом» определенного знака.

Но различия не очень смущали. Слишком сильна была традиция механики Ньютона. Казалось естественным, что между двумя малыми телами все силы, независимо от их природы, действуют единообразно — по прямой, соединяющей тела; и с расстоянием все силы убывают одинаково — обратно пропорционально квадрату расстояния между телами. Привлекало изящное единое описание всех дальнодействий — гравитационного, электрического, магнитного. Тогда различие сил проявлялось бы только в разных мерах их воздействия: гравитационная сила пропорциональна произведению масс тела, электрическая — электрических зарядов, магнитная — магнитных зарядов.

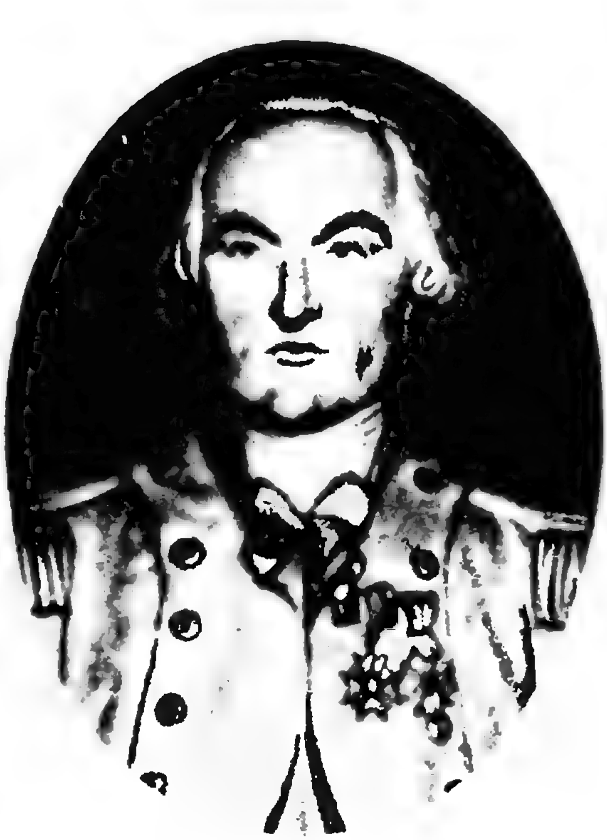
В начале XIX века благодаря изобретению А. Вольта (1745—1827) электрической батареи стало возможным изучать действие постоянного тока. Вместо кратковременных токов электрического разряда в лабораториях появился непрерывный электрический ток в проводах, соединяющих полюса батареи. Целых двадцать лет, имея в своем распоряжении непрерывный ток, физики искали магнитную силу тока. Силу, действующую по прямой между магнитом и током.



Бенджамин Франклин.

И не нашли. А в 1820 году появилась статья датского физика X. Эрстеда (1777—1851). Всего несколько страниц латинского текста. Эрстед описывал отклонение магнитной иглы под действием постоянного тока прямого провода. Сила действовала не вдоль прямой, соединяющей провод и магнит. Магнитная сила тока оказалась не отталкивающей или притягивающей, а «поворачивающей».

Исследования Эрстеда продолжил и развил французский физик и математик А. М. Ампер (1775—1836). Он построил первую теорию электродинамики (термин Ампера), задуманную как продолжение дела Ньютона. Но ньютоновское описание действия на расстоянии уже дало первую трещину — нарушалось единообразие такого описания. Пройдет еще немного времени, и сама идея действия на расстоянии будет отвергнута в работах Фарадея и Максвелла.



Шарль Огюстен Кулон.

Электрические напряженность и потенциал

Закон Кулона определил силу взаимодействия зарядов. Но как осуществляется это взаимодействие? Можно было бы просто сказать, что два заряда действуют друг на друга на расстоянии по закону Кулона, и не вдаваться в размышления о том, какие невидимые нити соединяют заряды, какие невидимые пружины притягивают разноименные заряды и расталкивают одноименные. Так поступил в свое время Ньютон, изучая тяготение: «Причину этих свойств силы тяготения я до сих пор не мог вывести из явлений, гипотез же я не измышляю... Довольно того, что тяготение на самом деле существует и действует согласно изложенным нами законам и вполне достаточно для объяснения всех движений небесных тел и моря». Но чтобы упростить расчет силы взаимодействия неточечных заряженных тел, оказалось удобным, чисто формально, ввести некоторую характеристику окружающего заряд пространства — электрическую напряженность $\vec{E}$ — силу, с которой рассматриваемый заряд подействовал бы на пробный единичный заряд, помещенный в данную точку. Если же мы поместим в эту точку заряд q, то на него подействует сила $\vec{F}=q\vec{E}$. Напряженность электрического поля — вектор. Она, вообще говоря, меняется от точки к точке — и по абсолютной величине, и по направлению.

Мы можем приписать каждой точке пространства, окружающего данный источник электрической силы (точечный заряд, заряженное тело или систему заряженных тел), еще одну характеристику — электрический потенциал — потенциальную энергию взаимодействия пробного единичного заряда, помещенного в эту точку, с источником силы. При перемещении пробного единичного заряда из одной точки в другую электрическая сила совершает работу, по абсолютной величине равную разности электрических потенциалов двух точек. Если мы выберем значение потенциала в какой-то точке пространства за начало отсчета величины потенциала и (это наиболее естественно) положим значение потенциала в ней равным нулю, то, определяя работу электрической силы при перемещении единичного заряда из этой точки в любую другую точку, мы тем самым определим потенциал любой точки пространства.

В определении потенциала есть элемент произвола. Ведь мы не проводили расчет потенциала в начальной точке отсчета — мы просто положили его равным нулю. Если бы мы положили его равным не нулю, а какой-то величине φ_0, то и потенциалы всех остальных точек пространства изменились бы на величину φ_0. Получается, что потенциал определяется неоднозначно — он определяется с точностью до выбора значения потенциала в точке начала отсчета, а это значение мы можем выбрать каким хотим — от него работа электрической силы не зависит.

В физике наряду с измеримыми величинами есть величины очень удобные, но прямо не измеримые. Эти величины можно менять (преобразовывать) так, что при этом физические следствия не меняются. Например, значения координат точки x, y, z зависят от выбора начала координат, от того, как ориентированы оси координат. А вот непосредственно измеряемое расстояние между двумя точками ни от выбора начала координат, ни от направления осей координат не зависит. Такой же удобной, но зависящей от выбора начала отсчета величиной является электрический потенциал.

Итак, есть две характеристики пространства, окружающего заряженное тело. Они говорят о том, что было бы, если бы мы помещали пробный единичный заряд в разные точки пространства. Одна — электрическая напряженность — говорит об электрических силах, которые действовали бы на этот заряд в различных точках пространства; другая — электрический потенциал — говорит о потенциальной энергии, которой обладал бы такой заряд в разных точках.

Обе характеристики связаны друг с другом. Математическое описание свойств электрической силы приводит к некоторому удобному приему — расчет электрической силы, действующей на данный заряд, упрощается, если предположить, что источник электрической силы не непосредственно действует на данный заряд на расстоянии, но каким-то образом преобразует окружающее его пространство. Оказывается удобным приписать действие данного заряда на другие заряды особому состоянию пространства, окружающего данный заряд,— его электрическому полю. Электрический потенциал является скалярной характеристикой этого поля. Электрическая напряженность — векторной характеристикой.

Как мы скоро убедимся, электрическое поле — это не просто удобный математический прием, а физическая реальность.

Здесь же заметим следующее. Казалось бы, электрический потенциал — более удобная величина. Значительно проще связать с каждой точкой одно число (электрический потенциал), чем задавать в каждой точке вектор электрической напряжен-

Ханс Кристиан Эрстед.

ности, то есть три числа (три проекции этого вектора). Но, во-первых, электрический потенциал определен неоднозначно — с точностью до постоянной. А во-вторых, существуют такие электрические поля, для которых можно определить электрическую напряженность, а электрический потенциал определить нельзя. Такие поля появляются в электродинамике — разделе физики, рассматривающем движущиеся заряды. Электростатическое поле — поле неподвижных зарядов — потенциально, можно ввести его электростатический потенциал. Казалось бы, если заряды движутся, то такой потенциал будет просто меняться со временем в соответствии со смещением зарядов. Но движущиеся заряды — это электрический ток, а электрический ток обладает и магнитным воздействием. А это, как мы увидим дальше, может приводить и к электрическому воздействию. И такое воздействие будет уже непотенциальным.

Электромагнитная индукция

Если электрический ток обладает магнитным действием, то не может ли магнит быть источником тока? Нельзя ли «превратить магнетизм в электричество»? Таким вопросом задался английский физик М. Фарадей (1791—1867), и поиски ответа привели его к открытию явления электромагнитной индукции — возникновения электрического тока в проводящем контуре при изменении магнитного потока через контур.

Изучая это явление в разных аспектах, Фарадей вводит понятие «магнитных кривых». «Под магнитными кривыми я понимаю линии магнитных сил, хотя и искаженные соседством полюсов; эти линии вырисовываются железными опилками; к ним касательно располагались бы магнитные стрелочки»,— так определил Фарадей «магнитные кривые». Сегодня мы называем их линиями магнитной индукции. В противоречие с традицией Фарадей придал физический смысл формальному понятию силового поля. То, что было принято рассматривать только как условную характеристику пространства, удобную для описания дальнодействия, Фарадей стал рассматривать как реальную физическую среду. «Фарадей своим мысленным взором видел линии сил, проходящие через все пространство, там, где математики видели центры сил, притягивающиеся на расстоянии. Фарадей видел среду там, где они не видели ничего, кроме расстояния. Фарадей искал источник явлений в реальных процессах, происходящих в среде»,— так спустя тридцать лет писал Дж. К. Максвелл (1831—1879) во введении к своему «Трактату об электричестве и магнетизме».

Андре Мари Ампер.

Но интуитивно ясные соображения Фарадея не могли убедить его современников. Одно дело — экспериментальные результаты, другое — их теоретическая интерпретация, даваемая Фарадеем. «Я заявляю, что с трудом могу себе представить, чтобы кто-нибудь, кто практически и количественно знает совпадение наблюдений и вычислений, основанных на законе действия на расстоянии, мог хотя бы мгновение колебаться в выборе между этим простым и точным действием, с одной стороны, и чем-то столь неясным и неопределенным, как линия сил, с другой стороны»,— так писал в 1855 году известный ученый Эри. Это мнение разделяло большинство физиков, стремившихся объяснить электромагнитные явления на основе законов действия на расстоянии.

Требовалось перевести качественные соображения Фарадея на математический язык, на язык уравнений. И это сделал великий шотландец Дж. К. Максвелл.

Электромагнитное поле

Итак, в середине XIX века выявились два противоположных подхода к описанию электромагнитных явлений. Встал вопрос о том, действуют ли магниты или заряженные тела непосредственно на расстоянии или существует некоторая среда, передающая воздействие одного магнита (или провода с током) на другой, одного электрически заряженного тела на другое.

«Когда мы наблюдаем, что одно тело действует на другое на расстоянии, то прежде чем принять, что это действие прямое и непосредственное, мы обыкновенно исследуем, нет ли между телами какой-нибудь материальной связи; и если находим, что тела соединены нитями, стержнями или каким-либо механизмом, способным дать нам отчет в наблюдаемых действиях одного тела на другое, мы предпочитаем скорее объяснить действия при помощи этих промежуточных звеньев, нежели допустить понятие о прямом действии на расстоянии.

Так, когда мы, дергая за проволочку, заставляем звонить колокольчик, то последовательные части проволоки сначала натягиваются, а затем приходят в движение, пока, наконец, звонок не зазвонит на расстоянии посредством процесса, в котором принимали участие все промежуточные частицы проволоки одна за другой. Мы можем заставить колокольчик звонить на расстоянии и иначе: например, нагнетая воздух в длинную трубку, на другом конце которой находится цилиндр с поршнем, движение которого передается звонку. Мы можем также пользоваться проволокой, но вместо того, чтобы дергать ее, можем соединить ее на одном конце с электрической батареей, а на другом — с электромагнитом, и таким образом заставим колокольчик звонить посредством электричества.

Здесь мы указали три различных способа приводить звонок в движение. Но во всех этих способах есть то общее, что между звонящим лицом и звонком находится непрерывная соединительная линия и что в каждой точке этой линии совершается некоторый физический процесс, посредством которого действие передается с одного конца линии на другой. Процесс передачи не мгновенный, а постепенный; так что после того, как на одном конце соединительной линии дан импульс, проходит некоторый промежуток времени, в течение которого этот импульс совершает свой путь, пока не

Майкл Фарадей.

Джеймс Клерк Максвелл.

достигнет другого конца»,— писал Максвелл в своей статье «О действиях на расстоянии». И далее отмечал: «Кому свойства воздуха не знакомы, тому передача силы посредством этой невидимой среды будет казаться столь же непонятной, как и всякий другой пример действия на расстоянии, и однако в этом случае мы можем объяснить весь процесс и определить скорость, с которой действие передается от одного участка среды до другого.

Почему же не можем мы допустить, что знакомый нам способ сообщения движения посредством толчка и тяги нашими руками является видом и наглядным примером всякого действия между телами, даже в тех случаях, когда мы не можем заметить между телами ничего такого, что видимо принимало бы участие в этом действии».

Работы Фарадея и Максвелла утверждали физическую реальность электромагнитного поля. Пространство, окружающее заряды, как бы оживало. Оно оказывалось в особом состоянии, обладало особыми свойствами. Открытие электромагнитной индукции позволило к этим свойствам подойти. Электрические и магнитные явления оказывались действительно взаимосвязаны. Но связь эта раскрывалась только в нестационарных процессах, через изменение со временем электрических и магнитных характеристик.

Покоящийся заряд окружает только электрическое поле. Движущийся заряд окружают и электрическое поле, и магнитное поле. Если электрический ток постоянный, постоянно и магнитное поле. Такое поле действует в свою очередь только на движущиеся заряды — на токи. Таким образом, поле постоянного тока осуществляет только магнитное действие токов. Иное дело, когда ток переменный. В этом случае магнитное поле тока тоже оказывается переменным. И закон электромагнитной индукции определяет электрическое действие такого поля — оно (поле) оказывается источником электрического поля, движущего заряды в проводе, вызывающего в этом проводе электрический ток.

Итак, электрическое поле может существовать и вне прямой связи с зарядами — его источником может быть переменное магнитное поле. Такое электрическое поле действует на заряды. Значит, его можно характеризовать силой, действующей на единичный пробный заряд, т. е. электрической напряженностью. И сила эта будет совершать работу над пробным электрическим зарядом, движущимся в таком электрическом поле. Но в отличие от случая электростатического поля — поля неподвижных зарядов,— в электрическом поле переменного магнитного поля работа электрической силы зависит от пути, по которому пробный заряд перемещается. В этом поле работа по замкнутому контуру не равна нулю. Поэтому с каждой точкой пространства нельзя связать величину электрического потенциала — работы по перемещению единичного пробного заряда из некоторой начальной точки в данную. Такая величина не имеет смысла —

(Окончание см. на с. 25)

О КОНСЕРВНОЙ БАНКЕ, ПРУЖИНЕ И ПРОКАТНОМ СТАНЕ

Доктор технических наук
Б. А. ПРУДКОВСКИЙ

Будем считать, что вам не раз приходилось вскрывать консервные банки. И время от времени вы задавались вопросом: неужели металлический лист, из которого сделана банка, нельзя изготовить потоньше? Тогда, например, из материала для одной консервной банки можно было бы сделать две или даже три. В чем же дело? Почему металлурги не экономят металл? Давайте попробуем разобраться.

Консервные банки делают из стального тонкого листа — жести. Жесть *получают холодной прокаткой*. Нужно сказать, что с наиболее раннего достоверного упоминания о применении прокатки для деформирования металла прошло более 500 лет. В 1486 году великий художник, архитектор, ученый и инженер Леонардо да Винчи изобразил прокатный стан для получения тонкой ленты из золота и серебра, идущей на украшения. Такой стан имел два гладких валка диаметром около 40 мм, которые вращали вручную. Сущность процесса прокатки с тех пор принципиально не изменилась (рисунок 1, *а*). В зазор между вращающимися в разные стороны валками затягивается металлическая полоса, толщина которой (h_0) больше величины этого зазора (S_0). Полоса под действием валков испытывает пластическую деформацию изменения формы и должна выходить из валков с толщиной, равной, казалось бы, величине зазора между ними (увеличиваясь при этом в длине и оставаясь той же ширины B). Однако фактически толщина прокатанной полосы (h_1) бывает всегда больше зазора между валками. Почему?

Деформация полосы происходит в *результате действия сил, приложенных* к ней со стороны валков. Каждый валок действует на полосу, и согласно третьему закону Ньютона полоса действует на валок с такой же по величине силой; ее называют силой сопротивления деформированию или просто сопротивлением деформированию. Под действием этой силы происходит упругая деформация валков и других деталей прокатного стана, первоначально установленный зазор между валками увеличивается, и на столько же увеличивается толщина прокатанной полосы. Другими словами, мы всегда получаем толщину по-

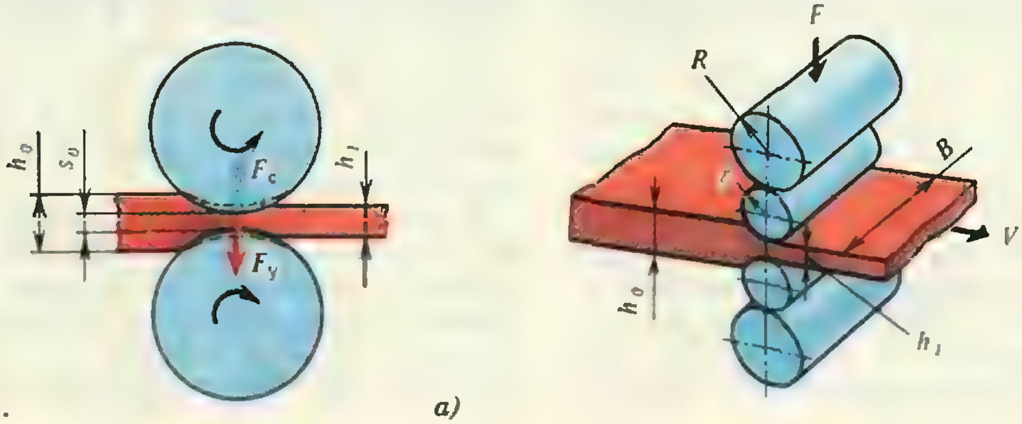


Рис. 1. *а)* *б)*

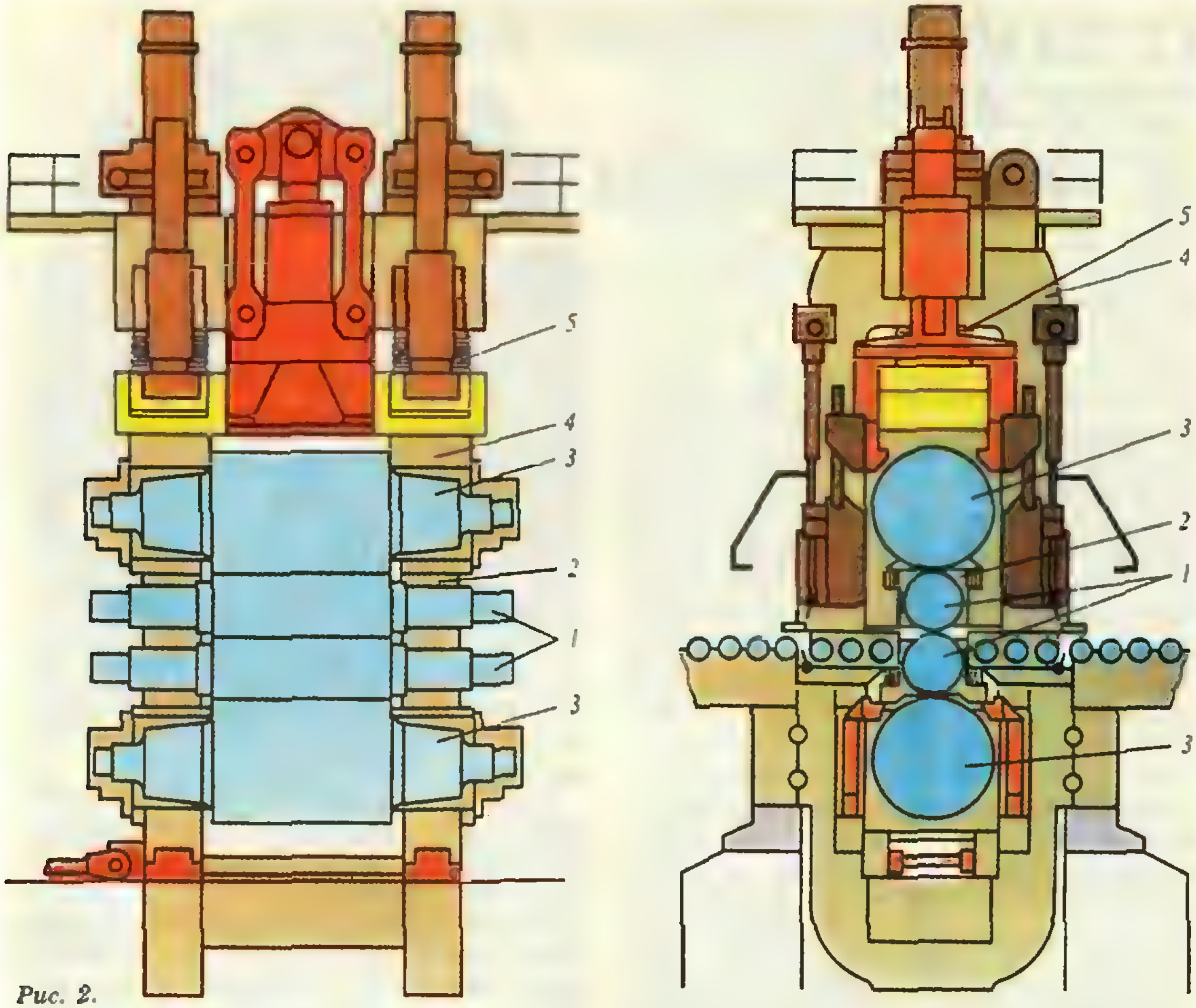


Рис. 2.

лосы несколько бо́льшую, чем зазор (S_0) между валками. Для уменьшения деформации рабочих валков применяют опорные валки (рисунок 1,*б*).

Ну хорошо, скажете вы, тогда надо сделать зазор между валками меньше требуемой толщины жести и получить нужную толщину. Логично! Хотя это лишь один из способов.

Но так ли все просто? Толщина жести «нормальной» консервной банки равна 0,2—0,25 мм. Какой же зазор нужно установить между валками, чтобы получить такую толщину листа? А какой зазор нужно установить, чтобы получить лист толщиной, скажем, 0,1 мм?

Давайте сначала посмотрим, как устроен прокатный стан (рисунок 2). Валки (*1*), деформирующие полосу, не могут висеть в воздухе. Они крепятся на подшипниках (*2*) вместе с опорными валками (*3*) в раме, называемой станиной прокатного стана (*4*). Требуемый зазор между валками при прокатке устанавливается с помощью винтов, которые называют нажимными винтами (*5*).

Сила сопротивления деформированию, действующая на рабочие валки со стороны прокатываемой полосы, вызывает упругую деформацию не только этих валков, но и опорных, а также нажимных винтов, станины и других элементов прокатного стана. Прокатный стан в этом случае ведет себя как пружина, правда, не совсем обычной конструкции.

Из курса физики известно, что всякая пружина обладает жесткостью, которая определяет ее степень деформации под действием приложенных сил. От чего зависит жесткость прокатного стана, если его рассматривать как пружину? Упрощенно можно сказать, что (как и жесткость пружины) она зависит от его конструкции. Например, стан с двумя валками обладает значительно меньшей жесткостью по сравнению со станом, имеющим четыре валка, два из которых являются опорными. Есть и более жесткие станы, с бóльшим числом опорных валков.

Теперь ясно: чтобы определить величину зазора, необходимого для получения жести заданной толщины, нужно знать величину жесткости прокатного стана. Как же ее найти? Есть, конечно, расчетные методы, но для уже существующего стана ее проще измерить.

Установим нажимными винтами какой-либо зазор S_0 между рабочими валками. Теперь с помощью распорного устройства будем каждый раз увеличивать этот зазор на величину ΔS и измерять динамометром силу упругости стана. На рисунке 3 результаты нескольких таких измерений представлены в виде графика зависимости силы упругости $F_у$ от величины зазора между рабочими валками. Эта зависимость изображается прямой линией, так как деформации деталей прокатного стана упругие и справедлив закон Гука.

Тангенс угла α характеризует жесткость стана. Чем больше $\operatorname{tg} \alpha$, тем больше жесткость. Конечно, в идеале угол α должен был бы стремиться к $\pi/2$, но... все тела деформируются.

Теперь посмотрим, что происходит в реальном процессе прокатки. Мы уже говорили, что согласно третьему закону Ньютона валки действуют на прокатываемую полосу с такой же по величине силой, с какой полоса действует на валки. Эту силу мы назвали сопротивлением деформированию. Но как найти ее величину? Очевидно, что для прокатного стана, обладающего определенной жесткостью, его упругая деформация будет зависеть от сопротивления деформированию прокатываемой полосы. Если на одном и том же стане прокатывать полосы из алюминия, меди и стали, то упругая деформация стана в каждом конкретном случае будет разной. При прокатке алюминия она будет меньше, при прокатке меди — больше, а при прокатке стали — еще больше. Почему? Вспомним диаграмму растяжения металлов. Для алюминия, меди и стали построены такие диаграммы. С их помощью можно рассчитать силу сопротивления деформированию для каждого конкретного металла или сплава. Таким образом, эта сила в основном зависит от механических свойств материала прокатываемой полосы.

Но при прокатке происходит в основном сжатие металла между валками, а не растяжение. Предположим, что мы сжали валками полосу толщиной h_0 и шириной B на величину Δh и зафиксировали силу $F_с$, которая нам для этого потребовалась. На рисунке 4 результаты нескольких таких опытов представлены в виде графика зависимости силы $F_с$ от толщины полосы h. Эта зависимость уже не линейная, так как происходит пластическая деформация полосы. Сила $F_с$ — это, с некоторыми допущениями, не что иное, как сопротивление деформированию полосы.

Давайте подумаем, как нам посту-

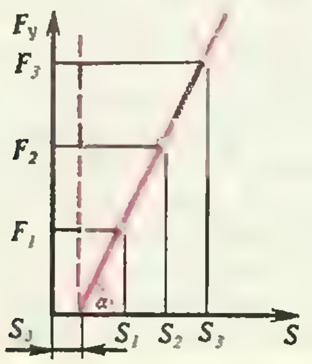


Рис. 3.

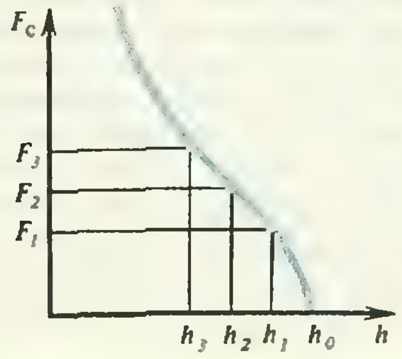


Рис. 4.

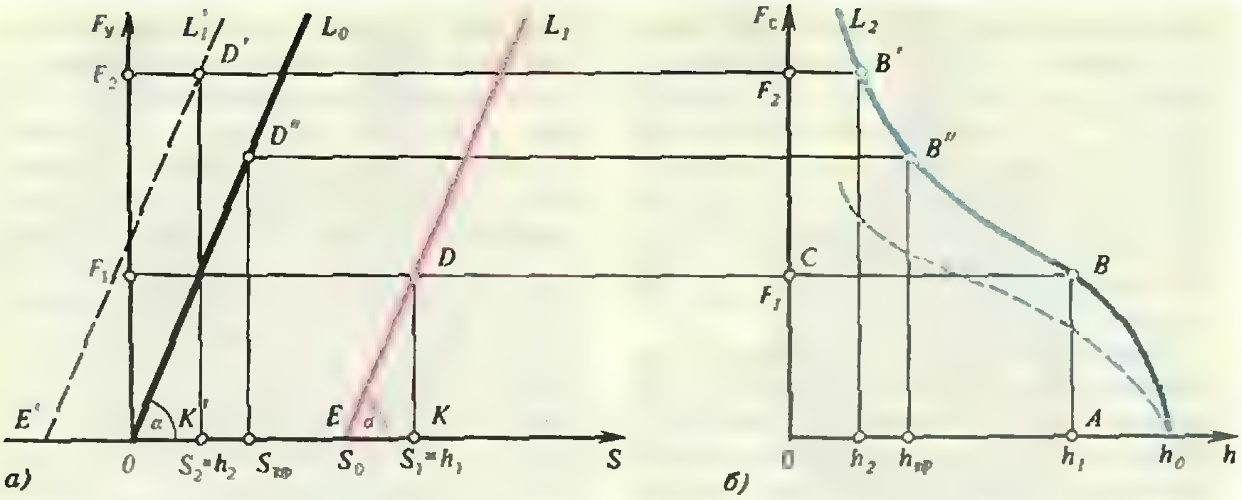


Рис. 5.

пить дальше. С одной стороны, на основании опытов, проведенных на прокатном стане без полосы, мы нашли жесткость стана. С другой стороны, на основании опытов по сжатию полосы в валках мы нашли величину ее сопротивления деформированию. Теперь мы можем ответить на поставленный ранее вопрос: какой зазор S_0 следует установить между валками, чтобы получить толщину полосы, равную h_1? Предположим, что мы хотим получить полосу толщиной h_1 на прокатном стане, жесткость которого определяется значением $\operatorname{tg}\alpha$ из рисунка 3. Для этого сначала мы должны найти по графику зависимости $F_c(h)$ силу сопротивления деформированию полосы, соответствующую ее прокатке от толщины h_0 до h_1. Далее необходимо эту силу приравнять силе упругости стана (согласно третьему закону Ньютона) и с учетом жесткости стана определить необходимую величину зазора S_0.

Рисунок 5 поясняет, как проводится эта операция. На рисунке даны совместно графики зависимости $F_y(S)$ и $F_c(h)$. Из точки A на рисунке 5, *б* восстановим перпендикуляр до пересечения с кривой L_2 (точка B). Из точки B проведем горизонталь до пересечения с перпендикуляром, восстановленным из точки K (рисунок 5, *а*), соответствующей величине S_1 зазора между валками, который будет равен толщине полосы h_1 ($S_1=h_1$). Через точку D пересечения горизонтали BD и вертикали KD проведем прямую L_1, параллельную L_0 и определяющую пружину прокатного стана с заданной жесткостью $\operatorname{tg}\alpha$. Тогда точка E пересечения прямой L_1 с осью S и дает нам необходимую величину S_0 зазора между валками, который следует установить перед прокаткой, чтобы получить заданную толщину полосы, равную h_1.

Предположим теперь, что нам надо получить полосу толщиной h_2 (см. рисунок 5, *б*). Проведя аналогичные рассуждения, мы окажемся в точке E', что соответствует отрицательному зазору между валками. Следовательно, такой процесс прокатки мы осуществить не сможем и данный прокатный стан позволяет в пределе получить минимально возможную толщину полосы, равную $h_{пр}$. Таким образом, для каждого прокатного стана есть своя предельная минимальная толщина полосы, зависящая в основном от свойств прокатываемого металла и размеров полосы. Полосу с толщиной меньше этой предельной на данном стане получить нельзя.

А если нужна более тонкая полоса?

Посмотрите на рисунок 5. Увеличивая угол α, можно уменьшать предельно возможную толщину полосы. Значит, надо увеличить жесткость стана, в первую очередь — жесткость валков, так как доля их деформации в упругой деформации всего стана очень велика. Мы уже говорили, что этого можно добиться, используя опорные валки, число которых в реальных станах достигает восемнадцати (по девять на каждый рабочий валок).

Как вы догадываетесь, консервные банки отнюдь не основная продукция, которую изготовляют из стальной полосы. Например, для кинескопов цветных телевизоров нужна полоса из специальной стали толщиной 0,15 мм с допустимыми отклонениями от этой толщины ±3 мкм. Конечно, технология получения такой полосы существенно отличается от технологии получения полосы для изготовления консервных банок. Более жесткими являются и прокатные станы.

При изготовлении конденсаторов и прокладок в магнитных головках для малогабаритной аппаратуры необходима фольга (тончайшая лента) из алюминия, тантала и бериллиевой бронзы толщиной 1—3 мкм. Как получить такую ленту? Надо отметить, что она, как правило, довольно узкая, 400—600 мм по ширине (в то время как полоса для консервных банок достигает 1,5 м в ширину). Конечно, для более узкой полосы сопротивление деформированию меньше, чем для широкой. Для прокатки такой узкой и тонкой ленты используют чрезвычайно жесткие двадцативалковые прокатные станы; прокатка производится в двух рабочих валках длиной 400—1200 мм, каждый из которых опирается на пирамиду из опорных валков. А вообще станы листовой прокатки определяются длиной валка (шириной полосы); так что когда говорят «стан 1700», то это означает, что длина рабочей части валков 1700 мм.

Есть еще один путь уменьшения предельно возможной толщины полосы. Он сводится к изменению формы кривой L_2 (см. рисунок 5, *б*), т. е. к уменьшению силы сопротивления деформированию. Этого можно достигать различными путями: изменением условий трения между валками и полосой с помощью смазок, натяжением полосы во время прокатки, уменьшением ее ширины и другими способами. Проводят определенную термическую обработку металла (отжиг), снижающую сопротивление деформированию, что, кстати, широко используется при производстве ленты для кинескопов. Однако все мероприятия, связанные с повышением жесткости стана и уменьшением сопротивления деформированию, как правило, связаны с дополнительными затратами. Так, полоса для кинескопов стоит значительно дороже полосы, идущей на изготовление консервных банок. Стоимость тончайших лент из некоторых металлов иногда в 20 раз больше стоимости золота той же массы. Вот и нужно думать: что выгоднее — прокатывать более толстую и более дешевую жесть или более тонкую и более дорогую. Очевидно, в каждом конкретном случае нужно исходить из реальных возможностей.

Не так давно на Карагандинском металлургическом комбинате пущен в эксплуатацию новый стан, позволяющий получать жесть толщиной 0,18 мм. Для консервных банок начинает использоваться тонкий лист из алюминиевых сплавов. Сопротивление деформированию при прокатке алюминия значительно ниже, чем при прокатке стали. Так что вопрос с консервными банками будет решен. Но дело, как мы уже говорили, не только в консервных банках, хотя без них иногда не обойтись. Дело в другом. Проблема деформаций инструмента при обработке металлов давлением является очень серьезной проблемой. В нашем случае инструментом были валки, и прокатка — один из процессов обработки металлов давлением. Таких процессов существует очень много, и они постепенно вытесняют обработку металлов резанием, так как более экономичны и малоотходны. Однако точность размеров изделий при обработке давлением, особенно в холодном состоянии, существенным образом зависит от жесткости инструмента и самих обрабатывающих агрегатов. Задача повышения жесткости еще далека от решения и ждет своего часа.

Математика и поэзия, физики и лирики... Нет, «Квант» не намерен раздувать тлеющее пламя этой полемики. Напротив, мы считаем, что глубокое эстетическое начало, заложенное в сущности математических наук, приближает их и к музыке, и к поэзии. Доказательство тому — публикуемые ниже две статьи. Их авторы — известные математики-исследователи — выступают в неожиданной для себя роли «исследователей поэзии». В первой статье рассказано, какие неожиданные прозрения возникают у поэтов, когда они в своем творчестве обращаются к научной тематике. А вторая демонстрирует своеобразие формально-математического подхода к теории стихосложения. В ней автор излагает строгие правила для определения размера русского стиха.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОБРАЗЫ В ПОЭЗИИ

Доктор физико-математических наук
М. И. БАШМАКОВ

Есть много свидетельств тому, как искусство вдохновляет человека науки. Более удивительно, что наука может быть источником художественного вдохновения. Перелистывая сборники стихов русских поэтов начала нашего века, я наткнулся на глубокие и, наверно, не всегда осознанные связи математических образов и поэтического мышления.

Для любого человека входом в математику является понятие числа. Магия чисел широко отражена в искусстве. Но вслушайтесь в следующие строки Николая Гумилева:

А для низкой жизни были числа.
Как домашний подъяремный скот.
Потому что все оттенки смысла
Умное число передает.

Наступление на нашу жизнь цифровых устройств необычайно расширило оттенки смысла, передаваемые числами. Оказалось — считать легче, чем измерять, аналоговые устройства стали вытесняться цифровыми; так, вместо громоздких и деформирующихся грампластинок мы скоро будем слушать цифровые записи музыки на так называемых «компактных дисках».

Вот еще стихи о числах:

Вам поклоняюсь, вас желаю, числа!
Свободные, бесплотные, как тени,
Вы радугой связующей нависли
К раздумиям с вершины вдохновенья!
(Брюсов)

Я всматриваюсь в вас, о числа,
И вы мне видитесь одетыми в звери,
в их шкурах,
Рукой опирающимися на вырванные
дубы.
Вы даруете единство между
змееобразным движением
Хребта вселенной и пляской коромысла,
Вы позволяете понимать века,
как быстрого хохота зубы
Мои сейчас вещеобразно разверзлися
зеницы
Узнать, что будет Я, когда делимое
его — единица.
(Хлебников)

Но поэтические образы идут не только от чисел и цифр — поэты не чуждаются ни буквенных формул, ни интегралов. Вот два примера:

Я дух механики. Я вещества
Во тьме блюду слепые равновесья.
Я полюс сфер — небес и поднебесья,
Я гений чисел. Я счетчик. Я глава.
Мне важны формулы, а не слова.
(Волошин)

Здесь что? Мысль роль мечты играла,
Металл ей дал пустой рельеф;
Смысл — там, где змеи интеграла
Меж цифр и букв, меж d и f!
(Брюсов)

Марина Цветаева, гуляя с дочерью, нашла «счастливый» листок клевера из четырех лепестков. Позже родились стихи.

Мы спим — и вот, сквозь каменные
плиты,
Небесный гость в четыре лепестка.
О мир, пойми! Певцом — во сне —
открыты
Закон звезды и формула цветка.

Мне не известно, знала ли Цветаева законы Менделя, позволяющие определить частоту появления различных форм цветка, знала ли она явление филлотаксиса, дающее математическое описание расположения листьев и лепестков, и можно только гадать, какие законы звезд были знакомы ей — может быть, формула Типиуса—Боде для радиусов орбит планет Солнечной системы? И если не во сне, то как Вольтер смог предугадать открытие двух спутников Марса («Микромегас»), а Андрей Белый — атомную бомбу («Первое свидание»)?

Осип Мандельштам написал загадочное восьмистишье:

И я выхожу из пространства
В запущенный сад величин,
И мнимое рву постоянство
И самосогласье причин.
И твой, бесконечность, учебник
Читаю один без людей —
Безлиственный, дикий лечебник,—
Задачник огромных корней.

Не знал же он современную физику, для которой «запущенные векторные поля» с трудом раскручиваются с помощью «бесконечномерных линейных пространств» и которой так тяжело рвать причинно-следственные связи!

Иначе обстоит дело с Велимиром Хлебниковым — он получил математическое образование, из которого мог бы почерпнуть сведения о пространствах дробных размерностей, изложенные в этих строчках:

О дробных степенях пространства
Кто думал по ночам —
Его, как свое убранство,
Я подаю очам.

Только в математической литературе пространства дробных размерностей (так называемые *фракталы*) появились совсем недавно, через полстолетия после написания этого стихотворения.

Валерию Брюсову давно был тесен наш трехмерный мир:

Высь, ширь, глубь. Лишь три координаты.
Мимо них, где путь? Засов закрыт.
С Пифагором слушай сфер сонаты,
Атомам дли счет, как Демокрит.

Но живут, живут в N измереньях
Вихри воль, циклоны мыслей, те,
Кем смешны мы с нашим детским зреньем,
С нашим шагом по одной черте.

Сколько измерений потребует единая теория поля? По одной гипотезе $N=26$, а может быть, и этого мало. Поистине, как сказал Ф. И. Тютчев,

Нам не дано предугадать,
Как слово наше отзовется.

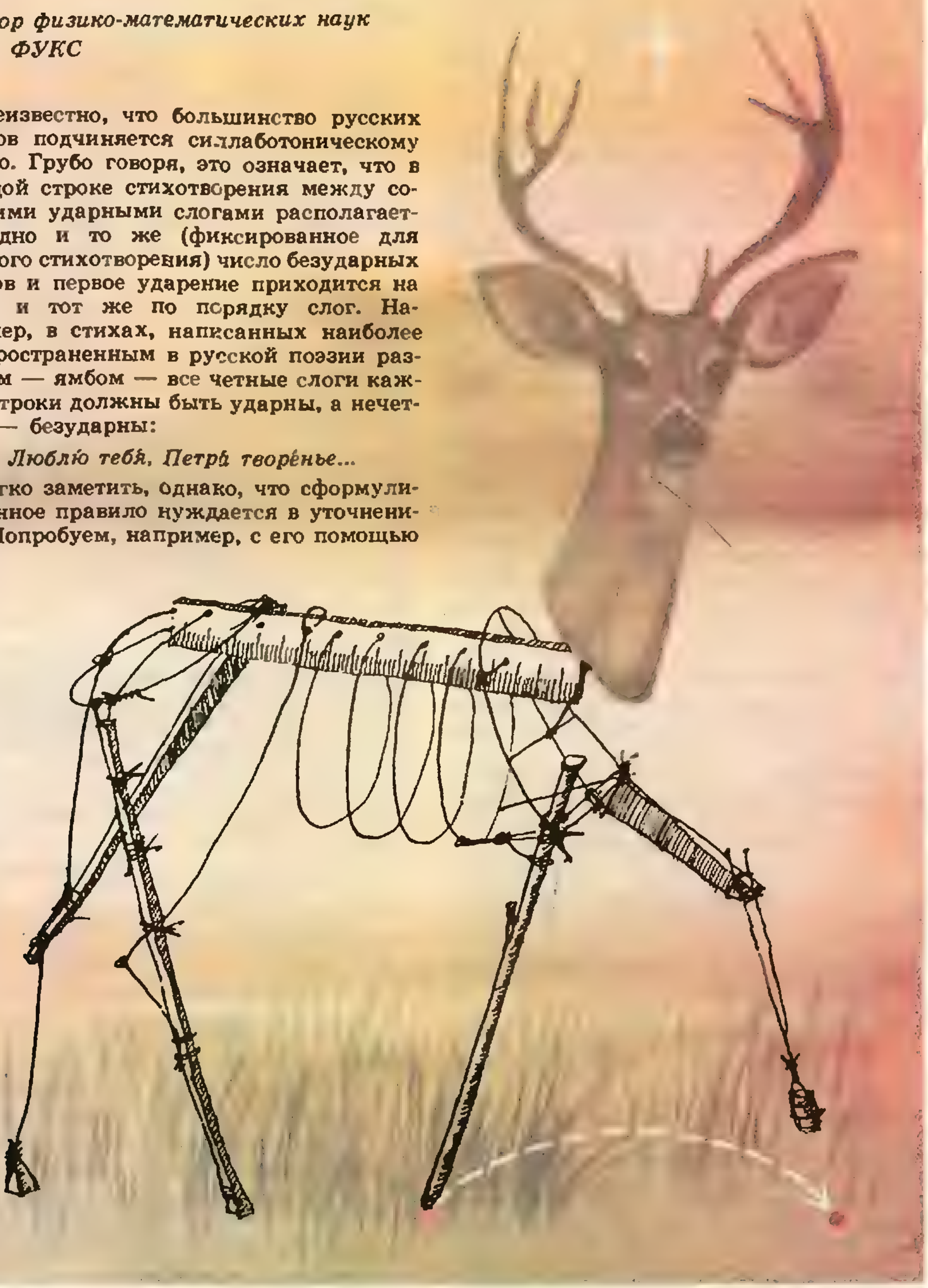
О СТИХОТВОРНЫХ РАЗМЕРАХ

Доктор физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Общеизвестно, что большинство русских стихов подчиняется силлаботоническому строю. Грубо говоря, это означает, что в каждой строке стихотворения между соседними ударными слогами располагается одно и то же (фиксированное для данного стихотворения) число безударных слогов и первое ударение приходится на один и тот же по порядку слог. Например, в стихах, написанных наиболее распространенным в русской поэзии размером — ямбом — все четные слоги каждой строки должны быть ударны, а нечетные — безударны:

Люблю́ тебя́, Петра́ творе́нье...

Легко заметить, однако, что сформулированное правило нуждается в уточнениях. Попробуем, например, с его помощью



расставить ударения в эталонных строках русского ямба:

Мой дя́дя са́мых че́стных пра́вил,
Когда́ не в шу́тку за́немо́г...

Мы наблюдаем сбои в обе стороны: слова *мой* и *не* вовсе не получили ударений, а в слове *занемог* их оказалось два. Если мы продвинемся в чтении «Евгения Онегина» (или «Медного всадника») дальше, то мы увидим, что эти отклонения от правила все же не вполне произвольны. Имеется, в действительности, только одно ограничение. Чтобы его сформулировать, занумеруем в каждой строке слоги по порядку. Тогда если один или более слогов некоторого слова получат четные номера, то среди этих слогов должен присутствовать ударный слог этого слова. Высказывание «стихотворение написано ямбом» в точности означает, что выполнено это условие. Убедитесь в качестве упражнения, что «Евгений Онегин» написан ямбом, а «Василий Теркин» — нет. (Усердный читатель, который продвинется в исследовании «Евгения Онегина» достаточно далеко, возможно, будет обескуражен его 26-й строкой. Он найдет разъяснение в следующем пункте, правда, написанное мелким шрифтом.)

Определение размера. Мы постулируем, что рассматриваемый текст (стихи) разбит на *строки*, строки разбиты на *слова*, состоящие из *слогов* (слова типа «в» или «к» мы игнорируем). Слоги в каждой строке занумерованы подряд, начиная с первого. Один из слогов каждого слова является *ударным* (это тот слог, на который падает ударение при обычном чтении слова).

Как нередко случается с аксиомами, это утверждение лишь приближенно отражает действительность. Во-первых, бывают слова с двумя (и более?) ударениями: *самогоноварение*, *двоякопериодический* и т. п. Однако, это — длинные, неуклюжие слова, которые редко встречаются в стихах. Во-вторых, в некоторых словах, таких как *или*, *через*, *перед* и т. п., ударение может переместиться на другой слог. Это часто происходит в стихах, примером может служить упоминавшаяся 26-я строка из «Евгения Онегина» — *Или блистали, мой читатель*; вспомните еще *Че́рез леса, через моря колдун несет богатыря*. Такой перенос ударения возможен и в разговорной речи — скажите: «Течет река, через нее переброшен мост», и вы услышите, что в слове *через* ударение падает на второй слог. В-третьих, наконец, некоторые группы слов, например, «на́ дом» в фразе «Задание на дом» образуют так называемые ритмические группы, которые следует приравнивать к словам. Подробности см. в статье А. Н. Колмогорова и А. В. Прохорова «Модель ритмического строя русской речи, приспособленная к изучению метрики классического русского стиха» в сборнике «Русское стихосложение» (М.: Наука, 1985). Мы игнорируем здесь все эти аномалии, вводя следующее золотое правило: все формулируемые ниже правила имеют исключения, нужно только чтобы число этих исключений было мало.

Зафиксируем два натуральных числа n и $k\leqslant n$ и отметим в каждой строке слоги с номерами k, $k+n$, $k+2n$, ...; эти слоги по определению считаются *сильными слогами (n, k)-размера*. Говорят, что *строка подчиняется (n, k)-размеру*, если выполнено следующее условие*):

Если некоторое слово содержит хотя бы один сильный слог (n, k)-размера, то и его ударный слог является сильным слогом (n, k)-размера. Другими словами: если ударный слог некоторого слова не является сильным, то это слово вообще не содержит сильных слогов.

---

* Это условие стиховеды часто называют *правилом запрета переакцентуации*. Оно впервые было четко высказано известным лингвистом Р. Якобсоном в двадцатых годах, а затем изучено и развито в стиховедческих работах А. Н. Колмогорова и его учеников (см., например, цитированную выше статью).

Например, обсуждавшийся выше ямб — это (2,2)-размер.

Стихотворение подчиняется (n, k)*-размеру*, если каждая его строка подчиняется (n, k)-размеру. При чтении стихотворения сильные слоги выделяются более или менее отчетливыми ударениями. Но еще раз подчеркнем: не следует путать, и тем более отождествлять, сильные и ударные слоги. Сильный слог не обязан быть ударным (первый слог слова *занемог* из второй строки «Евгения Онегина»), а ударный — сильным (слово *не* в той же строке). Помещенное в рамку правило как раз и указывает, когда сильный слог обязан быть ударным, т. е. когда на слог с определенным номером в строке действительно падает ударение при правильном чтении.

Подробнее (n, k)-размер называется *n-сложным размером с k-й сильной долей.*

Упражнение 1. а) Докажите, что если в строке, подчиненной (n, k)-размеру, сильный слог принадлежит слову, содержащему не больше n слогов, то этот слог является ударным. б) Если в строке отсутствуют слова, содержащие больше n слогов, то условие подчиненности этой строки (n, k)-размеру равносильно тому, что все сильные слоги — ударны.

Заметим, что наша терминология не вполне согласуется с принятой в стиховедении. В частности, то, что мы называем размером, чаще называют *метром*, а размер включает в себя еще и число сильных слогов в строке, или, как говорят, число *стоп*. Например, ямб — это метр, а пятистопный ямб — это размер.

Классические размеры. *Классическими размерами* русской поэзии по определению считаются двухсложные и трехсложные размеры. Таким образом, классических размеров пять. Вот их названия:

Размер	Название	Перевод названия (с греческого)
(2,1)	Хорей	Плясовой
(2,2)	Ямб	?
(3,1)	Дактиль	Палец *)
(3,2)	Амфибрахий	Двоякократкий**)
(3,3)	Анапест	Обратный ***)

Примеры трех из пяти классических размеров мы находим в хрестоматийных стихах Пушкина:

Ямб:

Я помню чудное мгновенье...

Еще одно последнее сказанье...
Унылая пора, очей очарованье...

Хорей:

Буря мглою небо кроет...
Царь с царицею простился...
Долго ль мне гулять на свете...

Амфибрахий:

Сижу за решеткой в темнице сырой...
Кавказ подо мною. Один в вышине...
Как ныне сбирается вещий Олег...

С дактилем нам поможет Лермонтов:

Тучки небесные, вечные странники...

А у Некрасова мы с легкостью находим образцы всех трехсложных размеров:
Дактиль:

В мире есть царь, этот царь беспощаден...
Дня не проводит Мазай без охоты...

Амфибрахий:

Савраска увяз в половине сугроба...
Есть женщины в русских селеньях...

Анапест:

Выдь на Волгу, чей стон раздается...
Что ты жадно глядишь на дорогу...

Какой размер лучше? Если Вы спросите у приятеля: «Ты подписался на журнал «Квант»?» (кстати, сделать это можно и теперь), то, скорее всего, вы сделаете ударения на словах «подписался» и «Квант», оставив безударными слова «ты», «на» и «журнал». Итого, 2 ударения на 9 слогов. Я думаю, это — норма для разговорной речи: одно ударение на 4—5 слогов. Если вы отвечаете урок или читаете речь по бумажке, ударений будет больше (это явление описывается словом «бубнить»). Когда вы читаете «с выражением» стихи, ударений будет еще больше: *примерно треть всех слогов будут ударными.* Это обстоятельство побудило некоторых критиков второй половины прошлого века сделать вывод, что наиболее подходящими для русского стихосложения размерами являются трехсложные размеры.

Действительно, трехсложные размеры занимают значительное место в творчестве поэтов указанного времени, прежде всего, Некрасова и его окружения. Но верно и другое. Пушкин почти не пользовался трехсложными размерами: 80 % его стихов написаны ямбом, 15 % — хореем, а трехсложными размерами — совсем немного, причем это по большей части пародии, эпиграммы и т. п. (Справедливости ради нужно сказать, что среди немногих стихов Пушкина, написанных трехсложным размером, есть весьма известные; кроме упомянутых выше можно назвать *Раздайтесь, вакхальны напевы...*, *Смотрю, как безумный, на черную шаль...* и некоторые другие. Кстати, среди трехсложных размеров Пушкин явное предпочтение отдавал амфибрахию; чем объяснить это, я не знаю.) Двухсложными размерами написаны многие стихи Лермонтова и почти все стихи Тютчева. Предпочтение двухсложным размерам (а среди них — ямбу) отдавали такие современные Некрасову поэты как Фет и Майков, не говоря уже о более поздних поэтах.

---

*) Палец имеет три фаланги: первая длинная, две другие короткие.

**) Сильную долю окружают две слабые («краткие») доли.

***) Обратный дактилю.

Попробуем разобраться, в чем причина этого.

Двухсложный размер против трехсложного. Если мы прочтем стихотворение, написанное ямбом или хореем, и сделаем ударения на всех сильных слогах, то получится считалка, например:

Вы́шел ме́сяц и́з тума́на,
Вы́нул но́жик и́з карма́на...

Чтобы привести количество ударений к норме, относительно которой мы выше согласились (одно ударение на 3 слога), мы должны пропустить — или приглушить — ударения на части сильных слогов. Это придает двухсложным стихам много замечательных качеств. Первое из них — разнообразие. В зависимости от того, какие именно сильные слоги выделяются ударениями, стихотворная строка может звучать совершенно по-разному. Сравните, например:

Под насыпью, во рву некошенном...
(Блок)

Тебе ль меня придется хоронить...
(Шекспир в переводе Маршака)

Трудно поверить, что размеры этих строк одинаковы, но это так! Более того, одно и то же стихотворение, написанное ямбом или хореем, может звучать в ритмическом отношении совершенно по-разному у разных исполнителей. Второе качество — близость к разговорной речи. Возможность не барабанить с одинаковой силой все сильные слоги позволяет приглушить ритм стиха, тем самым приблизив его к прозе самого высокого качества. Лично я не могу себе представить, как «роман в стихах» мог бы быть написан трехсложным размером. Наконец, третье — выделение части сильных слогов в двухсложном размере само может подчиняться какому-нибудь арифметическому правилу, создавая дополнительный ритм. Например, если в стихотворении, подчиненном двухсложному размеру, приглушить все четные сильные слоги и выделить нечетные (или наоборот), то размер стихотворения станет четырехсложным! Но об этом мы поговорим потом.

Контрдоводы трехсложного размера. Мы уже говорили, что, читая стихи, написанные трехсложным размером, мы принуждены более или менее равномерно выделить ударениями все сильные слоги. В результате оказывается, что стихи, написанные одинаковыми по числу слогов одноименными трехсложными размерами, очень похожи друг на друга. Сравните, например:

Ты твердишь, что я холоден, замкнут и сух,
Да, таким я и буду с тобой:
Не для ласковых слов я выковывал дух,
Не для дружб я боролся с судьбой...
(Блок)

Мне на шею бросается век-волкодав,
Но не волк я по крови своей.
Запихай меня лучше, как шапку, в рукав
Жаркой шубы сибирских степей...
(Мандельштам)

Авторам стихов, написанных трехсложным размером, приходится мириться с его однообразием, которое, впрочем, придает стихам некоторую торжественность («Вакхическая песнь» Пушкина), а в других случаях роднит стихотворение с задушевной русской песней (вспомните *Когда я на почте служил ямщиком* и *Славное море, священный Байкал*, и *Бродяга к Байкалу подходит*, и даже *Наверх вы, товарищи, все по местам*, и даже *Вы жертвою пали в борьбе роковой*!).

Но нет ли способа побороть тягучее однообразие трехсложного размера? Такой способ есть, и он очень стар: нужно не следовать трехсложному размеру строго, а систематически нарушать его ритм. Примером такого видоизмененного трехсложного размера может служить гекзаметр — едва ли не самый древний из стихотворных размеров. Образцом гекзаметра может служить лицейская эпиграмма Пушкина:

Внук Тредьяковского Клит гекзаметром песенки пишет...

Сильными слогами гекзаметра являются 1-й, 4-й, 7-й, 9-й, 12-й и 15-й слоги; таким образом, гекзаметр представляет собой смесь дактиля и анапеста. А вот интересный пример из Лермонтова:

Они любили друг друга так долго и нежно,
С тоской глубокой и страстью безумно-мятежной!
Но, как враги, избегали признанья и встречи,
И были пусты и хладны их краткие речи.

Это — дактиль, но без ударения на 1-м слоге. Согласитесь, что размер этого стихотворения не назовешь однообразным или скучным. Сходный размер встречается у Фета:

Измучен жизнью, коварством надежды,
Когда им в битве душой уступаю,
И днем, и ночью смежаю я вежды
И как-то странно порой прозреваю.

У более поздних поэтов так или иначе модифицированный трехсложный размер встречается очень часто. Я ограничусь одним примером из Гумилева:

> *Уронила девушка перстень*
> *В колодец, колодец ночной.*
> *Простирает легкие персты*
> *К холодной воде ключевой.*
> *Возврати мне перстень, колодец,*
> *В нем красный цейлонский рубин...*

В этом стихотворении четные строки написаны амфибрахием, а нечетные — модифицированным амфибрахием: ударение со 2-го слога перенесено на 3-й.

Неклассические размеры. В нашем определении (n, k)-размера n может быть любым натуральным числом (хотя естественно брать его не слишком большим, скажем, чтобы в строке было не меньше двух сильных слогов). Что можно сказать о (n, k)-размере с $n \neq 2$ и 3?

Начнем с $n=1$. Очевидно любой текст подчиняется (1,1)-размеру: все слоги сильные. Читать такие стихи — значит, скандировать (шай-бу-шай-бу!). Стихи в этом роде существуют, например: *Не-ест-не-пьет-мень-шой-сы-нок* (Некрасов), *Ко-си-ко-са-по-ка-ро-са* (Твардовский). Но они редки.

Более интересны размеры с $n>3$, особенно с $n=4$ и 5.

Совмещение размеров. Прежде чем обратиться к ним, зададимся вопросом: может ли одна и та же строка подчиняться двум разным размерам? Наше определение не исключает такую возможность. Например, строчка, составленная из одних односложных слов, подчинялась бы любому размеру.

Упражнение 2. а) Докажите, что строчка, подчиненная одновременно ямбу и хорею, состоит из односложных слов. б) Докажите, что строчка из 9 слогов, подчиненная двум разным трехсложным размерам, содержит по крайней мере 6 слов.

Практически это означает, что разные двухсложные размеры, как и разные трехсложные размеры, совместить невозможно. Казалось бы, совместить двухсложный размер с трехсложным легче, хотя и при этом возникают серьезные ограничения на длину слов.

Упражнение 3. Докажите, что если строчка подчиняется одновременно хорею и дактилю, то 4-й слог входит в состав либо односложного слова, либо слова, состоящего по крайней мере из 4-х слогов.

Набоков приводит пример строки, подчиненной ямбу и амфибрахию: *Таинственный и неземной.* Но строка — это еще не стихотворение. К тому же сильные слоги двухсложного и трехсложного размеров, совмещенных в одном стихотворении, были бы совершенно различны, и это стихотворение (если бы оно существовало) можно было бы прочесть двумя совершенно разными способами. Можно высказать уверенность, что ни в одном поэтическом сборнике вы такого стихотворения не найдете.

Другое дело — совмещение двухсложного и четырехсложного размеров, и причина в том, что 4 делится на 2. Например, что нужно для того, чтобы строка, подчиненная ямбу, подчинялась также, скажем, (4,2)-размеру? Нужно, чтобы в слове, содержащем более одного четного слога, ударение приходилось на слог, номер которого не делится на 4. Выбросьте последнее «не», и вы получите условие подчиненности ямба (4,4)-размеру. Поскольку слов, содержащих несколько четных слогов, в стихотворении может быть не так уж много, это условие представляется вполне выполнимым. Для примера заметим, что из 14 строк первой строфы «Евгения Онегина» 13 подчиняются (4,4)-размеру и 7 подчиняются (4,2)-размеру. Наоборот, что нужно для того, чтобы строка, подчиненная (4,2)-размеру, подчинялась ямбу? Нужно, чтобы в словах, не содержащих сильных слогов (4,2)-размера, но содержащих (тогда уж единственный) четный слог, этот слог был ударным. (Например, если 3-й и 4-й слоги такой строки составляют слово, то в этом слове ударение должно падать на 4-й, а не на 3-й слог.) И это представляется вполне выполнимым.

Четырехсложные размеры. Теперь мы можем обратиться к их рассмотрению. Каждому четырехсложному размеру мы поставим в соответствие *сопряженный* с ним двухсложный размер: для (4,1)- и (4,3)-размера таковым, по определению, считается хорей, для (4,2)- и (4,4)-размера — ямб. Далее, если строка подчиняется четырехсложному размеру, мы будем говорить о ее размере как о *несамостоятельном* четырехсложном, если она подчиняется также сопряженному двухсложному размеру, и как о *самостоятельном* — в противном случае.

Начнем с самостоятельного четырехсложного размера. Должен признаться, что *убедительных примеров русских стихов, подчиненных самостоятельному четырехсложному размеру, мне не известно.* Вероятно, их и нет — к такому выводу можно прийти, читая статью стиховеда Л. Е. Ляпиной «Русские пеоны» в уже цитировавшемся сборнике «Русское стихосложение». (*Пеоны* — ученое название четырехсложных размеров; а пятисложные по-ученому называются *пентонами.*) Отчего это так? В поисках ответа попробуем сконструировать строчку, подчиненную самостоятельному четырехсложному размеру:

Написал сорок статей я в журнал «Квант».

Эта строчка подчиняется (4,3)-размеру, но не подчиняется хорею. Ее чтение вызывает явное затруднение: ударения в словах *сорок* и *журнал* кажутся стоящими не на месте. В чем дело? Вероятно, в том, что, как уже было сказано, примерно треть слогов в стихотворении должны быть ударными; поэтому сильных слогов не достаточно, и к ним приходится добавлять хотя бы слабые дополнительные ударения. По ритмическим соображениям эти ударения хочется расположить в середине интервала между сильными слогами, а это и значит, что четырехсложный размер стремится к несамостоятельности.

Несамостоятельный же четырехсложный размер — очень распространенное явление. Если вы сомневаетесь в его существовании (как сомневались некоторые стиховеды — полемика с ними составляет основное содержание цитировавшейся выше статьи Л. Е. Ляпиной), спросите у любого ученика музыкальной школы — и он скажет вам, что четырехдольный размер в музыке встречается очень часто, в частности, в песнях:

Я ли в поле да не травушка была...
Уж как я ль мою коровушку люблю...

(все это — несамостоятельный (4,3)-размер, он, как и трехдольный, весьма характерен для русской песни). Если и это вас не убеждает, полистайте Пушкина. Вот образец (4,2)-размера из его юношеских стихов:

В пеще́рах Гелико́на
Я не́когда рожде́н;
Во и́мя Аполло́на
Тибу́ллом окреще́н...

Знаменитая «Зимняя дорога» Пушкина (*По дороге зимней, скучной...*) мне тоже кажется написанной четырехсложным размером; однако композитор Свиридов предпочел прочесть эти стихи как двухсложные.

Более того, часто (можно сказать, как правило) четырехсложному размеру бывает подчинена только часть стихотворения, и переходы от четырехсложного ритма к двухсложному и обратно могут нести смысловую или изобразительную нагрузку. Это легко прослеживается, например, в поэме Некрасова «Кому на Руси жить хорошо» (несамостоятельный (4,2)-размер).

Пятисложные размеры. Поскольку 5 — простое число, пятисложный размер может быть только самостоятельным. Где искать его? Казалось бы, в стихах еще более тягучих и распевных, чем русские песни и лирика Некрасова. Может быть, подойдут народные сказания? И точно, многие строки этого рода подчинены пятисложному размеру:

Ох ты го́й еси, добрый мо́лодец...

или

То не му́ж с женой, то не бра́т с сестрой —
Добрый мо́лодец с красной де́вицей.

Более последовательный пятисложный размер (хотя тоже не без отступлений) можно найти в подделках под сказительный стиль, стилизациях, написанных профессиональными поэтами, скажем в «Купце Калашникове» Лермонтова:

Как сходи́лися, собира́лися
Удалы́е бойцы моско́вские

На Москву-реку, на кулачный бой...
И приехал царь со дружиною,
Со боярами и опричниками...

Все это, кстати, (5,3)-размер.

Казалось бы все ясно. Но позволю себе привести совсем другой пример. В последний год своей жизни Гумилев написал поэму «Дракон», состоящую из 12 частей по 5 четверостиший в каждой. Приведу полностью первую часть, описывающую восход солнца на океанском берегу, а вы определите размер.

Из-за свежих волн океана
Красный бык приподнял рога.
И бежали лани тумана
Под скалистые берега.

Под скалистыми берегами,
В многошумной сырой тени
Серебристыми жемчугами
Оседали на мох они.

Красный бык изменяет лица,
Вот широко крылья простер,
И парит огромная птица,
Пожирающая простор.

И к вратам голубой кумирни
По открытой тропе небес
Он выходит, стрелок и лирник,
Ключ держа от тайн и чудес.

Дуйте ветры, чтоб волны пели,
Чтоб в лесах гудели стволы,
Дуйте ветры в трубах ущелий,
Возглашая ему хвалы.

Ответ: (5,3)-размер.

Действительно, предположим, что данное стихотворение подчиняется (n, k)-размеру. Во всех 20 строчках 3-й и 8-й слоги являются ударными (в своих словах). Имеется 7 строк, в которых слово, *содержащее 3-й слог*, имеет более 3 слогов. Значит, либо 3-й слог является сильным, либо $n \geqslant 5$. Аналогичное верно и для 8-го слога. Далее, 3-й и 8-й слоги являются одновременно сильными только в пятисложном размере. Легко проверить, что стихотворение действительно подчиняется (5,3)-размеру и не подчиняется другим пятисложным размерам. Размеры с $n > 5$ мы исключаем из рассмотрения (см. ниже).

Для убедительности добавлю, что из наших 20 строк 5 подчиняются (3,3)-размеру, 3 подчиняются (4,1)-размеру, 1 подчиняется (4,4)-размеру, все 20 подчиняются (5,3)-размеру, 10 подчиняются (5,5)-размеру (это — издержки нашего определения, см. с. 18) и ни одна не подчиняется ни одному другому (n, k)-размеру с n, не бо́льшим 5. Такую информацию выдала бы нам машина, если бы мы прибегли к ее помощи.

Но где же в «Драконе» протяжная певучесть «Купца Калашникова»? *Основная* причина ее отсутствия состоит в том, что почти в каждой строке «Дракона», кроме основных ударений на 3-м и 8-м слогах, имеется достаточно отчетливое дополнительное ударение либо на 5-м, либо на 6-м слоге. Дополнительные ударения прослеживаются и в других стихах Гумилева, написанных пятисложным размером, а также у Ахматовой и Цветаевой. В каком-то смысле и здесь можно было бы говорить о несамостоятельности (пятисложного) размера, но уточнить этот смысл, оставаясь в рамках строгой силлаботоники, *нельзя*.

К стихам Цветаевой, например, трудно подходить с тем определением размера, которое дано в начале статьи и которым мы все время пользуемся. Многие ее стихи написаны индивидуальным *размером* с фиксированными, но не составляющими арифметической прогрессии номерами сильных слогов, скажем 3, 6, 8, как в стихотворении

Юный месяц идет к полуночи:
Час монахов — и зорких птиц,
Заговорщиков час — и юношей,
*Час любовников и убийц.**)

---

*) Такие размеры называются *логаэдрами*.

Четыре, пять, что дальше? Дальше — 6. Бывают ли шестисложные размеры? Может быть. Так, правда с некоторой натяжкой, можно назвать шестисложным размер отдельных мест в «Купце Калашникове»:

Схоронили его за Москвой-рекой...
Промеж Тульской, Рязанской,
Владимирской...

Но число 6 имеет слишком много делителей, и шестисложный размер, скорее всего, будет распадаться в двух- или трехсложные (приведенные выше строчки — не исключение). Почти всякое стихотворение, написанное трехсложным размером, будет подчиняться и шестисложному, но это не оказывает влияния на звучание стиха.

Вообще, говоря о (n, k)-размерах с бо́льшими n, следует, во-первых, иметь в виду, что чересчур далеко расставленные сильные слоги вряд ли смогут создать определяющий ритм стиха, а во-вторых, принимать во внимание следующее, чисто арифметическое обстоятельство.

Упражнение 4. Пусть m — число слогов в строке. а) Если $n \geqslant k > m$, то строка заведомо подчиняется (n, k)-размеру (сильных слогов нет — сравните со случаем $n = k = 1$, с. 21). б) Если $k \leqslant m < k + n$, то условие подчиненности (n, k)-размеру не зависит от n и сводится к тому, что k-й слог ударен.

Поэтому целесообразно считать (это можно добавить к нашему определению), что число слогов в строках стихотворения, подчиненного (n, k)-размеру (хотя бы в большинстве строк) не меньше $k + n$. (Например, бессмысленно искать (5,5)-размер в «Драконе» Гумилева — см. с. 23.)

На практике все это означает, что (n, k)-размеров с n, большим 5, не бывает, так что мы можем закончить наш разговор. За его пределами остались многочисленные отступления от силлаботоники, которыми богата русская поэзия. Но эти отступления находятся и за пределами нашего арифметического подхода к стихотворным размерам.

Упражнение 5. Определите размер следующих стихотворений:

а) *Вам теперь пришлось бы бросить ямб картавый.*
Нынче наши перья — штык да зубья вил,—
Битвы революций посерьезнее «Полтавы»
И любовь пограндиознее онегинской любви.
(Маяковский)

б) *Я мечтою ловил уходящие тени,*
Уходящие тени погасавшего дня,
Я на башню всходил, и дрожали ступени,
И дрожали ступени под ногой у меня.
(Бальмонт)

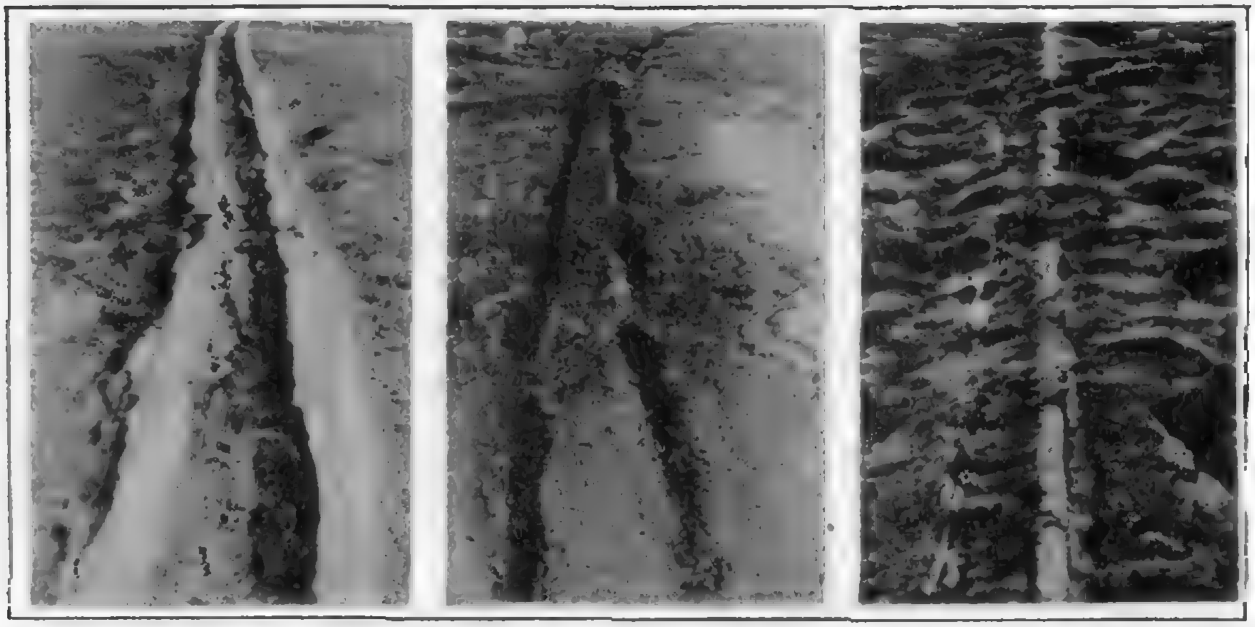
в) *Ветер злой, ветр крутой в поле*
Заливается,
А сугроб на степной воле
Завивается.
При луне (на версте мороз —
Огонечками!)
Про живых ветер весть пронес
С позвоночками.
(Фет)

г) *Как трехсотая, с передачею,*
Под Крестами будешь стоять
И своей слезою горячею
Новогодний лед прожигать.
(Ахматова)

д) *Над широкою рекой,*
Пояском-мостком перетянутой,
Городок стоит небольшой,
Летописцем не раз помянутый.

Знаю, в этом городке
Человечья жизнь настоящая,
Словно лодочка на реке,
К цели ведомой уходящая.
(Гумилев)

Мартовская лыжня



Эти три фотографии были сделаны в одно и то же время, и лыжни эти были расположены рядом. Но посмотрите, какие они разные! Одна — светлая, выступающая над окружающим снегом, как рельсы. Другая, темная, утоплена в снегу. А третья, полупропавшая, совсем необычна: тонкие, прозрачные ледяные кромки, словно подвешенные в воздухе, как «хрустальный мост» над грязным снегом...

Чем объясняется такое разнообразие видов лыжных следов? Мы предлагаем вам подумать над этим, понаблюдать мартовские лыжни. А в одном из следующих номеров журнала своими соображениями на этот счет поделится автор фотографий — кандидат физико-математических наук А. В. Митрофанов.

Пути электромагнитной теории

(Начало см. на с. 2)

ведь работа зависит от пути перемещения заряда. Электрическое поле, возникающее при электромагнитной индукции, нельзя характеризовать электрическим потенциалом. Это поле — непотенциальное.

В заключение отметим фундаментальное значение того, что источником электрического поля является переменное, а не постоянное магнитное поле.

В самом деле, если бы постоянное магнитное поле было источником электрического поля, то был бы возможен «вечный двигатель». В проводах, находящихся в таком поле, в этом случае протекал бы ток, который, в свою очередь, создавал бы магнитное поле, а оно, в свою очередь, создавало бы ток в новых проводниках, и т. д. В результате одиночный провод с током становился бы бесконечным резервуаром энергии. Поэтому тот факт, что постоянное магнитное поле не обладает электрическим действием, с необходимостью следует из невозможности «вечного движения».

Теория Максвелла не только объединила накопленные к середине XIX века разрозненные научные знания об электрических и магнитных явлениях. На ее основе была развита теория света как электромагнитного излучения, построена теория электромагнитных волн. Из максвелловских уравнений вышла теория относительности, а в сочетании с квантовой физикой — атомная физика, теория сверхпроводимости, квантовая электродинамика.

Росток электромагнитной теории Максвелла вырос в могучее древо современной фундаментальной физики.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1086—М1090, Ф1098—Ф1102

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 мая 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1086» или «Ф1098». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1086. С числом разрешается производить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: а) число 100? б) число n?

М. В. Сапир

М1087. Рассмотрим треугольник ABC, точку M в плоскости этого треугольника и проекции A_1, B_1, C_1 точки M на высоты, проведенные из вершин A, B, C соответственно. Докажите, что

а) существует одна и только одна точка M, для которой отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны;

б) для такой точки M длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны диаметру вписанной в треугольник ABC окружности.

А. Х. Джафаров

М1088. Докажите, что если числа p, q, r рациональны и $pq+qr+pr=1$, то $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ — квадрат рационального числа.

Иштван Варга (Румыния)

М1089. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ площадью S диагонали пересекаются в точке O. Пусть K, L, M, N — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что произведение периметров четырехугольников $ABCD$ и $KLMN$ не меньше $4S$.

Д. Ю. Бураго, Ф. Л. Назаров

М1090. Докажите, что

а) для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2};$$

б) неравенство из п. а) обращается в равенство, если и только если $1/a+1/c=1/b$.

Ю. В. Дейкало

Ф1098. Детский пистолет, который можно представить в виде пружины конечной массы, прикрепленной к неподвижной стене, выстреливает шариком, сообщая ему скорость v. Если выстрелить шариком вдвое большей массы, его скорость будет $v\sqrt{2/3}$. Какова будет скорость шарика утроенной массы?

П. И. Зубков

Ф1099. В горизонтально закрепленной открытой с концов трубе сечением S находятся два поршня (рис. 1). В исходном состоянии левый поршень соединен с неподвижной стенкой недеформированной пружиной жесткостью k. Давление p_0 газа между поршнями равно внешнему давлению, расстояние H от правого поршня до края трубы равно расстоянию между поршнями. Правый поршень медленно вытягивают к краю трубы. Какую силу нужно приложить к поршню, чтобы удержать его в крайнем положении? Трение пренебрежимо мало, температура постоянна.

В. П. Бородин

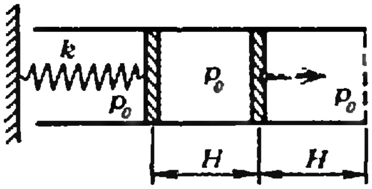


Рис. 1.

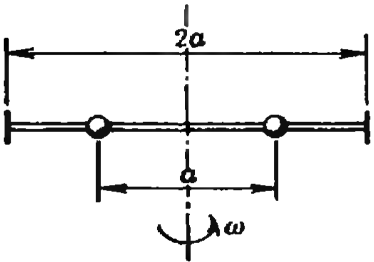


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1100. Достаточно длинный капилляр, погруженный в сосуд с водой, герметически закрывают сверху. При этом уровень жидкости в капилляре понижается на $\Delta h=4$ см. Чему равна относительная влажность воздуха у поверхности воды в сосуде, если температура окружающего воздуха 20 °С?

Л. Г. Маркович

Ф1101. Легкий горизонтальный стержень длиной $2a$ может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Одинаковые массивные шары насажены на стержень и могут перемещаться вдоль него без трения и упруго отражаться от упоров на его концах (рис. 2). Сначала шары закреплены на расстояниях $a/2$ от оси. Стержень раскручивают до угловой скорости ω_0, после чего шары одновременно освобождают. По каким траекториям будут двигаться шары? За какое время стержень совершит полный оборот? Построить график зависимости $\omega(t)$. Размеры шаров много меньше длины стержня.

А. Ю. Алексеев

Ф1102. Лазерный луч падает на прозрачную плоскопараллельную пластину, одна поверхность которой закрашена так, что может рассеивать свет во всех направлениях. На пластине видна следующая картина: светлая точка в центре, темный круг с резко очерченной границей, а вокруг — светлый ореол. Объясните явление.

А. М. Шалагин

Problems

M1086—M1090, P1098—P1102

M1086. Two operations may be carried out with numbers: doubling and adding 1. In what least number of these operations can the number 0 be transformed into the number a) 100? b) n?

M. V. Sapir

M1087. The point M in the plane of triangle ABC is perpendicularly projected to the points A_1, B_1, C_1 of the altitudes drawn from the vertices A, B, C respectively. Prove that

a) there exists one and only one point M for which the line segments AA_1, BB_1, CC_1 are equal;

b) the lengths of the segments AA_1, BB_1, CC_1 for such a point M equal that of the diameter of the incircle of ABC.

A. H. Djafarov

M1088. Prove that if p, q, r are rational numbers and $pq+qr+pr=1$, then $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ is the square of a rational number.

Ishtvan Varga (Rumania)

M1089. In the convex quadrilateral $ABCD$ of area S the diagonals intersect at the point O. Suppose K, L, M, N are the centres of the incircles of triangles AOB, BOC, COD, DOA. Prove that the product of the perimeters of $ABCD$ and $KLMN$ is no less than $4S$.

D. Yu. Burago, F. L. Nazarov

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate

cover; on the envelope write the words: •KVANT'S PROBLEMS• and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

M1090. Prove that
a) for all positive numbers a, b, c we have the inequality

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2};$$

b) this inequality becomes an equality of and only if $1/a+1/c=1/b$.

Yu. V. Deykalo

P1098. A toy pistol, which may be viewed as a spring of finite mass fixed to a wall, shoots a little ball which leaves the pistol with velocity v. If the shot is made with a ball of twice larger mass, the velocity will by $v\sqrt{2/3}$. What is the velocity of a ball of triple mass?

P. I. Zubkov

P1099. Two pistons are contained in a horizontal cylinder (of section S), open at both ends (see fig. Рис. 1, p. 27). In the initial state the left hand side piston is connected to a wall with a non-deformed spring of elasticity k; the pressure of gas p_0 between the pistons is equal to the external pressure, the distance H from the right hand side piston to the edge of the cylinder is the same as the one between the pistons. The right hand side piston is slowly pulled to the edge of the cylinder. What force must be applied to the piston in order to keep it in this extreme position? Friction is negligible, temperature is constant.

V. P. Borodin

P1100. A sufficiently long capillary tube, hermetically closed at the top, is placed in a receptacle containing water. The water level in the tube rises by $\Delta h=4$ cm. What is the relative humidity of air near the water's surface, if the surrounding air temperature is 20 °C?

L. G. Markovich

P1101. A light horizontal rod of length $2a$ freely rotates about a vertical axis passing through its centre. Identical massive balls slide along the rod without friction, bouncing off elastically from stops at its extremities (see fig. Рис. 2, p. 27). Initially the balls are fixed at the distance $a/2$ from the axis. The rod is rotated with angular velocity ω_0 and then the balls are simultaneously released. Describe the trajectories of the balls. What amount of time will be required for the rod to accomplish a complete rotation? Plot the graph of the function $\omega(t)$. The size of the balls is much less than the length of the rod.

A. Yu. Alekseev

P1102. A laser ray falls on a transparent plate bounded by parallel planes, one of which is painted so that it disperses light in all directions. The following picture is then visible on the plate: a light point in the middle surrounded by a dark circle with a clearly delimited boundary with a light halo around it. Explain this phenomenon.

A. M. Shalagin

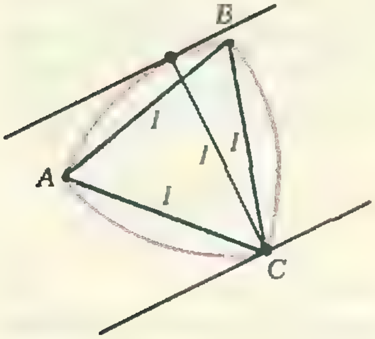
Решения задач

М1066—М1069, Ф1078—Ф1082

М1066. *Шесть точек расположены на плоскости так, что все попарные расстояния между ними не больше 1. Докажите,*

Соединим попарно все точки отрезками и окрасим синим цветом отрезки длины 1 и красным — отрезки длины меньше 1. Тогда хотя бы один из треугольников, образованных этими отрезками (быть может, вырожденный), окажется одноцветным. Это утвержде-

что из них можно выбрать три точки, попарные расстояния между которыми строго меньше 1.



ние, справедливое при любой раскраске отрезков в 2 цвета, в разных вариантах можно встретить во многих сборниках олимпиадных задач. Для его доказательства рассмотрим 5 отрезков, выходящих из какой-то одной данной точки P. Среди них найдутся 3 одноцветных, например синих — PA, PB и PC. Если треугольник ABC красный, то все в порядке. Если нет, то у него есть синяя сторона, но тогда ее концы вместе с точкой P являются вершинами синего треугольника.

Итак, пусть ABC — одноцветный треугольник. Если его стороны меньше 1 (т. е. красные), то A, B, C — искомые точки. Пусть он синий, т. е. правильный треугольник со стороной 1. Тогда остальные три точки D, E, F лежат в криволинейном треугольнике, являющимся пересечением трех единичных кругов с центрами A, B и C. Эта фигура называется *треугольником Рело.* Очевидно, что она имеет постоянную ширину 1, т. е. ее проекция на любую прямую есть отрезок длины 1 (см. рисунок). При этом расстояние между двумя точками треугольника Рело может равняться 1 только в том случае, когда одна из них совпадает с вершиной. А поскольку точки D, E, F отличны от A, B, C, попарные расстояния между ними меньше 1.

С. Г. Сальников

М1067. *Докажите, что для неотрицательных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию $x^2+y^2+z^2=1$, выполнено неравенство*

$$\frac{x}{1-x^2}+\frac{y}{1-y^2}+\frac{z}{1-z^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Докажем, что

$$\frac{t}{1-t^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{2}t^2 \qquad (*)$$

при всех t, $0\leqslant t<1$. На этом интервале неравенство (*) равносильно неравенству

$$f(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}t(1-t^2)\leqslant 1,$$

которое доказывается с помощью стандартного исследования функции $f(t)$. (Производная $f'(t)=\frac{3\sqrt{3}}{2}(1-3t^2)$ имеет на $[0;\ 1]$ единственный корень $t=1/\sqrt{3}$, причем $f(0)=f(1)=0<f(1/\sqrt{3})=1$. Следовательно $1/\sqrt{3}$ — точка максимума $f(t)$ на $[0;\ 1]$.)

В силу (*) левая часть доказываемого неравенства не меньше, чем

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}(x^2+y^2+z^2)=\frac{3\sqrt{3}}{2};$$

равенство достигается лишь при $x=y=z=1/\sqrt{3}$.

В. Э. Матизен

М1068. *Дан угол AOB (A и B — точки на сторонах угла). Постройте прямую l, проходящую через вершину O, так чтобы*

Эта задача имеет изящное геометрическое решение с неожиданной интерпретацией на языке комплексных чисел. Но сначала приведем самое бесхитростное — тригонометрическое решение.

Заметим, что рассматриваемые площади не изме-

площади треугольников AOC и BOD, где C и D — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую l, были равны.

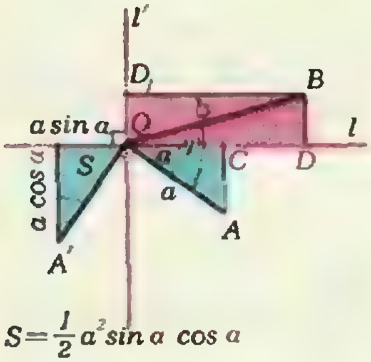


Рис. 1.

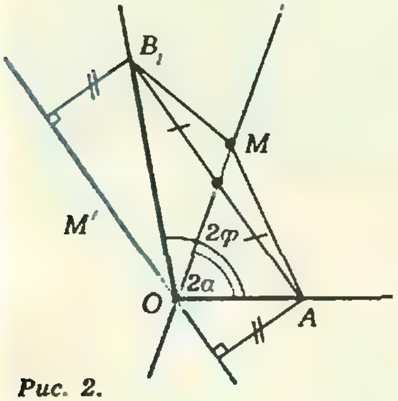


Рис. 2.

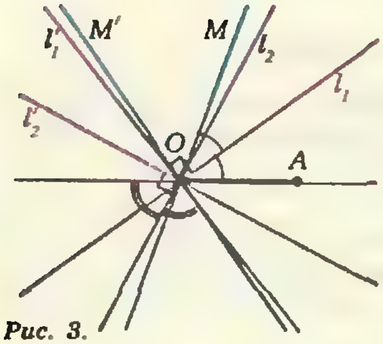


Рис. 3.

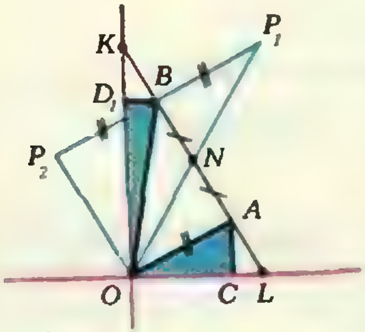


Рис. 4.

нятся, если заменить прямую l на перпендикулярную ей или если повернуть любой из отрезков OA и OB вокруг O на угол ±90° или 180° (рис. 1). Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $\varphi=\angle AOB\leqslant\pi/2$ и точка C лежит по одну сторону с B относительно OA. Пусть $OA=a$, $OB=b$, $\angle AOC=\alpha$, тогда, как легко видеть (рис. 1), площади треугольников AOC и BOD

$$S_{AOC}=\frac{1}{4}a^2\sin 2\alpha,\quad S_{BOD}=\frac{1}{4}b^2\sin 2|\alpha-\varphi|$$

равны; следовательно,

$$\sin 2|\alpha-\varphi| : \sin 2\alpha=a^2 : b^2. \qquad (*)$$

Рассмотрим угол AOB_1 величины 2φ и угол AOM величины 2α (рис. 2); очевидно, $\angle B_1OM=2|\alpha-\varphi|$. Заметим, что

$$S_{B_1OM} : S_{AOM}=(OB_1\sin\angle B_1OM) : (OA\sin\angle AOM)= =OB_1\sin 2|\alpha-\varphi| : a\sin 2\alpha.$$

Поэтому, если взять $OB_1=b^2/a$, то в силу (*) треугольники B_1OM и AOM будут равновелики. А это выполняется только для двух прямых: прямой OM, проходящей через середину отрезка AB_1, и прямой OM', параллельной AB_1 (высоты треугольников B_1OM и AOM, опущенные на OM, должны быть равны).

Итак, вообще говоря, задача имеет 4 решения (рис. 3): биссектрисы углов AOM и AOM' и перпендикулярные им прямые — внешние биссектрисы (вспомните замечание в начале решения). Исключение составляет случай $\varphi=\pi/2$, когда либо нет решений (при $OA\neq OB$), либо годится любая прямая (при $OA=OB$).

На рисунке 4 показано совершенно другое, чисто геометрическое решение. Построим середину N отрезка AB и отложим на прямой AB отрезки NL и NK, равные NO. Тогда две из искомых прямых — это OL и OK (две другие прямые получаются таким же построением с заменой отрезка OA на равный и перпендикулярный ему отрезок OA'). В самом деле, опустим из A перпендикуляр AC на OL, а из B — перпендикуляр BD_1 на OK. Достаточно доказать, что площади треугольников AOC и BOD_1 равны. Поскольку $AL=BK$, площади треугольников ALO и BKO равны, а $\triangle ALC=\triangle KBD_1$; но $S_{AOC}=S_{ALO}-S_{ALC}$, а $S_{BOD_1}=S_{BKO}-S_{KBD_1}$.

Второму решению можно придать несколько иной вид. Отложим от точки B векторы $\overrightarrow{BP_1}=\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{BP_2}=-\overrightarrow{OA}$. Легко видеть (рис. 4), что OK и OL — это биссектрисы углов, образованных прямыми OP_1 и OP_2 ($\angle P_2OK=\angle OKN=\angle KON=\angle KOP_1$). Еще 2 решения — это биссектрисы углов между OQ_1 и OQ_2, где $\overrightarrow{BQ_1}=-\overrightarrow{BQ_2}=\overrightarrow{OA'}$ (рис. 4, 5); именно это последнее построение указал автор задачи, сопроводив его весьма изысканным обоснованием. (Пусть, как показано на рисунке 5, KL — диаметр окружности OQ_1Q_2, проходящей через B, тогда OL — биссектриса угла Q_1OQ_2, $OK\perp OL$. В то же время, $2S_{OBD}=DO\cdot BD=BE\cdot BD=$

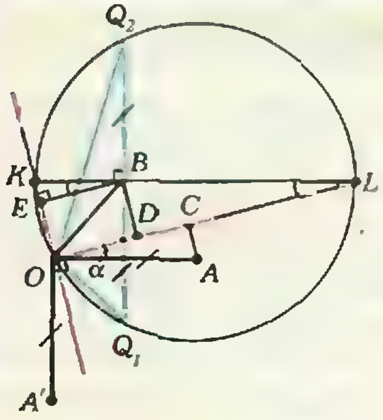


Рис. 5.

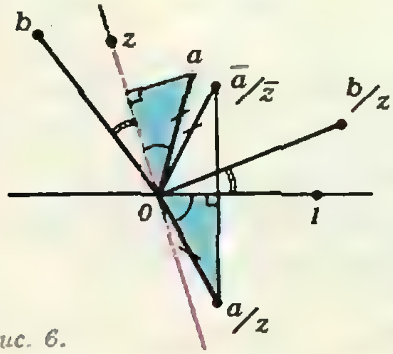


Рис. 6.

$=KB\cos\alpha\cdot BL\sin\alpha$, но $KB\cdot BL=BQ_1^2=OA^2$, а $OA^2\sin\alpha\cos\alpha=AC=CO=2S_{OAC}$.

Как же связаны все эти столь разные построения? Найти объяснение помогают комплексные числа. (Мы рассчитываем здесь на читателей, знакомых с комплексными числами и их геометрической интерпретацией.) Пусть точкам O, A и B отвечают числа нуль, a и b. Искомую прямую l будем задавать ее точкой z, $|z|=1$ (рис. 6). Поскольку $2OC=|a/z+\bar a/\bar z|$, $2AC=|a/z-\bar a/\bar z|$, площадь $S_{AOC}=|a^2/z^2-\bar a^2/\bar z^2|/8$ и, аналогично, $S_{BOD}=|b^2/z^2-\bar b^2/\bar z^2|/8$. Числа под знаком модуля в двух последних равенствах чисто мнимые, поэтому равенство $S_{AOC}=S_{BOD}$ эквивалентно условию $\bar a^2/\bar z^2-\bar a^2/\bar z^2=\pm(b^2/z^2-\bar b^2/\bar z^2)$, или $(b^2\pm a^2)/z^2=(\bar b^2\pm\bar a^2)/\bar z^2$. А это значит, что $z^2=\pm t(b^2\pm a^2)$, где t — некоторое положительное действительное число, т. е. $z_{1,2}=r\sqrt{b^2\pm a^2}$ и $z_{3,4}=ir\sqrt{b^2\pm a^2}$, где $r=1/|\sqrt{b^3\pm a^2}|$. Числа b^1+a^2 и b^2-a^2 задают, соответственно, прямую, содержащую медиану треугольника OAB_1, и прямую, параллельную AB_1, из первого построения (см. рис. 2); извлечению *квадратного корня* отвечает проведение биссектрис углов AOM и AOM'. Второе построение (см. рис. 4, 5) получим, если разложить подкоренные выражения на множители: $b^2-a^2=(b-a)(b+a)$, $b^2+a^2=(b-ia)(b+ia)$. Числа $b\pm a$ и $b\pm ia$ — это точки P_1, P_2, Q_1 и Q_2, а среднее *геометрическое* $\sqrt{uv}$ двух чисел u и v задает биссектрису угла между векторами $\vec u$ и $\vec v$. Например, $z_1=r\sqrt{b^2+a^2}$ лежит на биссектрисе угла Q_1OQ_2.

Р. О. Бурдин, В. Н. Дубровский

М1069. *В некотором городе разрешены только парные обмены квартирами (если две семьи обмениваются квартирами, то в тот же день они не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен квартирами нескольких семей можно осуществить за два дня. (Предполагается, что и до, и после обмена каждая семья живет в отдельной квартире.)*

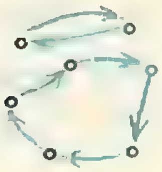


Рис. 1.

Изобразим каждую квартиру точкой на плоскости, а *переезд* из одной квартиры в другую — стрелкой, соединяющей соответствующие точки. Ясно, что в любой точке одна стрелка начинается и одна кончается. Поэтому, если выйти из любой вершины и двинуться по стрелкам, мы все время будем попадать в новые точки, пока *не вернемся к началу пути* (это неизбежно, так как число точек конечно). Проделаем то же самое, исходя из других точек. Мы обнаружим, что все стрелки образуют несколько непересекающихся замкнутых колец — циклов (рис. 1). Следовательно, достаточно доказать утверждение *задачи* для «циклического обмена» квартир.

Пусть надо осуществить обмен $A_1\to A_2\to\ldots\to A_n\to\to A_1$ — переселить жильцов квартиры A_1 в квартиру A_2, A_2 — в A_3 и т. д. В первый день произведем парные обмены $A_1\leftrightarrow A_{n-1}$, $A_2\leftrightarrow A_{n-2}$, ..., т. е. $A_k\leftrightarrow A_{n-k}$ (мы считаем, что $A_0=A_n$); жильцы квартир A_n и, при четном n, $A_{n/2}$ пока никуда не переезжают. Во второй день — обмены $A_1\leftrightarrow A_n$, $A_2\leftrightarrow A_{n-1}$, ..., т. е. $A_k\leftrightarrow A_{n+1-k}$. В результате *жильцы квартиры A_k переедут* в квартиру $A_{n+1-(n-k)}=A_{k+1}$ при $k=1$, ..., $n-1$, а из квартиры A_n — в $A_{n+1-n}=A_1$, что нам и нужно. Эту схему обменов наглядно иллюстрирует рисунок 2. Если

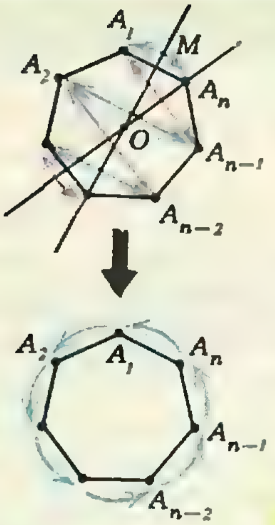


Рис. 2.

Ф1078. *Длинная тонкая нить с грузом на конце переброшена через блок и привязана к носу модели лодки, которая может плыть по длинному прямолинейному каналу с водой (рис. 1). Лодку и груз отпускают, и скорость лодки (в см/с) записывают каждую секунду. К сожалению, сохранился только конец этой записи: 5, 65; 6, 44; 6, 96; 7, 31; 7, 54; 7, 70; 7, 80; 7, 86; 7, 91. Определите по этим данным скорость лодки через 0,1 секунды после того, как ее отпустили.*

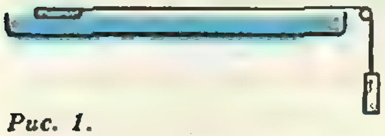


Рис. 1.

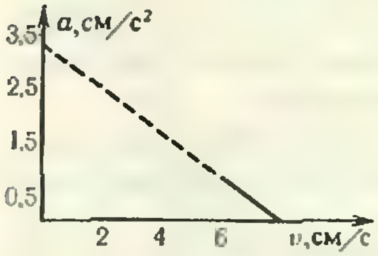


Рис. 2.

$A_1, \ldots, A_n$ — вершины правильного n-угольника с центром O, то первой серии обменов отвечает симметрия относительно оси OA_n, а второй — симметрия относительно оси OM, где M — середина стороны A_nA_1. Нетрудно доказать, что композиция (последовательное выполнение) двух симметрий относительно осей, пересекающихся в точке O под углом α, есть поворот вокруг O на угол 2α; в нашем случае на угол $2\pi/n$. При этом вершины многоугольника переставляются по циклу.

Н. Н. Константинов, А. И. Шнирельман

При движении тела обтекаемой формы с небольшой скоростью в жидкости возникает сила сопротивления, прямо пропорциональная скорости этого тела. Если массы лодки и груза равны соответственно M и m, скорость движения лодки в данный момент времени — v, а ее ускорение — a, то (по второму закону Ньютона) уравнение движения лодки имеет вид:

$$(M+m)a=mg-Av, \qquad (*)$$

где A — некоторая константа, характеризующая силу сопротивления.

Уравнение $(*)$ описывает движение с переменным по величине ускорением. Для нахождения зависимости скорости от времени необходимо, вообще говоря, интегрировать $(*)$. Однако нам требуется найти скорость лодки спустя весьма короткое время после начала движения. При этом вкладом второго члена в правой части уравнения $(*)$ можно пренебречь и считать, что лодка движется с некоторым начальным постоянным ускорением a_0. Само уравнение движения наводит на мысль, как использовать данные задачи для ее решения. Зависимость ускорения a от скорости v есть уравнение прямой в координатах a, v. Поэтому, экстраполируя $(*)$ к значениям $v \to 0$, мы и получим начальное ускорение a_0.

Для построения зависимости $a(v)$ можно приращение скорости на каждом промежутке времени длительностью 1 с считать равным ускорению. За скорость движения на каждом из указанных промежутков времени можно принять ее среднее значение. Полученная таким образом зависимость $a(v)$ —

a (см/с²)	0,79	0,52	0,35	0,23	0,16	0,1	0,06	0,05
v (см/с)	6,04	6,71	7,14	7,42	7,62	7,75	7,83	7,88

— приведена на рисунке 2 (сплошная линия). Начальное ускорение a_0, получающееся из графика при $v \to 0$, равно $\sim 3{,}5$ см/с².

Таким образом, спустя 0,1 с после начала движения скорость лодки равна примерно 0,35 см/с.

А. А. Шеронов

__Ф1079.__ Если полностью открыт кран холодной воды, а кран горячей воды закрыт (рис. 1), то ванна наполняется за время $t_1=8$ мин; если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то время наполнения увеличится до $t_2=14$ мин. Когда кран холодной воды закрыт, а кран горячей открыт полностью, время наполнения ванны $t_3=12$ мин; при тех же условиях, но с душем на конце — $t_4=18$ мин. За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?

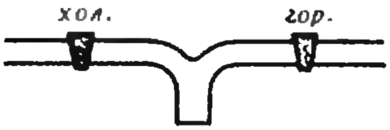


Рис. 1.

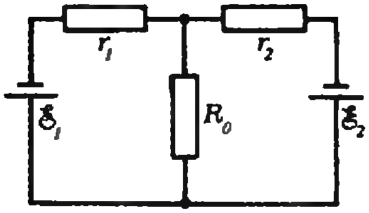


Рис. 2.

Время, за которое наполняется ванна, определяется давлением воды, которое создает насос, и сопротивлением труб, по которым вода поступает в ванну. Сопротивление определяется силами вязкого трения и не зависит от перепада давления, и, очевидно, надо считать, что за время наполнения ванны давление и сопротивление в рассматриваемой системе не изменяются.

Пусть объем ванны равен V; тогда скорость наполнения ванны холодной водой —

$$v_{\text{х}}=\frac{V}{t_1}=V\frac{p_{\text{х}}}{R_{\text{х}}},$$

где $p_{\text{х}}$ — давление холодной воды в системе, $R_{\text{х}}$ — сопротивление подводящих труб холодной воды.

Аналогично, скорость наполнения ванны горячей водой —

$$v_{\text{г}}=\frac{V}{t_3}=V\frac{p_{\text{г}}}{R_{\text{г}}}$$

($p_{\text{г}}$ — давление горячей воды, $R_{\text{г}}$ — сопротивление труб, по которым течет горячая вода).

Ясно, что если открыть полностью краны горячей и холодной воды, то скорость наполнения ванны станет равна сумме $v_{\text{х}}$ и $v_{\text{г}}$, и время, за которое ванна наполнится, —

$$T_1=\frac{V}{v_{\text{х}}+v_{\text{г}}}=\frac{t_1t_3}{t_1+t_3}=4{,}8 \text{ мин.}$$

Если на выходное отверстие насадить шланг с душем, то скорость наполнения ванны будет определяться еще и сопротивлением шланга $R_{\text{ш}}$, и при одном открытом кране (холодном или горячем) будет равна, соответствено,

$$v'_{\text{х}}=\frac{V}{t_2}=V\frac{p_{\text{х}}}{R_{\text{х}}+R_{\text{ш}}},\quad v'_{\text{г}}=\frac{V}{t_4}=V\frac{p_{\text{г}}}{R_{\text{г}}+R_{\text{ш}}}.$$

Эта запись подсказывает «электрический» аналог нашей задачи. Представим себе, что резистор с сопротивлением R_0 ($R_{\text{ш}}$) подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}_1$ ($p_{\text{х}}$) и внутренним сопротивлением r_1 ($R_{\text{х}}$). Тогда ток, текущий через резистор, равен $I_1=\mathscr{E}_1/(r_1+R_0)$. Если резистор подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}_2$ ($p_{\text{г}}$) и внутренним сопротивлением r_2 ($R_{\text{г}}$), то ток через R_0 равен $I_2=\mathscr{E}_2/(r_2+R_0)$. Понятно, что нахождение скорости v наполнения ванны при открытых двух кранах и насаженном шланге с душем аналогично нахождению тока I через резистор R_0, подключенный к двум батареям по схеме, приведенной на рисунке 2. Воспользуемся этой аналогией:

$$I=\frac{\mathscr{E}_1/r_1+\mathscr{E}_2/r_2}{1+R_0/r_1+R_0/r_2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow v=V\frac{p_{\text{х}}/R_{\text{х}}+p_{\text{г}}/R_{\text{г}}}{1+R_{\text{ш}}/R_{\text{х}}+R_{\text{ш}}/R_{\text{г}}}.$$

Таким образом, время наполнения ванны при открытых двух кранах с душем —

$$T=\frac{V}{v}=\frac{1+R_{ш}/R_{х}+R_{ш}/R_{г}}{p_{х}/R_{х}+p_{г}/R_{г}}=$$

$$=\frac{t_1t_3}{t_1+t_3}\left(\frac{t_2}{t_1}+\frac{t_4}{t_3}-1\right)=10{,}8\ \text{мин.}$$

В. Е. Скороваров

Ф1080. *Тонкостенный сосуд непрерывно откачивают насосом, однако из-за наличия микротрещины в стенке сосуда в нем устанавливается неизменное давление $p_у=0{,}001$ мм рт. ст. Снаружи нормальное атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст., относительная влажность воздуха $\varphi=80\,\%$. Найдите давление паров воды в сосуде. Давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н=17{,}5$ мм рт. ст.*

Рассмотрим стационарный режим, когда давления паров воды и сухого воздуха в сосуде не меняются со временем. Обозначим установившееся давление паров воды в сосуде через $p_{уп}$, а через $p_{ув}$ — установившееся давление сухого воздуха. Установившееся давление влажного воздуха в сосуде $p_у$ равно сумме этих парциальных давлений:

$$p_у=p_{уп}+p_{ув}. \qquad (1)$$

Поскольку температура воздуха остается неизменной, то условие сохранения давления для каждой из двух компонент требует, чтобы количество молекул каждого газа (паров или сухого воздуха), попадающих в сосуд за единицу времени, было равно количеству молекул газа, уходящих из сосуда за это же время. Число молекул газа, проходящих через микротрещину, пропорционально произведению их концентрации на среднюю скорость теплового движения молекул этого газа. В свою очередь, это произведение пропорционально наружному давлению, деленному на $\sqrt{\mu}$, где μ — молярная масса газа. Число же молекул газа, забираемых насосом за единицу времени, пропорционально давлению этого газа в сосуде. Таким образом, пренебрегая молекулами, которые покидают сосуд через микротрещину $\left(p_у\ll p_н\frac{\varphi}{100}\right)$, для молекул паров воды и сухого воздуха можно записать:

$$\frac{p_{еп}}{\sqrt{\mu_п}}\sim p_{уп},\ \frac{p_{ев}}{\sqrt{\mu_в}}\sim p_{ув}.$$

Из этих двух соотношений получаем:

$$\frac{p_{ув}}{p_{уп}}=\frac{p_{ев}}{p_{еп}}\sqrt{\frac{\mu_п}{\mu_в}}. \qquad (2)$$

Подставляя $p_{ув}$ из (2) в (1), найдем установившееся давление паров воды в сосуде:

$$p_{уп}=\frac{p_у}{1+\frac{p_{ев}}{p_{еп}}\sqrt{\frac{\mu_п}{\mu_в}}}=\frac{p_у}{1+\sqrt{\frac{\mu_п}{\mu_в}\frac{p_0-p_н\varphi/100}{p_н\varphi/100}}}\approx$$

$$\approx\frac{\varphi p_н p_у}{100p_0}\sqrt{\frac{\mu_в}{\mu_п}}\approx 2{,}34\cdot10^{-5}\ \text{мм рт. ст.}$$

В. В. Можаев

Ф1081. *Для очистки воздуха от пыли, которая в обычных условиях оседает очень медленно, можно использовать тот факт, что пылинки заряжены.*

В первом опыте стеклянный цилиндр (рис. 1) с пыльным воздухом помещают в электрическое поле напряженностью $E_1=1\times10^4$ В/м, направленное вдоль оси цилиндра. Через время $t_1=2$ мин вся содержавшаяся в цилиндре пыль осела на дно. Во втором опыте вдоль оси цилиндра натягивают тонкую проволоку и соединяют ее с источником высокого напряжения. Известно, что в этом случае напряженность поля $E\sim1/r$, где r — расстояние до оси. Напряжение источника подбирают так, чтобы напряженность электрического поля у стенок цилиндра была, как и в первом опыте, $1\cdot10^4$ В/м. Считая пылинки одинаковыми, а заряды пылинок равными, определите время оседания всей пыли на стенки цилиндра во втором опыте. Пыли в воздухе немного, так что объемным зарядом можно пренебречь.

На пылинку в электрическом поле действует сила $F=qE$, где q — заряд пылинки. Эта сила уравновешивается силой сопротивления воздуха $F_c=kv$ (v — скорость движения пылинки). В первом опыте напряженность электрического поля постоянна вдоль цилиндра, и скорость пылинок $v_1=\frac{qE_1}{k}$, а время, за которое весь воздух очистится,—

$$t_1=\frac{H}{v_1}=\frac{Hk}{qE_1}. \qquad (*)$$

Во втором опыте пылинки движутся в поле, напряженность которого падает по мере удаления от оси цилиндра: $E(r)=E_1R/r$; скорость пылинок также убывает с ростом r: $v(r)=\frac{q}{k}\frac{R}{r}E_1$. Пользуясь определением скорости $v=\frac{\Delta r}{\Delta t}$, можно записать: $\frac{\Delta r}{v(r)}=\Delta t$. График зависимости $\frac{1}{v(r)}$ от r — прямая линия (рис. 2). Величина $\Delta t=\frac{\Delta r}{v(r)}$ численно равна площади заштрихованной трапеции. Чтобы найти полное время движения пылинки t_x от оси до боковой стенки цилиндра, необходимо просуммировать все интервалы Δt, т. е. найти площадь прямоугольного треугольника с гипотенузой OA:

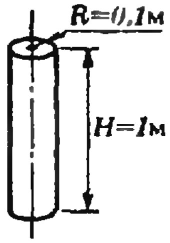


Рис. 1.

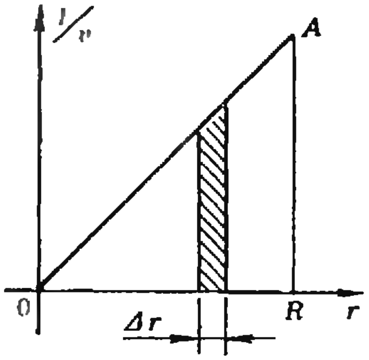


Рис. 2.

$$t_x=\frac{1}{2}R\frac{1}{v(R)}=\frac{Rk}{2qE_1}.$$

Подставляя значение k/q, найденное из $(*)$, получим:

$$t_x=t_1\frac{R}{2H}=6\text{ с}.$$

А. И. Буздин

Ф1082. *В схеме, приведенной на рисунке 1, замыкают ключ K. Найти максимальный ток через катушку. Найти максимальное напряжение на*

Максимальный ток через катушку соответствует моменту, когда ЭДС индукции равна нулю, т. е. в этот момент параллельно подключенный конденсатор C_2 разряжен, напряжение на конденсаторе C_1 равно U_0 (рис. 2). С учетом работы батареи запишем закон сохранения энергии:

конденсаторе C_1. Неидеальностью элементов схемы можно пренебречь.

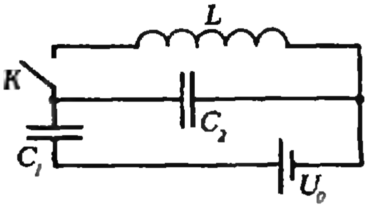


Рис. 1.

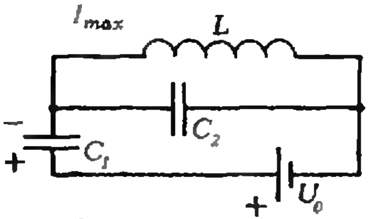


Рис. 2.

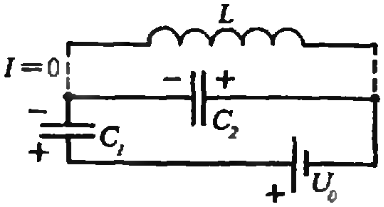


Рис. 3.

$$\frac{LI_{\max}^2}{2}+\frac{C_1U_0^2}{2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\,\frac{U_0^2}{2}+A_1.$$

Заряд, протекший через батарею, равен изменению заряда конденсатора C_1, и

$$A_1=\Delta q\cdot U_0=\left(C_1U_0-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_0\right)U_0.$$

Таким образом,

$$I_{\max}=\frac{C_1U_0}{\sqrt{L(C_1+C_2)}}.$$

Второй вопрос немного сложнее. Сумма напряжений на конденсаторах равна напряжению батареи и постоянна. Поэтому в тот момент, когда напряжение U_1 на конденсаторе C_1 максимально, напряжение $U_2=U_0-U_1$ на конденсаторе C_2 должно быть минимально (и отрицательно), а значит, в этот момент ток через катушку должен быть равен нулю (рис. 3). Снова запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2}+\frac{C_2(U_0-U_1)^2}{2}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}\,\frac{U_0^2}{2}+A_2,$$

где

$$A_2=\left(C_1U_1-\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}U_0\right)U_0.$$

Отсюда находим максимальное значение напряжения на конденсаторе C_1:

$$U_{1\max}=U_0\left(1+\frac{C_1}{C_1+C_2}\right).$$

А. Р. Зильберман

Задача на исследование

Преобразование степени бинома

Докажите, что для нечетных n разность $(x+y)^n-x^n-y^n$ представляется в виде многочлена $P_n(u,v)$ от двух переменных $v=x^2y+y^2x$, $u=x^2+y^2+xy$. (Для некоторых n эти многочлены указаны в таблице. Заметим, что P_n имеет лишь около $n/6$ отличных от 0 коэффициентов, и все они положительны.) Выведите соотношения между коэффициентами многочленов, позволяющие вычислять их последовательно; одно такое соотношение покажем на примере, взятом из таблицы: $196=2\cdot 133-85+15$.

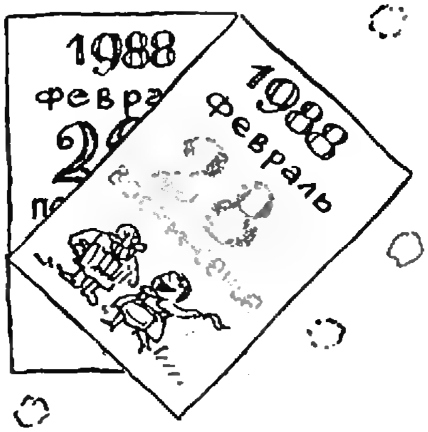
Попробуйте найти другие закономерности, которым удовлетворяют коэффициенты этих многочленов. Было бы интересно найти аналогичные представления для четного n, а также для многочленов с большим числом переменных.

Дьердь Фарраи, Будапешт

n	$P_n(u,v)$
1	0
3	$3v$
5	$5uv$
...	...
15	$v(\underline{15}u^6+50u^3v^2+3v^4)$
17	$uv(17u^6+\underline{85}u^3v^2+17v^4)$
19	$u^2v(19u^6+\underline{133}u^3v^2+19v^4)$
21	$v(21u^9+\underline{196}u^6v^2+147u^3v^4+3v^6)$
...	...

„Квант" для младших школьников

Задачи



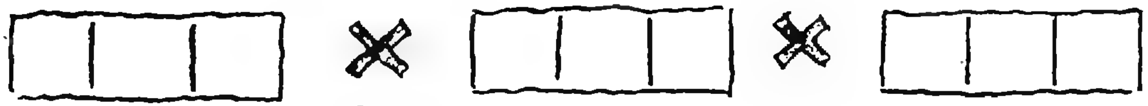
1. Листок календаря частично закрыт предыдущим листком (см. рисунок). Какая его часть больше: открытая или закрытая?

2. Некоторое целое число A возведено в куб. Покажите, что по крайней мере одно из чисел : A^3-A или A^3+A — делится на 10.

3. Почему птицы в мороз распушают перья?

4. Трехзначное число начинается с цифры 7. Из него получили другое трехзначное число, переставив эту цифру в конец числа. Полученное число оказалось на 117 меньше предыдущего. Какое число рассматривалось?

5. Впишите в клеточки цифры 1, 2, ..., 9 (каждую по одному разу) так, чтобы произведение оказалось наибольшим.



Эти задачи нам предложили: *А. М. Домашенко, Г. А. Гальперин, А. П. Савин, Н. К. Антонович, Л. П. Мочалов.*

О ПОЛЬЗЕ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ КОВБОЕВ

Кандидат физико-математических наук
А. С. ЯРСКИЙ

Билл явился к мистеру Кону сразу после обеда. В это время техасское солнце превращает все техасские сыры в плавленые, всю техасскую воду — в кипяченую и заставляет всех техасских жителей мечтать о какой-нибудь более скорой и не столь мучительной кончине.

К тому моменту, как температура Билла упала ниже точки кипения железа, а весь лед в доме полностью иссяк, Билл обрел, наконец, способность выговаривать слова:

— Понимаете, мистер Кон, все дело в этом Стенли! Мы с ним, можно сказать, приятели. И спорили до последнего времени только один раз.

— А как было дело? — мистер Кон изо всех сил старался не заснуть.

— Видите ли, мистер Кон, Стенли куда-то собрался, кажется, в Натчез — это в верховьях Ред-Ривер. Ну, я там бывал и говорю ему:

— Туда, мол, семь суток пути верхом.

— Ага,— говорит Стенли,— а до Батон Руж?

— Сутки,— говорю.

— А до Лафайетта?

— Примерно четверо суток. И дорога не легкая.

— А до... — и тут он называет ещё какой-то городишко — сколько?

— Я там не бывал,— говорю,— но, думаю, суток десять—двенадцать.

— Знаете, Билл,— говорит Стенли,— все эти четыре города лежат как по заказу — в вершинах прямоугольника.

— Ну и что? — говорю я.

— А то! — отвечает Стенли.— Я знаю, сколько пути до... — тут он опять назвал тот же городишко.

— Ты что,— говорю я ему,— был там?

— Нет,— говорит он,— не был.

— Так откуда же ты можешь знать?

— Знаю,— говорит,— туда около восьми суток!

Ну, слово за слово, мистер Кон, вывел я своего иноходца и... ровно через восемь суток оказался в этом городишке, век бы его не видать. А еще через восемь суток Стенли мне объяснил, что есть какая-то там «теорема»...*). Выходит, за ней-то я и мотался на Ред-Ривер.

— Ваш Стенли — неглупый малый! — жара, кажется, немного спала и мистер Кон слегка приободрился.

— Даже чересчур неглупый.— Билл недовольно хмыкнул.

И вот, мистер Кон, несколько дней назад подходит ко мне этот Стенли, заводит разговор о погоде, о ценах на скот, а потом и говорит:

— Слушайте, Билл, как вы думаете, найдется ли в наших местах такая лошадь, с которой вам не справиться, а подо мной она пойдет?

Я, не задумываясь, говорю ему:

— Что ж, Стенли, на такой лошади я, так уж и быть, помогу тебе добраться до ближайшего кладбища.

А он опять за свое:

---

*) Если $ABCD$ — прямоугольник и S — произвольная точка, то $SA^2+SC^2=SB^2+SD^2$.

— Сдается мне, Билл, что есть такая лошадь.

— Ладно,— говорю,— ставлю десять против одного, что такой лошади нет. Выкладывай доллар и не морочь мне голову.

— Не торопитесь, Билл,— говорит он,— и приготовьте десять долларов. Ответ стоит у вас в конюшне. Смотрите!

Тут он берет тетрадь, в которой я веду счета, открывает ее на чистой странице и пишет:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}. \qquad (10)$$

Я, мистер Кон, его спрашиваю:

— Слушай, Стенли, а что это ты начал счет с десяти — тут справа, в скобках?

— Это ваш мне долг,— говорит он,— где же его записывать, как не в бухгалтерской книге?

— Ты что-то очень спешишь,— говорю я ему.— Я, правда, давно не хожу в школу, но эта твоя лошадь под номером десять хромает на все четыре ноги. И мою десятку ты получишь не раньше, чем это животное сделает хотя бы один шаг.

— Оно этот шаг сделает,— говорит Стенли и пишет:

$$\frac{8}{2}-\frac{9}{3}=\frac{8-9}{2-3}.$$

— Проверьте,— говорит,— предъявленный счет и раскошеливайтесь...

Скажите, мистер Кон, вы когда-нибудь видели человека, который свалял дурака и тут же в этом признался? А ненужные десять долларов видели?..

— Слушай, Стенли,— говорю я,— ставлю еще десятку, что больше твой мерин не сделает ни шагу!

— Выкладывайте,— говорит он,— и вот вам расписка в получении:

$$\frac{5}{3}-\frac{9}{9}=\frac{5-9}{3-9}=\frac{-4}{-6}=\frac{2}{3}.$$

Проиграть две скачки подряд — такого со мной еще не бывало, мистер Кон. Но тут я вспомнил наш со Стенли уговор и решил, что еще не все потеряно.

— Слушай, Стенли,— говорю я ему,— под тобой этот конь ходит, не спорю. Но ты говорил, что мне на нем не усидеть. Ставлю двадцать против твоих двадцати, что и у меня этот мустанг пойдет по струнке.

— Принято,— отвечает Стенли.

Так вот, мистер Кон, эту скачку я тоже проиграл... Вам, мистер Кон, в своей школе и за неделю не заработать столько, сколько этот паршивец Стенли огреб за пару часов... А главное, я никак не могу взять в толк, какого дьявола хромая лошадь, то есть, я хотел сказать — неверная формула дает верные ответы? Вот с этим я, собственно, к вам и пришел!..

* * *

— Наука требует жертв! — изрек мистер Кон.— И вы, Билли,— одна из этих жертв!.. Во-первых, кто вам сказал, что неверная формула не может давать верных результатов? Че-пу-ха! *Даже самый большой на свете враль может случайно сказать правду!..* Во-вторых, пока вы тут продували один заезд за другим, я нашел подоплеку вашего позора. Взгляните-ка на формулу

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\left(2-\frac{b}{d}\right).$$

Неважно, каким именно путем я к ней пришел. Важно, что это — *та же самая формула* (10). Несколько преобразованная, конечно. Вы, Билли, можете взять любые b и d, вычислить по ним a и c — и все! Просто и безот-

(Окончание см. на с. 42)

Калейдоскоп „Кванта"

Мне хочется верить, что те,
кто любят познавать причины явлений...
найдут некоторое удовлетворение при
ознакомлении с различными изложенными
здесь размышлениями о свете...

Х. Гюйгенс.
«Трактат о свете»

Вопросы и задачи

1. Почему блестят воздушные пузыри в воде?

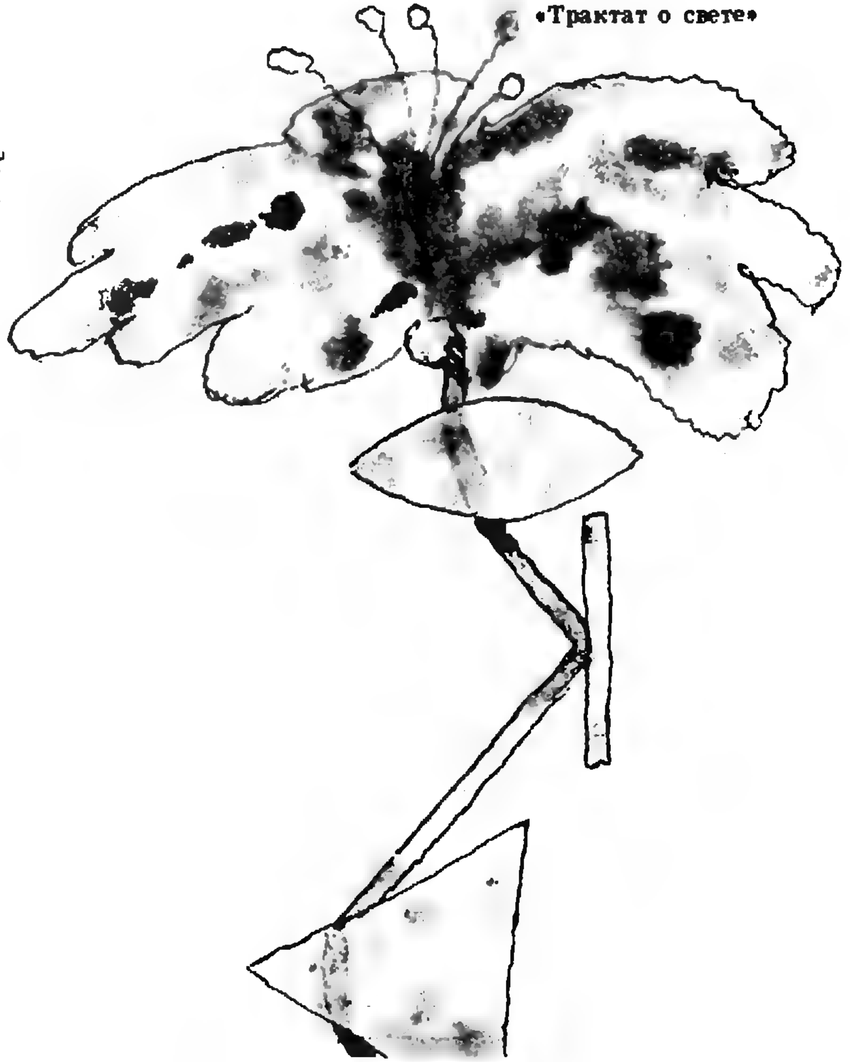
2. Можно ли разжечь костер при помощи льда?

3. Почему даже в чистой воде человек видит плохо?

4. Аквалангист, плавающий под водой, видит рыбака на берегу, а рыбак лишь в редких случаях может увидеть аквалангиста. Почему?

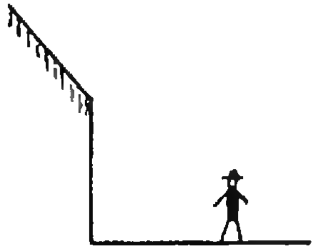
5. Какую характеристику неизвестного вещества достаточно определить, чтобы узнать скорость света в нем?

6. Человек приближается к плоскому зеркалу со скоростью 2 м/с. С какой скоростью он приближается к своему изображению?



Вопросы и задачи

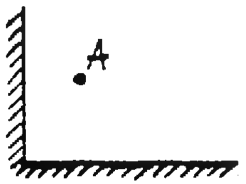
8. Постройте изображение человека в плоском зеркале в случае, показанном на рисунке.



9. Чем объясняется блеск драгоценных камней?

10. Почему днем не видно звезд?

11. Сколько изображений точки A (см. рисунок)



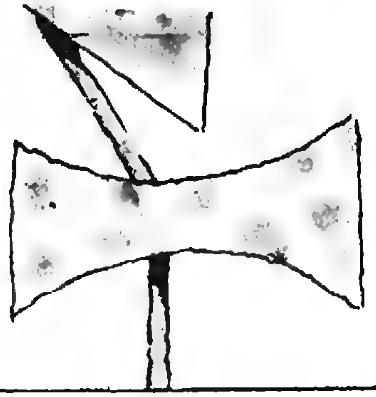
7. Луч прожектора в тумане виден хорошо, а в ясную погоду — хуже. Почему?

Любопытно, что...

...весьма точные измерения углов преломления света в разных средах произвел еще Клавдий Птолемей (140 год н. э.) Однако установить соотношение между углами падения и углами преломления ему не удалось.

...полное внутреннее отражение в естественных монокристаллах является более совершенным, чем отражение от специально изготовляемых металлических зеркал, где всегда происходит некоторое поглощение энергии падающего пучка.

...своей известностью, причем не только в научных кругах, Ньютон при жизни более всего был обязан своим оптическим исследованиям, а самым популярным его произведением была «Оптика», которая в течение многих десятилетий оставалась энциклопедией науки о свете.



А так ли хорошо знакомы вам понятия

Отражение и преломление

Эти понятия, такие простые на первый взгляд,— глубокие и неотъемлемые представления одного из важнейших разделов физики — оптики. В физике мало таких областей, в которых с начала их развития были получены столь крупные научные результаты, что и по сей день сохранили свое значение. Именно поэтому исследования по оптике оказали очень большое влияние на становление других разделов естествознания, заставили пересмотреть основные положения классической физики и сыграли существенную роль при зарождении теории относительности и квантовой теории.

Мы надеемся, что нынешний выпуск «Калейдоскопа» поможет вам по-иному взглянуть на некоторые привычные явления и приборы, например на линзу или фотоаппарат, а может быть, побудит серьезно задуматься о механизме человеческого зрения — в общем, поможет вам открыть для себя и в оптике что-то новое и интересное.

можно получить в системе из двух взаимно перпендикулярных зеркал?

12. Чтобы лучше видеть, близорукие люди щурят глаза. Как это объяснить?

Микроопыт

Предложите опыт, с помощью которого можно отличить очки для дальнозорких от очков для близоруких. Проведите его.

Что читать в «Кванте»

об отражении и преломлении (публикации последних лет)

1. «Принцип Ферма» — 1984, № 1, с. 36;
2. «Дела и проделки феи Морганы» — 1984, № 8;
3. «Несколько опытов с объективом» — 1984, № 11;
4. «Что такое радуга» — 1984, № 12, с. 20;
5. «Лучи и волны» — 1985, № 11, с. 23;
6. «Оптические приборы» — 1986, № 10;
7. «А что будет, если...?» — 1986, № 12.
8. «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» — 1987, № 12.

казно! Пример? Пожалуйста. Назовите любые два числа. Два и семь? Прекрасно. Берем $b=2$, $d=7$ и вычисляем:

$$\frac{a}{c}=\frac{2}{7}\left(2-\frac{2}{7}\right)=\frac{2}{7}\cdot\frac{12}{7}=\frac{24}{49}.$$

Берите теперь $a=24$, $c=49$ или $a=48$, $c=98$... Проверяйте:

$$\frac{24}{2}-\frac{49}{7}=\frac{24-49}{2-7};$$

$$\frac{48}{2}-\frac{98}{7}=\frac{49-98}{2-7}.$$

Можете, кстати, удвоить, утроить — хоть удесятерить оба знаменателя или числителя:

$$\frac{24}{6}-\frac{49}{21}=\frac{24-49}{6-21}.$$

Мистер Кон удовлетворенно перевел дух. Билл внимательно просмотрел написанное и подвел итог:

— От силы двадцать. Больше мне на всем этом не отыграть!

— Это как сказать! — возмутился мистер Кон.— Конечно, этот ваш Стенли может знать открытую мной закономерность. Но одну вещь он наверняка не сможет сделать — просто потому, что это невозможно! Предложите ему, Билл, такой вопрос: Может ли лошадь под номером 10 поднять голову?!! А говоря попросту, *пусть добьется равенства (10) при* $a>c$! Но не забудьте, Билл, все эти a, b, c и d — целые положительные числа. Вам ясно?

Возможно ли равенство (10) при $a>c$?

Хмурое лицо Билла несколько прояснилось.

— Если все так, как вы говорите, мистер Кон, то я возьму с него по пять долларов за каждый час, пока он будет ломать голову. Пятерка в час — это по совести.

— Не жадничайте, Билл,— возразил мистер Кон.— Речь идет о пожизненном доходе! Даже пятьдесят центов в час составят в сутки приличную сумму в двенадцать долларов!..

Мистер Кон ненадолго задумался.

— Знаете, Билл, предложите это *невыполнимое* задание кому-нибудь побогаче Стенли. Иначе идея не проживет и трех дней.

— Это уж моя забота,— заявил Билл.— Хотел бы я, однако, додуматься, *почему* эта лошадь не может поднять голову?.. И еще одно. Мистер Кон, а если он и это знает?

— Тогда,— мистер Кон начал накаляться,— тогда пусть найдет несократимые дроби a/b и c/d и сохранит условие (10)!

Возможно ли равенство (10), если $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ — несократимые дроби?

— Хорошо,— сказал Билл,— но если он и об этом наслышан?

— Все,— отрезал мистер Кон,— меняем пластинку! Скажите, Билли, нравится вам дробь

$$\frac{19}{95}?$$

— Дробь как дробь...— Билл немного помолчал.— Кажется, она сокращается...

— Да,— завопил мистер Кон,— сокращается!!! Но как!!! Просто вычеркиваются одинаковые цифры — последняя в числителе и первая в знаменателе:

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}.$$

Проверяйте!!! А вот вам еще:

$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}.$$

И еще:

$$\frac{4\cancel{9}}{\cancel{9}8}=\frac{4}{8}.$$

На лице Билла появилось странное выражение. Он взял карандаш и под-

рагивающей рукой стал писать:

$$\frac{5\cancel{5}}{\cancel{5}5}=\frac{7\cancel{7}}{\cancel{7}7}=\frac{33\cancel{3}}{\cancel{3}33}.$$

— Посмотрите, мистер Кон,— сказал он тихо,— это я сам придумал...

— Эти примеры тривиальны,— безапелляционно заявил мистер Кон,— и мы их исключим из рассмотрения. Так вот, пусть этот ваш Стенли придумает *еще одну дробь*, которая сокращается по такому способу, и чтобы она, разумеется, не состояла из одинаковых цифр. Знайте, Билл: *если в числителе и знаменателе стоят двузначные числа, то таких дробей всего четыре!* Три из них я вам написал. А четвертую пусть ищет Стенли...

Какую дробь не назвал мистер Кон? И только ли одну?

Да, чуть не забыл. Если в числителе несколько раз повторить последнюю цифру, а в знаменателе — столько же раз первую его цифру, то наше неправильное сокращение даст верный результат. Смотрите и можете проверить:

$$\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1\cancel{99}}{\cancel{99}5}=\frac{1\cancel{999}}{\cancel{999}5}=\frac{1}{5}.$$

Пусть Стенли попробует сосчитать устно, чему равно

$$\frac{16666666666}{66666666664}\,?$$

Ну, Билл, этого, я думаю, вам хватит?

$$\frac{1\overbrace{666\ldots6}^{1000\text{ раз}}}{\underbrace{666\ldots6}_{1000\text{ раз}}4}=\frac{1}{4};\quad\frac{4\overbrace{999\ldots9}^{3000\text{ раз}}}{\underbrace{999\ldots9}_{3000\text{ раз}}8}=\frac{4}{8}$$

ПОЧЕМУ?

— Да, мистер Кон, спасибо. Но,— Билл смущенно поднялся,— у меня... я сейчас... пока не отыграюсь...

— Сколько? — лаконично спросил мистер Кон.

Билл совсем смутился, вытер лоб и глубоко вздохнул.

— Если можно, три семьдесят три.

— Три доллара? — Мистер Кон удивленно хмыкнул.— Возьмите сорок — на первое время.

— Нет, мистер Кон, на то, что я задумал, мне нужно ровно три семьдесят три!.. Все верно. Спасибо, мистер Кон...

* * *

Примерно через неделю к мистеру Кону, как и следовало ожидать, заявился Стенли. Внешний его вид говорил о том, что ни для Билла, ни для кого-либо другого Стенли уже не мог служить источником дохода.

— Рад с вами познакомиться,— сказал мистер Кон,— присаживайтесь. Ну, рассказывайте, как ваши дела?

— Как вам сказать, мистер Кон, дела идут... Вот зашел показать вам одну штуку.

Стенли подошел к столу, взял лист бумаги и написал:

$$\sqrt{3\frac{3}{8}}=3\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

— Довольно хитрая вещь,— сказал он.— Число неправильно выносишь из-под корня, а результат все равно правильный... Но у меня этот фокус не прошел: Билл все понял за пять минут и даже написал общую формулу!.. Это спутало все мои планы... Ну, да не об этом речь. Я, собственно, зашел, чтобы... ну...

КАКУЮ ФОРМУЛУ НАПИСАЛ БИЛЛ?

— Сколько вам дать, Стенли? — напрямик спросил мистер Кон.

— Если вас это не слишком обременит, дайте мне,— Стенли перевел дух,— три доллара семьдесят три цента. Верну через пару дней.

— Знаете, Стенли,— заметил мистер Кон, протягивая деньги,— я уже второй раз слышу эту нелепую сумму — 3.73. Что, в конце концов, она означает?

— Да так, пустяки, мистер Кон, мелочь...— Стенли покраснел, пробормотал еще что-то невразумительное и поспешно попрощался.

* * *

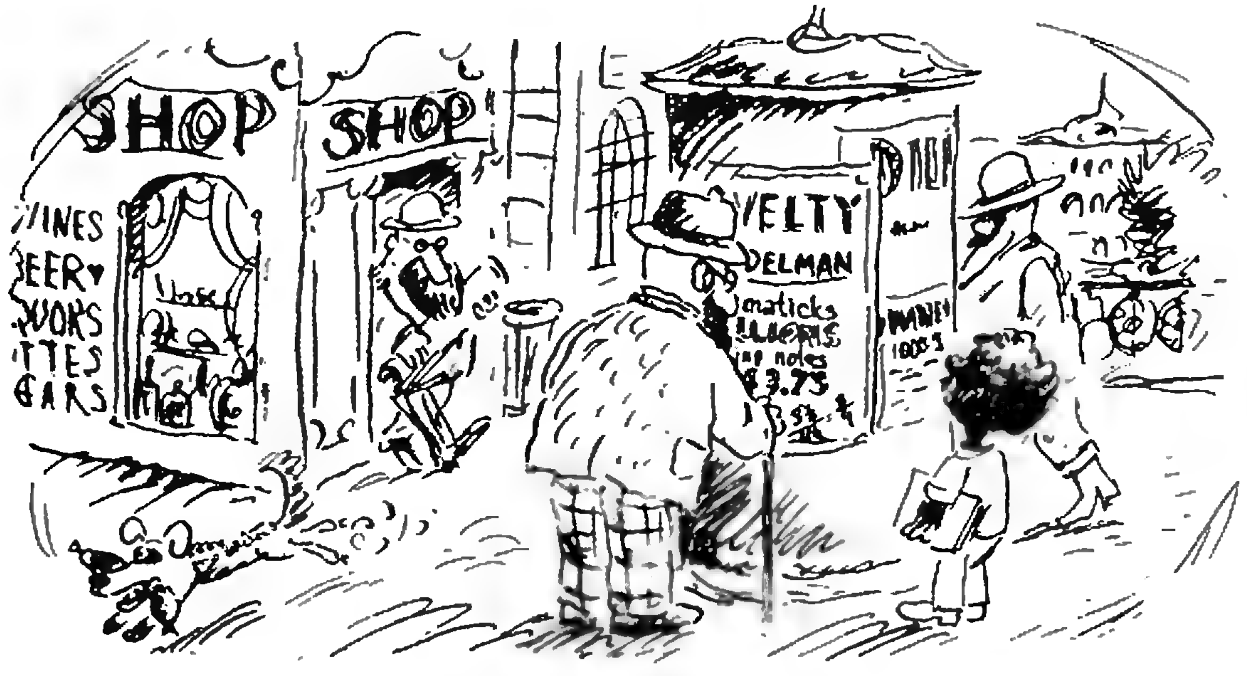
Через несколько дней мистер Кон был вынужден съездить по делу в ближний городишко. Возле магазина ему бросилось в глаза рекламное объявление:

НОВИНКА
М. Я. Гардельман
Живая математика для миллионов
Полезные и занимательные
приложения
Цена: 3 доллара 73 цента

А в углу кто-то приписал:

$$\frac{3\cancel{\frac{1}{4}}}{4\cancel{\frac{1}{3}}} = \frac{3}{4}.$$

КАКАЯ ФОРМУЛА СКРЫВАЕТСЯ ЗА ТАКИМ СОКРАЩЕНИЕМ?



Компьютерный клуб «СПРАЙТ»

Четыре года назад, когда школьный компьютер был такой же редкостью, как заморский овощ — картофель во времена Петра I, в нашей школе начал работать факультатив по программированию. Редкостный овощ у нас не произрастал: чтобы поработать на настоящей ЭВМ, мы ездили в вычислительный центр Свердловского пединститута. Через год школьный компьютер перестал быть диковинкой, и у нас в школе появилась первая вычислительная машина — «Электроника ДЗ-28». Сначала одна, а следом за ней и другая. Еще через год в школе появился целый выводок из двенадцати новеньких «Роботронов». Для вылупившихся малышей пришлось срочно оборудовать дисплейный класс. Впрочем, сейчас это не более удивительно, чем жареная картошка на ужин.

Если прийти вечером в дисплейный класс свердловской школы № 121 на заседание компьютерного клуба «СПРАЙТ», то можно попасть на лекцию «ЭВМ в медицине» или на спор о современной музыке, на встречу со специалистом по машинной графике или разговор о творчестве французских импрессионистов, на демонстрацию программ или на вечер поэзии.

Каждый год к нам в клуб приходят новые ребята. Приходят, чтобы научиться программировать, освоить новую технику. Обучение самых младших ведется по «новосибирской» методике А. П. Ершова — Г. А. Звенигородского. Для этого мы перенесли на наши школьные машины исполнители «Муравей» и «Шпага», описанные в книге Г. А. Звенигородского «Первые уроки программирования» (М.: Наука, 1986. Серия: Библиотечка «Квант»). Занятия у старших и более опытных проходят в форме семинара, когда каждый по очереди изучает тему и объясняет остальным. Старшие члены клуба учат младших. Наш выпускник Коля Мохов, теперь уже студент университета, будучи десятиклассником, занимался с группой пятиклассников. Нынче это стало традицией.

Групповой портрет с Роботроном.

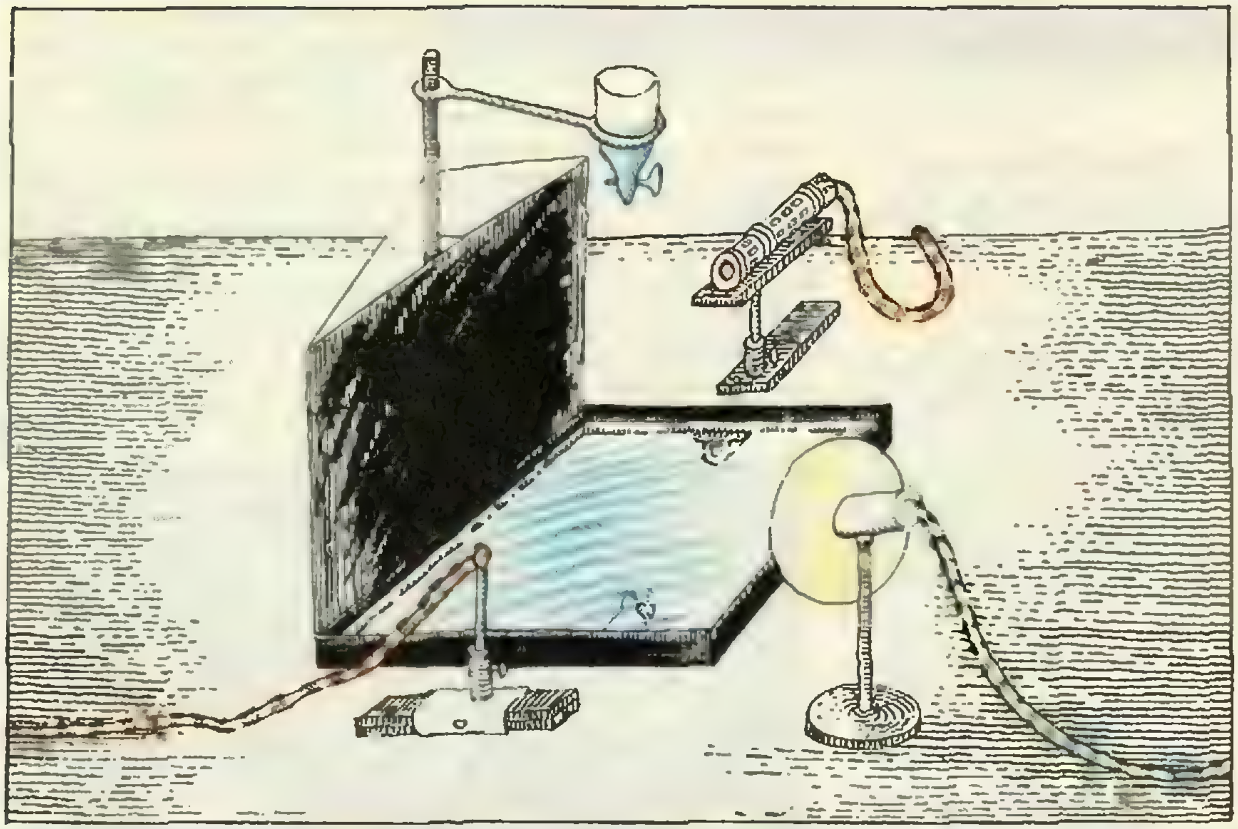
За два—три года занятий в клубе ребята успевают изучить несколько языков программирования, поработать на различных машинах. Многие из них начинают сами создавать программы, могут грамотно провести весь комплекс работ — от постановки задачи совместно с заказчиком до оформления документации. Одно из основных направлений нашей работы — разработка обучающих программ по различным предметам. За три года были сделаны программы для уроков математики, химии, информатики, русского и английского языка. Многие из них нашли применение в школе и пединституте.

Члены нашего клуба — непременные участники и нередко призеры олимпиад по программированию, научно-практических конференций школьников и конкурсов профессионального мастерства, которые проводятся в городе. Принимали они участие и в работе Ленинградской конференции «Школьная информатика».

В летние каникулы наши старшеклассники работали программистами в вычислительных центрах. На летних школах юных программистов в г. Новосибирске мы нашли немало друзей и единомышленников. Особенно подружились с членами компьютерного клуба «Виртуал» из г. Кургана. Мы ездим друг к другу в гости, делимся планами и идеями.

Клуб не замыкается на машинах и программах. Мы ходим в походы, любим театр, говорим о музыке и о книгах, стараемся не пропускать интересных фильмов и выставок. Мы не только учимся программировать, но и стараемся создать в клубе атмосферу дружелюбия, внимания и духовной близости людей. И, кажется, у нас это получается.

И. И. Данилина,
М. Е. Ковалев



Лаборатория „Кванта"

Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов

С. М. БЕЛОУСОВ, Р. Н. ГЕРАСИМОВ

Подтолкнула нас к этой работе книга Дж. Дариуса «Недоступное глазу», в которой мы прочитали про скоростную фотосъемку и увидели интересные фотографии.

Мы решили собрать установку, позволяющую получать фотографии быстропротекающих процессов. А чтобы эти процессы можно было также наблюдать непосредственно глазом, установку мы сделали стробоскопической. Блок-схема нашей установки изображена на рисунке 1.

В качестве объекта исследования был взят процесс падения капель на поверхность воды.

Очередная капля, падая в воду, прерывает лазерный луч, затемняя при этом фотодиод. Электрический импульс с фотодиода попадает на таймер (регулируемая задержка), который нужен для того, чтобы можно было наблюдать разные фазы исследуемого процесса. Задержанный импульс поступает на усилитель-формирователь, откуда, усиленный во много раз, идет на поджиг лампы-вспышки.

Для того чтобы капля не была на фотографии размазанной, нужно достаточно малое время экспозиции. Это время (τ) легко оценить, исходя из следующих соображений. Капля, падающая в воду с высоты $H=20$ см, имеет скорость у поверхности воды

Эта статья, написанная ленинградскими школьниками, рассказывает о большой и интересной работе, которую провели авторы — ученики 9 класса ФМШ № 45 при ЛГУ — на базе Научно-исследовательского института физики ЛГУ.

$v=\sqrt{2gH}=2$ м/с. Радиус капли $r\approx\approx 3$ мм. Тогда можно считать неразмазанными снимки, где за время вспышки капля пролетает $h\approx 0{,}1$—$0{,}2$ мм, откуда $\tau=h/v\approx 100$ мкс. Значит, время вспышки должно быть меньше 100 мкс. Как выяснилось, обычная фотовспышка не годится — там время вспышки ≈ 1 мс. В качестве лампы-вспышки мы выбрали маломощный строботрон ИСШ-15 и использовали время вспышки ≈ 20—40 мкс.

Для наблюдения падения капель в воду оказались необходимы сравнительно большие времена задержки. Это обусловлено тем, что для синхронизации использовался момент, когда капля пересекает луч лазера, проходящий на высоте $H=10$ см над поверхностью воды (при меньших высотах брызги, возникающие при падении в воду, также попадают в луч и приводят к дополнительным вспышкам лампы). Считая, что скорость падения капли $v=2$—3 м/с, получаем, что минимальное время задержки $\tau_{\min}=h/v\approx 50$—$30$ мс. Максимальное время задержки определяется длительностью процессов, происходящих при падении капли, и составляет $\tau_{\max}=\tau_{\min}+\tau_{\text{проц}}\approx 300$ мс. «Неподвижность» наблюдаемой картины определяется стабильностью времени задержки. Считая, что положение капли в момент вспышки должно быть фиксировано с точностью $\Delta h=0{,}2$—$0{,}3$ мм, получаем, что время задержки должно быть задано с точностью $\Delta\tau==\Delta h/v\approx 0{,}1$ мс. Таким образом, для стробоскопического наблюдения неподвижной капли, «висящей» над самой водой, необходима высокая стабильность задержки. Чтобы удовлетворить эти требования, мы использовали осциллограф С1-64.

На рисунке 2 показана электрическая схема установки, собранной нами из стандартных приборов.*)

Источником света служил юстировочный гелий-неоновый *лазер ОКГ-13. Лазерный* луч проходил над поверхностью воды и попадал на фотодиод ФД-3. Ток фотодиода, усиленный транзистором КТ608Б поступал на вход осцил-

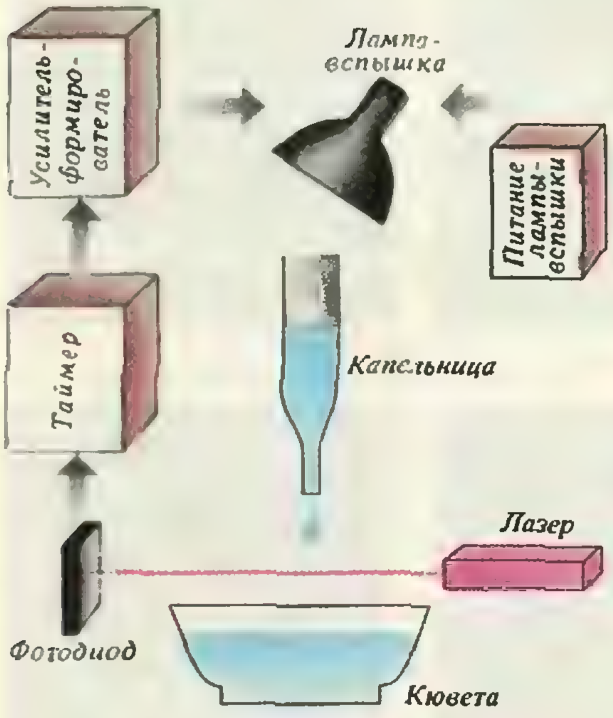


Рис. 1. Блок-схема установки, в которой мы использовали лазер ОКГ-13, фотодиод ФД-3 и лампу-вспышку ИСШ-15.

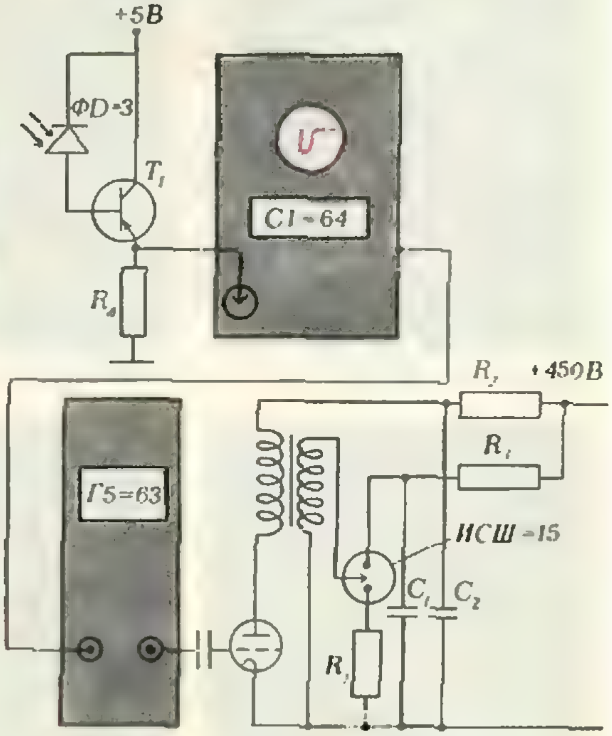


Рис. 2. Электрическая схема установки: $R_1=1$ *кОм,* $R_2=1000$ *кОм,* $R_3=10$ *кОм,* $R_1==510$ *Ом,* $C_1=0{,}07$ *мкФ,* $C_2=13$ *мкФ.*

---

*) Разумеется, установку можно видоизменить (упростить, усовершенствовать). Здесь мы полагаемся на творчество читателей. (*Примеч. ред.*)

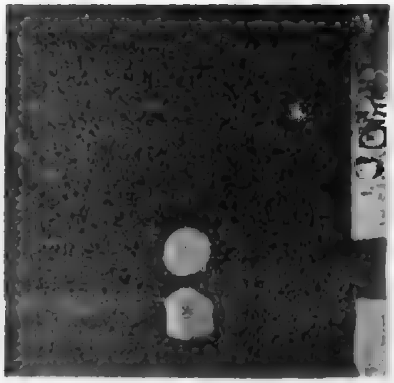


Фото 1. τ=0.

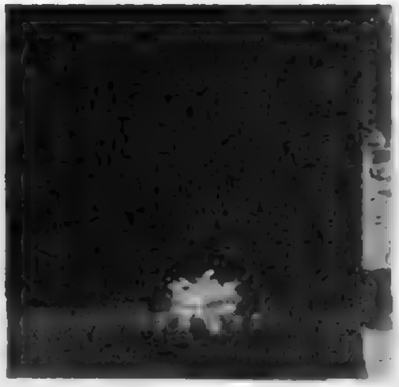


Фото 2. τ=9 мс.

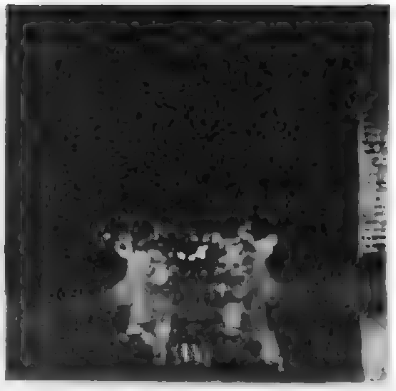


Фото 3. τ=19 мс.

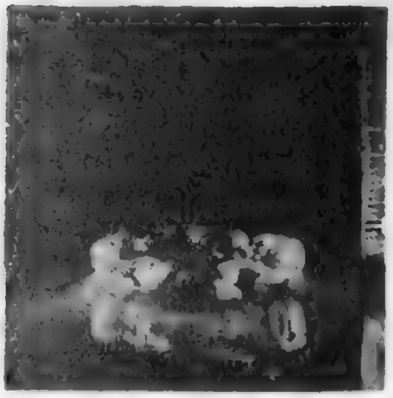


Фото 4. τ=34 мс.

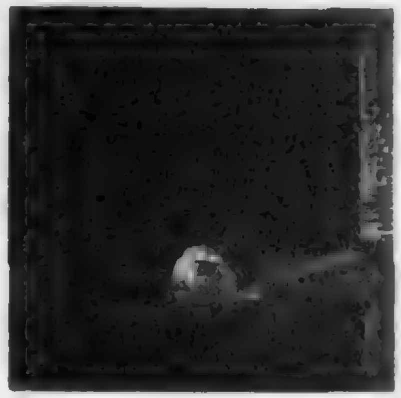


Фото 5. τ=59 мс.

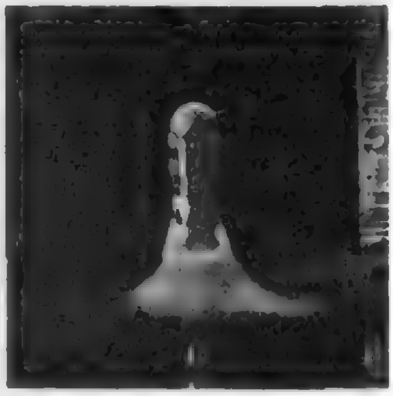


Фото 6. τ=96 мс.

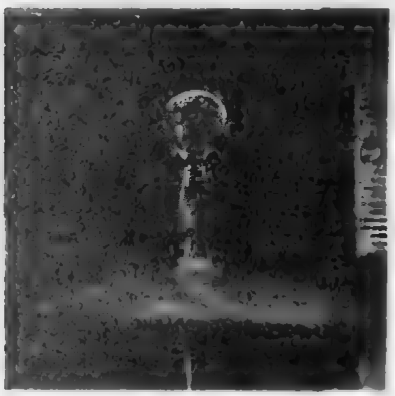


Фото 7. τ=135 мс.

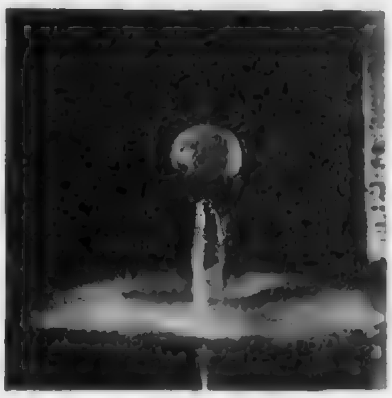


Фото 8. τ=154 мс.

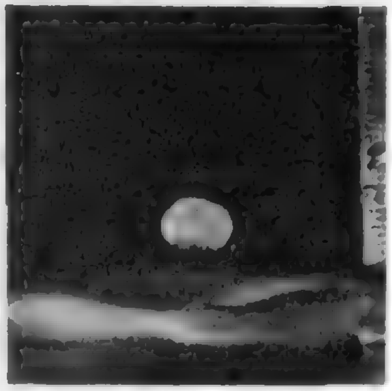


Фото 9. τ=169 мс.

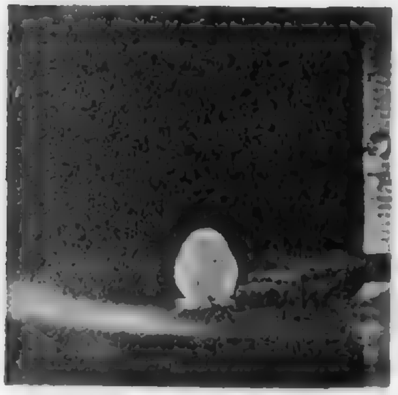


Фото 10. τ=188 мс.

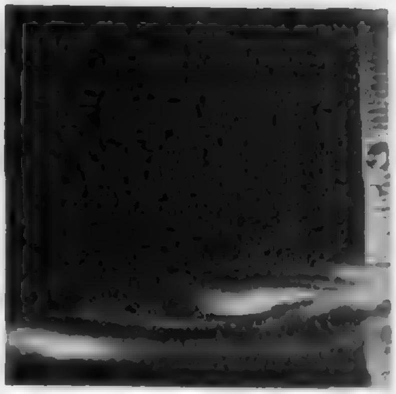


Фото 11. τ=228 мс.

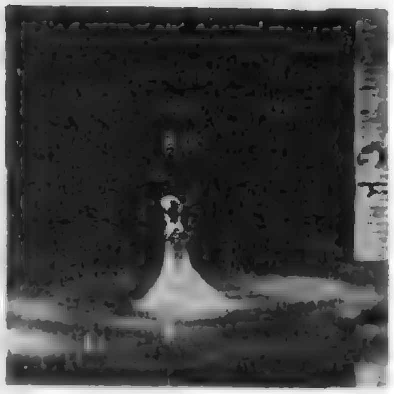


Фото 12. τ=262 мс.

лографа С1-64. Импульс тока, возникающий при падении капли через лазерный луч, приводил к запуску развертки А. Через время T, определяемое положением ручек «длительность развертки А» и «задержка развертки Б», осциллограф вырабатывал импульс запуска задержанной развертки (развертка Б). Этот импульс поступал на вход внешнего запуска импульсного генератора Г5-63. Импульс, сформированный генератором, поступал на схему поджига лампы-вспышки. Время задержки задавалось многооборотным потенциометром в пределах от 0 до 400 мкс и отсчитывалось с точностью до 1 мкс.

Мы фотографировали падение капли в воду с разных высот. Наиболее удачной и полной получилась серия фотографий капель, падающих с высоты 37,5 см. Фотографии этой серии идут последовательно, как стадии происходящего процесса. На фотографиях видна линейка с миллиметровыми делениями, она задает масштаб. Все фотографии сделаны в одном масштабе. Время τ, которое приводится в подписях к фотографиям, отсчитывается от момента касания каплей воды. Фотосъемка велась с помощью фотоаппарата «Зенит» на пленку «Аэрофото» (1400 ед.).

Приведем краткие описания фотографий.

Падая в воду, капля колеблется и из-за этого имеет несферическую форму. Капля, зависшая над водой, запечатлена на фото 1 и 2. Над каплей на фотографии 1 видна маленькая капелька. Это — так называемый шарик Плато, возникающий при отрыве капли от капельницы.

Ударяясь о воду, капля выдавливает находящуюся под ней жидкость вверх по своим краям в тонкий цилиндр. На фото 2 видно начало этого процесса. Жидкости на краях все увеличивающегося цилиндра энергетически выгоднее собраться в капли. Из соображений симметрии ясно, что капли должны быть расположены по краям цилиндра равномерно. Поэтому и получаются такие красивые фотографии, как фото 3, где цилиндр похож на корону.

Под действием сил тяжести и поверхностного натяжения корона начинает опадать (фото 4). Когда корона опадет совсем, на ее месте образуется воронка, через некоторое время воронка схлопывается, и из ее центра начинает расти столбик (фото 5).

Столбик растет и утолщается и в какой-то момент достигает наибольшей высоты (фото 6).

Под действием сил поверхностного натяжения на столбике образуется перемычка, и столбик распадается на капли, которые падают обратно в жидкость. Последовательные стадии распада столбика на капли показаны на фото 7—9. При стробоскопическом наблюдении мы заметили, что в зависимости от толщины и высоты столбика он распадается на разное число капель. (Распад столбика обусловлен тем, что при образовании капель их суммарная поверхностная энергия оказывается меньшей, чем у столбика.) При этом оказалось, что число капель, на которые распадался столбик, не зависит от коэффициента поверхностного натяжения, а определяется только отношением диаметра к высоте столбика.

После того как капли от распавшегося столбика упали в воду, снова образуется воронка, из центра которой затем вырастает столбик (фото 10—12).

Литература

1. Дж. Дариус. Недоступное глазу — М.: Мир, 1986.

2. Я. Е. Гегузин. Капля.— М.: Наука, 1973.

3. Опыты в домашней лаборатории.— М.: Наука, 1984.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 4).

4. Я. Е. Гегузин. Пузыри.— М.: Наука, 1985.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 46).

5. Альбом течений жидкостей и газов.— М.: Мир, 1986.

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+$
$\alpha_4+\alpha_5$
x
$\alpha_6-4\pi$

Школа в „Кванте"

Математика 6—10

Публикуемые ниже заметки объединены общим сюжетом: в них идет речь о сумме углов многоугольника — выпуклого и произвольного, плоского и «сферического». Попутно обсуждаются теорема Эйлера о карте на плоскости (и на сфере) и вытекающая из нее более известная теорема Эйлера о многогранниках. Хотя первая заметка адресована учащимся 6—8 классов, вторая — девятиклассникам, а третья — десятиклассникам, мы рекомендуем все же читать их подряд. Все три заметки подготовлены Н. Б. Васильевым и В. Л. Гутенмахером.

Сумма углов

Сумма углов треугольника

Один из первых геометрических фактов, которые мы узнаем — теорема о том, что в любом треугольнике сумма углов равна 180°. Этот факт можно проверить экспериментально: вырезать из бумаги произвольный треугольник, оторвать от него два угла и приложить к третьему — они составят вместе развернутый угол в 180°. На той же идее — собрать три угла в одной вершине — основано и доказательство теоремы (рис. 1): если через вершину треугольника провести прямую, параллельную противоположной стороне — основанию, то два образовавшихся угла будут равны углам при основании.

О «пятом постулате» Евклида

В этом нашем рассуждении использован «пятый постулат» Евклида — аксиома, утверждающая единственность прямой, параллельной данной и проходящей через данную точку. Пары накрест лежащих углов при параллельных прямых равны*), и отсюда следует теорема о сумме углов треугольника. Разумеется, из теоремы о сумме углов треугольника в свою очередь можно вывести «пятый постулат» — они эквивалентны друг другу. Более двух тысяч лет понадобилось, чтобы выяснить, что отрицание пятого постулата — возможность провести через точку более одной прямой, не пересекающей данной,— вместе со всеми другими аксиомами геометрии приводит к новой непротиворечивой теории: геометрии Лобачевского. В геометрии Лобачевского сумма углов треугольника всегда меньше 180°. В этой геометрии чем больше треугольник, тем больше разность между 180° и суммой углов треугольника — эта разность пропорциональна площади треугольника.

---

*) См. «Геометрию 6—10» (М.: «Просвещение», 1986), с. 41.

Геометрия в близком нам мире вполне согласуется с обычной геометрией Евклида. Однако геометрия Лобачевского оказалась глубоко связанной с теорией относительности. О геометрии Лобачевского можно прочитать в статье К. Л. Самарова, В. М. Уроева «Модель Пуанкаре» в «Кванте» № 6 за 1984 год.

Теорема о внешнем угле

Можно собрать углы треугольника вместе иным, чем на рисунке 1, образом, продолжив одну его сторону за вершину и проведя из этой вершины луч, параллельный противоположной стороне (рис. 2). Таким образом доказывается, что *внешний угол треугольника (смежный с внутренним) равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов.* По существу это — вариант теоремы о сумме углов треугольника. Теорема о внешнем угле треугольника используется при доказательстве многих утверждений. Напомним лишь одно, применяющееся особенно часто: *величина вписанного угла равна половине величины дуги, на которую опирается этот угол,* т. е. половине величины центрального угла, опирающегося на ту же дугу (в учебнике А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» этот факт завершает курс 6 класса).

О величине угла

В обыденной жизни под углом понимается острая геометрическая фигура (угол стола, угол дома). Говоря об экспериментальной проверке теоремы о сумме углов треугольника, мы имели в виду угол как часть плоскости, заключенную между двумя лучами (кусок бумаги). Сложение углов — прикладывание одного угла к другому — привело нас к необычному углу, стороны которого лежат на одной прямой: *развернутому* углу в 180°.

Прикладывание нескольких больших углов может привести к тому, что начнет получаться какая-то двухслойная фигура. Возникает естественный вопрос: что такое угол, например, в 380°? Такие углы рассматриваются в курсе тригонометрии (см. «Алгебру — 8», с. 131); их удобно использовать при измерении поворотов.

Рассмотрим в *качестве примера* вращение ручки радиоприемника, используемой для его настройки. Повернув эту ручку на сколько-то градусов, мы попадем на нужную волну. При этом поворот от какой-то метки на 20° — это для настройки радиоприемника не то же самое, что поворот на 380°, хотя соответствующие положения ручки совпадают. Более того, вращать ручку *можно в ту и другую* сторону — поэтому нужно ввести кроме положительных (отвечающих, скажем, поворотам против часовой стрелки) еще и отрицательные углы. Суммой двух углов будет поворот, который получается, если повернуть ручку сначала на один угол, а потом на второй.

Попробуем с такой точки зрения рассмотреть *сначала сумму углов треугольника,* а затем многоугольника.

Сумма углов многоугольника

Представим себе линейку, скользящую по сторонам треугольника (рис. 3, *а*). Возле каждой вершины линейка поворачивается на величину, равную внешнему углу треугольника, а *после полного обхода вокруг треугольника* — скажем, против часовой стрелки — линейка возвращается на прежнее место, сделав один полный оборот — на 360°. Итак, сумма внешних углов треугольника равна 360° (рис. 3, *б*).

Точно такое же рассуждение применимо к любому выпуклому *n*-уголь-

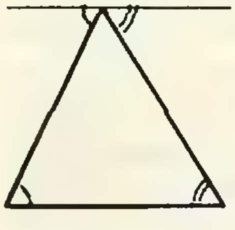


Рис. 1.

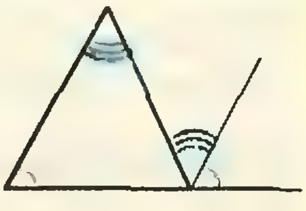


Рис. 2.

нику: *сумма внешних его углов равна 360°* (рис. 4).

Поскольку каждый внешний угол в сумме со смежным ему внутренним дает 180°, сумма всех внутренних углов n-угольника равна $180°n-360°=180°(n-2)$.

Этот результат в учебнике доказывается иначе: выпуклый n-угольник можно разбить диагоналями, проведенными из одной вершины, на $n-2$ треугольника; сумма всех их углов, равная, очевидно, сумме всех n углов n-угольника, в $(n-2)$ раза больше суммы углов одного треугольника.

Такую же сумму углов имеет и любой, не обязательно выпуклый n-угольник. Но доказательство несколько сложнее.

Если пытаться обойти «сложный» многоугольник по контуру и подсчитывать сумму внешних углов — углов поворота, то, во-первых, нужно будет учитывать направления поворота: углы поворота против часовой стрелки считать положительными, а по часовой стрелке — отрицательными (такие повороты соответствуют внутренним углам, большим 180°); во-вторых, не так уж очевидно, что в результате обхода многоугольника (несамопересекающейся ломаной) общий поворот составит один полный оборот на 360°. Заметим, что при обходе самопересекающейся ломаной на рисунке 5 — пятиугольной звезды — линейка делает два полных оборота, т. е. сумма внешних углов при вершинах звезды равна 720° (а значит, сумма внутренних ее углов всегда равна $180°\times5-720°=180°$; проверьте этот результат, рассмотрев треугольники и выпуклый пятиугольник, из которых состоит звезда).

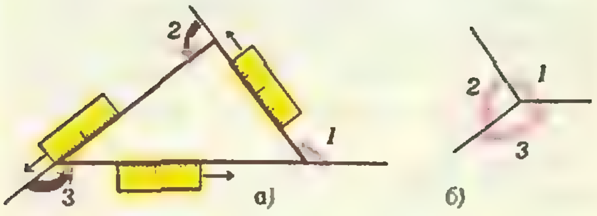


Рис. 3.

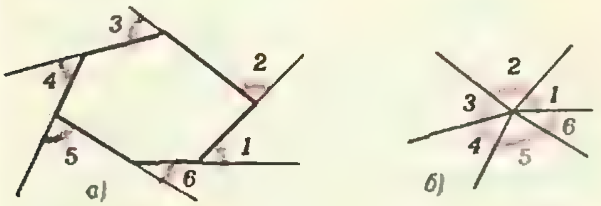


Рис. 4.

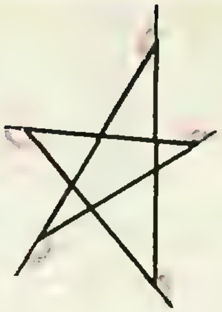


Рис. 5.

Доказать теорему о сумме углов любого многоугольника (не обязательно выпуклого) можно методом разрезания. Но об этом — в следующей заметке.

О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера

Под многоугольником мы теперь понимаем кусок плоскости, вырезаемый несамопересекающейся замкнутой ломаной. Начнем с того, что, как и пообещали в предыдущей заметке, докажем теорему о сумме углов любого многоугольника (не обязательно выпуклого) методом разрезания.

Конечно, найти вершину, из которой «видны» все остальные вершины (как для выпуклого многоугольника) в общем случае уже нельзя. Не совсем очевидно даже, что можно найти хоть одну диагональ, целиком лежащую внутри n-угольника. Но этот факт верен.

Лемма. *Из любой вершины невыпуклого многоугольника, угол при которой больше 180°, можно провести диагональ, целиком лежащую внутри этого многоугольника.*

Рассмотрим всевозможные лучи, идущие из такой вершины внутрь многоугольника (рис. 1). Они «освещают», быть может, частично, по крайней мере две стороны многоугольника. В самом деле, все лучи, которые освещают одну сторону, заполняют угол, меньший 180°. Итак, угол многоугольника (больший 180°) разбивается по крайней мере на два угла, которые образованы лучами, освещающими разные стороны многоугольника. Тогда луч, разделяющий два таких угла, направлен в вершину многоугольника — по диагонали, целиком находящейся внутри многоугольника.

С помощью многократного использования леммы любой n-угольник можно разрезать на треугольники. Но мы должны проследить еще за количеством треугольников. Как и многие другие теоремы, в которых участвует произвольное натуральное число n, оформить доказательство удобнее всего с помощью математической индукции.

О математической индукции

Здесь принцип математической индукции мы используем в таком виде. Пусть некоторое утверждение, в формулировке которого участвует натуральное число n, справедливо для $n=n_0$ и из того, что оно справедливо для всех n таких, что $n_0 \leqslant n < N$, следует его справедливость для $n=N$. Тогда оно верно для всех натуральных $n \geqslant n_0$.

Докажем по индукции нужное нам утверждение.

Теорема. *Сумма углов произвольного (не обязательно выпуклого) n-угольника равна $180°(n-2)$.*

Для $n=3$ это верно. Пусть наше утверждение справедливо для всех $n<N$ $(n \geqslant 3)$. Рассмотрим некоторый N-угольник. По лемме его можно разрезать диагональю на два многоугольника. Пусть в одном из них K сторон от большого N-угольника — т. е. он $(K+1)$-угольник, в другом $N-K$ остальных сторон — и он тем самым $(N-K+1)$-угольник. По предположению индукции их суммы углов равны $180°(K-1)$ и $180°(N-K-1)$. Складывая, получаем, что сумма всех углов N-угольника составляет $180°(K-1) + 180°(N-K-1) = 180°(N-2)$. Теорема доказана.

Заодно мы можем сделать такой вывод: *при любом разрезании n-угольника на треугольники диагоналями число этих треугольников всегда равно $n-2$* — ведь сумма всех углов всех треугольников, с одной стороны, равна $180°\,t$, где t — число треугольников, а с другой — сумме углов n-угольника, т. е. $180°(n-2)$.

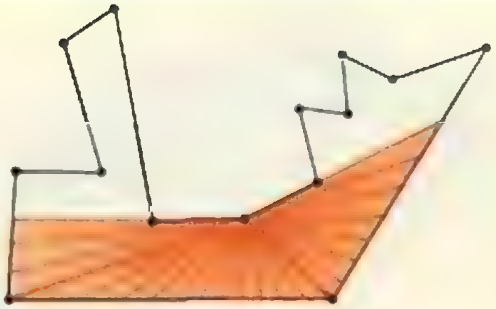


Рис. 1.

Об аддитивности

Мы пользуемся в этом рассуждении тем, что величина «суммы углов» обладает следующим свойством: при разрезании многоугольника диагоналями сумма углов целого равна сумме углов частей; подобным свойством обладает еще одна геометрическая характеристика фигур: площадь.

Разрезая многоугольник на части и подсчитывая разными способами сумму углов, мы можем получать интересные равенства, в которых «сумма углов» не упоминается, а фигурируют лишь количества многоугольников, число вершин, сторон. В следующих примерах мы условимся говорить лишь о «правильных» разрезаниях многоугольника, при которых каждые два многоугольника имеют лишь общую сторону, или общую вершину, или вообще не имеют общих точек (случай, когда вершина одного из многоугольников попадает на сторону другого, не допускается).

Пусть n-угольник разрезан на T треугольников, причем внутри n-угольника лежат еще k «узлов» — общих вершин нескольких треугольников. Подсчитав двумя способами сумму углов, учитывая, что у каждого внутреннего узла собраны углы с суммой 360°, получим такую формулу: $T=n+2k-2$.

Еще более общую формулу, относящуюся уже к произвольной карте из многоугольников, сформулируем в виде теоремы.

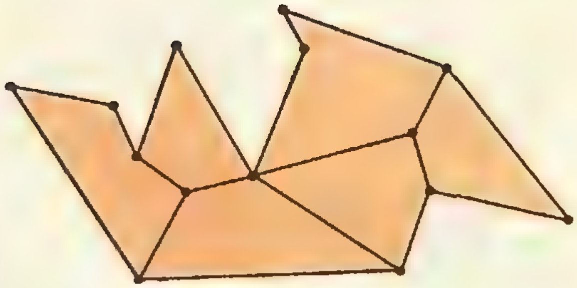


Рис. 2.

Теорема Эйлера о карте. *Пусть на плоскости выбрано В точек, и они соединены Р отрезками так, что образовался многоугольник, разбитый на М других многоугольников правильным образом (рис. 2). Тогда* $В-Р+М=1$.

Доказательство. Пусть большой (внешний) многоугольник имеет n сторон (и n вершин), а число сторон тех $М$ многоугольников, на которые он разрезан,— $n_1, n_2, \ldots, n_М$. Из $В$ вершин карты n вершин лежат на границе, а $(В-n)$ — внутри большого многоугольника. Подсчитав двумя способами общую сумму углов всех $М$ многоугольников, получим равенство

$$180°(n_1-2)+\ldots+180°(n_М-2)=$$
$$=180°(n-2)+360°(В-n),$$

откуда

$$n_1+n_2+\ldots+n_М-2М=2В-n-2.$$

Заметим теперь, что в сумме $n_1+n_2+\ldots+n_М+n$ каждый из $Р$ отрезков участвует дважды — он служит стороной двух многоугольников (либо — двух внутренних, либо — одного из внутренних и внешнего), поэтому $n_1+n_2+\ldots+n_М+n=2Р$. Отсюда и получается нужное равенство $В-Р+М=1$.

Более известна легко вытекающая отсюда теорема Эйлера, относящаяся уже не к плоским картам, а к выпуклым многогранникам в пространстве.

Теорема Эйлера о многогранниках. *Для любого выпуклого многогранника с В вершинами, Р ребрами и Г гранями верно равенство:* $В-Р+Г=2$.

В таблице на рисунке 3 приведено несколько конкретных примеров. Для доказательства формулы для многогранника достаточно представить себе, что его проволочный каркас (с прозрачными гранями) «сфотографирован» из точки $С$, расположенной вблизи одной из граней, но вне многогранника,— или, говоря более математическим языком, сделать центральную проекцию каркаса многогранника из точки $С$ на плоскость. Тогда на «фотографии» получится плоская карта из многоугольников с $В$ вершинами и $Р$ ребрами-отрезками, причем число $М$ внутренних многоугольников карты будет равно $Г-1$, поскольку одна грань — вблизи которой был расположен центр проекции — при отображении перейдет в весь внешний многоугольник. На рисунке 4 изображены карты для куба, четырехугольной пирамиды и октаэд-

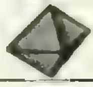
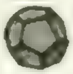
		В	Р	Г
Куб		8	12	6
Тетраэдр		4	6	4
5-угольная пирамида		6	10	6
Октаэдр		6	12	8
Додекаэдр		20	30	12
				Всегда $В-Р+Г=2$

Рис. 3.

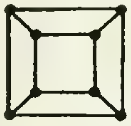
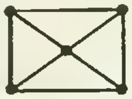
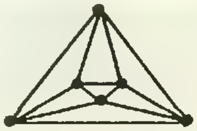
	В	Р	М
	8	12	5
	5	8	4
	8	12	7
			Всегда $В-Р+М=1$

Рис. 4.

ра. Из формулы $В-Р+М=1$ для карты получаем формулу $В-Р+Г=2$ для многогранника.

Общая теорема Эйлера

Использование суммы углов для доказательства теоремы Эйлера — прием красивый, но несколько искусственный. На самом деле теорема Эйлера верна и для более общей ситуации — например, для произвольной карты с $В$ вершинами, $Р$ ребрами и $Г$ странами на сфере, причем «ребрами» могут служить любые отрезки кривых, лишь бы каждая страна имела границу из нескольких идущих цепочкой ребер (в частности, внутри страны не должно быть «дыр», относящихся к другим странам). Одна из возможных идей доказательства теоремы в такой большей общности — индукция, основанная на «стягивании» одной из стран в точку.

Сумме углов многоугольника на сфере и теореме Эйлера для карты на сфере посвящена следующая заметка.

Сумма углов сферического многоугольника

На сфере мы будем рассматривать многоугольники, стороны которых — дуги больших кругов. Такой многоугольник можно получить как пересечение сферы с многогранным углом, вершина которого лежит в центре сферы O (рис. 1). Величиной угла многоугольника на сфере естественно считать угол между касательными к его «сторонам», проведенными из вершины; поскольку касательные перпендикулярны радиусу, проведенному в вершину из точки O, угол многоугольника на сфере равен двугранному углу при этом радиусе.

Аналогия между «суммой углов» и площадью, которую мы вскользь упомянули в предыдущей заметке, здесь становится осязаемой: одна величина просто выражается через другую.

Теорема. *Площадь многоугольника на сфере пропорциональна разности между суммой его углов и 180°(n—2), где n — число вершин многоугольника.*

Коэффициент пропорциональности зависит лишь от радиуса сферы. Примем радиус сферы за единицу (тогда площадь сферы равна 4π) и условимся углы измерять не в градусах, а в радианах (180° соответствуют π радианам). Тогда площадь n-угольника на сфере равна $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n-\pi(n-2)$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — его углы.

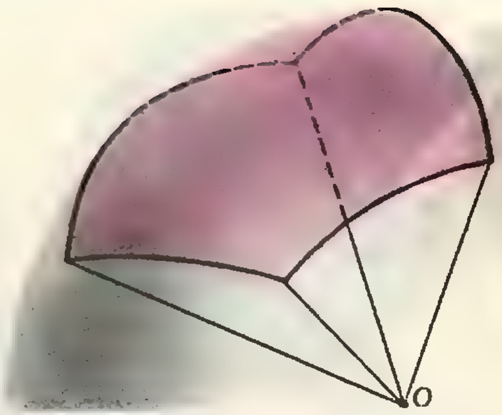


Рис. 1.

В частности, *площадь треугольника на единичной сфере с углами* α, β, γ *равна* $\alpha+\beta+\gamma-\pi$.

Проверим формулу $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ для осьмушки сферы, вырезаемой из нее тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через центр: у этой осьмушки три угла по $\pi/2$ каждый, и по формуле ее площадь равна $3\pi/2-\pi=\pi/2$ — действительно, это $1/8$ часть от 4π, площади всей сферы.

Доказать эту теорему достаточно для сферического треугольника: общая формула получится из этого частного случая так же, как и при доказательстве теоремы о сумме углов плоского n-угольника,— с помощью разрезания и математической индукции.

Продолжив стороны сферического треугольника, мы получим три больших круга, разбивающих сферу на 8 треугольников (удобно представить себе три пересекающиеся в центре O плоскости этих больших кругов, делящих пространство на 8 трехгранных углов,— каждый из них высекает на сфере треугольник). Обозначим углы нашего треугольника через α, β и γ, его площадь — через S, площади соседних с ним треугольников (примыкающих к сторонам, лежащим против углов α, β и γ соответственно) — через a, b и c (рис. 2). Вместе с каждым из соседних треугольников наш тре-

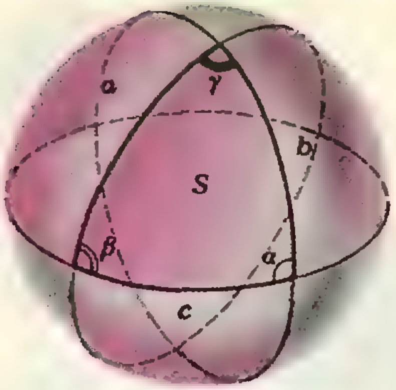


Рис. 2.

угольник образует дольку — часть сферы, ограниченную двумя большими полукругами. Площадь такой дольки, очевидно, пропорциональна углу между плоскостями этих полукругов: площадь дольки с углом раствора θ равна 2θ ($\theta=2\pi$ соответствует полной сфере). Поэтому $S+a=2\alpha$, $S+b=2\beta$, $S+c=2\gamma$. Теперь заметим, что 8 треугольников на сфере попарно симметричны друг другу, поэтому $a+b+c+S=2\pi$. Сложив первые три равенства и вычтя из суммы четвертое, получим $2S=2\alpha+2\beta+2\gamma-2\pi$, откуда $S=\alpha+\beta+\gamma-\pi$. Это и есть нужная формула для сферического треугольника.

Телесный угол. В физике (реже — в геометрии) бывает полезно мерить величину «телесного угла», образуемого многогранной (и вообще, конической) поверхностью с вершиной O: телесный угол измеряется площадью, высекаемой этой поверхностью на единичной сфере с центром O. (Единица этой величины называется «стерадиан».) Наша теорема выражает величину телесного многогранного угла через величины его двугранных углов.

Для карты на сфере, образованной дугами больших кругов, теорему Эйлера также можно доказать с помощью подсчета суммы углов. При этом нужно воспользоваться формулой, выражающей сумму углов многоугольника через его площадь и число сторон, $S=$*(сумма углов)*$-\pi(n-2)$, и учесть, что сумма всех углов вместе равна $2\pi B$, где B — число вершин карты: $4\pi=2\pi B-\pi(2P-2\Gamma)$.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Может ли денежная сумма A рублей B копеек в целое число k раз превосходить денежную сумму B рублей A копеек ($0\leqslant A<100$, $0\leqslant B<100$)? Если да, то во сколько раз?

2. Найдите все пары натуральных чисел, сумма квадратов которых равна 16 000.

3. Найдите положительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} xy(x+y)=6,\\ yz(y+z)=12,\\ zx(z+x)=30. \end{cases}$$

4. С помощью двусторонней линейки а) проведите биссектрису данного угла, б) удвойте данный угол.

5. В остроугольном треугольнике из разных вершин провели медиану, биссектрису и высоту. Могут ли точки их пересечения лежать в вершинах равностороннего треугольника?

Девятый класс

6. Решите уравнение $(16x^{200}+1)(y^{200}+1)=16(xy)^{100}$.

7. На плоскости расположены два непересекающихся круга. Найдите множество точек A на плоскости таких, что любая прямая, проходящая через A, пересекает хотя бы один из кругов.

8. В треугольнике ABC средняя по величине сторона отличается от каждой из остальных сторон на 1. Найдите эти стороны, если биссектриса угла C пересекается с медианой угла B под прямым углом.

9. Докажите, что $\cos(\sin\alpha)>\sin(\cos\alpha)$ при всех α.

10. Натуральные числа a, b, c, d удовлетворяют равенству $a+b=c+d=1000$. Когда сумма $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ принимает наибольшее значение?

Десятый класс

11. Найдите приближенные значения корней уравнения

$$0{,}001x^3+x^2-1=0$$

с точностью до 0,1.

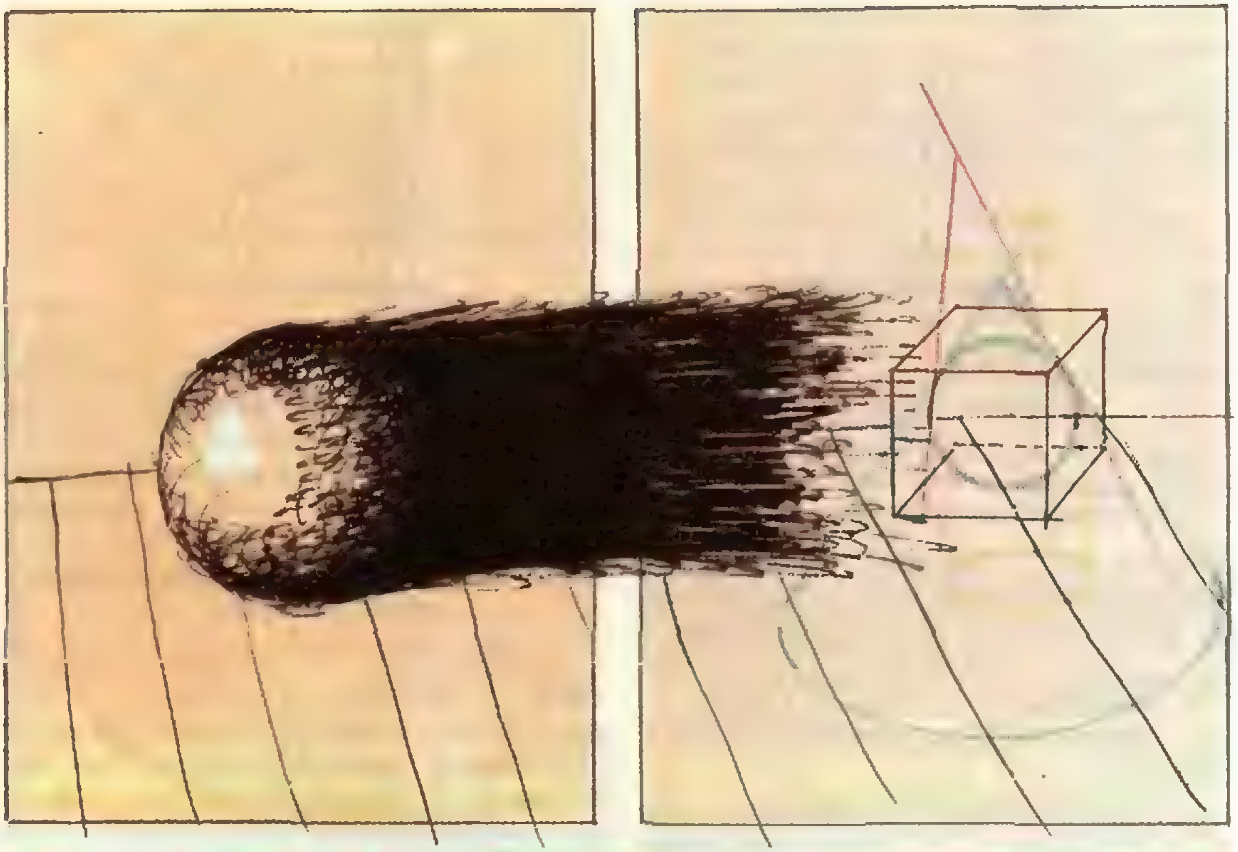
12. Найдите объем пространственной фигуры, образованной пересечением двух круговых цилиндрических поверхностей радиусом R, оси которых пересекаются а) под прямым углом, б) под углом α.

13. Можно ли в прямоугольнике размером 20×25 разместить 120 квадратов размером 1×1 так, чтобы любая окружность диаметром 1 внутри прямоугольника пересекала хотя бы один из этих квадратов?

14. Докажите, что если положительные числа x и y связаны равенством $x^y+y^x=x^x+y^y$, то $x=y$.

15. Касательные в точке $x=0$ к графикам функций $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)/g(x)$ пересекают ось абсцисс под одним и тем же углом. Найдите наибольшее значение $f(0)$.

Публикацию подготовил *Г. А. Гальперин*



Практикум абитуриента

Кинематические связи в задачах динамики

Кандидат физико-математических наук
А. И. ЧЕРНОУЦАН

В задачах по механике часто встречается ситуация, когда движение тел не является свободным. Ограничения могут создавать твердые поверхности, нерастяжимые нити, жесткие стержни и т. п. В простейших случаях мы учитываем подобные ограничения автоматически, часто даже не оговаривая их существования. Например, ускорение тела на плоскости мы направляем вдоль плоскости (учитывая наличие твердой поверхности), скорости буксира и баржи считаем одинаковыми (принимая во внимание присутствие нерастяжимого троса) и т. д. Однако иногда возникает необходимость выразить эти ограничения в виде специального уравнения, которое мы будем называть «кинематической связью». Начнем с такой задачи.

Задача 1. *Найдите ускорения призмы массой m_1 и куба массой m_2, изображенных на рисунке 1, а. Трением пренебречь.*

Запишем второй закон Ньютона для каждого тела (в проекции на направление, совпадающее с соответствующим ускорением):

$$m_1 g - N \sin\alpha = m_1 a_1, \qquad (1)$$

$$N \cos\alpha = m_2 a_2. \qquad (2)$$

Мы учли, что по третьему закону Ньютона $\vec{N}_{12} = -\vec{N}_{21}$, т. е. $N_{12} = N_{21} = N$. Написанные два уравнения содержат три неизвестных. Третье уравнение — кинематическая связь между a_1 и a_2 — должно отразить тот факт, что куб и призма остаются все время в контакте друг с другом. Это можно сделать несколькими способами.

1) Рассмотрим два близких положения системы, разделенные промежутком времени Δt (рис. 1, б). В треугольнике ABC сторона AB равна перемещению призмы Δx_1, а сторона BC —

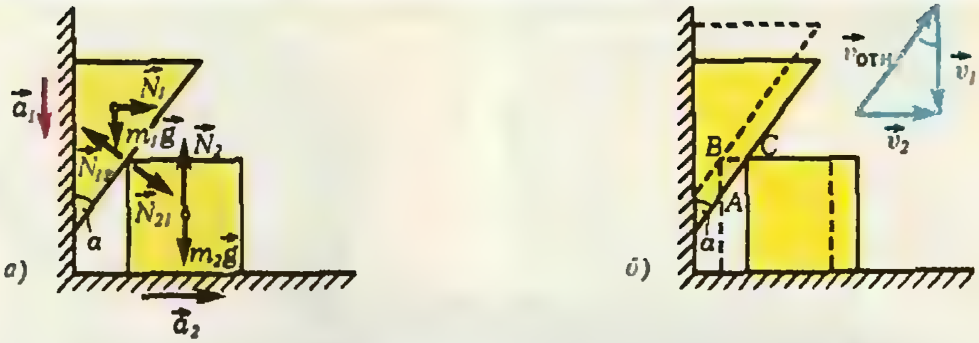


Рис. 1.

перемещению куба Δx_2. Имеем

$$\Delta x_2 = \Delta x_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Разделив обе части равенства на Δt, получаем

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Так как это соотношение справедливо для произвольного момента времени, из него следует искомое соотношение

$$a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha. \qquad (3)$$

Такой подход к получению кинематической связи будем называть прямым методом.

2) Другой способ получения необходимой связи основан на переходе в такую систему отсчета, где условие контакта становится тривиальным. В системе отсчета, связанной с призмой (см. рис. 1, *б*), скорость куба $\vec v_{отн}$ направлена вдоль ее поверхности, т. е. под углом α к вертикали. Записывая закон сложения скоростей

$$\vec v_2 = \vec v_{отн} + \vec v_1,$$

из соответствующего векторного треугольника получаем

$$v_2 = v_1 \operatorname{tg} \alpha, \text{ и } a_2 = a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Решаем совместно уравнения (1)—(3) и находим

$$a_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} g,$$

$$a_2 = \frac{m_1 \operatorname{tg} \alpha}{m_1 + m_2 \operatorname{tg}^2 \alpha} g.$$

В этой задаче второй метод выглядит несколько искусственно. Однако в некоторых случаях именно правильный выбор системы отсчета позволяет существенно упростить проблему кинематических связей. Вот пример.

Задача 2. *Клин высотой h с углом наклона α стоит на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2). Масса клина m_1. С вершины клина начинает соскальзывать без трения брусок массой m_2. Найдите ускорение клина и время соскальзывания бруска.*

Начнем со второго закона Ньютона. Запишем его для клина в проекции на горизонтальное направление, а для бруска пока что в векторной форме:

$$N \sin \alpha = m_1 a_1, \qquad (4)$$

$$\vec N_{21} + m_2 \vec g = m_2 \vec a_2. \qquad (5)$$

Как и раньше, $\vec N_{12} = -\vec N_{21}$, $N_{12} = N_{21} = N$. Выбор направления осей для бруска связан с решением вопроса о кинематической связи.

Кинематическая связь между ускорениями должна отразить тот факт, что в процессе движения брусок все время остается на поверхности клина. Записать это в виде прямого уравнения оказывается непросто. Вместо этого перейдем в систему отсчета, связанную с клином. В этой системе скорость бруска $\vec v_{отн}$ и его ускорение $\vec a_{отн}$ направлены вдоль клина. Тогда из закона сложения скоростей $\vec v_2 = \vec v_{отн} + \vec v_1$ получаем закон сложения ускорений (см. рис. 2)

$$\vec a_2 = \vec a_{отн} + \vec a_1. \qquad (6)$$

Отсюда видно, что от неизвестных a_1 и a_2 удобнее перейти к неизвестным a_1 и $a_{отн}$, решив тем самым проблему кинематической связи. Подставляя равенство (6) в уравнение (5) и проектируя это уравнение на направления вдоль поверхности клина и перпендикулярно к ней, получаем

$$m_2 g \sin \alpha = m_2 (a_{отн} - a_1 \cos \alpha), \qquad (5')$$

$$N - m_2 g \cos \alpha = -m_2 a_1 \sin \alpha. \qquad (5'')$$

Из уравнений (4), (5′) и (5″) находим

$$a_1 = \frac{m_2 \sin \alpha \cos \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} g,$$

$$a_{отн} = \frac{(m_1 + m_2) \sin \alpha}{m_1 + m_2 \sin^2 \alpha} g.$$

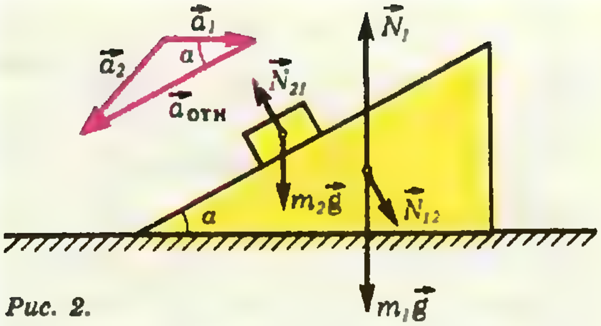


Рис. 2.

Для ответа на второй вопрос задачи нам не надо искать a_2, так как время соскальзывания выражается как раз через $a_{отн}$:

$$\frac{a_{отн}t^2}{2}=\frac{h}{\sin\alpha}.$$

Отсюда находим

$$t=\sqrt{\frac{2h}{a_{отн}\sin\alpha}}=\sqrt{\frac{2h(m_1+m_2\sin^2\alpha)}{(m_1+m_2)\sin^2\alpha g}}.$$

Как уже говорилось, ограничение на движение может определяться не только прямым контактом рассматриваемых тел, но и наличием в системе соединительных элементов — стержней, нитей и т. п. В большинстве случаев, даже если в условии это не оговорено, соединительные элементы считаются идеальными, т. е. нити — невесомыми и нерастяжимыми, стержни — невесомыми и абсолютно жесткими, для блоков кроме невесомости предполагается также отсутствие трения на оси. (На самом деле слово «невесомый» означает, что масса данного элемента пренебрежимо мала по сравнению с массами других тел системы, слово «нерастяжимый» — что удлинение элемента ма́ло по сравнению с перемещениями тел системы и т. д.) Перед тем, как разбирать конкретные примеры, выясним, что́ следует из идеальности соединительных элементов. Рассмотрим три частных случая.

1. Невесомость нити. Напишем второй закон Ньютона для участка нити массой $\Delta m_н$ (рис. 3, *а*):

$$T-T'=\Delta m_н a.$$

Так как $\Delta m_н=0$, то $T=T'$, т. е. сила натяжения не меняется вдоль нити.

2. Невесомость подвижного блока и отсутствие трения на его оси. Для раскручивания невесомого блока, в котором нет трения, не нужен вращательный момент. Из этого следует, что натяжение одной и той же нити по обе стороны блока одинаково (рис. 3,*б*), кроме того $T'-2T=0$, т. е. $T'=2T$.

3. Невесомость стержня. Это условие означает, что сумма сил и сумма моментов сил, действующих на стержень, равны нулю. Например, если к стержню приложены две силы, то они равны по модулю, противоположны по направлению и действуют вдоль стержня (рис. 3, *в*). (В отличие от нити, стержень может быть не только в растянутом, но и в сжатом состоянии.)

Нерастяжимость и жесткость нитей и стержней приводит к появлению кинематических связей, которые мы разберем отдельно в следующих задачах.

Задача 3. *Найдите ускорения грузов массой m_1 и m_2 после перерезания верхней нити (рис. 4). Нити и блок считать идеальными.*

Выберем положительное направление оси вертикально вниз и запишем второй закон Ньютона для обоих тел:

$$T+m_1g=m_1a_1, \qquad (7)$$
$$m_2g-2T=m_2a_2 \qquad (8)$$

(мы учли свойства блока и нити, описанные выше).

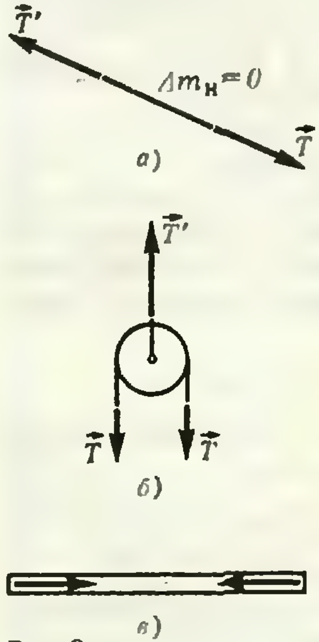


Рис. 3.

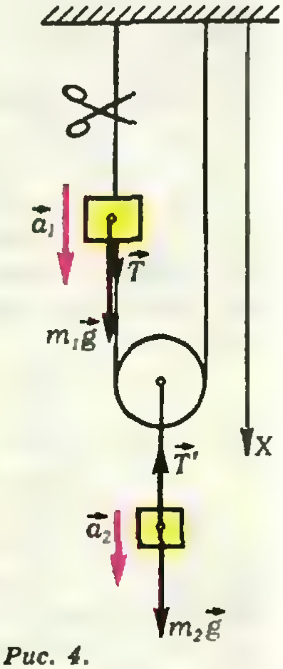


Рис. 4.

Для нахождения кинематической связи между a_1 и a_2 применим, как мы его назвали, прямой метод. Запишем длину нити в виде

$$l = x_2 + \pi R + (x_2 - x_1),$$

где x_1 — координата груза массой m_1, x_2 — координата центра блока, R — его радиус, и учтем, что длина нити при движении грузов не изменяется. Тогда для перемещений грузов получим соотношение

$$2\Delta x_2 - \Delta x_1 = 0,$$

откуда

$$2v_2 - v_1 = 0,$$
$$2a_2 - a_1 = 0. \qquad (9)$$

Решая уравнения (7)—(9) совместно, находим

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2(m_2 + 2m_1)}{m_2 + 4m_1} g.$$

(Обратите внимание на то, что $a_1 > g$. Подумайте, почему получился такой ответ.)

Задача 4. *Невесомый стержень с одинаковыми грузами массой m на концах шарнирно закреплен на оси, которая делит его длину в отношении 2:1 (рис. 5). Стержень удерживают в горизонтальном положении и в некоторый момент освобождают. Найдите ускорения грузов сразу после этого, а также давление стержня на ось в этот момент.*

Запишем второй закон Ньютона для грузов, выбрав положительные направления осей в сторону соответствующих ускорений:

$$mg - N_1 = ma_1, \qquad (10)$$
$$N_2 - mg = ma_2, \qquad (11)$$

где N_1 и N_2 — силы, действующие на грузы со стороны стержня. Так как сумма моментов сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю, то

$$N_1 \frac{2}{3} l - N_2 \frac{1}{3} l = 0,$$

где l — длина стержня. Отсюда

$$N_2 = 2N_1. \qquad (12)$$

Осталось записать кинематическую связь между a_1 и a_2. Для этого изобразим на рисунке 5 положение стержня через малый промежуток времени Δt после начала движения. Из подобия получаем

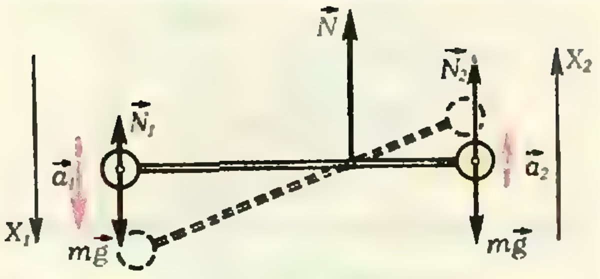


Рис. 5.

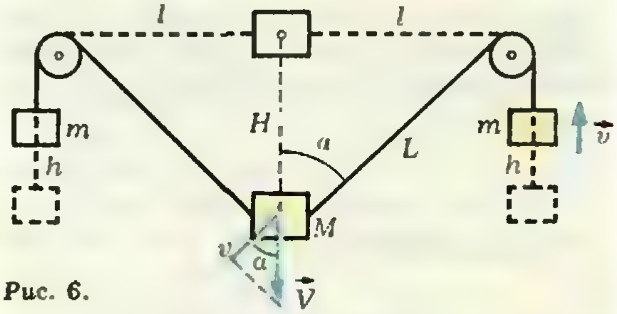


Рис. 6.

$$x_1 = 2x_2,$$

откуда

$$v_1 = 2v_2,$$
$$a_1 = 2a_2. \qquad (13)$$

Решая совместно уравнения (10)—(13), находим

$$a_1 = 2a_2 = \frac{2}{5} g,$$

$$N_2 = 2N_1 = \frac{6}{5} mg.$$

Так как сумма сил, действующих на невесомый стержень, равна нулю, то сила реакции оси (равная по модулю силе давления на ось) равна

$$N = N_1 + N_2 = \frac{9}{5} mg.$$

* * *

Во многих задачах, рассчитанных на применение закона сохранения энергии, требуется найти скорости тел к определенному моменту времени. В этом случае надо установить кинематические связи не между ускорениями, а между скоростями тел. При решении таких задач полезно использовать тот факт, что полная работа, совершаемая любым идеальным соединительным элементом, равна нулю. Физическая причина этого состоит в том, что в таком элементе не может запасаться никакая энергия — ни кинетическая (его масса равна нулю), ни потенциальная (элемент не деформируется).

Последнее утверждение требует пояснения. Может показаться, что даже при малой деформации очень жесткого стержня (или другого элемента) потенциальная энергия его деформации $E_p = kx^2/2$ может быть велика — ведь она пропорциональна жесткости стержня k. Но если учесть, что сила $F = kx$, возникающая при деформации, остается конечной при $k \to \infty$ (она определяется движением тел, закрепленных на стержне), то потенциальная энергия $E_p = F^2/(2k)$ при больших k оказывается очень малой.

Задача 5*[*]. *Груз массой M сначала удерживают на уровне блоков, а затем освобождают (рис. 6). Считая нити и блоки идеальными, размеры блоков малыми по сравнению с расстоянием $2l$ между ними, а массу m грузиков, висящих на концах нитей, известной, найдите скорость груза в тот момент, когда нити составляют угол α с вертикалью. Полученный ответ исследуйте.*

К рассматриваемому моменту груз массой M опустился на $H = l \operatorname{ctg} \alpha$, а грузики массой m поднялись на $h = l/\sin\alpha - l$ каждый. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{MV^2}{2} + 2\,\frac{mv^2}{2} - MgH + 2mgh = 0. \quad (14)$$

Для того чтобы найти связь между v и V, можно, например, применить прямой метод. Из рисунка 6

$$l^2 + H^2 = L^2.$$

Дифференцируя по времени (и учитывая, что $l' = 0$), находим

$$2H \cdot H' = 2L \cdot L'.$$

Так как $L' = v$, $H' = V$, а $H/L = \cos\alpha$, то получаем искомую связь

$$v = V\cos\alpha. \quad (15)$$

Однако проще получить это соотношение из следующих соображений. Раз расстояние L от груза массой M до блока в рассматриваемый момент увеличивается со скоростью v (с такой скоростью вытягивается нить), то проекция скорости $\vec{V}$ этого груза на направление нити должна быть равна v. Учитывая, что скорость $\vec{V}$ направлена вертикально, получаем уравнение (15).

Из уравнений (14) и (15) находим

$$V = \sqrt{2gl\,\frac{M\cos\alpha + 2m(\sin\alpha - 1)}{\sin\alpha(M + 2m\cos^2\alpha)}}.$$

Выясним, будет ли центральный груз все время опускаться (мы считаем нити очень длинными) или при каком-то α он остановится и начнет подниматься. Уравнение $V = 0$ (условие остановки) преобразуется к виду

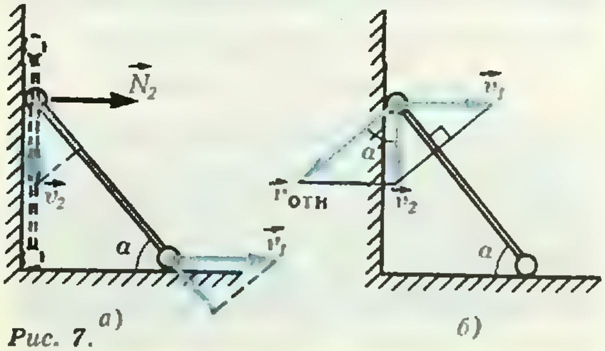
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2m - M}{2m + M},$$

т. е. остановка и обратное движение грузов происходят только при $M < 2m$. Если $M > 2m$, то центральный груз будет все время перевешивать и его скорость будет неограниченно возрастать ($V \to \infty$ при $\alpha \to 0$ — проверьте это сами). Если же $M = 2m$, то при опускании центрального груза система все ближе подходит к равновесию, ускорения грузов стремятся к нулю, а их скорости — к предельному значению $V_\infty = \sqrt{gl}$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Хотелось бы обратить внимание на то, что при использовании закона сохранения энергии сила натяжения нити вообще не вошла в расчеты.

Последний пример иллюстрирует методы получения кинематических связей при движении твердых стержней (или других твердых связей). Напомним, что при движении твердого тела расстояние между любыми двумя его точками не изменяется.

Задача 6. *Невесомый стержень длиной l с грузами массой m на концах соскальзывает по сторонам прямого двугранного угла (рис. 7, а). Найдите скорости грузов в тот момент, когда стержень составляет с горизонтом угол α. Трения нет. В начальный*



а) б)

Рис. 7.

---

[*] Эта и следующая задачи по своему уровню несколько выходят за пределы задач, предлагаемых обычно на вступительных экзаменах в вузы. Однако знакомство с ними для абитуриентов окажется небесполезным.

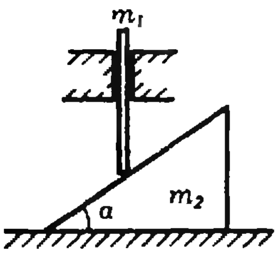


Рис. 8.

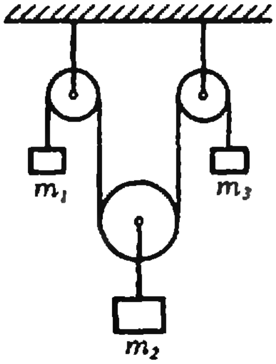


Рис. 9.

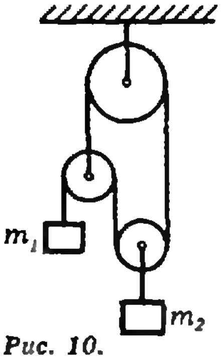


Рис. 10.

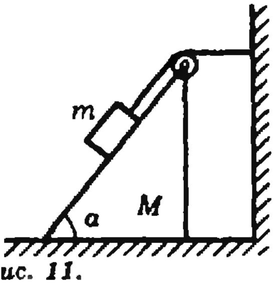


Рис. 11.

момент стержень находился в вертикальном положении.

Из закона сохранения энергии получаем

$$mg(l-y)=\frac{mv_1^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}, \qquad (16)$$

где $y=l\sin\alpha$ — координата второго груза в рассматриваемый момент. Для получения кинематической связи можно применить прямой метод, как это было сделано в предыдущей задаче (проделайте это сами). Быстрее же и нагляднее кинематическая связь получается из таких соображений. Раз расстояние между грузами остается неизменным, то в каждый момент скорость, с которой первый груз «удаляется» от второго, равна скорости, с которой второй груз «приближается» к первому. Иначе говоря, проекции скоростей грузов на стержень в любой момент времени одинаковы (см. рис. 7, *а*):

$$v_1\cos\alpha=v_2\sin\alpha. \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (16), находим

$$v_1=\sqrt{2gl\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)}\ ,$$

$$v_2=\sqrt{2gl\cos^2\alpha(1-\sin\alpha)}\ .$$

В кинематике твердого тела часто используется «разложение» сложного движения на поступательное и вращательное. Чтобы продемонстрировать этот метод, применим его для получения кинематической связи (17). В системе отсчета, связанной с первым грузом, стержень совершает чисто вращательное движение. Значит, в этой системе скорость второго груза $\vec{v}_{\text{отн}}$ направлена перпендикулярно стержню. Применяя закон сложения скоростей $\vec{v}_2=\vec{v}_{\text{отн}}+\vec{v}_1$ (см. рис. 7, *б*), получаем соотношение (17).

Может показаться, что найденные выражения для скоростей дают полное решение задачи. Однако в этой задаче содержится поучительный подвох, разбором которого мы и закончим статью.

Решение было бы полным, если бы второй груз не мог оторваться от вертикальной стены. (Для этого можно было бы, например, посадить грузы на гладкие штанги, а стержень присоединить к ним шарнирно). Однако в нашем варианте задачи (см. рис. 7, *а*) при некотором угле произойдет отрыв второго груза от вертикальной стены, после чего найденный ответ будет неприменим. Дело в том, что горизонтальный импульс системы определяется только движением первого груза, скорость которого, в соответствии с выражением для v_1, до некоторого угла возрастает, а потом начинает убывать. Это означает, что в какой-то момент должна изменить направление внешняя горизонтальная сила, действующая на систему. Но есть только одна горизонтальная сила — сила реакции вертикальной стенки, которая не может изменить свое направление. Таким образом, в тот момент, когда реакция стенки обращается в нуль, происходит отрыв второго груза от стенки. Дифференцируя выражение для v_1 по времени, находим, что v_1 максимальна при $\sin\alpha=2/3$. При угле $\alpha=\arcsin(2/3)$ и происходит отрыв стержня от вертикальной стенки.

Упражнения

1. Найдите ускорения стержня и клина, изображенных на рисунке 8. Трения нет.

2. Найдите натяжение нити в системе, изображенной на рисунке 9.

3 (для любителей каверз и ловушек). Чему равны ускорения грузов в системе, изображенной на рисунке 10?

4. Найдите ускорение клина на рисунке 11. Трения нет. Указание. Примените метод, использованный при решении задачи 2 в статье.

Стереометрические задачи с шарами

Кандидат физико-математических наук
М. Р. ЛИБЕРЗОН

В этой статье обсуждаются задачи о комбинациях тел в пространстве, в которые входят один или несколько шаров. Указанную в задаче совокупность тел бывает трудно изобразить на чертеже, но это и не нужно: для решения достаточно построить плоские чертежи, получающиеся в сечении данной пространственной фигуры плоскостями или при проектировании ее на плоскости. При этом главное — правильно выбрать плоскости. Универсального способа для такого выбора не существует; нужно, конечно, стараться, чтобы секущие плоскости проходили через как можно большее количество узловых точек — центров шаров, точек касания и т. д., — а при проектированиях сохранялись (или изменялись контролируемым образом) данные длины и углы.

Напомним несколько простых геометрических фактов, которые часто используются при выборе плоскостей.

Утверждение 1. *Радиусы, проведенные в точку касания двух шаров, лежат на одной прямой. Расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме или разности их радиусов.*

Утверждение 2. *Если плоскость проходит через центры касающихся шаров, то она содержит точку касания.*

Утверждение 3. *Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового цилиндра. Если плоскость проходит через ось цилиндра и центр шара, то она содержит точку касания.*

Утверждение 4. *Пусть шар касается боковой поверхности прямого кругового конуса. Если плоскость проходит через высоту конуса и центр шара, то она содержит точку касания.*

В качестве примеров разберем несколько задач, предлагавшихся в разное время на вступительных экзаменах в МГУ.

Задача 1. *В пространство, заключенное между сферической поверхностью и плоскостью, проходящей через ее центр, вложено три одинаковых шара радиусом r так, что каждый шар касается двух других, сферической поверхности и указанной плоскости. Найдите радиус сферической поверхности.*

Решение. Проекции центров данных шаров на данную плоскость являются вершинами правильного треугольника со стороной $2r$; центр сферической поверхности лежит в центре этого треугольника; расстояние от этого центра до любой вершины треугольника равно $2r/\sqrt{3}$ (рис. 1).

Проведем плоскость через центр O сферической поверхности и центр A одного из данных шаров перпендикулярно к данной плоскости. В сечении получится фигура, изображенная на рисунке 2. На этом рисунке точка M — проекция точки A на данную плоскость, P — точка касания данного шара с центром A и данной сферической поверхности. В прямоугольном треугольнике AOM известны длины катетов: $AM=r$, $MO=2r/\sqrt{3}$. Следо-

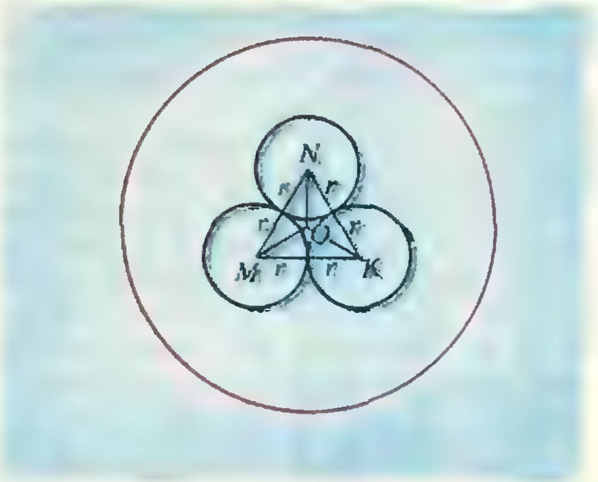


Рис. 1.

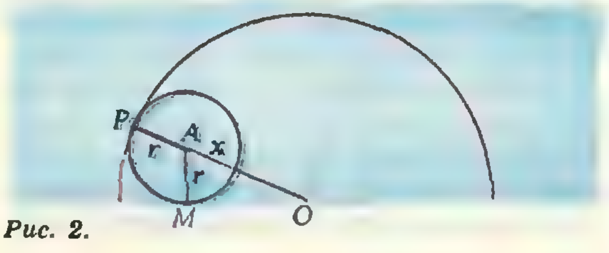


Рис. 2.

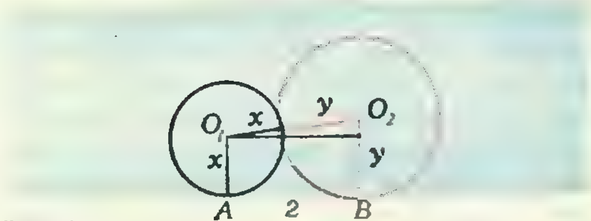


Рис. 3.

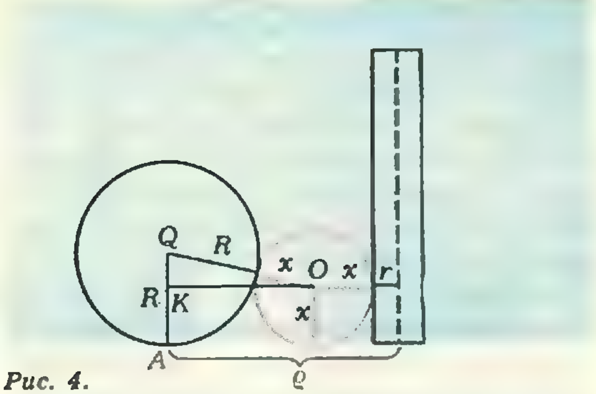


Рис. 4.

вательно, $AO=\sqrt{r^2+\frac{4r^2}{3}}=\frac{\sqrt{21}}{3}r$ и мы можем найти нужный радиус:

$$OP=OA+AP=\frac{\sqrt{21}}{3}r+r=\frac{3+\sqrt{21}}{3}r.$$

Задача 2. *В треугольнике ABC сторона AB равна 2, сторона BC равна 4 и $\angle B=60°$. Три шара касаются плоскости треугольника ABC соответственно в точках A, B, C и попарно касаются между собой. Определите радиусы этих шаров.*

Решение. По теореме косинусов находим длину стороны AC: она равна $\sqrt{12}$. Пусть шары, касающиеся плоскости треугольника в точках A, B, C, имеют своими центрами точки O_1, O_2, O_3, а их радиусы равны x, y, z. Проведем три вспомогательные секущие плоскости, перпендикулярные к плоскости треугольника ABC: одну через точки O_1 и O_2 (сечение этой плоскостью нашей фигуры изображено на рисунке 3), другую через точки O_2 и O_3 и третью через точки O_1 и O_3 (сечения этими плоскостями устроены аналогично). В каждом сечении лежит прямоугольный треугольник, у которого длина гипотенузы равна сумме радиусов двух шаров, один катет равен разности этих радиусов, а другой катет равен длине соответствующей стороны треугольника ABC. Записав теорему Пифагора для каждого из этих треугольников, мы получим систему трех уравнений с тремя неизвестными, из которой находим $x=\sqrt{3}/2$, $y=2\sqrt{3}/3$, $z=2\sqrt{3}$.

Задача 3. *На плоскости лежит шар радиусом R. Эту же плоскость пересекает прямой круговой цилиндр радиусом r, причем образующие цилиндра перпендикулярны к плоскости. Центр шара удален от оси цилиндра на расстояние $\rho>R+r$. Найдите минимально возможный радиус шара, который касался бы одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.*

Решение. Проведем вспомогательную плоскость через ось цилиндра и центр Q заданного шара. Центр O шара, радиус которого мы ищем, лежит, очевидно, в этой плоскости. В сечении (рис. 4) расположен прямоугольный треугольник OKQ, в котором длины всех сторон выражаются через данные задачи R, r, ρ и искомый радиус x. Теорема Пифагора дает уравнение для вычисления x; решая это уравнение, получаем $x=(\sqrt{R+\rho-r}-\sqrt{R})^2$.

Задача 4. *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\|BB_1\|CC_1\|DD_1$). В угол A куба вписан шар радиусом $R=0{,}5$. Найдите радиус шара, вписанного в угол C куба и касающегося данного шара, при условии, что ребро куба $a=1{,}5$.*

Решение. Пусть Q — центр шара, вписанного в угол A. Существуют три шара, вписанных в угол C и касающихся заданного шара. Один из них касается основания куба $ABCD$

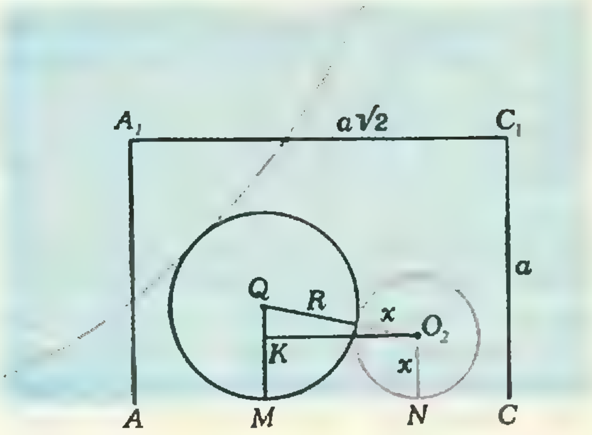


Рис. 5.

в той же точке, что заданный шар, и содержит его внутри себя. Центр этого шара обозначим через O_1. Точка O_1 находится над точкой Q. Еще два шара, радиусы которых мы должны найти, касаются шара Q внешним образом и расположены по разные стороны от него: меньший ближе к вершине C, больший дальше от нее. Обозначим их центры буквами O_2 и O_3 соответственно.

(Заметим, что только самый маленький шар O_2 помещается внутри куба. Средний шар O_1 и большой шар O_3 «вылезают» за его пределы и могут касаться не граней куба, а их продолжений.)

Найдем радиусы этих трех шаров. Проведем вспомогательную плоскость через вертикальные ребра AA_1 и CC_1. В этой плоскости лежат центры всех шаров, точки касания их между собой и с плоскостью $ABCD$. Рассмотрим сечение этой плоскостью шаров O_2 и Q (рис. 5). В треугольнике O_2KQ не известна только длина катета KO_2. Но $KO_2 = MN$, а расстояние между точками M и N мы находим из проекции на плоскость основания $ABCD$ (рис. 6);

$$MN = AC - AM - NC = a\sqrt{2} - R\sqrt{2} - x\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - R - x).$$

Воспользовавшись теоремой Пифагора для треугольника O_2KQ, мы получим уравнение

$$(R + x)^2 = (R - x)^2 + 2(a - R - x)^2,$$

которое имеет два корня (напомним, что по условию $R = 0{,}5$, $a = 1{,}5$): $(3 - \sqrt{5})/2$ и $(3 + \sqrt{5})/2$.

Что означает наличие двух корней? Нарисуйте сечение и проекцию для шаров O_3 и Q, аналогичные показанным на рисунках 5 и 6. Убедитесь в том, что радиус большого шара O_3 находится из уравнения, которое отличается от написанного только знаками внутри скобок в правой части. Эта разница уничтожается при возведении в квадрат. Значит, полученные два корня — это длины радиусов шаров O_2 и O_3 соответственно.

Для вычисления радиуса шара O_1 достаточно рассмотреть проекцию на плоскость основания $ABCD$, показанную на рисунке 7. Искомый радиус равен длине катета равнобедренного прямоугольного треугольника MPC, гипотенуза которого находится так:

$$MC = AC - AM = a\sqrt{2} - R\sqrt{2} = \sqrt{2}(a - R) = \sqrt{2}.$$

Отсюда радиус шара O_1 равен 1.

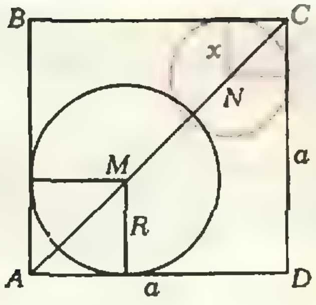


Рис. 6.

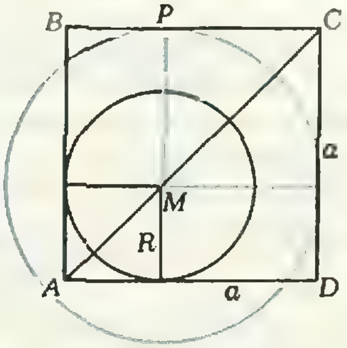


Рис. 7.

Задача 5. *На основании прямого кругового цилиндра лежат три шара радиусом r. На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найдите высоту конуса.*

Решение. Введем следующие обозначения: S — вершина конуса; P — центр верхнего шара; A — центр одного из шаров, лежащих на основа-

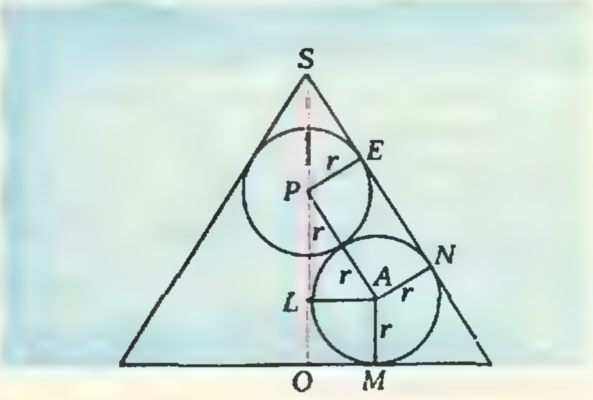


Рис. 8.

нии конуса; M — точка касания этого шара с основанием. Проведем вспомогательную плоскость через высоту конуса SO и центр шара A. Сечение имеет вид, показанный на рисунке 8; буквами E и N обозначены точки касания шаров с боковой поверхностью конуса.

Будем искать высоту конуса SO как сумму длин отрезков SP, PL и LO. Из прямоугольного треугольника PLA

$$PL=\sqrt{PA^2-LA^2}=\sqrt{PA^2-OM^2},$$

а величину отрезка OM находим в точности так же, как в первой задаче, спроектировав шары на плоскость основания конуса (см. рис. 1). Получим $PL=2r\sqrt{6}/3$.

Из подобия треугольников SEP и PLA

$$SP=\frac{PE\cdot PA}{LA}=r\sqrt{3}.$$

Так как $LO=r$, окончательно имеем

$$SO=r(\sqrt{3}+2\sqrt{6}/3+1).$$

Упражнения

1. В правильную треугольную пирамиду с ребром основания длиной a и двугранным углом при основании, равным 60°, вложено три шара одинаковых радиусов так, что каждый шар касается двух других, плоскости основания и двух боковых граней пирамиды. Найдите радиус каждого шара.

2. Два шара касаются плоскости P в точках A и B и расположены по разные стороны от этой плоскости. Расстояние между центрами шаров равно 10. Третий шар касается внешним образом двух данных шаров, а его центр O лежит в плоскости P. Известно, что $AO=BO=2\sqrt{10}$, $AB=8$. Определите радиус третьего шара.

3. На плоскости лежит прямой круговой цилиндр радиусом R и, не пересекаясь с ним, лежит шар радиусом r. Расстояние от оси цилиндра до центра шара равно ρ. Найдите минимальный возможный радиус шара, который бы касался одновременно цилиндра, плоскости и заданного шара.

4. Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AA_1\parallel BB_1\parallel CC_1\parallel DD_1$). В угол A куба вписан шар радиусом $R=0{,}5$. Найдите радиус шара, вписанного в угол C_1 куба и касающегося данного шара, если ребро куба $a=1{,}5$.

5. В конус помещены пять равных шаров. Четыре из них лежат на основании конуса, причем каждый из этих четырех шаров касается двух других, лежащих на основании, и боковой поверхности конуса. Пятый шар касается боковой поверхности конуса и остальных четырех шаров. Найдите объем конуса, если радиус каждого шара равен r.

6. В двугранный угол величиной 60° вписаны два шара радиусом R, касающиеся друг друга. Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося обоих данных шаров.

7. В прямом круговом конусе расположены два одинаковых шара радиусом r, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый шар касается боковой поверхности конуса и другого шара. Высота конуса в 4/3 раза больше радиуса основания. Найдите объем конуса.

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\cos\left(\frac{1}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\sqrt{6}-\sqrt{2}}(x^2+4x+11-4\sqrt{3})<2.$$

3. Радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 4, причем $AC=BC$. На прямой AB взята точка D, удаленная от прямых AC и BC на расстояния 11 и 3 соответственно. Найдите косинус угла DBC.

4. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из городов A и B, расположенных на расстоянии 60 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них увеличил свою скорость на 25 км/ч, а другой — на 20 км/ч, то они также прибыли бы одновременно на станцию C, но на 2 часа раньше. Найдите скорости поездов.

5. Найдите все пары значений a и b, для которых система

$$\begin{cases} x^2-y^2+a(x+y)=x-y+a, \\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений (x, y).

6. Сфера касается ребер AS, BS, BC и AC треугольной пирамиды $SABC$ в точках K, L, M и N соответственно. Найдите длину отрезка KL, если $MN=7$ с, $NK=5$ с, $LN=2\sqrt{29}$ с и $KL=LM$.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{x}+3y=9, \\ x-1=(\sqrt{x}+1)y. \end{cases}$$

2. Существуют ли действительные значения a, для которых

$$a^2-4a+\sqrt{3}=-a\sqrt{2}\ ?$$

Если такие значения существуют, то сколько их?

3. Решите неравенство

$$\log_{(x+1)^2}8+3\log_4(x+1)\geqslant 9\,\frac{1}{4}.$$

4. Решите уравнение

$$(2+3\cos 2x)(\sqrt{2\cos 2x+3\sin x+3-}$$
$$\overline{-2\sin x+1})=0.$$

5. С завода на стройку нужно перевезти 24 больших и 510 маленьких бетонных блоков. Доставка блоков осуществляется автомашинами, каждая из которых вмещает 44 маленьких блока и имеет грузоподъемность 10 тонн. Масса маленького блока 0,2 тонны, большого — 3,6 тонны, большой блок занимает место 14 маленьких. Найдите минимальное число рейсов, достаточное для перевозки всех блоков.

6. В пирамиде $ABCD$ проведено сечение $KMLN$ так, что точка K лежит на ребре AD, точка M — на ребре DC, точка N — на ребре AB, точка L — на ребре BC, O — точка пересечения диагоналей KL и MN четырехугольника $KMLN$. Сечение $KMLN$ делит пирамиду на две части. Найдите отношение объемов этих частей, если известны следующие соотношения между длинами отрезков:

$$4\cdot OL=3\cdot OK,\ 25\cdot ON=24\cdot OM,$$
$$DK\cdot NA-KA\cdot BN=KA\cdot NA.$$

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{2x}\geqslant\frac{1}{1-x}.$$

2. Решите уравнение

$$4^{\sin x}+2^{5-2\sin x}=18.$$

3. Известно, что $\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{4\pi}{3}$.

Найдите $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

4. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(3x^2-2x)}.$$

5. Внутри прямоугольного треугольника ABC (угол B — прямой) взята точка D так, что площади треугольников ABD и BDC соответственно в три и четыре раза меньше площади треугольника ABC. Длины отрезков AD и DC равны соответственно a и c. Найдите длину отрезка BD.

6. Шар радиусом 2 вписан в правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ с вершиной S. Второй шар радиусом 1 касается первого шара, основания пирамиды и боковых граней BSC и CSD. Найдите объем пирамиды и величину двугранного угла при боковом ребре SC.

Вариант 4

(химический факультет)

1. Решите уравнение

$$(1+2\sin x)\sin x=\sin 2x+\cos x.$$

2. Решите неравенство

$$4\log_2 x+\log_2\left(\frac{x^2}{8(x-1)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant 4-\log_2(x-1)-\log_2^2 x.$$

3. Стороны треугольника лежат на осях координат и на касательной к графику функции $y=x^2+2x+1$ в точке, абсцисса a которой удовлетворяет условию $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$. Найдите значение a, при котором площадь треугольника будет наибольшей.

4. Основанием четырехугольной пирамиды $FABCD$ является квадрат $ABCD$. На ребре AF взята точка E такая, что отрезок CE перпендикулярен ребру AF. Проекция O точки E на основание пирамиды лежит на отрезке AC и делит его в отношении $AO:OC=\gamma$. Найдите разность объемов пирамид $FABCD$ и $EABD$, если известно, что $\angle ADF=90°$, а $AB=a$.

5. Найдите все значения p, при каждом из которых множество решений неравенства

$$(p-x^2)(p+x-2)<0$$

не содержит ни одного решения неравенства

$$x^2\leqslant 1.$$

Вариант 5

(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$7\sin\left(2x-\frac{5}{2}\pi\right)+9\cos x+1=0.$$

2. Из пункта A по реке отправляется плот. Одновременно навстречу ему отправляется катер из пункта B, расположенного ниже по течению относительно пункта A. Встретив плот, катер сразу поворачивает и идет по течению. Найдите, какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки.

3. Решите неравенство

$$\frac{3\log_{0,5}x}{2-\log_{0,5}x}\geqslant 2\log_{0,5}x+1.$$

4. Площадь трапеции $ABCD$ равна 30. Точка P — середина боковой стороны AB. Точка R на боковой стороне CD выбрана так, что $2CD=3RD$. Прямые AR и PD пересекаются в точке Q. Найдите площадь треугольника APQ, если $AD=2BC$.

5. Найдите все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 9x^2-6xy+y^2+6x-13y+3=0, \\ 13x^2+6xy+10y^2+16x+2y-4ax-6ay+ \\ \qquad\qquad +a^2-2a+3=0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Вариант 6

(факультет почвоведения)

1. Решите уравнение

$$5\sin 2x=\sin 9x-\sin 5x.$$

2. Решите неравенство

$$\sqrt{2x+3}\geqslant x.$$

3. Один турист преодолевает расстояние 20 км на 2,5 часа быстрее, чем другой. Если бы первый турист уменьшил свою скорость на 2 км/ч, а второй увеличил бы свою скорость в 1,5 раза, то они затратили бы на тот же путь одинаковое время. Найдите скорость второго туриста.

4. Окружность радиуса 2 касается внешним образом другой окружности в точке A. Общая касательная к обеим окружностям, проведенная через точку A, пересекается с другой их общей касательной в точке B. Найдите радиус второй окружности, если длина отрезка AB равна 4.

5. Найдите такое значение x из промежутка $-1\leqslant x\leqslant 2$, что точка с абсциссой x и ординатой

$$y=\sqrt{4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3}$$

удалена на наименьшее расстояние от начала координат.

Вариант 7

(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$7^x-14\cdot 7^{-x}=3^{\log_3 2}+3.$$

2. Решите неравенство

$$y^2+3|y|<10.$$

3. Через вершины A и B треугольника ABC проведена окружность радиуса $2\sqrt{5}$, отсекающая от прямой BC отрезок $4\sqrt{5}$ и касающаяся прямой AC в точке A. Из точки B проведен перпендикуляр к прямой BC до пересечения с прямой AC в точке F. Найдите площадь треугольника ABC, если $BF=2$.

4. Найдите все решения системы

$$\begin{cases}\sin(2x+y)=0,\\ \cos(x+y)=1,\end{cases}$$

удовлетворяющие условиям

$$-\pi\leqslant x\leqslant\pi,\quad -2\pi\leqslant y\leqslant-\pi.$$

5. Найдите все натуральные значения b, при каждом из которых выражение $\dfrac{1}{x+y+3}$ имеет смысл для всех пар чисел (x, y), где $x<0$ и $y<0$, для которых выражение $\lg(xy-b)$ также имеет смысл.

Вариант 8

(геологический факультет)

1. Найдите площадь равностороннего треугольника, сторона которого равна стороне ромба с диагоналями 10 и 12.

2. Решите уравнение

$$4\sin^2 x+4\cos x=1.$$

3. Решите неравенство

$$\frac{1}{1-x}\geqslant-3.$$

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2x+3y=16,\\ \log_2 x+\log_2 y=3.\end{cases}$$

5. В 7 часов утра от первого причала отплыли две лодки. Сначала они плыли 8 км по озеру, каждая с постоянной скоростью, а затем 5 км по течению реки до второго причала. Первая лодка прибыла на место не позднее 9 часов 50 минут, а вторая — не ранее 10 часов 40 минут того же дня. Чему равна скорость каждой лодки в стоячей воде, если скорость течения реки — 2 км/ч, а скорость второй лодки в стоячей воде составляет 75 % от скорости первой лодки в стоячей воде?

6. На продолжении ребра SK за точку K правильной четырехугольной пирамиды $SKLMN$ с вершиной S взята точка A так, что расстояние от точки A до плоскости SMN равно 24. Найдите длину отрезка KA, если $SL=2\sqrt{41}$, $MN=16$.

Вариант 9

(отделение политической экономии экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$\cos 2x+3\sqrt{2}\sin x-3=0.$$

2. В магазине продано 12 тонн орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 42 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют арифметическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

3. Решите неравенство

$$\frac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leqslant 2.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x^2-8x+16)+\log_{4-x}(-x^2+5x-$$
$$-4)>3.$$

5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что $\dfrac{AK}{KB}=\dfrac{3}{2}$, а $\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{4}{5}$. Найдите отношение, в котором прямая, проходящая через точку K параллельно стороне BC, делит отрезок BM.

Вариант 10

(отделения экономической кибернетики и планирования народного хозяйства экономического факультета)

1. Решите уравнение

$$(2\sin x-1)\sqrt{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=0.$$

2. В магазине продано 10,5 тонны орехов трех сортов по цене соответственно 2 руб., 4 руб., и 6 руб. за 1 кг на общую сумму 33 тыс. руб. Известно, что количества тонн проданных орехов соответственно первого, второго и третьего сортов образуют геометрическую прогрессию. Сколько тонн орехов каждого сорта продано в магазине?

3. См. задачу 3 варианта 9.

4. См. задачу 4 варианта 9.

5. В треугольнике ABC точка K на стороне AB и точка M на стороне AC расположены так, что

$$\frac{AK}{KB}=\frac{2}{3} \text{ и } \frac{AM}{MC}=\frac{4}{5}.$$

Найдите отношение, в котором точка пересечения прямых KC и BM делит отрезок BM.

6. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии на 3/2 больше, чем сумма ее первых трех членов. Пятый член прогрессии равен ее третьему члену, умноженному на 4. Найдите ее четвертый член, если известно, что знаменатель прогрессии положителен.

2. Решите уравнение

$$\log_2(x^2-2x-1)-\log_2\left(x-\frac{1}{2}\right)=1.$$

3. Бригада маляров белила потолки в классе и в актовом зале школы, причем площадь потолка в актовом зале в три раза больше, чем площадь потолка в классе. В той части бригады, которая работала в актовом зале, было на 6 маляров больше, чем в той части, которая работала в классе. Когда побелка всего потолка в актовом зале закончилась, та часть бригады, которая была в классе, еще работала. Какое наибольшее число маляров могло быть в бригаде, если все они начали работать одновременно и работали с одинаковой производительностью?

4. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{3}{4}-\cos x}=\sqrt{\frac{3}{4}-\cos 3x}.$$

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Площади треугольников BOC, COD, AOD равны соответственно 20, 40, 60. Найдите угол BAO, если известно, что $AB=15$, $AO=8$, а угол BOA больше 31°.

6. Докажите, что все решения неравенства

$$\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^2-1}>2$$

удовлетворяют неравенству

$$x+2\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{x^4-2x^2+1}>1+2\sqrt[3]{x^2-1}.$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$2\cos 2x+4\cos x=\sin^2 x.$$

2. Решите уравнение

$$\log_{5-x^2}(2x^2-8x-2)=1+\log_{5-x^2}2.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2x^2-15x-17}>x+3.$$

4. Медианы AM и BE треугольника ABC пересекаются в точке O. Точки O, M, E, C лежат на одной окружности. Найдите AB, если $BE=AM=3$.

5. Решите неравенство

$$\frac{9}{3x+2}>\frac{1+\log_3(x+6)}{x}.$$

Физика

Физический факультет

1. По штанге может без трения скользить муфта, прикрепленная пружиной к оси OO' (рис. 1). При вращении штанги с постоянной угловой скоростью ω положение равновесия муфты смещается вдоль штанги. Какому условию должна удовлетворять угловая скорость ω, чтобы это смещение было мало́ по сравненяю с длиной пружины в недеформированном состоянии? Масса муфты m, жесткость пружины k.

2. По горизонтальной поверхности прямолинейно с постоянной скоростью движется гладкая полусфера радиусом R (рис. 2). В некоторый момент времени вершина полусферы касается нижней точки маленького шарика, который до этого момента удерживался, и в момент касания отпускается. При каком мини-

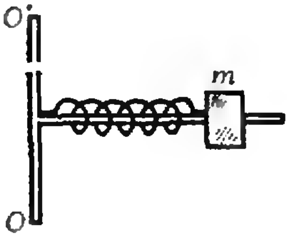


Рис. 1.

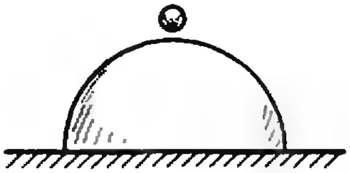


Рис. 2.

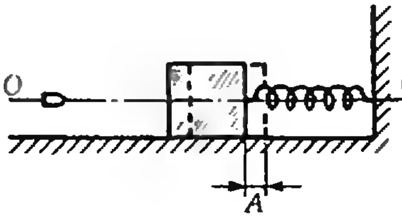


Рис. 3

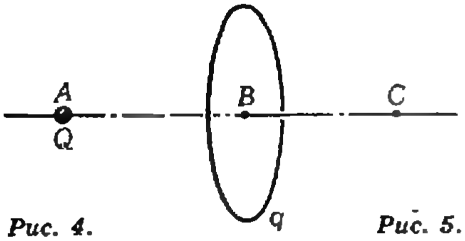


Рис. 4.

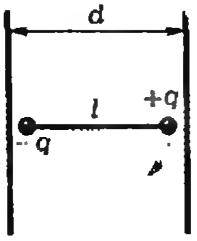


Рис. 5.

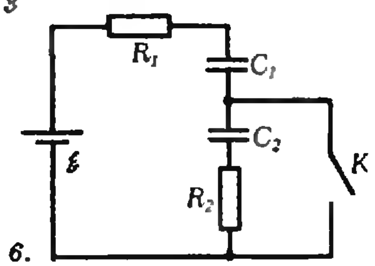


Рис. 6.

мальном значении скорости полусферы она не будет мешать свободному падению шарика? Ускорение свободного падения g.

3. На абсолютно гладкой горизонтальной поверхности лежит куб, связанный пружиной с вертикальной стенкой (рис. 3). Прямая OO' проходит через середины противоположных сторон куба и осевую линию пружины. Летящая в направлении OO' пуля попадает в середину стороны куба и застревает в нем. Куб начинает при этом колебаться с периодом T и амплитудой A. Чему была равна скорость пули перед ударом? Масса куба M, масса пули m. Закон Гука выполняется.

4. В баллоне находилось $m=0{,}3$ кг гелия. Через некоторое время в результате утечки гелия и уменьшения абсолютной температуры на 10 % давление в баллоне уменьшилось на 20 %. Какое число молекул гелия просочилось из баллона? $N_A=6\cdot 10^{23}$ 1/моль, $M_{He}=0{,}004$ кг/моль.

5. Влажный воздух, масса которого (вместе с водяными парами) m, занимает объем V при температуре T и давлении p. Давление насыщенных паров при этой температуре p_0. Молярная масса сухого воздуха M_1, водяных паров — M_2. Определите относительную влажность воздуха. Насыщенные пары рассматривать как идеальный газ.

6. Положительный заряд q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом r_0. Точечный положительный заряд Q движется вдоль оси AC, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр B (рис. 4). Какую минимальную скорость этот заряд должен иметь в точке A, отстоящей от центра кольца B на расстояние d, чтобы достигнуть точки C, лежащей на оси AC за кольцом? Масса заряда m. Потенциал точечного заряда q_0 в точке, находящейся на расстоянии r от заряда, равен $\varphi=q_0/(4\pi\varepsilon_0 r)$.

7. В средней части плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d=10$ см, расположен вдоль поля диэлектрический стержень длиной $l=1$ см (рис. 5). На концах стержня имеются два точечных заряда одинаковой величины $q=10^{-11}$ Кл, но противоположного знака. Определите разность потенциалов между пластинами конденсатора, если для этого, чтобы повернуть стержень на 90° вокруг оси, проходящей через его центр (т. е. расположить поперек поля), необходимо совершить работу $A=3\cdot 10^{-10}$ Дж.

8. Какую работу совершит источник постоянного тока с ЭДС $\mathcal{E}=100$ В, включенный в схему, изображенную на рисунке 6, после замыкания ключа K к моменту времени, когда процесс дозарядки конденсатора емкостью C_1 уже завершится? $C_1=2\cdot 10^{-5}$ Ф, $C_2=2\times$ $\times 10^{-5}$ Ф.

9. Два плоских зеркала составляют двугранный угол $\alpha=120°$. В плоскости, делящей угол пополам, расположен точечный источник света S (рис. 7). Расстояние между первыми мнимыми изображениями источника равно H. Чему будет равно расстояние между изображениями, если угол α уменьшить в два раза?

10. На переднюю грань плоскопараллельной пластинки, изготовленной из стекла с показателем преломления n, падает сходящийся световой пучок, имеющий вид конуса с углом при вершине γ (рис. 8). Диаметр освещенного пятна на передней грани пластинки D. При какой толщине пластинки диаметр выходного пятна будет равен $D/2$?

Механико-математический факультет

1. Граната массой $m=1$ кг разорвалась на высоте $H=6$ м над землей на два осколка. Непосредственно перед разрывом скорость гранаты была направлена горизонтально и по модулю равна $v=10$ м/с. Один из осколков массой $m_1=0{,}4$ кг полетел вертикально вниз и упал на землю под местом разрыва со скоростью $v_1=40$ м/с. Чему равен модуль скорости второго осколка сразу после разрыва?

2. Между двумя кубиками массами m и M находится сжатая пружина (рис. 9). Если кубик массой M удерживать на месте, а другой кубик отпустить, то он отлетит со скоростью v. С какой скоростью будет двигаться кубик массой m, если оба кубика освободить одновременно? Деформация пружины в обоих случаях одинакова. Трением и массой пружины пренебречь.

3. Алюминиевая спица длиной $L=25$ см и площадью поперечного сечения $S=0{,}1$ см^2 подвешена на нити за верхний конец (рис. 10). Нижний конец опирается на горизонтальное дно сосуда, в который налита вода. Длина погруженной в воду части спицы $l=10$ см. Найдите силу, с которой спица давит на дно сосуда, если известно, что нить расположена вертикально. Плотность алюминия $\rho_а=2{,}7$ г/см^3, плотность воды $\rho_в=1$ г/см^3.

4. В чайник налили воду при температуре $t=10$ °С и поставили на электроплитку. Через время $\tau_1=10$ мин вода закипела. Через какое время вода полностью выкипит? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования $r=2{,}3$ МДж/кг. Температура кипения воды $t_к=100$ °С.

5. Вертикально расположенный цилиндрический сосуд, закрытый подвижным поршнем

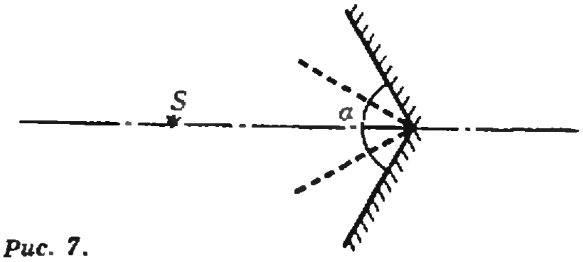


Рис. 7.

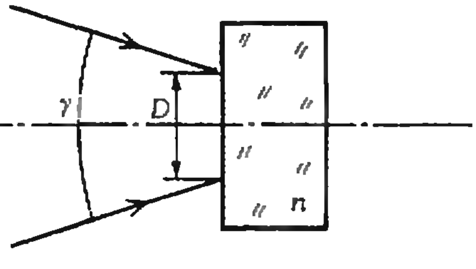


Рис. 8.

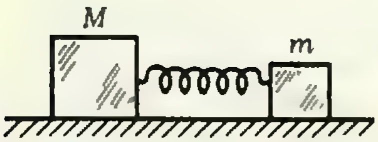


Рис. 9.

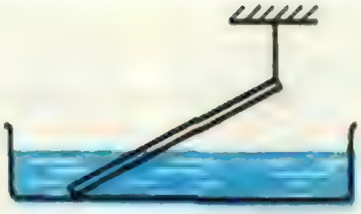


Рис. 10.

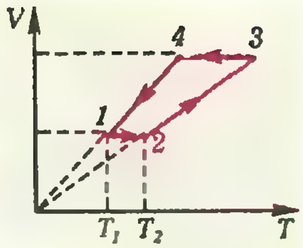


Рис. 11.

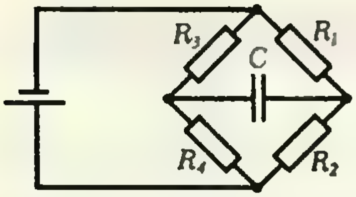


Рис. 12.

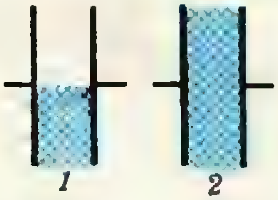


Рис. 13.

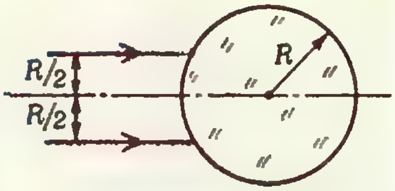


Рис. 14.

массой $M=2$ кг, содержит идеальный газ при температуре $T_1=300$ К. На поршень помещают тело массой $m=100$ г и нагревают газ так, чтобы поршень занял первоначальное положение. Найдите температуру нагретого газа. Атмосферное давление не учитывать.

6. С идеальным газом массой $m=20$ г и молярной массой $\mu=28$ г/моль совершается циклический процесс, изображенный на рисунке 11. Какую работу совершает газ за один цикл? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К), $T_1=300$ К, $T_2=496$ К. При расширении газа на участке 2—3 его объем увеличивается в два раза.

7. В схеме, приведенной на рисунке 12, где $R_1=60$ Ом, $R_2=20$ Ом, $R_3=40$ Ом и $R_4=20$ Ом, батарею и конденсатор поменяли местами. Во сколько раз изменится при этом заряд конденсатора?

8. В двух одинаковых плоских конденсаторах пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$: в одном наполовину, в другом полностью (рис. 13). Найдите отношение емкостей этих конденсаторов.

9. Луч света падает в центр верхней грани стеклянного кубика. Чему равен максимальный угол падения, при котором преломленный луч еще попадает на нижнюю грань кубика? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

10. Два параллельных луча света, расстояние между которыми равно радиусу R основания круглого прямого прозрачного цилиндра, падают на боковую поверхность этого цилиндра (рис. 14). Лучи параллельны основанию цилиндра. Найдите показатель преломления материала цилиндра, при котором лучи пересекаются на его поверхности.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Определите силу, с которой молоток действует на гвоздь при ударе, исходя из следующих данных: масса молотка $m=1$ кг, скорость молотка непосредственно перед ударом $v=5$ м/с, в результате удара гвоздь входит в дерево на глубину $l=2{,}5$ см. Считать силу сопротивления дерева постоянной, массой гвоздя по сравнению с массой молотка пренебречь.

2. На горизонтальной плоскости лежит деревянный брусок массой $M=4$ кг, прикрепленный к вертикальной стенке пружиной жесткостью $k=100$ Н/м (рис. 15). В центр бруска попадает пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально и параллельно пружине, и застревает в нем. Определите скорость пули, если максимальное сжатие пружины после удара $\Delta l=30$ см. Трением бруска о плоскость пренебречь.

3. Браслет массой $M=80$ г сделан из сплава золота и серебра. Вычислите массу золота, содержащегося в браслете, располагая следующими данными: плотность золота $\rho_1=19{,}3$ г/см^3, плотность серебра $\rho_2=10{,}5$ г/см^3. При погружении браслета в воду, находящуюся в сосуде с вертикальными стенками и площадью основания $S=25$ см^2, уровень воды поднимается на $h=2$ мм.

4. Нагретый металлический порошок высыпают в жидкость массой m_1, находящуюся при температуре T_1. Масса порошка m_2, его удельная теплоемкость c_2. Когда установилось тепловое равновесие, оказалось, что температура системы равна T, а масса жидкости уменьшилась на Δm. Удельная теплоемкость жидкости c_1, ее удельная теплота парообразования r, температура кипения $T_к$. Найдите температуру, которую имел нагретый порошок.

5. В вертикально расположенном цилиндре постоянного сечения под невесомым подвижным поршнем находится воздух. На поршень помещают гирю массой $m=10$ кг. На сколько переместится поршень, если температура воздуха в цилиндре поддерживается постоянной? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, площадь сечения поршня $S=100$ см^2, расстояние от ненагруженного поршня до дна цилиндра $h_0=100$ см.

6. Два сосуда, объемы которых V_1 и V_2, содержали одинаковый одноатомный газ с молярной массой М. В сосуде объемом V_1 масса газа равнялась m_1 при температуре T_1, а в сосуде с объемом V_2 — соответственно m_2 при температуре T_2. Сосуды соединяют трубкой. Пренебрегая объемом трубки и теплообменом

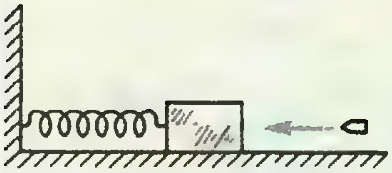


Рис. 15.

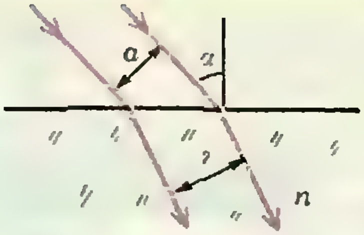


Рис. 16.

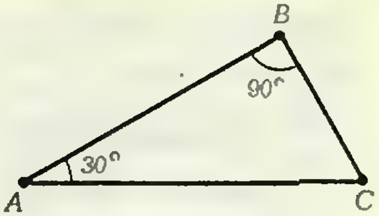


Рис. 17.

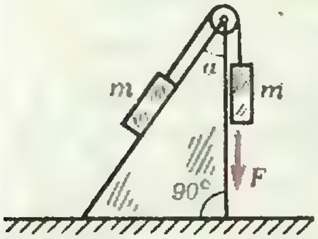


Рис. 18.

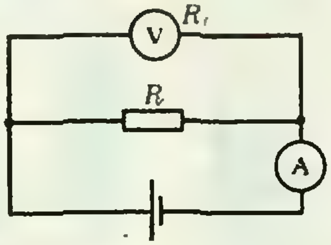


Рис. 19.

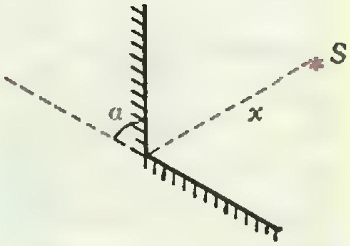


Рис. 20.

с окружающей средой, найдите давление, установившееся в сосудах.

7. *Две лампы имеют мощности* $P_1=20$ Вт и $P_2=40$ Вт при стандартном напряжении сети. При их последовательном включении в сеть с другим напряжением оказалось, что в первой лампе выделяется та же мощность, что и при стандартном напряжении. Какая мощность выделяется при этом во второй лампе? Изменением сопротивления нитей ламп с температурой пренебречь.

8. Конденсатор емкостью $C=10$ мкФ разряжается через цепь из двух параллельно включенных резисторов сопротивлениями $R_1=10$ Ом и $R_2=40$ Ом. Какое количество теплоты выделится на резисторе с меньшим сопротивлением, если конденсатор был заряжен до напряжения $U=100$ В?

9. Пучок параллельных лучей шириной $a=3$ см падает под углом $\alpha=45°$ из воздуха на плоскую границу среды с показателем преломления $n=1{,}5$. Какова будет ширина пучка в среде (рис. 16)?

10. Луч света отражается от плоского зеркала, падая на него под углом $\alpha=30°$. На какое расстояние сместится отраженный от зеркала луч, если поверхность зеркала закрыть стеклом толщиной $d=3$ см? Показатель преломления стекла $n=1{,}5$.

Геологический факультет

1. Два тела начали одновременно двигаться из точки *A* в точку *C*. Первое тело двигалось из точки *A* сначала в точку *B*, а затем в точку *C*; второе — сразу в точку *C* с постоянной скоростью v (рис. 17). В любой момент времени тела находились на прямой, перпендикулярной *AC*. Найдите среднюю скорость движения первого тела, если в треугольнике *ABC* угол *BAC* равен 30°, а угол *ABC* — 90°.

2. На неподвижной наклонной плоскости с углом α укреплен невесомый блок, который может вращаться без трения (рис. 18). Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить, соединенная с грузами массой m. Один груз может скользить без трения по наклонной плоскости. На второй груз действует сила F. Определите силу давления на ось блока.

3. Дубовый шар лежит в сосуде с водой так, что половина его находится в воде и он *касается дна. С какой силой шар давит на* дно сосуда, если его вес в воздухе $P=6$ Н? Плотность дуба $\rho=800$ кг/м³, плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м³.

4. Для нагревания некоторого количества идеального газа с молярной массой $M=28$ кг/кмоль на $\Delta T=14$ К при постоянном давлении потребовалось количество теплоты $Q_1=10$ Дж. Чтобы охладить газ до исходной температуры при постоянном объеме, необходимо от него отнять количество теплоты $Q_2=8$ Дж. Найдите массу газа. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31\times10^3$ Дж/(кмоль·К).

5. В сосуд, содержащий $m_1=0{,}6$ кг воды при температуре $t_1=10$ °С, опускают $m_2=0{,}8$ кг льда, взятого при $t_2=-20$ °С. Пренебрегая теплообменом с окружающей средой и теплоемкостью сосуда, определите температуру и состав содержимого в сосуде. Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплоемкость льда $c_2=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\times10^5$ Дж/кг.

6. Электрон влетает посередине между обкладками плоского конденсатора параллельно пластинам со скоростью $v=10^7$ м/с. Расстояние между пластинами $d=3$ см, длина пластин $L=8$ см, разность потенциалов между пластинами $U=300$ В. Сможет ли электрон вылететь из конденсатора? Электрон движется в вакууме. Отношение заряда электрона к его массе $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг. Силами тяготения пренебречь.

7. Каково сопротивление R_1 вольтметра, если в цепи, изображенной на рисунке 19, вольтметр показывает $U=50$ В? Показания амперметра $I=0{,}1$ А. Сопротивление $R=1000$ Ом. Сопротивлением амперметра пренебречь.

8. Горизонтальный металлический стержень длиной $l=0{,}5$ м равномерно вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через один из его концов, с частотой $n=5$ с$^{-1}$. Определите разность потенциалов между концами стержня, если вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B=5\cdot10^{-5}$ Тл.

9. Точечный источник света S находится на биссектрисе угла между двумя плоскими зеркалами (рис. 20). Найдите расстояние x от источника света до вершины угла, если расстояние между изображениями источника $l=0{,}35$ м и угол $\alpha=60^\circ$.

10. Между двумя плоскопараллельными стеклянными пластинками имеется небольшой воздушный зазор. Сквозь пластинки проходит луч монохроматического света, падающий нормально к поверхности пластин. При этом в воздушном зазоре укладывается $N=20$ длин волн света. Сколько длин волн того же света уложится в этом зазоре, если его заполнить жидкостью с показателем преломления $n=1{,}3$?

Публикацию подготовили *А. Н. Боголюбов, В. В. Морозов, И. Н. Сергеев, А. А. Склянкин, А. Н. Соколихин, А. Г. Сухарев, С. С. Чесноков*

Ответы, указания, решения

О стихотворных размерах

1. а) Такое слово не может содержать двух сильных слогов и поэтому его ударный слог обязан быть сильным. б) Поскольку никакое слово не содержит более одного сильного слога, иаше условие принимает вид: если слово содержит сильный слог, то его ударный слог совпадает с этим сильным слогом.

2. а) Если слово содержит более одного слога, то оно содержит как сильный слог ямба, так и сильный слог хорея. Значит, его ударный слог должен быть сильным слогом как ямба, так и хорея, но таких слогов нет. б) Аналогично предыдущему, никакое слово не содержит сильных слогов обоих размеров. Тогда никакое слово не содержит и двух сильных слогов одного размера, потому что между сильными слогами одного размера обязательно присутствует сильный слог другого размера. Значит, в строке слов не меньше, чем сильных слогов двух размеров, т. е. не меньше 6.

3. Если слово, содержащее 4-й слог, не односложно, то оно содержит 3-й или 5-й слог, т. е. содержит сильный слог хорея. Значит, ударный слог этого слова должен быть сильным слогом хорея и дактиля, а значит слово содержит 1-й или 7-й слог.

4. а) Сильных слогов нет — условие выполняется автоматически. б) В строке имеется единственный сильный слог, номер которого равен k и не зависит от n

5. а) Хорей. б) Нечетные строки — анапест, четные — модифицированный анапест (с ударениями на 3-м, 6-м, 10-м и 13-м слогах). в) Анапест (впрочем, нечетные строки содержат только $5<3+3$ слогов). г) (5,3)-размер. д) (5,3)-размер (хотя 1-я и 5-я строки содержат только $7<5+3$ слогов).

О пользе математики для ковбоев

1. Формулу $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\left(2-\frac{b}{d}\right)$ можно привести к виду $\frac{a}{c}=1-\left(\frac{b}{d}-1\right)^2$. Так как квадрат любого числа неотрицателен, правая часть формулы не больше 1, откуда $a\leqslant c$ (a и c — положительные числа).

2. Исходное равенство $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a-c}{b-d}$ можно привести к виду

$$ad^2=2bcd-b^2c. \qquad (1)$$

Пусть, от противного, $(a,\ b)=1$ и $(c,\ d)=1$ (символом $(x,\ y)$ обозначается наибольший общий делитель чисел x и y). Обозначим $(a,\ c)=A$, $(b,\ d)=B$. Тогда $a=\bar{a}A$, $c=\bar{c}A$, $b=\bar{b}B$, $d=\bar{d}B$, где $(\bar{a},\ \bar{c})=1$ и $(\bar{b},\ \bar{d})=1$. Подставив эти выражения в (1), после чего сократив на AB^2, получим

$$\bar{a}\bar{d}^{\,2}=2\bar{b}\bar{c}\bar{d}-\bar{b}^2\bar{c}.$$

Правая часть делится на $\bar{b}$. Поэтому $\bar{a}\bar{d}^2$ делится на $\bar{b}$. Но $(\bar{a},\ \bar{b})=1$ и $(\bar{d}^2,\ \bar{b})=1$. Следовательно, $\bar{b}=1$. Аналогично доказывается, что $\bar{d}=1$. Отсюда $b=d$ и, согласно (1), $a=c$. Но тогда

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}-\frac{a}{b}\neq\frac{a-a}{b-b},$$

так как на ноль делить нельзя.

3. Обозначим $\overline{ab}=10a+b$; $\overline{bc}=10b+c$, где a, b, c — отличные от нуля цифры. По условию задачи

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}=\frac{10a+b}{10b+c}=\frac{a}{c}.$$

Отсюда

$$9ac=9ab+b\,(a-c). \qquad (2)$$

Следовательно, $b\,(a-c)$ делится на 9. Так как a и c — ненулевые цифры, то $|a-c|\leqslant 8$. Следовательно, либо $a-c=0$, либо b делится на 3. В первом случае из (2) следует, что и $b=a$ — все цифры одинаковы. Остаются следующие возможности: а) $b=3$, $c=\frac{10a}{3a+1}$; б) $b=6$; $c=\frac{20a}{3a+2}$; в) $b=9$; $c=\frac{10a}{a+1}$.

Придавая a значения 1, 2, ..., 9, получим все четыре искомые дроби $\frac{16}{64}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{19}{95}$, $\frac{49}{98}$. При остальных значениях c выражения для c приводят либо к дробным значениям c, либо к совпадению всех цифр искомой дроби.

4. То же условие (2) можно переписать в виде

$$9a+b=10\,\frac{ab}{c}.$$

Обозначим $p=\underline{11\ldots1}$ (n единиц). Тогда $9p+1=10^n$. Пусть $x=\overline{abb\ldots b}$ (n цифр b), $y=\overline{bb\ldots bc}$ (n цифр b). Тогда $y=10bp+c$; $x=10^na+bp=(9p+1)a+bp=(9a+b)p+a=\frac{10ab}{c}\,p+a=\frac{a}{c}(10bp+c)=\frac{a}{c}\,y$. Следовательно, $\frac{x}{y}=\frac{a}{c}$.

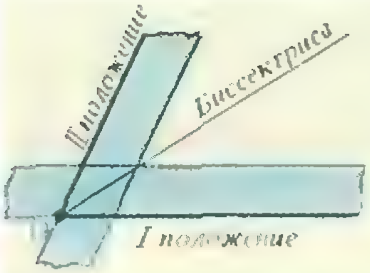


Рис. 1.

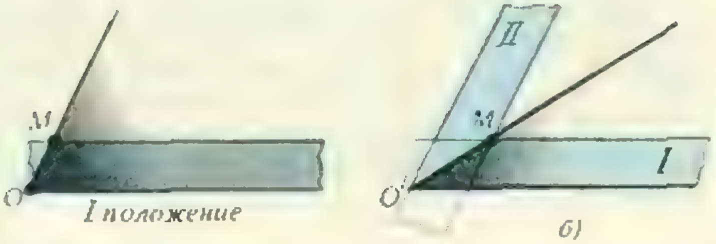


Рис. 2.

5. $\sqrt[c]{a+\frac{a}{a^c-1}}=a\sqrt[c]{\frac{a}{a^c-1}}$ — формула, описывающая вынесение из-под корня целой части числа.

6. $\frac{a+1/b}{b+1/a}=\frac{a}{b}$.

Избранные школьные задачи

1. $k=1$ ($A=B$), либо $k=100$ ($B=0$). Решение. Пусть $k=(100A+B)/(100B+A)$ — целое. Очевиден ответ $k=1$, $A=B$. Пусть $k\neq 1$, $A\neq B$. Тогда $A/B=(100k-1)/(100-k)$; считаем $k\neq 100$. Можно ли сократить дробь $(100k-1)/(100-k)$ так, чтобы как числитель, так и знаменатель, стал меньше 100? Если можно, то и дробь $(100k-1)/(100-k)-1=101(k-1)/(100-k)$ тоже можно сократить аналогичным образом. Но $100-k$ и 101 не имеют общих делителей, т. к. 101 — простое, а $100-k<100$. Поэтому после сокращения получаем несократимую дробь вида $101\cdot a/b$, числитель которой больше 100 — противоречие. Остается случай $k=100$, для которого $B=0$.

2. $104^2+72^2=120^2+40^2=16\,000$. Решение. Квадрат четного числа делится на 4, квадрат нечетного дает при делении на 4 остаток 1. Поэтому, если $x^2+y^2=16\,000$, то $x=2m$, $y=2n$. Тогда $m^2+n^2=4000$, и аналогично $m=2m_1$, $n=2n_1$, $m_1^2+n_1^2=1000$; $m_1=2m_2$, $n_1=2n_2$, $m_2^2+n_2^2=250=4\cdot 62+2$. Значит, m_2 и n_2 — оба нечетные, и если $m_2\geqslant n_2$, то $125\leqslant m_2^2<250$. Однако в этом промежутке существуют ровно два квадрата нечетных чисел: $m_2=13$ и $m_2=15$. Отсюда легко получается ответ.

3. $x=2$, $y=1$, $z=3$. Указание. Сумма всех уравнений дает равенство $x^2y+y^2x+y^2z+z^2y+z^2x+zx^2=48$, а их произведение после раскрытия скобок и учета выписанного равенства дает $(xyz)^2(48+2xyz)=2160$. Обозначив $t=xyz$, получаем кубическое уравнение $t^3+24t^2-1080=0$, имеющее корень $t_1=6$. Уравнение $t^3+24t^2-1080=(t-6)(t^2+30t+180)=0$ имеет еще два корня: $t_{2,3}=-15\pm 3\sqrt{5}$, которые нам не годятся, поскольку мы ищем положительные решения системы. Заменами $xy=\frac{6}{z}$, $yz=\frac{6}{x}$, $zx=\frac{6}{y}$ исходная система сводится к линейной, из которой $y=x/2$, $z=3x/2$.

4. а) Решение показано на рисунке 1. б) Сначала прикладываем линейку к одной стороне угла с вершиной O и находим точку M пересечения второй стороны линейки со второй стороной угла (рис. 2, *а*). Затем кладем линейку так, чтобы точки O и M оказались на разных ее сторонах, и проводим две параллельные прямые по обеим сторонам линейки. В результате получаем удвоенный угол (рис. 2, *б*).

5. Пусть AH — высота, BM — медиана, CK — биссектриса в треугольнике ABC. Если треугольник XYZ — равносторонний (рис. 3), то из треугольника XHC находим $\angle XCH=30^\circ$. Тогда $\angle ACB=2\cdot\angle XCH=60^\circ$. Из треугольника BYH находим $\angle CBM=30^\circ$. Поэтому $\angle BMC=90^\circ$, т. е. BM — медиана и высота в треугольнике ABC. Следовательно, $AB=BC$. Значит, треугольник ABC — равнобедренный с углом 60° при основании, поэтому он равносторонний, а тогда точки X, Y, Z обязаны совпадать — противоречие.

6. $x=\pm 1/\sqrt[50]{2}$, $y=\pm 1$ (4 решения). Указание. Поделим обе части уравнения на $4(xy)^{100}$:

$$\left(4x^{100}+\frac{1}{4x^{100}}\right)\left(y^{100}+\frac{1}{y^{100}}\right)=4.$$

Поскольку каждая из скобок не меньше 2, получаем $4x^{100}=1$, $y^{100}=1$.

7. Искомое множество состоит из точек плоскости, принадлежащих синим кругам и четырем красным криволинейным треугольникам, образованным окружностями и всеми внутренними и внешними касательными к ним (рис. 4).

8. Пусть CK — биссектриса, BM — медиана, BM и CK перпендикулярны. Обозначим $BC=a$. Треугольник MBC — равнобедренный, т. к. CO одновременно и высота, и биссектриса в нем (рис. 5). Значит, $AC=2a$, а тогда $2a-a<AB<2a+a$. Могут ли стороны AC и BC отличаться на 1, т. е. может ли AC быть средней по величине стороной? Если $AC-BC=1$, то $a=1$, и тогда $1<AB<3$, т. е. средней стороной является AB, а не AC. Значит, $AC-BC\neq 1$. Остается случай, когда AB — средняя сторона. Тогда $AC-BC=2$, т. е. $a=2$, поэтому $AC=2a=4$, $BC=a=2$ и $AB=3$. Для треугольника ABC со сторонами 2, 3, 4 выполняются все условия задачи ($\angle BCA=\arccos 11/16$).

9. Заметим, что при замене α на $(-\alpha)$ и увеличения α на $2\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}$) обе части неравенства не меняются. Поэтому достаточно ограничиться углами α из I и II квадрантов. Но для $\alpha\in[0;\frac{\pi}{2}]$ имеем

$$\sin\alpha\leqslant\alpha\Rightarrow\cos(\sin\alpha)\geqslant\cos\alpha\geqslant\sin(\cos\alpha),$$

поскольку косинус на этом промежутке убывает; а для $\alpha\in\left]\frac{\pi}{2};\pi\right]$ имеем $\sin\alpha\geqslant 0$, $\cos\alpha\leqslant 0$ и $\cos(\sin\alpha)\geqslant 0\geqslant\sin(\cos\alpha)$. Остается

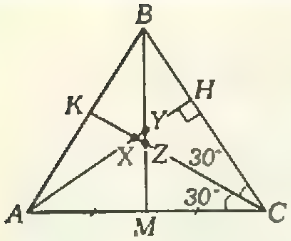


Рис. 3.

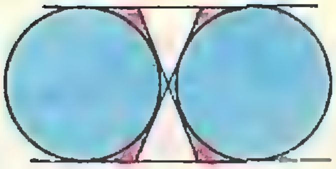


Рис. 4.

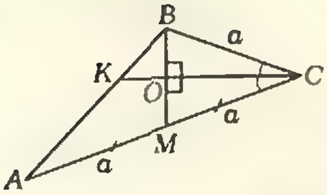


Рис. 5.

заметить, что в указанных двойных неравенствах хотя бы одно — строгое.

10. Сумма $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}$ максимальна, когда одно из слагаемых равно 999. Решение. Пусть $\frac{a}{c} \geqslant \frac{b}{d}$. Тогда $\frac{b}{d} \leqslant \frac{a+b}{c+d} \leqslant \frac{a}{c}$, т. е. $\frac{b}{d} \leqslant 1$. Пусть $a \leqslant 998$, тогда $\frac{a}{c} \leqslant 998$, так что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d} \leqslant 999$. Но если $\frac{a}{c}=999$ (при $a=999$, $c=1$), то $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}>999$.

11. $0{,}9<x_1<1$; $-1{,}1<x_2<-1$; $-1000<x_3<-999{,}9$. Решение. $f(x)=0{,}001x^3+x^2-1=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=0{,}001x^3$, $f_2(x)=x^2-1$. Корни $f_2(x)=0$ — это $(+1)$ и (-1), а при $|x|<2$, $|f_1(x)|<0{,}01$. Поэтому два корня $f(x)$ равны $x_1 \approx +1$, $x_2 \approx -1$: $f(+1)=0{,}001>0$, $f(0{,}9)<0 \Rightarrow 0{,}9<x_1<1$, и аналогично, $-1{,}1<x_2<-1$. Заметим теперь, что уравнение $0{,}001x^3+x^2=0$ имеет корень (-1000), причем $f(-1000)=-1<0$, а $f(-999{,}9)>0$, стало быть, $-1000<x_3<-999{,}9$.

12. а) Плоскость, в которой лежат обе оси цилиндров, начнем двигать параллельно самой себе, и при каждом ее положении фиксировать сечение цилиндров. Предварительно впишем в пересечение цилиндров шар радиусом R. В каждом сечении будут получаться квадраты со вписанными в них кругами (рис. 6). Отсюда следует, что тело, являющееся пересечением цилиндров, как и вписанный в него шар, «соткано» из указанных сечений; следовательно, объем этого тела так относится к объему вписанного в него шара, как площадь квадрата относится к площади вписанного в него круга: $\frac{V}{\frac{4}{3}\pi R^3}=\frac{(2R)^2}{\pi R^2}$. Отсюда $V=16/3R^3$. б) $V=\frac{16R^3}{3\sin\alpha}$.

13. Ответ: *нельзя*. Докажем, что в данном прямоугольнике при любом расположении квадратов будет существовать окружность диаметром 1, не пересекающая квадратов. Для этого ее центр не должен располагаться ближе чем на 1/2 к сторонам прямоугольника или к одному из квадратов. Присоединив к каждому квадрату размером 1×1 точки, находящиеся от него на расстоянии, не превосходящем 1/2, получим фигуру (квадрат со скругленными вершинами) площади $3+0{,}25\pi$. Эти фигуры не могут покрыть прямоугольника 19×24, даже если они не будут накладываться друг на друга, так как $120(3+0{,}25\pi)<19\times 24$. Поэтому для центра искомой окружности в прямоугольнике остается место.

14. Если $x>y$, то $x^x-x^y=y^x-y^y \Rightarrow x^y(x^{x-y}-1)=y^y(y^{x-y}-1) \Rightarrow 1<\left(\frac{x}{y}\right)^y=\frac{y^{x-y}-1}{x^{x-y}-1}<1$ — противоречие. Аналогично, не может выполняться неравенство $x<y$. Значит, $x=y$.

15. Обозначим $k=\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательных. Тогда

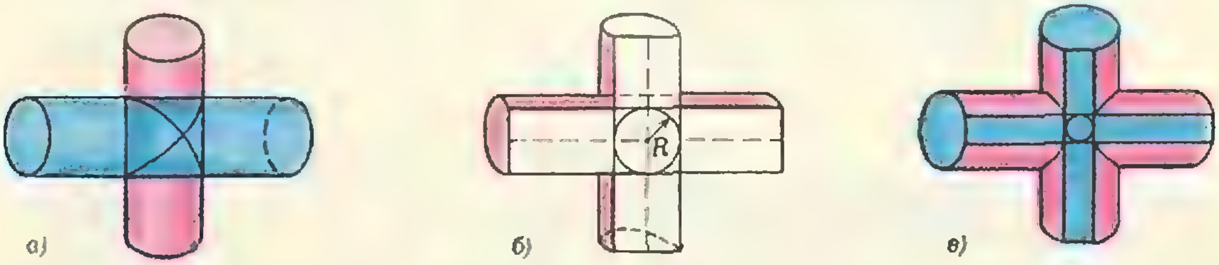
$$f'(0)=g'(0)=\frac{f'(0)g(0)-f(0)g'(0)}{g^2(0)}=k,$$

откуда $\frac{k\cdot g(0)-k\cdot f(0)}{g^2(0)}=k$ и $g(0)-f(0)=g^2(0)$. Обозначим $g(0)=t$, тогда последнее равенство переписывается в виде $t^2-t+f(0)=0$. Это уравнение имеет решение $t=g(0)$. Значит, его дискриминант $D=1-4f(0)\geqslant 0$. Отсюда $f(0)\leqslant 1/4$; $\max f(0)=1/4$.

Кинематические связи в задачах динамики

1. $$a_1=\frac{m_1\sin^2\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}g,$$

$$a_2=\frac{m_1\sin\alpha\cos\alpha}{m_1\sin^2\alpha+m_2\cos^2\alpha}g.$$



а) б) в)

Рис. 6.

2. $T=\dfrac{4m_1m_2m_3}{4m_1m_3+m_2(m_1+m_3)}\,g.$

3. $a_1=a_2=g.$

4. $a=\dfrac{m\sin\alpha}{M+2m(1-\cos\alpha)}\,g.$

Стереометрические задачи с шарами

1. $a/8.$
2. $4.$
3. $(\rho^2-(R-r)^2)/4(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2.$
4. $(7\pm3\sqrt{3})/4;\ (5\pm\sqrt{3})/4.$
5. $(1+2\sqrt{2})^2\pi r^3/3.$
6. $R(5\pm\sqrt{13})/3.$

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^n\arcsin\dfrac{3}{\pi(\pm1+6m)}+\pi n,\ n,m\in\mathbf{Z}.$

2. $(-3;\ -1).$

3. 3/4. Указание. Рассмотрите три случая расположения точки D: на стороне AB или ее продолжениях за точки A и B. Составив соотношения для площадей треугольников ABC, ADC и BDC, найдите в первом случае $AB:BC$ и докажите, что два последних случая невозможны.

4. 50 км/ч, 40 км/ч. Указание. Если скорости поездов равны u и v, причем $u>v$, а время их движения равно t, то справедливы равенства

$$\begin{cases} t(u-v)=60,\\ (t-2)((u+25)-(v+20))=60,\\ (t-2)(u+25)=tu \end{cases}$$

(случай $(t-2)((u+20)-(v+25))=60$ невозможен, так как $(t-2)(u-v-5)<t(u-v)=60$).

5. $\{(1;\ -2);\ (-1;\ -2);\ (a;\ 2)\},\ a\in\mathbf{R}.$ Указание. Чтобы система

$$\begin{cases} (x-y+a)(x+y-1)=0,\\ x^2+y^2+bxy-1=0 \end{cases}$$

имела не менее 5 решений, необходимо и достаточно, чтобы одна из систем

$$\begin{cases} y=x+a,\\ (b+2)x^2+a(b+2)x+(a^2-1)=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y=1-x,\\ (2-b)x^2+(b-2)x=0 \end{cases}$$

имела не менее 3 решений. Это возможно только при

$b+2=a(b+2)=a^2-1=0$ или $2-b=b-2=0.$

6. 9. Решение. Заметим вначале, что точки K, L, M, N лежат в одной плоскости. Действительно, пусть через точку S проведена плоскость α (рис. 7), параллельная плоскости LMN и пересекающая прямые AC и BC в точках E и F. Тогда в силу равенства соответствующих отрезков касательных и параллельности соответствующих прямых имеем $AK=AN$ и $KS=SL=SB-LB=FB-MB=FM=CM-CF=CN-CE=NE$. Поэтому $NK\parallel\alpha$ и точка K принадлежит плоскости LMN. Итак, четырехугольник $KLMN$ — вписанный и $KL=LM$, откуда $\angle LNK=\angle LNM=\varphi$. По теореме косинусов для треугольников LNK и LNM получаем

$$KL^2=116+25-4\sqrt{29}\cos\varphi\cdot5=116+49-4\sqrt{29}\cos\varphi\cdot7,$$

следовательно,

$$4\sqrt{29}\cos\varphi=12,\ KL^2=81.$$

Вариант 2

1. $(9;\ 2).$
2. Не существуют.
3. $(0;\ \sqrt[6]{2}-1)\cup(63;\ \infty).$
4. $x=(-1)^n\arcsin\sqrt{5/6}+\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$
5. 20 рейсов. Решение. Достаточно рассмотреть 3 типа загрузки машины блоками: 1) 0 больших и 44 маленьких блока, 2) 1 большой блок и 30 маленьких; 3) 2 больших и 14 маленьких блоков. Если m_1, m_2, m_3 — количества рейсов, соответствующих 1, 2 и 3 способу загрузки машины, то $44m_1+30m_2+14m_3\geqslant510$, $m_1+2m_2\geqslant24$. Нужно найти набор с наименьшим значением $m_1+m_2+m_3$. Если в требуемом наборе $m_1\geqslant1$ и $m_3\geqslant1$, то пару рейсов с загрузками 1 и 3 типа можно заменить парой рейсов со второй загрузкой и при этом увезти еще 2 маленьких блока. Поэтому можно считать, что $m_1=0$ или $m_3=0$. Если $m_3=0$, то $m_2\geqslant24$. Если $m_1=0$, то

$$\begin{cases} 15m_1+7m_2\geqslant255,\\ m_1+2m_2\geqslant24. \end{cases}$$

Умножая второе неравенство на 8 и складывая его с первым, получим $m_1+m_2\geqslant20$. При $m_2=16$, $m_3=4$ получим $m_1+m_2+m_3=20$.

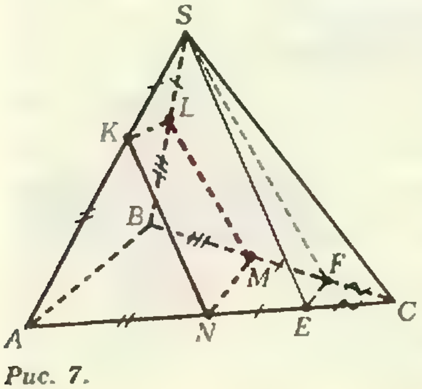


Рис. 7.

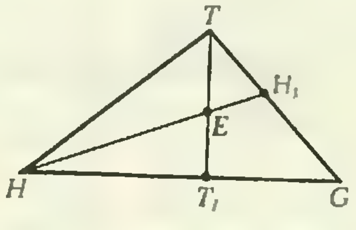


Рис. 8.

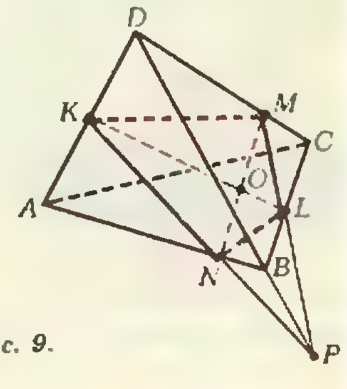


Рис. 9.

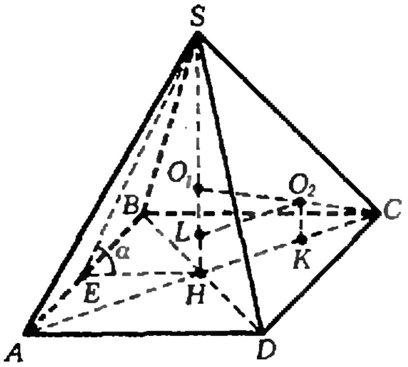


Рис. 10.

6. 213/67. Указание. Лемма. Если в треугольнике HGT (рис. 8) $HE:EH_1=\lambda$, $TE:ET_1=\mu$, то

$$\frac{GT}{T_1H}=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-1}. \qquad (*)$$

Доказательство. Проведем $FT_1\parallel GT$. Тогда

$$\frac{GT_1}{T_1H}=\frac{FH_1}{HF}=\frac{EH_1+EF}{HE-EF}=\frac{1+\frac{EF}{EH_1}}{\frac{HE}{EH_1}-\frac{EF}{EH_1}}=\frac{\mu+1}{\lambda\mu-1}.$$

Пусть прямые KN и ML (рис. 9) пересекаются в некоторой точке P, лежащей на прямой BD. Точка B расположена между точками D и P (это следует из леммы). Из треугольника PKM с помощью $(*)$ получим $PN:NK=21/4$ и $PN:PK=21/25$; $PL:LM=6$ и $PL:PM=6/7$. Пусть $AN:NB=x$, тогда

$$DK:KA=\frac{25}{21x-4} \text{ и } \frac{25}{21x-4}-\frac{1}{x}=1,$$

откуда $x=2/3$, после чего находим $\frac{DB}{BP}=\frac{x+1}{\frac{21}{4}x-1}=\frac{2}{3}$ и $DK:KA=5/2$. Из $\triangle DPC$ получим $DM:MC=3$, $CL:LB=\frac{5}{9}$. Пусть $V_{ABCD}=V$. Осталось заметить, что

$$V_{PKDM}=\frac{DK}{DA}\cdot\frac{DP}{DB}\cdot\frac{DM}{DC}V=\frac{75}{56}V,$$

$$V_{PNBL}=\frac{PB}{PD}\cdot\frac{PL}{PM}\cdot\frac{PN}{PK}\cdot V_{PKDM}=\frac{81}{140}V,$$

откуда $V_{PKDM}-V_{PNBL}=\frac{213}{280}V$, после чего искомое отношение находится без труда.

Вариант 3

1. $(0;\ 1/3]\cup(1;\ \infty)$.

2. $x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

3. $\cos\alpha=-\frac{2}{3}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{5}$.

4. $[-1/3;\ 0)\cup(2/3;\ 1]$.

5. $\sqrt{\frac{3a^2+8c^2}{35}}$. Указание. Пусть расстояние DE и DF от точки D до катетов AB и BC равны p и q соответственно. Тогда $BD^2=p^2+q^2$, $AB=4q$, $BC=3p$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADE и DFC, получим систему

$$\begin{cases} p^2+9q^2=a^2, \\ 4p^2+q^2=c^2. \end{cases}$$

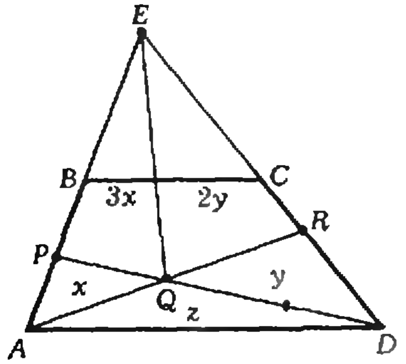


Рис. 11.

6. 1024/9; $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{34}}{4}$. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры шаров (рис. 10), $\angle O_1CH=\varphi$, $\angle SEH=\alpha$. Проведем $O_2L\parallel HC$. Тогда $\operatorname{tg}\varphi=O_1L:O_2L=1/(2\sqrt{2})$, $CH=4\sqrt{2}$, $CD=8$, $\operatorname{tg}(\alpha/2)=1/2$, $\operatorname{tg}\alpha=4/3$, $HS=16/3$. Для отыскания двугранного угла достаточно найти высоту треугольника SHC.

Вариант 4

1. $x_1=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi m$, $n, m\in\mathbb{Z}$.

2. $(1;\ 2]$.

3. $-1/3$. Указание. Площадь треугольника $S(a)=\frac{1}{4}(1-a\sqrt{1-a^2})$ при $a\in[-1/2;\ 0]$.

4. $\frac{a^3\sqrt{2}(\gamma+2)}{6\sqrt{\gamma(\gamma+1)}}$. Указание. Докажите, что FC — высота пирамиды $FABCD$, и найдите длины отрезков FC и EO.

5. $(-\infty;\ 0]\cup[3;\ \infty)$. Решение. Требуется найти все значения p, для которых неравенство

$$(p-x^2)(p+x-2)\geqslant 0$$

справедливо при всех значениях $x\in[-1;\ 1]$. Подставляя в него значения $x=-1$ и $x=0$, получаем необходимые условия

$$\begin{cases} (p-1)(p-3)\geqslant 0, \\ p(p-2)\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда $p\leqslant 0$ или $p\geqslant 3$. С другой стороны, если $p\leqslant 0$, то $p-x^2\leqslant 0$, $p+x-2\leqslant -1$, а если $p\geqslant 3$, то $p-x^2\geqslant 2$, $p+x-2\geqslant 0$, т. е. в обоих случаях при $-1\leqslant x\leqslant 1$ неравенство выполняется.

Вариант 5

1. $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

2. 2/5.

3. $(0{,}25;\ 0{,}5]\cup[2;\ \infty)$.

4. 10/3. Решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке E (рис. 11), тогда $EP:AP=3$, $ER:DR=2$, $S_{AED}=40$. Для площадей $S_{APQ}=x$, $S_{DRQ}=y$, $S_{AQD}=z$, $S_{EPQ}=3x$,

$S_{ERQ}=2y$ получим систему

$$\begin{cases} x+3x+2y=2(y+z), \\ 3x+2y+y=3(x+z), \\ x+3x+2y+y+z=40. \end{cases}$$

5. $\left[\frac{2}{3}-\sqrt{2};\ \frac{2}{3}+\sqrt{2}\right]$. Решение. Система приводится к виду

$$\begin{cases} (3x-y+2)^2=3(2x+3y+\frac{1}{3}), \\ (3x-y+2)^2+(2x+3y+1-a)^2=2, \end{cases}$$

и после введения обозначений $u=3x-y+2$, $v=2x+3y+\frac{1}{3}$, $b=a-\frac{2}{3}$ — к виду

$$\begin{cases} u^2=3v, \\ u^2+(v-b)^2=2. \end{cases}$$

Для существования решения последней системы необходимо и достаточно, чтобы уравнение

$$3v+(v-b)^2=2$$

имело хотя бы один неотрицательный корень, т. е. чтобы значение квадратного трехчлена $v^2+(3-2b)v+b^2-2$ при $v=0$ было неположительным. Таким образом, получаем условие $b^2\leqslant 2$, или $-\sqrt{2}\leqslant a-\frac{2}{3}\leqslant\sqrt{2}$.

Вариант 6

1. $x=\pi n/2$, $n\in\mathbf{Z}$.
2. $[-1{,}5;\ 3]$.
3. 4 км/ч.
4. 8. Указание. Докажите, что угол между прямыми, соединяющими точку B с центрами окружностей, является прямым, а длина отрезка AB равна среднему геометрическому радиусов.
5. 1. Решение. Квадрат расстояния между точками $(x;\ y)$ и $(0;\ 0)$ равен

$$f(x)=x^2+\left(4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x+4$$

при всех значениях $x\in[-1;\ 2]$, для которых

$$4-2x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3\geqslant 0.$$

Так как $f'(x)=x^2+x-2=(x+2)(x-1)$, то наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[-1;\ 2]$ достигается в точке $x=1$ (при $x=1$ подкоренное выражение $f(x)=f(1)>0$).

Вариант 7

1. 1. 2. $(-2;\ 2)$. 3. $5\sqrt{5}/3$. Указание. Докажите, что центр O окружности лежит на продолжении стороны BC за точку B, $AF=BF$, а затем воспользуйтесь подобием треугольников AOC и BFC.

4. $(-\pi;\ -\pi)$, $(0;\ -2\pi)$, $(\pi;\ -\pi)$. Указание. Среди решений системы

$$\begin{cases} x=(n-2m)\pi, \\ y=(4m-n)\pi \end{cases} \quad n,\ m\in\mathbf{Z},$$

отберите те, для которых выполнены условия

$$\begin{cases} n-2m=l, \\ 4m-n=k, \end{cases}$$

где $l\in\{-1;\ 0;\ 1\}$, $k\in\{-2;\ -1\}$.

5. 3, 4, 5, ... Решение. Требуется найти все значения b, для которых система

$$\begin{cases} x+y=-3, \\ xy>b, \\ x<0, \\ y<0 \end{cases}$$

не имеет решений. Значения $b=1$ и $b=2$ не годятся, поскольку при $x=y=-1{,}5$ имеем $xy>2$. Если же $b\geqslant 3$, то система несовместима, ибо из ее условий вытекает противоречие:

$$3<xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=2{,}25.$$

Вариант 8

1. $(6+\sqrt{3})/4$.
2. $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
3. $(-\infty;\ 1)\cup[4/3;\ \infty)$.
4. $\{(6;\ 4/3);\ (2;4)\}$.
5. 4 км/ч, 3 км/ч. Указание. Если u и v — скорости первой и второй лодок соответственно, то

$$\begin{cases} \frac{8}{x}+\frac{5}{x+2}\leqslant\frac{17}{6}, \\ \frac{8}{y}+\frac{5}{y+2}\geqslant\frac{11}{3}, \\ y=\frac{3}{4}x. \end{cases}$$

6. $3\sqrt{41}$. Указание. Проведите через точку A прямую, параллельную KL. Пусть B — основание перпендикуляра, опущенного из точки S на эту прямую, P — точка пересечения KL и SB, SPQ — осевое сечение пирамиды $SMNKL$. Найдите высоту PR треугольника SQP, проведенную из вершины P, и воспользуйтесь подобием треугольников KSP и ASB $(SP:SB=PR:24)$.

Вариант 9

1. $x=(-1)^n\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbf{Z}$.
2. 5,5 т, 4 т, 2,5 т первого, второго и третьего сорта соответственно.
3. $(-\infty;\ 2)\cup\{3\}\cup(4;\ \infty)$.
4. $(2;\ 5/2)\cup(5/2;\ 3)$.
5. 18/7. Указание. Пусть $KL\parallel BC$, а O — точка пересечения BM и KL. Тогда $BO:OM=LC:ML$; $LC:AL=KB:AK$.

Вариант 10

1. $x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi m$; $x_2=\frac{\pi}{4}+\pi n$, m, $n\in\mathbf{Z}$.
2. 6 т, 3 т, 1,5 т каждого сорта.
5. 27/10. Пусть $KL\parallel BM$ и точка L лежит на стороне AC. Тогда $BO:OM=(BM-OM):OM$, $OM:KL=MC:CL$, $AK:BM=AL:AM$.
6. 4/3. Указание. Если $(x,\ y)$ — решение системы, то и $(-x,\ y)$ — тоже решение. Для единственности решения необходимо условие $x=0$.

Вариант 11

1. 1/2.
2. 4.

3. 10. **Указание.** Для выполнения условий задачи необходимо и достаточно, чтобы число n маляров, беливших класс, удовлетворяло неравенству $\frac{1}{n} > \frac{3}{n+6}$.

4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \pi + 2\pi m$, $n, m \in \mathbf{Z}$. **Указание.** Отберите те корни уравнения $\cos x = \cos 3x$, которые удовлетворяют неравенству $\cos x \leqslant 3/4$.

5. 30°. **Указание.** Используя соотношение $S_{AOB} \cdot S_{DOC} = S_{AOD} \cdot S_{BOC}$, получите равенство

$$S_{AOB} = 20 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 8 \cdot \sin \angle BAO,$$

где $\angle BAO < 150°$.

6. **Указание:** Пусть $u = \sqrt{x-1} + 1$; $v = \sqrt{x^2-1} - 1$. Из неравенств $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$ и $u + v > 2$ следует, что $2(u^2+v^2) > u^2 + v^2 + 2uv > 4$.

Вариант 12

1. $x = \pm \arccos \frac{\sqrt{19}-2}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$.

2. -1.

3. $(-\infty; -8{,}5) \cup ((\sqrt{185}-9)/2; \infty)$.

4. $2\sqrt{3}$. **Указание.** Докажите, что углы AMC и BEC прямые, а треугольник ABC равносторонний.

5. $(-2/3; 0)$. **Решение.** При $-2/3 < x < 0$ неравенство справедливо, так как

$$2 - \frac{6}{3x+2} < -1 < \log_3\left(6 - \frac{2}{3}\right) < \log_3(6+x);$$

при остальных значениях x оно не выполняется: если $-6 < x < -\frac{2}{3}$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} > 2 > \log_3\left(6 - \frac{2}{3}\right) > \log_3(6+x);$$

если $0 < x < 3$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 1\frac{5}{11} < 1{,}5 < \log_3 6 < \log_3(6+x);$$

если $x \geqslant 3$, то

$$2 - \frac{6}{3x+2} < 2 = \log_3 9 \leqslant \log_3(6+x).$$

Физика

Физический факультет

1. $\omega < \sqrt{k/m}$.
2. $v_{\min} = \sqrt{Rg}$.
3. $v = \frac{m+M}{m} \frac{2\pi}{T} A$.
4. $\Delta N = mN_A/(9M_{He}) = 5 \cdot 10^{24}$.
5. $\varphi = \frac{pVM_1 - mRT}{(M_1 - M_2)Vp_н}$.
6. $v_{\min} = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 m}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2+d^2}}\right)}$.
7. $U = Ad/(ql) = 300$ В.
8. $A = \mathscr{E}^2 C_1^2/(C_1+C_2) = 0{,}1$ Дж.
9. $H' = H \sin 120°/\sin 60° = H$.
10. $h_1 = D\frac{\sqrt{n^2 - \sin^2(\gamma/2)}}{4\sin(\gamma/2)}$; $h_2 = 3h_1$.

Механико-математический факультет

1. $v_2 = \sqrt{m^2v^2 + m_1^2(v_1^2 - 2gH)}/(m - m_1) \approx 30{,}6$ м/с.
2. $v' = v\sqrt{M/(m+M)}$.
3. $F = \frac{1}{2}\left(L\rho_a - \left(1 - \frac{l}{2L}\right)l\rho_в\right)Sg = 0{,}025$ Н.
4. $\tau_2 = \tau_1 r/(c(t_к - t)) = 61$ мин.
5. $T_2 = T_1(1 + m/M) = 315$ К.
6. $A = m/MR(T_2 - T_1) = 1162$ Дж.
7. $n = \frac{q_2}{q_1} = \frac{(R_3+R_4)(R_1+R_2)}{(R_1+R_3)(R_2+R_4)} = 1{,}2$.
8. $C_1/C_2 = (1+\varepsilon)/(2\varepsilon) = 2/3$.
9. $\alpha_{\max} = \arcsin(n\sqrt{3}/3) = 60°$.
10. $n = 1/\sqrt{2 - \sqrt{3}} \approx 1{,}93$.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $F = mv^2/(2l) = 500$ Н.
2. $v = \Delta l\sqrt{(M+m)k}/m = 600$ м/с.
3. $m_1 = (M - Sh\rho_2)\rho_1/(\rho_1 - \rho_2) \approx 60{,}3$ г.
4. $T_2 = T +$
$+ (r\Delta m + c_1\Delta m(T_к - T) + c_1 m_1(T - T_1))/(m_2c_2)$.
5. $\Delta h = h_0(Sp_0/(Sp_0 + mg) - 1) = -8{,}9$ см.
6. $p = \frac{(m_1T_1 + m_2T_2)R}{(V_1 - V_2)M}$.
7. $P_2' = P_1^2/P_2 = 10$ Вт.
8. $Q_1 = \frac{CU^2}{2(1 + R_1/R_2)} \approx 4 \cdot 10^{-2}$ Дж.
9. $a' = \frac{a\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}{n\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} \approx 3{,}74$ см.
10. $l = d\sin 2\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right) \approx$
$\approx 1{,}17$ см.

Геологический факультет

1. $v_{ср\,1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)v$.
2. $F_д = (F + 2mg\cos^2(\alpha/2))\cos(\alpha/2)$.
3. $F_д = P(1 - \rho_в/(2\rho)) = 2{,}25$ Н.
4. $m = (Q_1 - Q_2)M/(R\Delta T) \approx 0{,}48$ г.
5. $t = 0$ °C; $m_{воды} = 575$ г; $m_{льда} = 825$ г.
6. Нет, не сможет ($y = eUL^2/(2mdv^2) \approx 5{,}6 \cdot 10^{-2}$ м $> d/2 = 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м).
7. $R_1 = RU/(IR - U) = 1000$ Ом.
8. $U = \pi Bl^2n \approx 2 \cdot 10^{-4}$ В.
9. $x = l/(2\sin\alpha) \approx 0{,}2$ м.
10. $N' = Nn = 26$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 1)

1. В 1980 году. Племянник родился в (x^2-x)-м году. Так как в этом году x лет ему еще не исполнилось, то $x^2-x\leqslant 1988\leqslant x^2$. Следовательно, $x=45$.

2. Бревно весит 300 кг. Центр тяжести бревна вдвое ближе к первым весам, чем ко вторым.

3. На глубине 0. Через 1 день после начала работы Кощей зарыл клад на глубину 1 м, через $2^2=4$ дня после этого — на глубину 2 м, через $3^2=9$ дней после этого — на глубину 3 м, и т. д. Через $1+2^2+3^2+\ldots+13^2=819$ дней он зарыл клад на глубину 13 м. Зарыть клад на глубину 14 м он не успел, *поскольку* $819+14^2=1015>1001$, но отрыть клад и доставить его на поверхность он успел, поскольку $819+13^2=988<1001$.

4. 165 и 561. Разложим данное число на множители: $92565=3\cdot 3\cdot 5\cdot 11\cdot 11\cdot 17$. Если число делится на 3, то и зеркальное число делится на 3, то же с делимостью на 11 (докажите). Значит, оба наших числа делятся на 3 и 11 и одно из них делится на 17. Это последнее делится, таким образом, на $3\cdot 11\cdot 17=561$. Если бы оно было больше 561, оно было бы по крайней мере четырехзначно, второе число тоже было бы по крайней мере четырехзначно и их произведение было бы заведомо больше данного. Значит, одно из наших чисел должно быть равно 561. Тогда другое будет равно 165. Проверка показывает, что это действительно так: $165\cdot 561=92565$.

5. Проведем прямую AC (рис. 12). Площади треугольников ACC_1 и BCC_1 равны между собой, и площади треугольников CAA_1 и DAA_1 равны между собой. Значит, площадь четырехугольника AC_1CA_1 равна половине площади четырехугольника $ABCD$. Аналогично, площадь четырехугольника BD_1DB_1 равна половине площади четырехугольника $ABCD$. Значит, часть четырехугольника $ABCD$, которую четырехугольники AC_1CA_1 и BD_1DB_1 не покрывают (синие треугольники), имеет такую же площадь, как часть, которую они покрывают дважды (красный четырехугольник).

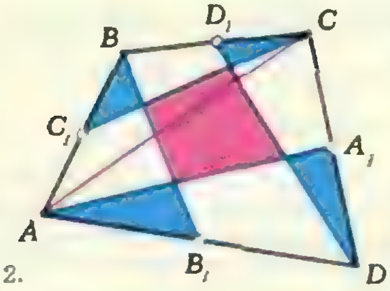


Рис. 12.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, Б. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Карласевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябев,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов
Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
Е. К. Тенчурина, И. Е. Смирнова,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 15.12.87. Подписано к печати 22.01.88.
Т-04519. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 27,30. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,21.
Тираж 194 368 экз. Цена 40 коп. Заказ 3470

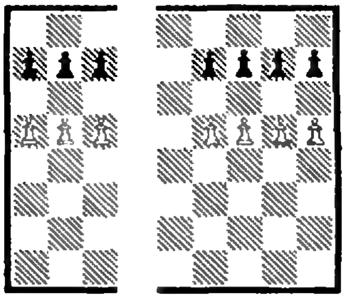
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

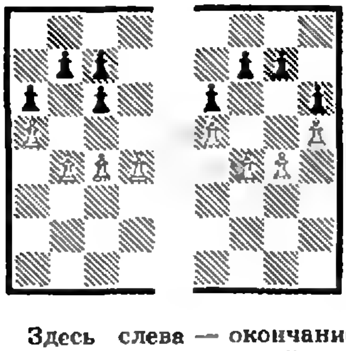
ПЕШЕЧНОЕ ПРОТИВОСТОЯНИЕ

Теория пешечных окончаний — специфическая область шахмат. Четкая логика, почти математические закономерности — вот свойства, характерные для таких окончаний. В качестве иллюстрации обратимся к теме прорыва.



Слева — классическое пешечное трио (предполагается, что короли находятся вдали от основного места событий). Решает только прорыв центральной пешки: **1. b6!** и далее 1...ab 2. c6! bc 3. a6, или 1...cb 2. a6! ba 3. c6. и в обоих случаях белая пешка проскакивает в ферзи. Если ход черных, то они предотвращают прорыв: **1...b6!**, но не **1...a6? 2. c6!** и не **1...c6? 2. a6!**

На том же рисунке справа — пешечный квартет. Тут можно начать с любой пешки: 1. h6 gh (1...g6 2. e6!) 2. e6 fe 3. g6; 1. g6 hg (1...fg 2. h6! gh 3. f6) 2. f6 ef 3. ef gf 4. h6; аналогично решает 1. e6 и 1. f6. Легко убедиться, что черные не в состоянии предотвратить прорыв и при своем ходе.

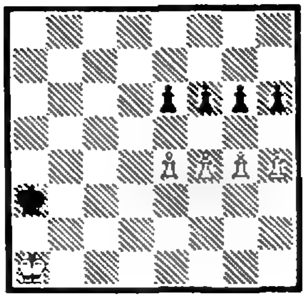


Здесь слева — окончание, типичное для испанской партии при размене слона b5 на коня c6. Опять прорыв единственный **1. c5!**, затем **2. b5!** (но не 2. d5? cd 3. b5 c6!) **2...ab** (2...cb 3. d5 и 4. d6) **3. d5! cd 4. c6!** И на сей раз черные даже при своем ходе без помощи короля не могут предупредить прорыв.

На том же рисунке справа пешечное противостояние образует два полушария. Знатокам известно, что такая структура характерна для защиты Каро-Канн. Решений — два с тремя пешечными жертвами: **1. g5**, затем **2. f5!**, вынуждая 2...ef 3. g6!, или 2...hg 3. f6! Возможно и симметричное **1. f5!**, а затем **2. g5!** и т. д. И в данном примере черные не могут помешать прорыву при своем ходе. Последние два противостояния показывают, как важно еще в дебюте позаботиться о расположении пешечных цепей, чтобы в эндшпиле «не ударить в грязь лицом».

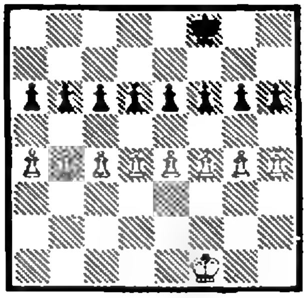
Вернем теперь на доску королей и рассмотрим два настоящих этюда, связанных с пешечным противостоянием.

Б. Горвиц, И. Клинг, 1851 г. Выигрыш.

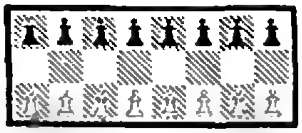


В этой старинной позиции решает только **1. h5!** Ничего не дает 1. e5? fe 2. h5 ef! 3. hg f3, 1. f5? ef 2. h5 fe 3. hg e3, 1. g5? fg 2. h5 gf! 3. hg f3. 1...gh (или 1...g5 2. e5! fe 3. f5 e4 4. f6!) **2. e5! fe 3. f5! hg 4. f6! g3 5. f7 g2 6. f8Ф+** — ферзь появился на доске с шахом, в этом как раз все дело. На практике, как мы видим, роль королей не так мала.

П. Катиньоль, 1981 г. Выигрыш.



Перед нами рекордное противостояние пешек. Все восемь белых и восемь черных пешек выстроились в две шеренги и готовы вступить в рукопашную. Но с какой пешки начать? Здесь также необходимо учесть положение черного короля. Сначала белым надо взорвать центр, чтобы первыми провести прорыв на ферзевом фланге (это вынудит черного короля потерять время на переброску влево), а затем — на королевском, куда тот вернуться не успеет. Вот это рассуждение в действии: **1. d5! ed 2. ed cd**, и на абордаж! — **3. a5! ba 4. b5! ab 5. cb Крe7 6. b6 Крd7 7. b7 Крc7**, теперь новый прорыв по классическому образцу — **8. g5! fg** (8...hg 9. f5! gf 10. h5) **9. h5! gh 10. f5 a4 11. f6 a3 12. f7 a2 13. b8Ф+! Кр:b8 14. f8Ф+!** с победой.

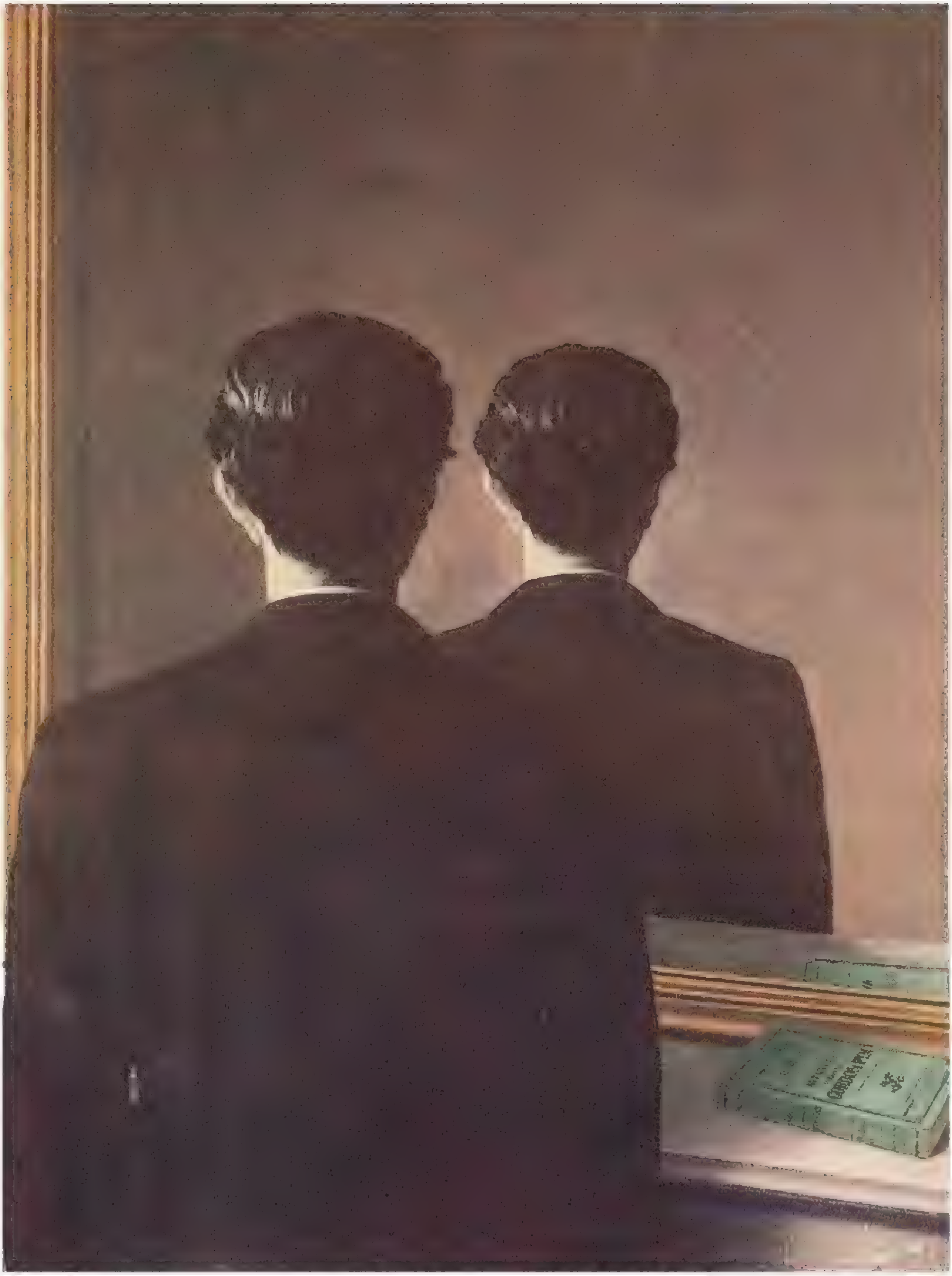


Что случилось, как пешки могли оказаться на крайних горизонталях?! Нет, ошибки не произошло. Просто мы от «чистых» шахмат перешли в область шахматной математики. Вот игра, придуманная Т. Доусоном.

Пешки, расставленные на крайних горизонталях доски 3×8, ходят и бьют по обычным правилам. Превращения запрещены, а взятие обязательно. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход, то есть все его оставшиеся пешки запатованы.

Попробуйте разобраться, кто победит и какова выигрышная стратегия, а также проанализировать эту игру на доске 3×n. В следующий раз мы вернемся к этой теме.

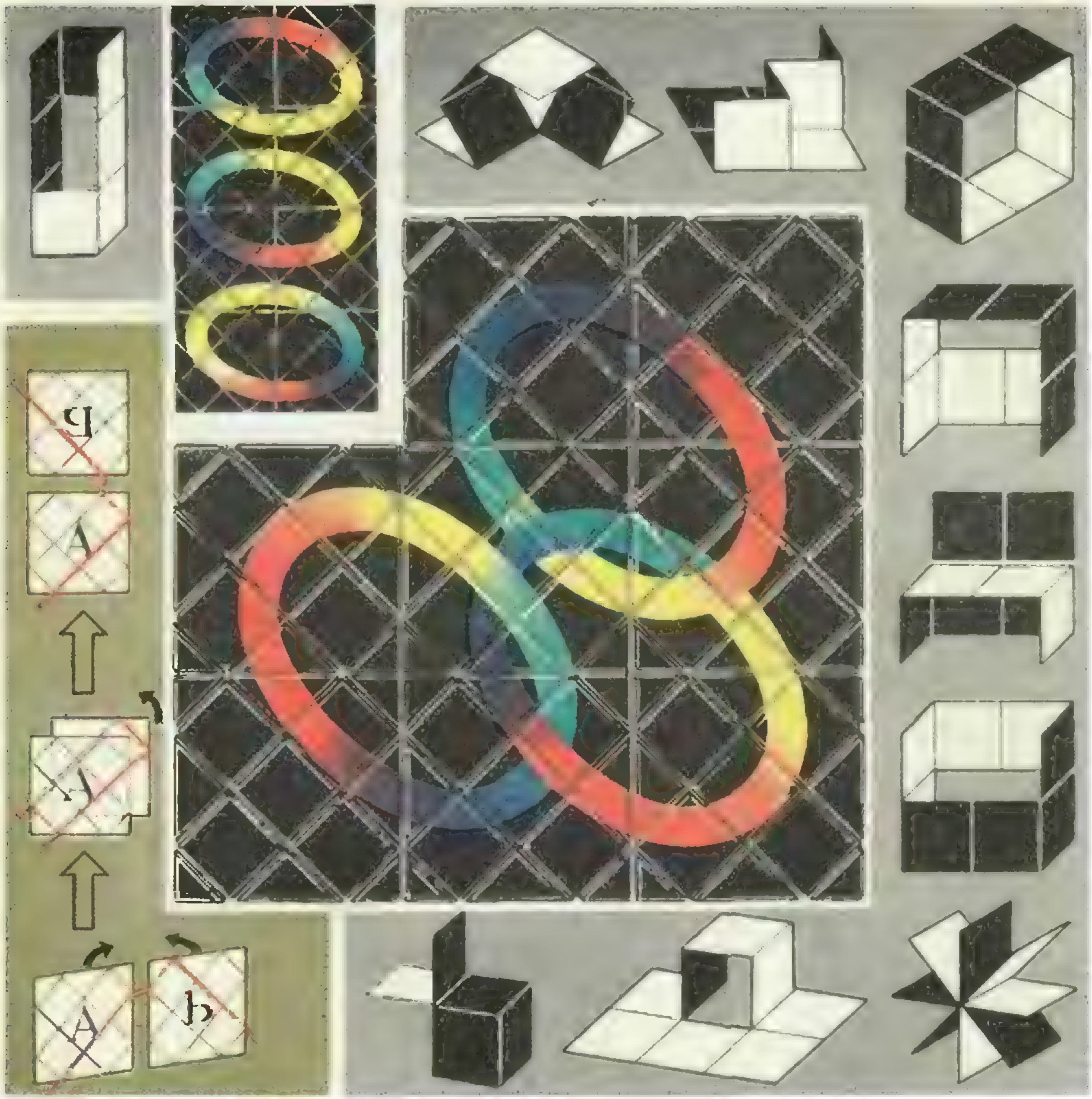
Е. Я. Гик



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Недавно в Венгрии появилась новая головоломка Эрно Рубика («зацепи кольца»), еще более таинственная, чем знаменитый кубик Рубика (который, впрочем, многим уже успел надоесть). Если перегибать и разгибать исходный прямоугольник 2×4, на котором изображены три незацепленных кольца, новая головоломка Рубика непостижимым образом принимает самые разнообразные формы (некоторые из них показаны в виде черно-белых схем на рисунке). Секрет конструкции, однако, очень прост: головоломка состоит из 8 квадратов, изрезанных сетью диагональных пазов и скрепленных малозаметными замкнутыми прозрачными нейлоновыми нитями; нити спрятаны в пазах, но при изгибании-разгибании перескакивают из одного паза в другой, как показано на рисунке слева (перескакивание на самой головоломке не видно, ибо оно происходит между прижатыми друг к другу квадратами). Но значительно сложнее решить головоломку: прямоугольник 2×4 превратить в «квадрат 3×3 без уголка» (показанный в середине рисунка), на котором кольца... зацеплены.



НОМЕР
3

Квант
Основан в 1970 году

3 1988

Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-
математической литературы

В номере:

2 К 80-летию со дня рождения Исаака Константиновича Кикоина:
В начале пути
На пороге большой науки
Первая Государственная премия
12 *О. Я. Виро, Ю. В. Дроботухина.* Сплетения скрещивающихся прямых

Задачник «Кванта»

20 Победители конкурса «Задачник «Кванта»
21 Задачи М1091 — М1095, Ф1103 — Ф1107
22 Problems М1091 — М1095, P1103 — P1107
24 Решения задач М1070, М1072 — М1075, Ф1084 — Ф1087
30 Список читателей, приславших правильные решения

«Квант» для младших школьников

31 Задачи
34 *А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Что и как мы видим

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»
Физика 8, 9, 10:

39 Что такое центр масс
41 Как в металле протекает электрический ток?
44 О машине времени и теории относительности

Математический кружок

46 *Д. К. Фаддеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский.* Основной принцип дифференциального исчисления. Часть 1: Линейная функция

Искусство программирования

51 *В. В. Рождественский, С. Г. Хлебутин.* Структурный подход и язык программирования Бейсик

54 **Варианты вступительных экзаменов**
60 **Ответы, указания, решения**
Смесь *(с. 38)*

Наша обложка

1 *Иллюстрация к статье «Сплетения скрещивающихся прямых».*

2 *Литография голландского художника М. Эшера (1898—1972)*
«Вверх и вниз» — наглядная иллюстрация условности нашего зрительного восприятия: только вглядевшись, мы понимаем, что это «невозможный объект». Что мешает нам сразу увидеть его «невозможность»? Из-за чего возникает обманное впечатление его реальности? Прояснить эти вопросы вам поможет статья «Что и как мы видим».

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломка «Три бруска».*

© Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1988

Исаак Константинович Кикоин

(к 80-летию со дня рождения)

28 марта 1988 года исполняется восемьдесят лет со дня рождения основателя журнала «Квант» академика Исаака Константиновича Кикоина (умер 28 декабря 1984 года). Он был выдающимся советским физиком, дважды Героем Социалистического Труда, лауреатом Ленинской и Государственных премий. Ему принадлежит крупный вклад в решение ряда важных государственных проблем и прежде всего в ликвидацию монополии США на атомное оружие. И. К. Кикоин был ближайшим помощником руководителя этих работ академика И. В. Курчатова, одним из создателей Института атомной энергии и бессменным заместителем директора этого института.

И. К. Кикоин принадлежал к замечательной школе физиков, созданной академиком А. Ф. Иоффе. Из нее вышли крупнейшие советские физики — академики А. П. Александров, А. И. Алиханов, Л. А. Арцимович, П. Л. Капица, И. В. Курчатов, Г. В. Курдюмов, Н. Н. Семенов, Ю. Б. Харитон и другие ученые. Ученики Иоффе со студенческих лет активно включались в самостоятельную научную работу. Так было и с Исааком Константиновичем — научную работу он начал еще на втором курсе, а вскоре после окончания института выполнил серию работ в области физики твердого тела, получивших международное признание. Мы не будем здесь пытаться рассказать о его научных работах — их много и они весьма разнообразны. Остановимся лишь на его вкладе в отечественное просвещение.

Две очень важные проблемы занимали его ум многие годы. Научно-техническая революция непрерывно повышает требования к работнику. Автоматизация производства, рождение новых технологий, вторжение ЭВМ в различные сферы труда — таково веление времени. Надежно владеть столь сложной техникой может лишь человек с хорошей физико-математической подготовкой. А уровень преподавания этих наук в средней школе долгое время оставался недостаточным. Стремясь повысить его, И. К. Кикоин возглавил работу по совершенствованию программ и учебников по физике — нелегкий труд, за который крайне неохотно принимаются в наши дни крупные ученые.

Другая проблема, заботившая И. К. Кикоина,— поиск молодых талантов, от которых прямо зависит будущее нашей науки. Он был убежден в том, что народ наш талантлив, и самородков, подобных М. В. Ломоносову, у нас немало. Но как нам вовремя разглядеть, не упустить этих новых Ломоносовых, Менделеевых и Лобачевских? Надо было создать какой-то единый всесоюзный механизм, способствующий выявлению молодых талантов. Таким механизмом стали школьные олимпиады, и Исаак Константинович был председателем Центрального оргкомитета Всесоюзных физико-математических и химических олимпиад школьников.

И. К. Кикоин вместе с академиком А. Н. Колмогоровым организовал одну из первых в стране физико-математическую школу-интернат при Московском государственном университете. Они же положили начало первому в мире научно-популярному физико-математическому журналу для старших школьников «Квант» и «Библиотечке «Квант» и руководили ими до последних дней жизни.

И. К. Кикоин любил наш журнал и несмотря на свою огромную занятость всегда находил время для разработки тематики, поиска авторов и обсуждения статей. Он любил молодежь — надо было видеть, как загорались его глаза при встрече с талантливыми школьниками. Он безгранично любил физику, занятия ею были главным смыслом всей его жизни. Незадолго до смерти, выступая перед школьниками, он говорил: «...за долгую жизнь я не успел насладиться любимой своей физикой, не хватило мне времени, ясно вижу теперь — не хватило. А ведь не было ни одного дня в жизни, ни выходного, ни праздника, ни отпуска, когда бы я ею не занимался. Часто и сны вижу о физике». Таким мы запомнили этого замечательного человека и ученого.

В этом номере мы помещаем ряд материалов, посвященных памяти И. К. Кикоина.

В НАЧАЛЕ ПУТИ

Исаак Константинович Кикоин в 1923 году окончил среднюю школу № 1 им Л. М. Поземского в Пскове. Он всегда с благодарностью вспоминал годы учебы. Школа помогла ему найти свое призвание, привила любовь к физике — науке, которой он посвятил всю жизнь.

В феврале 1983 года шестиклассники псковской школы № 1 написали Исааку Константиновичу письмо с просьбой рассказать о годах учебы в школе, о себе, о своей работе. Исаак Константинович охотно откликнулся на просьбу. В разное время он написал школьникам четыре письма. Выдержки из этих писем мы предлагаем вашему вниманию.

...Родился я 28 марта 1908 года в городе Жагаре (это в Литовской ССР).

...В семье придерживались твердого правила — приучать детей к посильной работе по дому, заботе о всех членах семьи; прививалась любовь к труду и ответственность за порученное дело.

На всю жизнь я сохранил к родителям благодарность за это. В своей жизни часто встречаясь с трудностями, вспоминал заветы моего отца.

В нашей семье детей учили писать и читать рано. В три года я уже умел читать и писать. От отца я ежедневно получал задание, за выполнение которого должен был давать ему отчет. Отец задавал мне и тексты, которые я должен был отвечать ему наизусть. Теперь я понимаю, что эти устные задания способствовали формированию у меня хорошей памяти, которую я сохранил на всю жизнь.

...В 1916 году мы переехали в г. Опочку Псковской губернии (теперь — области), где я поступил в школу.

Учиться мне было нетрудно, настолько, что, дважды «перескочив» через класс, я в 1921 году оказался в предпоследнем классе. Но в том же году моего отца перевели преподавателем математики в вашу школу, которая тогда называлась школой I-й и II-й ступени.

Естественно, что и я поступил учиться в ту же школу. Таким образом, последние два учебных года я провел в нашей с вами школе... Об этих моих школьных годах у меня остались самые светлые и приятные воспоминания.

Довольно рано, еще в младших классах, я усердно занимался математикой и физикой; вероятно, сказалось влияние отца.

В школе, в которой вы сейчас учитесь, создавались исключительно благоприятные условия для углубленного изучения мною этих предметов.

Математику у нас преподавал первоклассный педагог Дмитрий Михайлович Ляпунов, которому я очень благодарен за полученные от него знания.

Очень мне повезло и с физикой.

Мне доверили заведовать физическим кабинетом школы и вместе с моим товарищем по школе — заведовать школьной библиотекой (и то и другое было моей общественной работой).

...Физический кабинет был превосходно оснащен приборами, и я имел возможность производить множество экспериментов. Правда, многие приборы нуждались в ремонте, и я обогатился опытом изготовления нужных для этого деталей.

Школьная библиотека была на редкость богата, в ней содержалось несколько десятков тысяч томов. Много там было книг по физике и математике.

...Почти каждый день я с удовольствием проводил время за занятиями в библио-

Здание школы в г. Пскове, в которой учился И. К. Кикоин (фотография начала века).

теке и физическом кабинете с утра и до позднего вечера. В результате я приобрел довольно основательные познания по обеим дисциплинам, значительно более обширные, чем требовалось школьной программой.

...Школу я окончил в пятнадцатилетнем возрасте. К этому времени я уже точно решил, в каком высшем учебном заведении буду продолжать свое образование. Дело в том, что незадолго до этого в одной из центральных газет появилась статья выдающегося физика академика Абрама Федоровича Иоффе об основанном им физико-механическом факультете при Ленинградском политехническом институте им. М. И. Калинина. Прочитав эту статью, я твердо решил поступить только на этот факультет. Но... в вузы принимали молодежь начиная с семнадцатилетнего возраста. Поэтому я решил поступить в Псковское землемерное училище — одно из пяти таких училищ, существовавших в стране. Это было лучшее из средне-технических заведений Пскова. К сожалению, прекрасного здания, в котором находилось училище, сейчас нет. Я легко сдал экзамены и был принят на третий курс училища (потом оно стало называться Землеустроительным техникумом). Одна из причин, почему я выбрал это училище, заключалась в том, что при сравнительно значительной безработице, которая тогда существовала в стране, землемеров не хватало.

Я не стану останавливаться на годах, проведенных в этом училище, а ограничусь только указанием на то, что моя неплохая физико-математическая подготовка помогла мне окончить училище с высшими оценками.

...Мне тогда уже исполнилось 17 лет, и я имел право поступать в выбранный мной Политехнический институт на физико-механический факультет. ...Может быть, вам будет небезынтересно узнать, как проходили у меня вступительные экзамены на этот факультет. В те времена правила сдачи экзаменов для поступления в вузы часто менялись. В частности, в 1925 году для поступающих в московские и ленинградские вузы правилами было предусмотрено, что лица, окончившие в этом году средние школы или средние технические учебные заведения и желающие в этом же году поступить в вузы, экзамены сдавали в своих областных или губернских городах. Лица же, окончившие средние учебные заведения до 1925 года, экзаменовались в приемных комиссиях самих вузов (как и теперь).

Таким образом, я должен был сдавать экзамены у себя в Пскове. Для Псковской губернии на выбранный мною физико-механический факультет было выделено два места.

Желающих поступить на этот факультет из Псковской губернии было несколько десятков человек. ...Приемная комиссия состояла из учителей Пскова. Экзамены по физике, математике, химии, русскому языку и политграмоте (теперь обществоведение) я сдал «весьма удовлетворительно», т. е., по-теперешнему, на пять. Мне объявили, что я зачислен студентом физико-механического факультета Ленинградского политехнического института. Председатель комиссии поздравляет: «Все в порядке. Можете ехать в Ленинград. Вы зачислены». Все документы, включая удостоверение об окончании школы и аттестат об окончании Землемерного училища, комиссия отправила в Ленинградский политехнический институт.

Одна маленькая деталь: в момент, когда я сдавал экзамены (июль месяц), аттестаты оканчивающим Землемерное училище еще печатались в типографии, поэтому мне перед экзаменами для представления в приемную комиссию выдали дубликат аттестата, напечатанный на пишущей машинке, точно с тем же текстом и с подлинными подписями и гербовой печатью.

...К началу учебного года я приезжаю в Ленинград. Прихожу на свой факультет и читаю списки принятых студентов. Моей фамилии нет!

...Назавтра утром (это было 28 августа) я направился в канцелярию для выяснения причины этого явного недоразумения. Когда я назвал свою фамилию заведующему канцелярией, он распорядился... принести мое личное дело. Он стал его перелистывать и заявил: «Вы не приняты, потому что не явились на экзамены». На мое объяснение, что я экзамены сдавал в Пскове губернской приемной комиссии, последовал ответ: «Вы ведь окончили школу в 1923 году, а не в этом, 1925 году, и согласно существующим правилам должны были экзаменоваться здесь — в институте». В ответ на это я сказал, что в этом году окончил Псковское землемерное училище. На это последовал удививший меня ответ: «Об этом нам не известно ничего». Я стал утверждать, что в моем личном деле должен находиться аттестат об окончании в Пскове Землемерного училища. Перелистав снова личное дело и найдя этот аттестат, он категорически заявил: «Поскольку ваш аттестат напечатан не в типографии, он не может служить для нас официальным документом». Я ему объяснил причину... и показал типографский аттестат, выданный мне на руки, подчеркнув, что тексты, печати и подписи в обоих документах в точности совпадают.

Родители И. К. Кикоина — Буня Израилевна и Константин Исаакович.

Дом в г. Пскове, где жила семья Кикоиных. Отсюда в 1925 году И. К. Кикоин уехал учиться в Ленинград.

И. К. Кикоин с сестрой Еленой (1925).

Все это не произвело на него никакого впечатления, и он заявил, что теперь уже поздно и мое место занято.

...Выручила меня симпатичная девушка — технический секретарь приемной комиссии. Внимательно просмотрев мое дело, она поняла, что заведующий канцелярией допустил ошибку, в которой признаться и исправить ее не хочет. К счастью, в институте еще проходили

И. К. Кикоин с братом Абрамом (1932).

дополнительные приемные экзамены, которые заканчивались 29 августа... Девушка посоветовала мне написать заявление не о зачислении меня студентом, а о разрешении заново сдать приемные экзамены. Я такое заявление написал. Она сама отнесла его председателю приемной комиссии и через некоторое время принесла мое заявление с положительной резолюцией. Посмотрев на меня, она с сомнением спросила, действительно ли я смогу сдать в течение оставшихся нескольких часов все экзамены — их было пять!

...Я прямиком направился в первую из указанных аудиторий. Там шел экзамен по математике. За столом сидел солидный мужчина в морской форме. Позже я узнал, что это был известный профессор Р. О. Кузьмин, читавший лекции по высшей математике на кораблестроительном факультете (поэтому он и носил морскую форму). Перед ним на столе лежал задачник Бычкова по математике. Профессор раскрыл наугад задачник и предложил решить два квадратных уравнения с двумя неизвестными. Я посмотрел задачу и тут же, не решая, сказал ему ответ. Он сверился с ответом и спросил, как я так быстро решил задачу. Я ему ответил, что задача простая и решается в уме. Должен вам сознаться, что это была неправда. Дело объяснялось тем, что у меня хорошая память, а все задачи этого учебника я перерешал... и запомнил ответы.

Тогда профессор Кузьмин предложил мне другую задачу — три квадратных уравнения с тремя неизвестными. Я снова дал ему ответы, не решая эту систему, сказав, что такая задача легко решается в уме. Это, конечно, тоже было неправдой. Тогда он, закрыв задачник, предложил мне вычислить логарифм числа, что я и сделал успешно, нормальным путем. Задав мне несколько устных вопросов по геометрии, на которые я дал правильные ответы, он спросил, где я учился, и затем поставил мне оценку «ВУ» (весьма удовлетворительно)... Экзамен по математике продолжался примерно минут пятнадцать. Оттуда я бегом отправился в аудиторию, где проходил экзамен по физике. Этот экзамен занял 15—20 минут, и я получил также оценку «ВУ».

Экзамены по химии и политграмоте прошли тоже успешно.

Остался последний экзамен по литературе. На этот экзамен собрали всех экзаменующихся в одну аудиторию. Экзамен принимали две школьные учительницы (в Политехническом институте не было такого предмета). Они написали на доске темы сочинений на выбор экзаменующегося. По мере того как они писали названия тем, мое настроение начало портиться. Темы были по литературным произведениям, которые я либо не читал, либо плохо помнил... Спасительной оказалась последняя тема — седьмая по счету. Тема называлась «Типы крестьян по сочинению Н. В. Гоголя «Мертвые души».

...Произведения Н. В. Гоголя я любил, много раз перечитывал и интересовался всем, что было написано о самом Гоголе и его творчестве. На этой теме я и остановил свой выбор. Когда я написал примерно уже страниц двенадцать и, как говорится, только «расписался», раздался голос учительницы — время окончилось, пора сдавать работы. Когда я сказал, что не успел еще закончить сочинение, она спросила: «Сколько вы написали?». Услышав, что я написал около 12 страниц, она сказала, что этого вполне достаточно, и добавила: «Нам не так важно, что вы написали, а как написали». Насколько я потом понял, их интересовала грамотность поступающих.

Назавтра я был зачислен студентом физико-механического факультета Политехнического института.

Много лет спустя мой учитель академик А. Ф. Иоффе, будучи у меня дома в гостях уже в Москве, рассказал моим домашним, что когда-то ему как декану факультета «все уши прожужжали» о том, что на его факультете появился студент, который в течение одного дня сдал все вступительные экзамены в институт и при этом «весьма удовлетворительно».

Так начались самые счастливые дни моей юности.

НА ПОРОГЕ БОЛЬШОЙ НАУКИ

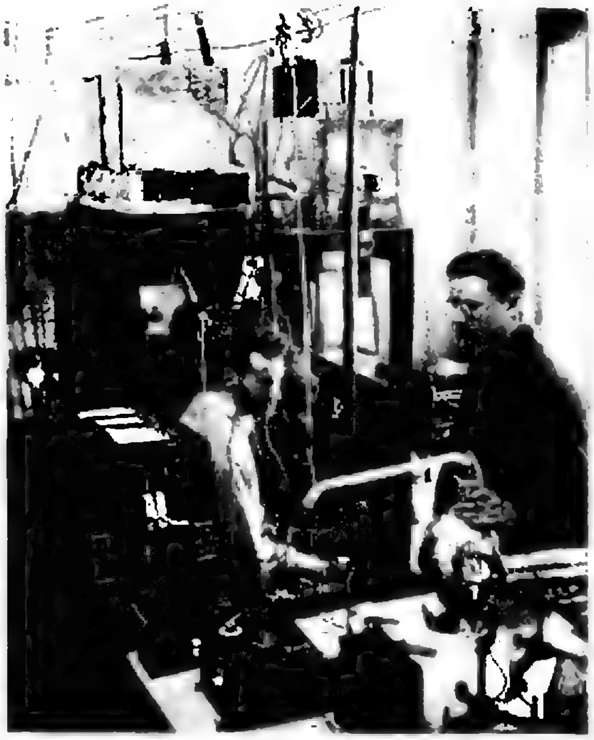
В 1977 году на страницах «Кванта» академик И. К. Кикоин рассказывал об основных этапах становления советской физики. В этом рассказе много места было уделено Ленинградскому физико-техническому институту (ЛФТИ), который в конце двадцатых годов стал одним из основных центров физической науки в СССР.

Будучи студентом-второкурсником Ленинградского политехнического института, Исаак Константинович начал работать в ЛФТИ. Мы предлагаем нашим читателям отрывки из статьи И. К. Кикоина «Как создавалась советская физика» («Квант», 1977, № 10—12), в которых он делится своими воспоминаниями о студенческой жизни, тесно связанной с ЛФТИ.

...Напротив нашего института, через улицу, которая называлась «Дорога в Сосновку», находился Ленинградский физико-технический институт (тогда он назывался Физико-технический рентгеновский институт). Директором его был академик А. Ф. Иоффе.... Основную массу сотрудников составляли молодые люди, начавшие работу, будучи студентами физико-механического факультета.

...Отбирались студенты на работу в институт таким способом. Преподаватели факультета — сотрудники института, в том числе и студенты старших курсов, которые руководили лабораторными работами студентов, имели указания А. Ф. Иоффе присматриваться к студентам, которые проявляют интерес и способности к экспериментальной физике, и приглашать их на работу в Физико-технический институт. В 1927 году, будучи студентом второго курса, я был приглашен на работу в Физико-технический институт. Там молодежь сразу приобщалась к современной науке. С нами не очень нянчились и не считались с тем, что у себя на факультете мы еще чего-то «не проходили». На научных семинарах, которые происходили регулярно по пятницам, с 5 до 7 вечера, разбирались научные работы, только что сделанные сотрудниками института или опубликованные в зарубежных журналах. Мы принимали участие в работе семинара, должны были слушать и понимать, о чем идет речь, а если не понимали, то спрашивать. В первое время мы даже не решались спрашивать, потому что не понимали ничего. Но довольно быстро понимание наступило, по-видимому, потому, что мы привыкли к стилю изложения и сами много читали.

...Когда я начал работать в Ленинградском физико-техническом институте, под влиянием лекций и семинаров Я. И. Френкеля, который рассказывал нам о современных идеях в физике металлов, я решил заняться вопросами именно этой области физики и, прежде всего, эффектом Холла. Я решил проверить, возникает ли эффект Холла в жидких металлах. Этим вопросом ранее, в начале века, занимались такие корифеи науки, как Нернст, Друде. Просмотрев имевшуюся по этому вопросу литературу, я пришел к выводу, что выбор жидких металлов в проводившихся ранее опытах был сделан неудачно. В первых



И. К. Кикоин и М. М. Носков во время исследования фотоэлектромагнитного эффекта (1933). Теперь это явление называют «эффектом Кикоина — Носкова».

экспериментах в качестве образца выбирали ртуть, потому что при комнатной температуре она всегда в жидком состоянии. Эффекта Холла в ней не обнаружили. Как потом оказалось, и в твердой ртути этот эффект очень мал, и его трудно измерять. Проводились опыты и с висмутом. Висмут казался очень подходящим образцом, поскольку в твердом висмуте ЭДС Холла на несколько порядков больше, чем в других металлах: в «обычных» металлах она измеряется в микровольтах, а в висмуте — в милливольтах. Однако в жидком висмуте эффекта не обнаружили. Теперь известно, что аномально большой эффект Холла в твердом висмуте связан с особенностями его кристаллической структуры. В жидком состоянии эта структура пропадает. А экспериментаторы, собиравшиеся измерить большой эффект, увидев, что он в 1000 раз меньше ожидаемого, пришли к выводу, что эффекта просто нет.

Я решил взять в качестве образца металл, который является наиболее простым. Это — щелочной металл. Щелочные металлы хороши тем, что у них практически все теоретические предсказания относительно их свойств хорошо оправдываются в опытах. Я выбрал для эксперимента сплав натрия с калием, который при известной концентрации компонент становится жидким уже при комнатной температуре.

Мне представлялось, что отрицательные результаты в предыдущих опытах связаны не только с неудачным выбором образцов, но и с недостаточно точной постановкой эксперимента. Дело в том, что когда через жидкий металл, находящийся в магнитном поле, пропускают ток, то со стороны магнитного поля на металл начинают действовать силы, которые приводят к смещению отдельных слоев жидкого металла друг относительно друга. (В твердом металле этого перемещения слоев, естественно, нет.) В результате возникают вихревые токи, которые «смазывают» эффект Холла в жидком металле. Так что необходимо если не свести на нет, то максимально уменьшить влияние этих «паразитных» токов. Для этого мы взяли образец в виде тонкого слоя жидкого металла. Тщательно проведенные измерения обнаружили наличие эффекта Холла. Года через полтора вышла работа Зоммерфельда, в которой рассказывалось об опытах, подтверждающих современную теорию металлов. Ссылался Зоммерфельд и на наш опыт. По правде говоря, я был необыкновенно горд собой — такой авторитет, как Зоммерфельд, оценил мою работу.

...В 1930 году, когда я только что окончил институт и получил звание инженера-физика, по рекомендации А. Ф. Иоффе меня направили в командировку в Германию, чтобы ознакомиться с физическими лабораториями Запада. Я пробыл в Германии около трех месяцев и смог познакомиться с работами физических лабораторий Лейпцига, Мюнхена, Гамбурга. И нужно сказать, что я был очень удовлетворен, когда убедился, что уровень наших физиков, в частности мой собственный уровень, был ничуть не ниже уровня физиков, с которыми я встречался в лабораториях за рубежом...

Находясь в командировке, я около месяца работал в лаборатории в Мюнхене, в бывшей лаборатории Рентгена. Там работали и университетские докторанты (так назывались у них заканчивающие университет студенты, которые готовят дипломные работы). Однажды я заметил, что докторанты, готовясь к выпускным экзаменам, читают книгу Я. И. Френкеля «Курс электродинамики», изданную на немецком языке. Я спросил: «А кому вы сдаете экзамены?», они ответили: «Зоммерфельду». Тому самому Зоммерфельду, крупнейшему теоретику мирового класса, про которого у нас, когда мы были студентами, ходила поговорка «нет Бора кроме

Бора, и Зоммерфельд его пророк». Я знал, что имеется пятитомный курс физики самого Зоммерфельда, и спросил, почему докторанты учат электродинамику не по Зоммерфельду, а по Френкелю. А потому, ответили они, что Зоммерфельд сказал, что он будет принимать экзамены только по курсу Френкеля, поскольку лучшего курса в мире сейчас нет. Когда я сказал, что лично знаком с Френкелем, то почувствовал, что мой авторитет в их глазах резко возрос. А я испытал чувство истинной гордости за наших советских физиков, заслуживших широкое признание в среде крупнейших теоретиков мира.

ПЕРВАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ ПРЕМИЯ

Исаак Константинович Кикоин был удостоен нескольких Государственных премий. Некоторые работы, за которые ему присуждались премии, не были опубликованы в печати из-за их секретности. Не всегда сообщалось о самом факте присуждения премии. В течение ряда лет — это были годы самой напряженной работы — даже имя И. К. Кикоина не упоминалось в печати, в научных журналах не появлялись его статьи.

Однако самую первую Государственную премию И. К. Кикоин и его сотрудники С. В. Губарь и В. С. Обухов получили за работу, которая была опубликована, и о присуждении премии было сообщено в печати, по радио. Об этой работе рассказывает профессор А. К. Кикоин.

Это произошло в далеком теперь 1942 году, в самый разгар Великой Отечественной войны.

Работа была опубликована в журнале «Вестник электропромышленности» под заглавием «Новая система электроизмерительной аппаратуры для измерения постоянных токов большой силы». Что это за новая система? Почему она понадобилась? И почему измерительные приборы этой системы оказались столь важными, что работа была тогда же, в условиях войны, удостоена Государственной премии? Ведь измерительные приборы — это не танки, не пушки и не мины или бомбы!

Зачем нужны большие токи?

В современной технике чаще всего используется переменный ток и притом сравнительно небольшой силы — обычно в несколько ампер, реже — в десятки ампер, еще реже — в сотни ампер. Есть, однако, отрасли техники, где требуется непременно постоянный ток, причем очень большой силы. Это прежде всего металлургия цветных металлов. Такой важный металл как алюминий получают исключительно методом электролиза, и при этом через расплавленную смесь глинозема (Al_2O_3) и криолита ($Na_3[AlF_6]$) проходит постоянный электрический ток во много десятков тысяч ампер (в настоящее время до 150 кА). Даже в то время, к которому относится описываемая работа, при электролизе алюминия использовался ток до 70 кА.

Перед самой войной на Урале строился и вводился в эксплуатацию Уральский алюминиевый завод, самый большой в стране. Были и два других завода — один в Ленинградской области, а второй на Украине. Именно на Уральском заводе электролитические ванны были рассчитаны на токи до 75 кА. Естественно, для управления процессом производства алюминия необходимо было иметь возможность измерять эти токи.

Как измеряют большие токи?

Всем известно, как измеряют величины, характеризующие электрический ток (силу тока, напряжение, мощность, энергию). В те времена использовались главным образом приборы магнитоэлектрической системы; существовали и приборы, использующие нагрев проволоки, по которой проходит измеряемый ток (тепловые приборы). Во всех случаях токонесущие части приборов сделаны из тонких проволок, по которым нельзя пропускать слишком большие токи. А если требуется измерять сильные токи, то приборы шунтируются — параллельно токонесущей части измерительного прибора включают сопротивление (шунт), в определенное число раз меньшее сопротивления токонесущей части прибора. Если, например, в цепи течет ток в 100 А, а прибор рассчитан на измерения тока не больше 1 А, то сопротивление шунта должно быть в 99 раз меньше, чем сопротивление катушки в приборе. Тогда через прибор будет идти ток 1 А, а через шунт — 99 А. Чем больше измеряемый ток, тем меньше должно быть сопротивление шунта Добиваются этого увеличением площади поперечного сечения проводника-шунта.

Пока идет речь об измерении десятков и даже немногих сотен ампер, проблем с шунтами не возникает. Однако, когда требуется измерять токи в тысячи ампер, шунт становится весьма обременительной частью прибора. Так, шунт к прибору для измерения тока 10 000 А имел массу 35 кг. На практике с увеличением измеряемого тока масса шунта росла пропорционально квадрату силы тока. Значит, если нужно измерять ток в 50 кА, масса шунта должна быть 875 кг, а при токе в 100 кА — 3,5 тонны!

Добавим к этому, что измерительные приборы с шунтами для электролизных заводов у нас в стране не производились. Закупали их в Германии. Но даже за рубежом нельзя было купить необходимые для Уральского завода килоамперметры на 75 кА. Положение особенно обострилось с началом войны. Два алюминиевых завода в Европейской части СССР оказались на оккупированной территории. Остался единственный алюминиевый завод на Урале, пустить который нельзя было без измерительных приборов.

Это и побудило И. К. Кикоина заняться столь важной проблемой. В ее решении был заинтересован не только Уральский, но и другие электролизные заводы, например, Соликамский калийный комбинат. У автора этих строк хранится переписка с этим заводом, из которой видно, насколько важными для него были быстрейшая разработка и изготовление новых приборов.

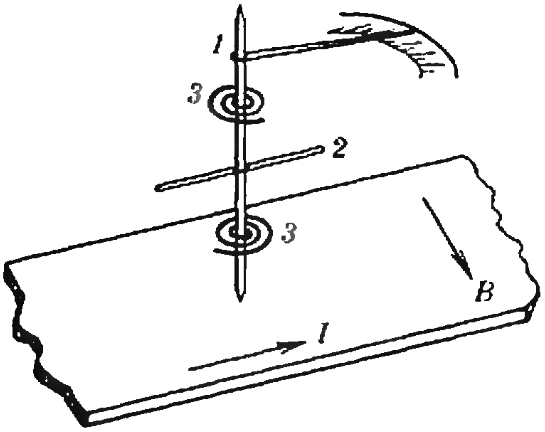
Какие же приборы были предложены взамен шунтовых?

Амперметр, через который не проходит ток

Идея измерений очень больших постоянных токов, предложенная И. К. Кикоиным была исключительно проста. Вокруг всякого постоянного электрического тока существует постоянное же магнитное поле. Значение индукции магнитного поля в точке, находящейся на заданном расстоянии от проводника с током, зависит только от силы тока. Эта зависимость хорошо известна для магнитного поля вокруг проводника цилиндрической формы. В этом случае индукция поля обратно пропорциональна расстоянию от проводника и прямо пропорциональна силе тока.

На электролизных заводах токонесущие провода — это медные шины прямоугольного сечения, да еще сложенные вместе. И в этом случае индукция магнитного поля определяется током в шинах, но зависимость ее от силы тока несколько сложнее — она немного отклоняется от линейной. Это, однако, не мешает оценивать силу тока по индукции магнитного поля. Саму индукцию предлагалось оценивать самым простым способом — по отклонению магнитной стрелки.

Как известно, на магнитную стрелку (намагниченный стержень) в однородном магнитном поле действует пара сил, вращающий момент которых отличен от нуля. В результате действия этих сил стрелка в конце концов устанавливается вдоль линий индукции магнитного поля. Но можно сделать так, чтобы стрелка не устанавливалась вдоль линий индукции, а поворачивалась на угол, пропорциональный току. Для этого на стрелку должна действовать сила, момент которой «разворачивает» стре-



лку в противоположном направлении и растет с увеличением угла поворота. Такой противодействующий момент может быть создан, например, подходящей пружиной.

Схема прибора, сконструированного И. К. Кикоиным и его сотрудниками, показана на рисунке.

На оси *1*, установленной на агатовых подшипниках (для уменьшения трения), укреплен намагниченный стержень *2*. Противодействующий момент создается спиральными пружинами *3*. Ось со скрепленным с ней стержнем снабжена стрелкой, скользящей по циферблату, на котором нанесено 100 делений. Прибор был переносным и просто устанавливался на токонесущей шине в любом месте. Расстояние от шины до намагниченного стержня всегда одно и то же (несколько сантиметров), так что угол поворота стрелки зависит только от силы тока. Опыт показал, что небольшая нелинейность зависимости угла поворота от силы тока наблюдается только при самых больших силах тока (начиная от 84-го деления шкалы). Особую трудность представляла собой градуировка прибора. Ведь сравнивать его показания с эталонным прибором, как это обычно делается, было невозможно — таких приборов просто не существовало. Поэтому специально разработали метод градуировки, основанный на явлении электромагнитной индукции.

Кроме переносного килоамперметра, для измерения тока на отдельных электролитических ваннах был разработан стационарный прибор для измерения тока в главной цепи с передачей его показаний на пульт управления. Для этого нужно было «преобразовать» угол поворота в электрический сигнал, который и передавался на пульт.

Хотя погрешность измерения силы тока была довольно большой — 3 %, но для технических измерений она была вполне приемлемой и удовлетворяла заказчиков.

Кроме килоамперметров, И. К. Кикоиным и сотрудниками были разработаны приборы для измерения мощности (ваттметры), счетчики энергии и счетчики ампер-часов (электрического заряда), также необходимые электролизным заводам, — все рассчитанные на токи порядка 70 кА. Следует отметить, что не только была предложена идея приборов и разработана их конструкция, но все эти приборы были изготовлены в мастерских института физики металлов в Свердловске, где в то время работал И. К. Кикоин, и поставлены в нужном количестве электролизным заводам на Урале и в соседних районах. Это и позволило Уральскому алюминиевому заводу начать выдачу продукции — важнейшего металла авиационной промышленности.

Таким образом, работа, начатая еще в 1939 году, оказалась в 1942 году как нельзя более кстати для жизненно важной отрасли оборонной промышленности. В день 25-й годовщины Великой Октябрьской социалистической революции было объявлено о присуждении И. К. Кикоину, С. В. Губарю и В. С. Обухову Государственной премии. Это была первая Государственная премия, присужденная физикам Урала.

СПЛЕТЕНИЯ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ

О. Я. ВИРО,
Ю. В. ДРОБОТУХИНА

Заголовок этой статьи кажется несколько странным, не правда ли? Сплетают что-то гибкое. А тут — прямые! В заголовке, правда, говорится не о процессе сплетения, а, скорее, о результате. Но могут ли быть сплетены, зацеплены друг за друга, хитро расположены по отношению друг к другу скрещивающиеся прямые? На первый взгляд кажется, что не могут. Впрочем, откуда у нас это впечатление? В повседневной жизни мы никогда не имеем дела с чем-либо действительно похожим на прямые: не так существенно то, что не бывает предметов бесконечно тонких — толщиной мы готовы пренебречь,— существеннее отсутствие неограниченно протяженных объектов. Даже лучи света — эти образцы прямолинейности,— рассеиваясь и слабея, на большом расстоянии становятся неощутимыми. На практике приходится иметь дело лишь с отрезками прямых. Любой набор непересекающихся друг с другом отрезков можно, двигая отрезки так, чтобы они все время оставались непересекающимися, расположить как попало. В этом нас убеждает опыт, да и доказать это не трудно. Прямые мы изображаем их отрезками. Потому-то нам и кажется, что прямые не могут быть сплетены. Ну а как на самом деле?

Прежде всего, давайте более точно сформулируем интересующие нас вопросы. Первый вопрос: могут ли несколько непересекающихся прямых располагаться по-разному? А что значит «располагаться по-разному»? Сейчас нас не интересуют ни углы, ни расстояния между прямыми. Будем считать, что при движении прямых, в процессе которого они остаются непересекающимися, взаимное расположение их не изменяется. Если же один набор прямых нельзя получить из другого таким движением, то условимся считать, что прямые в этих наборах *расположены по-разному*.

Самыми легкими для нашего пространственного воображения являются наборы параллельных прямых. Ясно, что любые два таких набора, состоящие из одинакового числа прямых, устроены одинаково. Действительно, поворачивая все пространство с «вмороженными» в него прямыми одного набора, можно сделать их параллельными прямым другого набора, после чего, передвигая по очереди прямые первого набора так, чтобы они не наезжали друг на друга и оставались параллельными, легко совместить их с прямыми второго набора.

Обратимся теперь к произвольным наборам прямых. Можно ли произвольный набор непересекающихся прямых превратить в набор параллельных прямых, как бы «причесать» его? У этой задачи есть простое и неожиданное решение. Попробуйте ответить, не заглядывая в последующий текст. Подумали? Ну, тогда читайте дальше. Ответ — всегда можно. Докажем это.

Возьмем произвольный набор непересекающихся прямых. Выберем две параллельные друг другу плоскости, не параллельные ни одной прямой нашего набора. Зафиксируем точки пересечения первой плоскости с прямыми: поставим там шарниры. Точки пересечения второй плоскости с прямыми тоже зафиксируем, но так, чтобы они были неподвижны только на плоскости, а по прямым могли бы скользить. Другими словами, ограничимся тем, что просверлим во второй плоскости маленькие отверстия в местах ее пересечения с прямыми. Будем теперь отодвигать вторую плоскость от первой в перпендикулярном им обеим направлении. При этом прямые будут поворачиваться. Углы, которые они образуют с плоскостями, будут увеличиваться, и, если плоскость за конечное время унесется на бесконечность, они все достигнут 90°, т. е. прямые станут параллельными. Это «причесывание» набора прямых в более привычной для геометрии манере описывается так: мы подвергаем пространство растяжению от первой плоскости в перпендикулярном ей направлении с коэффициентом растяжения, быстро возрастающим и за конечное время достигающим бесконечности. Прямые при этом поворачиваются вокруг точек пересечения с этой плоскостью и в пределе становятся перпендикулярными ей.

Итак, сплетений непересекающихся прямых не бывает, все наборы непересекающихся прямых устроены одинаково — так же, как параллельные. Но в заголовке речь шла о скрещивающихся прямых, так что наборы параллельных прямых были исключены. На то имеются серьезные причины. Параллельные прямые очень близки к пересекающимся: повернув одну из двух параллельных прямых на сколь угодно малый угол, можно сделать эти прямые пересекающимися. А для скрещивающихся прямых это не так.

Поскольку нам разонравились параллельные прямые, придется пересмотреть представление о том, какие наборы прямых устроены одинаково, а какие — нет. Будем считать, что если при движении прямых они все время остаются скрещивающимися, то их взаимное расположение не изменяется. В дальнейшем нам придется много раз рассматривать такие движения, поэтому удобно будет для их обозначения иметь специальное слово. Будем называть их *изотопиями**). Если один набор прямых нельзя получить из другого изотопией, то условимся считать, что прямые в этих наборах расположены по-разному. О таких наборах будем говорить, что они *не изотопны.*

Сложность вопроса об изотопности двух наборов прямых зависит, прежде всего, от числа прямых в этих наборах. Чем больше прямых, тем, повидимому, хитрее может оказаться изотопия, соединяющая эти наборы. Вначале обратимся к самой легкой ситуации.

Две прямые

Возьмем любые две пары скрещивающихся прямых и попытаемся решить задачу об их изотопности. Слово «задача» звучит, пожалуй, слишком торжественно, ибо изотопность здесь совершенно очевидна. Тем не менее, всмотримся в доказательство.

Поворотом вокруг общих перпендикуляров, соединяющих прямые наших пар, сделаем углы между прямыми в обеих парах одинаковыми, например, равными 90°. Отрезок общего перпендикуляра двух прямых, заключенный между ними, является кратчайшим отрезком, соединяющим эти прямые. Сближая прямые в наших парах (или отодвигая их друг от друга), сделаем эти отрезки равными по длине, а затем совместим их. Поворотом вокруг полученного отрезка совместим какую-либо прямую первой пары с одной из прямых второй. Это можно сделать, поскольку прямые перпендикулярны отрезку. При этом те прямые, за которыми мы не следили, тоже совместятся (мы считаем, что прямые как бы жестко припаяны к концам отрезка).

Конец доказательства подсказывает вопрос: *пусть у двух пар скрещивающихся прямых одинаковы и расстояние и угол; всегда ли возможно изотопией, в процессе которой не изменяется ни то, ни другое, совместить эти пары?* Как показывает предыдущее рассуждение, это можно сделать, если углы между прямыми равны 90°. А вот если углы не равны 90°, то в результате изотопии, описанной выше, вторые прямые пар могут не совместиться. На рисунке 1 показано, что получится в этом несчастном случае. Вторые прямые пар образуют угол, биссектриса которого параллельна первым прямым (совмещенным); а плоскость этого угла пер-

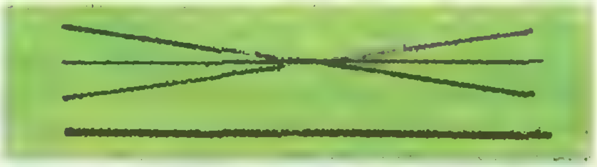


Рис. 1.

---

*) Слово «изотопия» (греч.) означает «равное место» или «равное положение».

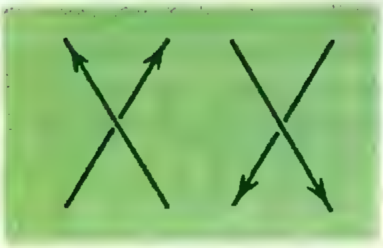


Рис. 2.

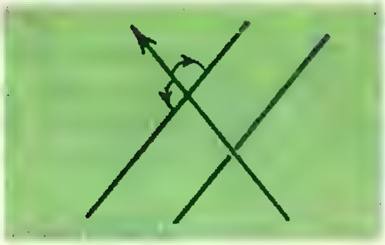


Рис. 3.

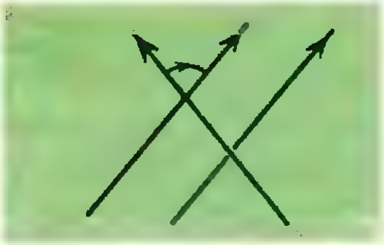


Рис. 4.

пендикулярна плоскости, проходящей через биссектрису и первые прямые. Так что вовсе не случайно в доказательстве изотопности любых двух пар скрещивающихся прямых углы были сделаны равными 90°. При любой другой величине угла эта конструкция доказательства не дает. Более того, дело здесь не в конструкции. Оказывается, две пары скрещивающихся прямых с одинаковыми расстояниями и углами, которые не совмещаются при помощи нашей конструкции, не могут быть совмещены никакой изотопией, в процессе которой расстояние и угол постоянны. Это связано с замечательным явлением, которое нам еще не раз встретится. Его стоит обсудить подробнее.

Ориентации и полуориентации

Ориентированной прямой называется прямая с выделенным на ней направлением. Направление обычно показывается стрелкой. Прямую можно ориентировать двумя способами, две прямые — четырьмя, набор из n прямых — 2^n способами. *Полуориентацией* набора прямых называется пара противоположных ориентаций этого набора. Другими словами, полуориентация набора прямых — это его ориентация с точностью до одновременного обращения всех стрелок («с точностью до наоборот»). На рисунке 2 показаны две ориентации пары прямых, составляющие одну ее полуориентацию.

Каждую пару не перпендикулярных прямых можно снабдить *канонической полуориентацией* (т. е. полуориентацией, которая определяется самой парой, точнее, взаимным расположением входящих в нее прямых). Для этого ориентируем как-либо одну из прямых такой пары и повернем эту прямую так, чтобы она стала параллельна другой прямой. Такой поворот можно осуществить двумя способами (рис. 3); выберем из них самый экономный — тот, при котором угол поворота наименьший (он единственный, поскольку прямые не ортогональны). Получается ориентированная прямая, она параллельна второй прямой нашей пары, которая тем самым приобретает ориентацию (рис. 4). Таким образом, выбор ориентации одной из прямых дает ориентацию пары. Если мы выберем противоположную ориентацию этой прямой, то получим противоположную ориентацию пары. Начав с другой прямой, мы получим те же две противоположные друг другу ориентации пары. Эти две ориентации и составляют обещанную каноническую полуориентацию.

Изотопия, в процессе которой не меняется угол между прямыми, переводит каноническую полуориентацию в каноническую полуориентацию. Это наводит на мысль рассмотреть еще один тип изотопий — *изотопий полуориентированных пар* скрещивающихся прямых: мы допускаем изменения угла и расстояния между прямыми, но требуем, чтобы в процессе изотопии полуориентация не менялась (полуориентация может

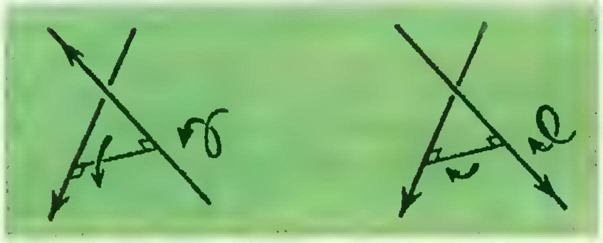


Рис. 5.

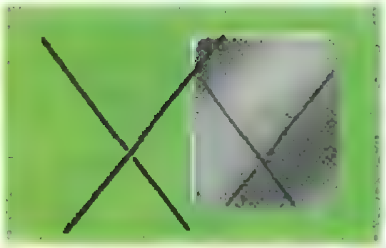


Рис. 6.

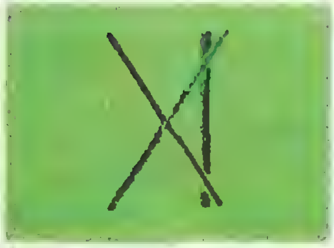


Рис. 7.

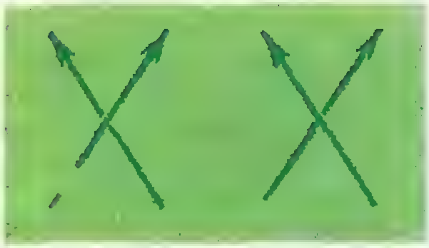


Рис. 8.

быть не канонической). Такая изотопность занимает промежуточное положение между наличием произвольной изотопии и наличием изотопии, в процессе которой расстояние и угол ($\neq 90°$) не меняются. Уж если между интересующими нас полуориентированными парами прямых нет такой изотопии, то не может быть и изотопии, при которой расстояние и угол не меняются. Что же может препятствовать изотопности полуориентированных пар прямых?

Коэффициент зацепления прямых

У каждой полуориентированной пары прямых имеется характеристика, которая может принимать значения $+1$ и -1. Эта характеристика называется *коэффициентом зацепления.* Она сохраняется при изотопиях, и поэтому если две полуориентированные пары прямых имеют разные коэффициенты зацепления, то они не изотопны. Вот как определяется коэффициент зацепления. Имеется самый экономный способ совместить одну ориентированную прямую с другой, скрещивающейся с ней,— перемещать прямую вдоль общего перпендикуляра и поворачивать ее на наименьший угол, необходимый для совмещения направлений. При этом прямая будет двигаться либо как ручка правого буравчика, либо как ручка левого (рис. 5); заметим, что тип буравчика не зависит от того, какую из двух прямых мы двигали. В первом случае коэффициент зацепления равен -1, во втором — $+1$.

Ясно, что переориентация одной из прямых пары влечет за собой изменение коэффициента зацепления. Поэтому при замене ориентации пары на противоположную коэффициент зацепления не меняется и, стало быть, является характеристикой полуориентированной пары и зависит только от полуориентации. При отражении в зеркале коэффициент зацепления пары ориентированных прямых меняется (рис. 6).

Вспомним теперь тот несчастный случай, с которым мы столкнулись в поисках изотопии между двумя парами скрещивающихся прямых, сохраняющей расстояния и углы между прямыми (рис. 7). Тогда мы не смогли ответить на вопрос об изотопности наборов, показанных на рисунке 8. Но теперь-то мы знаем, что такие пары (со своими каноническими полуориентациями) получаются одна из другой отражением в зеркале и имеют поэтому различные коэффициенты зацепления. Значит, такие пары нельзя соединить изотопией, в процессе которой не меняются расстояния и углы между прямыми. А если у двух пар одинаковы расстояния, углы и коэффициенты зацепления, то эти пары можно соединить такой изотопией.

Тройки прямых

Когда мы занимались парами, заметную роль играл общий перпендикуляр пары скрещивающихся прямых. Строго говоря, без него можно было обойтись, но он так естественно связан с прямыми, так надежно соединяет их во что-то целое и обозримое, что было бы странно не воспользоваться им. Теперь хорошо бы найти объекты, столь же присущие тройке скрещивающихся прямых. Мы не будем делать это для тройки, прямые которой лежат в трех параллельных плоскостях. Дело в том, что такое расположение неустойчиво: чуть повернув любую из прямых, мы получим изотопную тройку, к которой наши конструкции применимы.

Итак, рассмотрим произвольную тройку попарно скрещивающихся прямых, не содержащуюся в трех параллельных плоскостях. Через каждую из этих прямых проведем две плоскости, параллельные двум другим прямым. Так получаются шесть плоскостей. Ясно, что они распадаются на три пары параллельных (каждая пара скрещивающихся прямых содержится в двух параллельных плоскостях). Пересекаясь, плоскости образуют параллелепипед. Наши прямые являются продолжениями трех его попарно скрещивающихся ребер (рис. 9). Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые, не лежащие в трех параллельных плоскостях, являются продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Этот параллелепипед и является обещанным выше объектом, связанным с тройкой прямых. Чем он замечателен? Прежде всего, он единствен.

В самом деле, через прямую проходит единственная плоскость, параллельная другой, скрещивающейся с ней прямой, и если эти прямые — продолжение ребер параллелепипеда, то в этой плоскости лежит одна из его граней. Следовательно, построенная нами шестерка плоскостей однозначно определяется исходной тройкой прямых, и всякий параллелепипед, ребра которого лежат на этих прямых, ограничен этими плоскостями и, значит, тоже однозначно определен.

Мы видим, что несущий параллелепипед соединяет прямые тройки ничуть не хуже, чем общий перпендикуляр соединял прямые в паре. Здесь, как в случае общего перпендикуляра и в случае полуориентации пары не перпендикулярных прямых, из исходной геометрической конфигурации естественно возникает нечто дополнительное по отношению к ней, но канонически с ней связанное и потому достойное внимания при изучении исходного объекта.

Загадка. *На рисунке 10 изображены, вопреки доказанному выше, два параллелепипеда с ребрами, лежащими на трех попарно скрещивающихся прямых. В чем дело? Где спрятан обман — в доказательстве или в рисунке?*

Займемся классификацией троек с точностью до изотопий. Как было показано, какую бы тройку попарно скрещивающихся прямых мы ни взяли, слегка пошевелив ее, мы можем добиться, чтобы ее прямые оказались продолжениями ребер некоторого параллелепипеда. Параллелепипед определяется (с точностью до движений) длинами своих ребер и углами между ними. Непрерывной деформацией мы можем сначала сделать все углы прямыми (получим прямоугольный параллелепипед), а затем все ребра сделать одинаковой длины, например единичной (получим куб; рис. 11). Эта деформация сопровождается изотопией тройки прямых, являющихся продолжениями ребер параллелепипеда. Таким образом, нам удалось уложить прямые нашей тройки на попарно скрещивающиеся ребра единичного куба. Это замечательное достижение. Действительно, теперь мы знаем, что неизотопных наборов из трех попарно скрещивающихся прямых не так уж много — не больше, чем троек попарно скрещивающихся ребер у куба. А сколько их? На

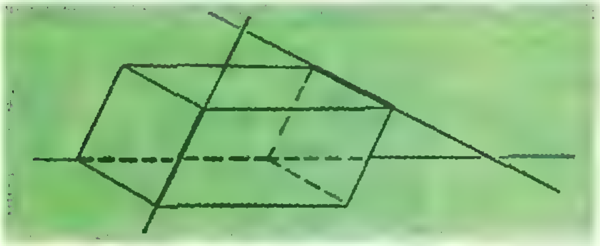


Рис. 9.

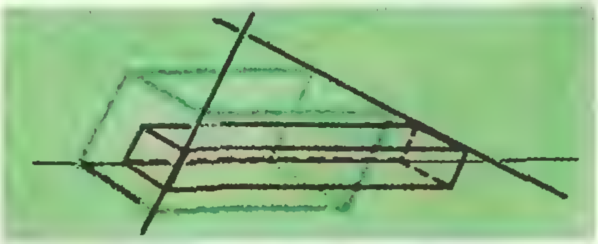


Рис. 10.

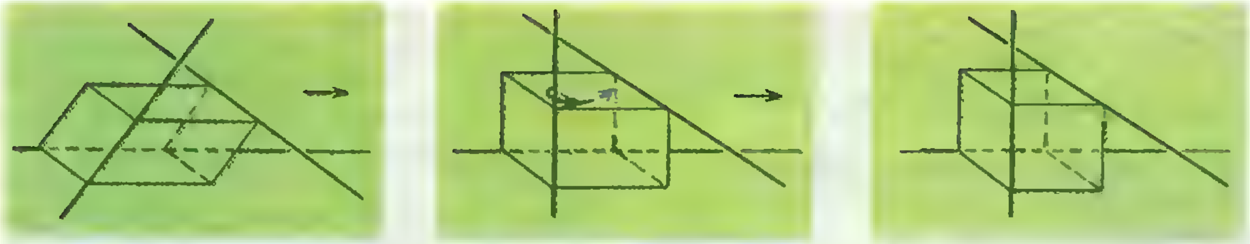


Рис. 11.

первый взгляд, их восемь. В самом деле, фиксируем какую-нибудь грань куба; как мы видели, в ней содержится ровно одно ребро из каждой тройки попарно скрещивающихся ребер, и оно может быть любым из четырех ребер этой грани, а троек, содержащих фиксированное ребро, ровно две (рис. 12). Впрочем, восемь — это слишком много. Поворачивая куб, мы можем перевести любое его ребро в любое другое. Так что возможностей не больше двух; они и показаны на рисунке 12. Этот успех дает надежду на то, что, действуя таким образом, удастся доказать изотопность и троек прямых, показанных на этом рисунке, а значит, и вообще всех троек попарно скрещивающихся прямых. Попробуйте!

Не получается? Не расстраивайтесь, и не должно получиться. Как и у пар ориентированных прямых, у троек (неориентированных!) прямых есть характеристика, называемая *коэффициентом зацепления*, которая может принимать значения ±1 и которая сохраняется при изотопиях и изменяется при отражении тройки прямых в зеркале. Вот ее определение. В произвольном наборе из трех попарно скрещивающихся прямых ориентируем как попало все прямые. Пары прямых, содержащиеся в нашей тройке, приобретают при этом коэффициенты зацепления (равные ±1). Перемножив их, получим некоторое число (тоже +1 или −1), которое и называется коэффициентом зацепления исходной тройки прямых. Оно не зависит от ориентации прямых: переориентировав любую прямую, мы поменяем знак у двух из трех сомножителей, что не изменит произведения. Сохранение коэффициента зацепления тройки прямых при изотопии и его изменение при отражении тройки в зеркале вытекают из соответствующих свойств коэффициента зацепления пары ориентированных прямых. Поскольку тройки прямых на рисунке 12 являются зеркальными образами друг друга, их коэффициенты зацепления различны, и эти тройки действительно не изотопны.

Поскольку всякая тройка попарно скрещивающихся прямых изотопна одной из двух троек, изображенных на рисунке 12, *две тройки изотопны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые коэффициенты зацепления.*

Итак, уже тройки попарно скрещивающихся прямых могут располагаться по-разному. Это оправдывает заголовок статьи, а также то, что в дальнейшем наборы попарно скрещивающихся прямых мы будем называть просто сплетениями.

Задачи

1. Найдите коэффициенты зацепления каждой из троек прямых на рисунке 12.
2. Прямые, содержащие ребра пространственного четырехугольника $ABCD$, ориентированы «по кругу» (от A к B, от B к C, от C к D, от D к A). Сравните коэффициенты зацеплений пар прямых, лежащих на противоположных ребрах.
3. Докажите, что у всякой тройки попарно

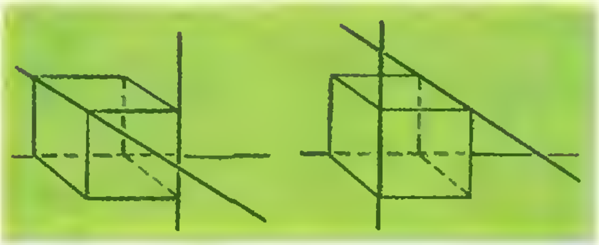


Рис. 12.

скрещивающихся прямых существует единственная полуориентация, при которой коэффициенты зацепления всех пар, содержащихся в этой тройке, равны между собой и равны коэффициенту зацепления тройки.

Зеркальность и незеркальность

Заметим, что никакая тройка скрещивающихся прямых не изотопна своему зеркальному образу, а всякая пара — изотопна. Набор попарно скрещивающихся прямых назовем *зеркальным*, если он изотопен своему зеркальному образу, и *незеркальным* в противном случае. Таким образом, любая тройка незеркальна, а любая пара зеркальна. Возникают вопросы:

1) бывают ли еще такие p, что любое сплетение из p прямых незеркально;

2) и такие p, что любое сплетение из p прямых зеркально;

3) при каких p сплетения p прямых незеркальны;

4) и при каких p — зеркальны?

Хотя мы еще не очень далеко *продвинулись в ответе на основной* вопрос, поставленный в начале статьи (какими с точностью до изотопий бывают сплетения p прямых), имеет смысл отвлечься от него на вопросы 1)—4). Они более грубые и поверхностные, но и более качественные. Их грубость и поверхностность сулят легкий успех, который, несомненно, пригодится при классификации.

В нашем распоряжении пока не очень много средств доказательства незеркальности — мы знаем, что всякая тройка незеркальна. Но это *не так уж мало. Ведь в каждом* сплетении большего числа прямых присутствуют тройки. При зеркальном отражении каждая тройка меняет свой коэффициент зацепления. Значит, если сплетение зеркально, то троек с коэффициентом зацепления $+1$ должно быть столько же, сколько троек с коэффициентом зацепления -1. *Общее количество троек, которые можно выбрать из зеркального сплетения, должно быть* поэтому *четным*. Эти нехитрые соображения приводят к следующему неожиданному результату.

Теорема. *Если при делении числа p на 4 получается остаток 3, то всякое сплетение из p прямых незеркально.*

Для доказательства осталось убедиться в справедливости двух фактов, которые мы оставляет читателям в виде задач.

Задачи

4. Докажите, что сплетение из p прямых содержит $p(p-1)(p-2)/6$ троек (и вообще, любой набор из p предметов содержит столько троек).

5. Докажите, что число $p(p-1)(p-2)/6$ нечетно тогда и только тогда, когда при делении числа p на 4 получается остаток 3.

Теорема отвечает (утвердительно) на первый из сформулированных выше вопросов о зеркальности. Ответ на второй вопрос отрицателен: *для любого $p \geqslant 3$ можно сконструировать незеркальное сплетение из p прямых*. Выделенное курсивом утверждение дает ответ и на третий вопрос. Простейшие такие сплетения для $p=4, 5, 6$ изображены на рисунке 13. Эту серию легко продолжить. (Все тройки прямых, содержащиеся в сплетениях этой серии, имеют одинаковые коэффициенты зацепления, и именно поэтому такие сплетения незеркальны.)

Что же касается последнего вопроса, то здесь ответ такой: *зеркальные тройки существуют, если при*

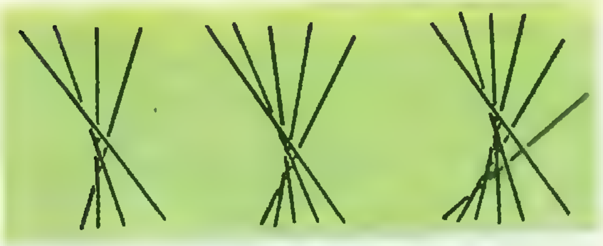


Рис. 13.

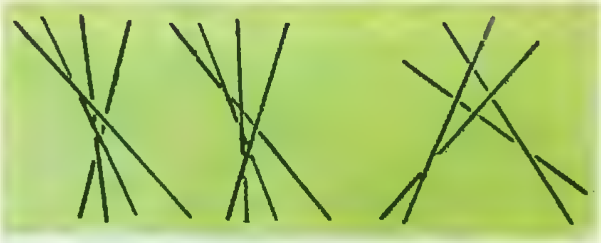


Рис. 14.

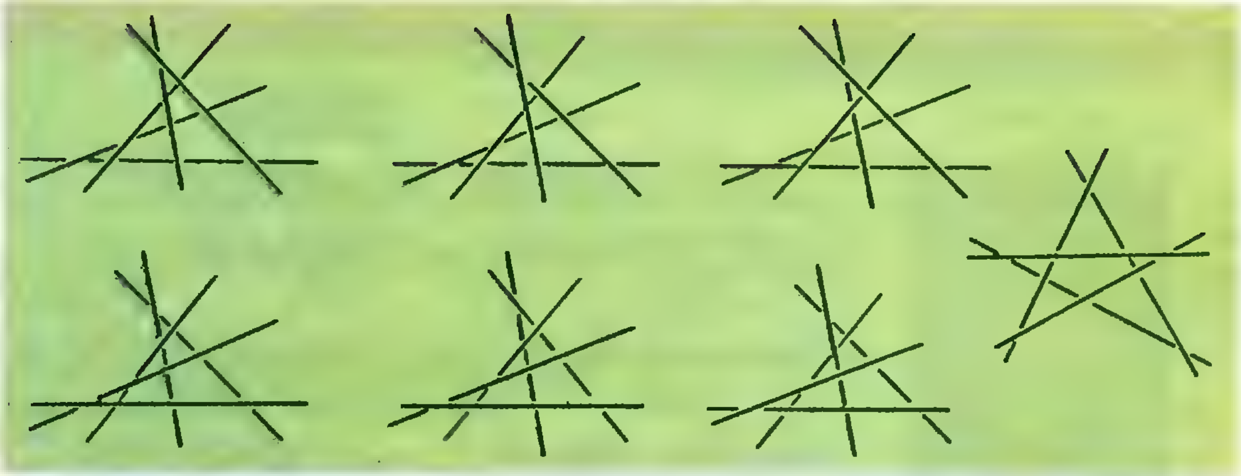


Рис. 15.

делении p на 4 не получается остаток 3. Примеры попробуйте придумать сами; они составляют две серии — одну для четных *p*, другую для тех *p*, что дают при делении на 4 остаток 1.

Вернемся теперь к вопросу о классификации сплетений при $p \geqslant 4$.

Сплетения из четырех или более прямых

Со всеми неизотопными типами сплетений из четырех прямых теперь легко познакомиться. Их три (рис. 14). Слева — сплетение, встречавшееся на рисунке 13, в центре — его зеркальный образ, а справа некое зеркальное сплетение. Уже было доказано, что *они не изотопны друг другу*: первое незеркально, и поэтому не изотопно второму (своему зеркальному образу), а третье — зеркально, и поэтому не изотопно ни первому, ни второму. Мы не будем объяснять, почему *любое сплетение четырех прямых изотопно одному из сплетений рисунка 14*. Попробуйте найти объяснение сами.

Можно показать (но это уже не просто), что *любое сплетение из пяти прямых изотопно одному из семи сплетений, изображенных на рисунке* 15. Эти семь сплетений не изотопны друг другу. Для доказательства этого факта сосчитайте у каждого из них сумму коэффициентов зацепления всех 10 троек, которые содержатся в данном сплетении. Ответы все оказываются разными. Ясно, что такая сумма сохраняется при изотопии, и поэтому все семь сплетений попарно не изотопны.

Дальше — еще сложней. *Для p=6 имеется 19 типов сплетений* (эта теорема была доказана в 1987 году студентом Ленинградского университета В. Ф. Мазуровским). Некоторые из этих сплетений уже нельзя отличить друг от друга при помощи только коэффициентов зацепления входящих в них троек прямых. Чтобы доказать их неизотопность, пришлось вычислять на ЭВМ более сложные характеристики сплетений.

О числе типов сплетений при $p=7$ известно только, что оно большое и четное. Четное потому, что любая семерка незеркальна.

Начав с элементарного вопроса о классификации сплетений, вот мы уже подошли к «переднему краю науки»..., а значит, и к концу нашего рассказа.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1987 года.

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1988 года:

Ю. Великина — Днепропетровск, с. ш. № 45, 8 кл.
К. Вербицкий — Москва, с. ш. № 607, 10 кл.
А. Витяев — Новосибирск, с. ш. № 166, 10 кл.
В. Волчков — Шахтерск Донецкой обл., с. ш. № 5, 10 кл.
М. Выборнов — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Ю. Гнатюк — Каменец-Подольский, с. ш. № 16, 10 кл.
М. Гольдшейд — Челябинск, с. ш. № 31, 10 кл.
Н. Дохолян — Тбилиси, ФМШ № 42, 11 кл.
Н. Зверев — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.
В. Калошин — Харьков, ФМШ № 24, 9 кл.
О. Кирнасовский — Винница, с. ш. № 15, 10 кл.
Г. Колесницкий — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
Д. Косоня — Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
С. Лаусмаа — Кохтла-Ярве, с. ш. № 13, 9 кл.
А. Лосев — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Т. Мартиросова — Ташкент, с. ш. № 89, 10 кл.
А. Мельник — Гайворон, с. ш. № 2, 9 кл.
Ю. Морозов — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
А. Назарян — Тбилиси, ФМШ № 42, 11 кл.
В. Павлунин — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
В. Полищук — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Роткин — Баку, с. ш. № 47, 10 кл.
Р. Садреев — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
Д. Синицкий — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
С. Синякова — Москва, с. ш. № 463, 10 кл.
И. Солтан — Павлодар, с. ш. № 3, 10 кл.
Д. Фельдман — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.
В. Фельдшеров — Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.
Я. Эфендиев — Баку, с. ш. № 82, 10 кл.
А. Яврян — Ереван, с. ш. № 8, 10 кл.
Н. Адигезалов — Баку, с. ш. № 20, 10 кл.
А. Бабкин — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
С. Бобровник — Черновцы, с. ш. № 24, 9 кл.
И. Велиев — Баку, с. ш. № 56, 10 кл.
С. Вердиян — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Б. Гуревич — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Е. Демлер — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
А. Езерский — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
В. Завадский — Минск, с. ш. № 50, 9 кл.
В. Завражний — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Ф. Занин — Старый Оскол, с. ш. № 16, 8 кл.
Е. Зельцер — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. Капустин — Москва, с. ш. № 114, 10 кл.
К. Краснов — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
А. Майков — Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Р. Малков — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.
К. Николаев — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Д. Ноготков — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
З. Османов — Тбилиси, ФМШ № 42, 10 кл.
В. Павлунин — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Л. Петько — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. Подтележников — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
С. Сазонов — Климовск, с. ш. № 5, 10 кл.
М. Сергазин — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
А. Сибиряков — Томск, с. ш. № 30, 10 кл.
З. Таварткиладзе — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 11 кл.
А. Усинский — Ровенская обл., Вербская с. ш.-интернат, 8 кл.
И. Химони — Днепропетровск, с. ш. № 53, 9 кл.
И. Чайка — Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.

(Окончание см. на с. 29)

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июня 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1091» или «Ф1103». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1091—М1095, Ф1103—Ф1107

М1091. Назовем натуральное число *удачным*, если цифры в его десятичной записи можно разбить на две группы так, что суммы цифр в этих группах равны.

а) Найдите наименьшее число a такое, что числа a и $a+1$ — удачные.

б) Существует ли такое a, что числа a, $a+1$ и $a+2$ — удачные?

П. И. Зильберберг

М1092. Вырезанный из бумаги выпуклый многоугольник 10 раз складывают (перегибая по некоторым прямым) и затем разрезают по прямой. Какое наибольшее число кусков может получиться?

С. В. Казаков

М1093. На окружности в n точках расставлены числа 0, 1, 2. Затем одновременно во всех точках производится следующее преобразование: каждое число 2 заменяется на 0, а затем к следующему за ним по часовой стрелке числу прибавляется 1. Пусть вначале количество двоек равнялось $k \geqslant 1$.

а) Через какое количество преобразований заведомо не останется ни одной двойки?

б) Пусть, кроме того, в $n-k$ остальных точках вначале стояли единицы. Докажите, что в конце концов останется k единиц и $n-k$ нулей (рис. 1).

Н. Александру (Румыния)

М1094. Пусть a, b, c — неотрицательные числа.

а) Докажите, что из неравенства

$$a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

следует неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

б) Верно ли обратное: из неравенства (2) следует неравенство (1)?

В. А. Сендеров

М1095*. На плоскости задана окружность с центром O и две точки A, B (отличные от O) такие, что прямая AB проходит через точку O. Постройте хорду MN этой окружности, которая видна из точки A под заданным углом α и

а) параллельна прямой AB;

б) проходит через точку B. (Если B лежит вне окружности, то через B должно проходить продолжение хорды MN.)

Р. О. Бурдин

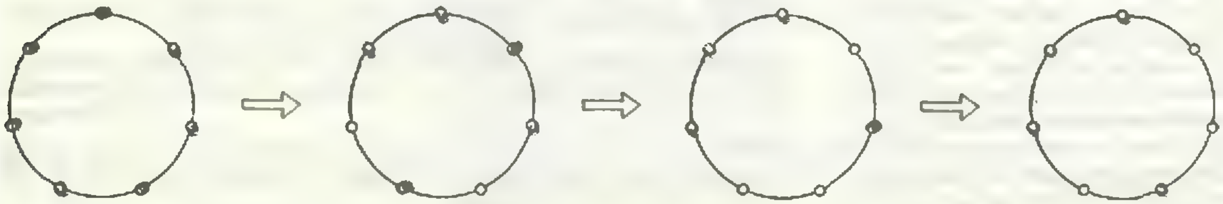


Рис. 1. Точки, в которых стоят числа 2, — красные, 1 — голубые, 0 — белые; здесь $k=4$, $n-k=3$.

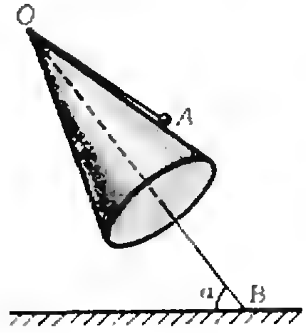


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Ф1103. Математический маятник длиной l покоится в точке A на конусе с углом раствора 2β (рис. 2). Какой путь пройдет маятник до отрыва от поверхности конуса, если легким толчком маятник вывести из положения равновесия? Угол наклона конуса к поверхности земли α, поверхность конуса считается гладкой.

Л. Г. Маркович

Ф1104. Концы двух однородных стержней привязаны друг к другу невесомыми и нерастяжимыми нитями. Один из стержней подвязали за середину к штативу. Доказать, что образованный таким образом из нитей и стержней четырехугольник является трапецией.

В. Т. Карапетян

Ф1105. Металлический диск радиусом $r=10$ см вращается в горизонтальной плоскости со скоростью $\nu=60$ об/мин. С высоты $H=10$ см на него падает пластмассовый брусок, масса которого много меньше массы диска. Нижняя грань бруска все время параллельна плоскости диска, коэффициент трения между металлом и пластмассой $\mu=0{,}1$. На каком расстоянии от оси должен упасть брусок, чтобы при повторном падении он упал за пределами диска? Считать, что после отскока брусок поднимается на прежнюю высоту; размерами бруска пренебречь.

Л. А. Закревский

Ф1106. Несколько слов о сверхпроводниках. Сверхпроводники обладают свойством выталкивать магнитное поле (так называемый эффект Мейснера), благодаря чему они могут парить над магнитом. Эту особенность сверхпроводников предполагается использовать для создания сверхскоростных поездов на «магнитной подвеске», опытные образцы которых уже испытываются. А теперь сама задача. На сверхпроводящий образец массой m, парящий над постоянным магнитом, кладут груз точно такой же массы. Во сколько раз необходимо увеличить магнитную индукцию поля, создаваемого магнитом, чтобы сверхпроводник с грузом парил на прежнем расстоянии от магнита?

А. И. Буздин

Ф1107. Свежевыпавший пушистый снег искрится на солнце. Оцените характерное расстояние между отдельными «искринками».

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Problems

M1091—M1095, P1103—P1107

M1091. A natural number is called *successful*, if its digits can be split up into two groups with equal sums.
a) Find the least a such that both a and $a+1$ are successful.
b) Is there an a such that a, $a+1$, $a+2$ are all successful?

N. I. Zilberberg

M1092. A convex paper polygon is folded 10 times (along straight lines) and then cut along a straight line. Find the maximum number of pieces.

S. V. Kazakow

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult

problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the colution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

M1093. The numbers 0, 1, 2 are written at n points of a circle. Then the same operation is simultaneously carried out at all the points: each 2 is replaced by a 0 and 1 is added to the nearest clockwise number. At the start there are k numbers 2.
a) After how many such operations can we garantee that no 2's remain?
b) Suppose that $k\geqslant1$ and at the start there were $n-k$ numbers 1 (hence no 0's). Prove that finally there will be k ones and $n-k$ zeros (figure рис. 1 p. 21).

N. Alexandru (Rumania)

M1094. Suppose a, b, c are non-negative numbers.
a) Prove that the inequality

$$a^4+b^4+c^4\leqslant2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

implies the inequality

$$a^2+b^2+c^2\leqslant2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

b) Is the converse true: does (2) imply (1)?

V. A. Senderov

M1095*. A circle with centre O and two points A, B (neither coinciding with O) such that the line AB contains O are given in the plane. Construct a chord MN of this circle which is seen from the point A under the given angle α and
a) is parallel to AB;
b) passes through B. (If B is outside the circle, then the line MN must pass through B.)

R. O. Burdin

P1103. A mathematical pendulum of length l is in equilibrium at the point A of a cone with summit angle 2β (see figure рис. 2). How far will the pendulum move intil it leaves the surface of the cone, if it is displaced from the equilibrium position by a slight push? The angle between the cone's axis and the Earth's surface is α; the surface of the cone is assumed smooth.

L. G. Markovich

P1104. The extremities of two uniform rods are tied to each other with weightless unstrechable strings. One of the rods is tied to a support from its midpoint. Prove that the quadrangle thus formed by the rods and strings is a trapezium.

V. T. Karapetyan

P1105. A massive disk of radius $R=0.1$ m rotates with velocity 60 RPM about a vertical axis perpendicular to the disk at its centre. A small light horizontally oriented slab falls with zero initial velocity from the altitude $H=0.1$ m above the disk. After hitting the disk, the slab bounces up without rotating to nearly the same height H. The sliding friction coefficient between disk and slab is $\mu=0.1$. Find the distance from the axis of rotation to the point of impact such that the slab will not fall on the disk again.

L. A. Zakrevski

P1106. A few words about superconductors. Superconductors possess the property of pushing out magnetic fields (the so-called Meisner effect), as the result of which they can „float" above a magnet. This property of superconductors is to be used to design extrafast trains on „magnetic cushions", experimental models of which are already being tested.
Now for the problem itself. A weight of mass m is placed on a superconducting sample of mass m floating above a constant magnet. How many times must one increase the magnetic induction of the magnet's field in order to have the weighted sample floating at the same distance from the magnet?

A. I. Buzdin

Задачник „Кванта"

P1107. Freshly fallen snow sparkles in the sun. Estimate the characteristic distance between neighbouring flashes of reflected light.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

Решения задач

M1070, M1072—M1075,*) Ф1084—Ф1087

M1070. *Тетраэдр пересечен тремя плоскостями, каждая из которых параллельна двум его противоположным ребрам и одинаково удалена от них. Докажите, что сумма квадратов площадей этих трех сечений в 4 раза меньше суммы квадратов площадей граней тетраэдра.*

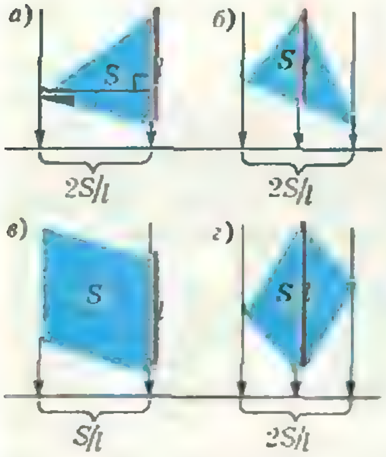


Рис. 1.

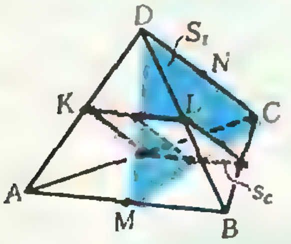


Рис. 2.

Мы рассмотрим несколько ортогональных проекций тетраэдра и воспользуемся тем, что проекции треугольника вдоль стороны или вдоль медианы и проекции параллелограмма вдоль стороны или диагонали есть отрезки, длины которых выражаются через площадь соответствующей фигуры и длину стороны, медианы или диагонали (рис. 1).

Пусть дан тетраэдр $ABCD$ (рис. 2). Каждая из секущих плоскостей проходит через середины 4-х его ребер и, следовательно, пересекает его по параллелограмму, ограниченному средними линиями граней. Площади сечений, параллельных соответственно ребрам DA, DB, DC, обозначим через s_a, s_b, s_c, площади граней ABC, BCD, CDA, DAB — через S_D, S_A, S_B, S_C. Спроектируем тетраэдр вдоль ребра CD (рис. 3). Получится треугольник ABC (мы сохраняем за проекциями точек те же обозначения, что и за самими точками). Проведем в нем среднюю линию KL, параллельную AB (это проекция сечения s_c), и медиану CM (это проекция треугольного сечения CDM нашего тетраэдра; M — середина ребра AB). В параллелограмме $CLMK$ (рис. 3) стороны и диагонали равны

$$CL=KM=CB/2=S_A/l,$$
$$CK=LM=CA/2=S_B/l,$$
$$KL=2s_c/l,\ CM=2S_1/l,$$

где $l=CD$, S_1 — площадь $\triangle CDM$. Записывая для $CLMK$ «равенство параллелограмма» (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон), получим

$$2(S_A^2+S_B^2)=4s_c^2+4S_1^2. \qquad (1)$$

Аналогично доказывается равенство

$$2(S_C^2+S_D^2)=4s_c^2+4S_2^2, \qquad (2)$$

где S_2 — площадь *треугольного сечения* ABN, *проходящего* через середину N ребра CD. Наконец, ортогонально спроектируем тетраэдр вдоль его «средней линии» MN (рис. 4). Получится параллелограмм $ACBD$ (диагонали AB и CD, пересекаясь, делятся пополам). Диагонали этого параллелограмма — это проекции *треугольных сечений* S_1 *и* S_2, т. е. $AB=2S_2/m$, $CD=$ $=2S_1/m$, где $m=MN$, а средние линии — проекции сечений s_a и s_b, и, поскольку стороны равны средним линиям, $AD=2s_a/m$, $AC=2s_b/m$. Еще раз используем *«равенство параллелограмма»*:

$$2(4s_a^2+4s_b^2)=4S_1^2+4S_2^2. \qquad (3)$$

Из (1), (2) и (3) следует утверждение задачи:

$$S_A^2+S_B^2+S_C^2+S_D^2=4(s_a^2+s_b^2+s_c^2).$$

Отметим, что эта задача в другой формулировке

---

*) Решение задачи M1071 будет опубликовано в следующем номере журнала.

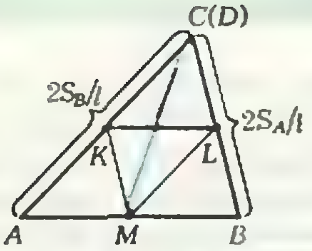


Рис. 3.

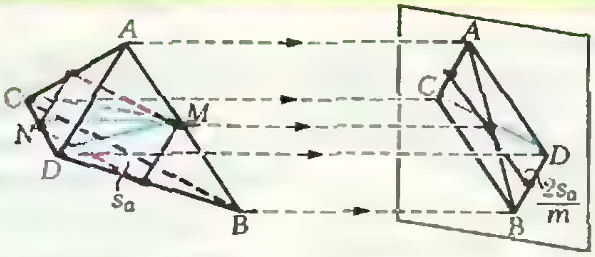


Рис. 4.

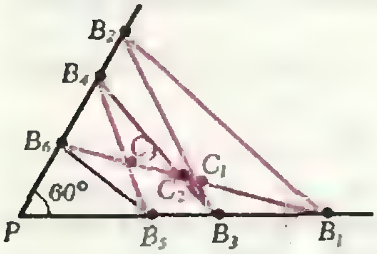
появилась в недавно изданном очень содержательном задачнике «Зарубежные математические олимпиады» (М., 1987, с. 49, задача 15.17).

M1072. *Разложите на простые множители число $989\cdot 1001\cdot 1007+320$.*

Ответ: $1009\cdot 997\cdot 991$. Догадаться до этого разложения можно с помощью следующего соображения: если $f(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$, то $f(x)+f(-x)=-2(a+b+c)x^2+2f(0)$, т. е. при $a+b+c=0$ сумма $f(x)+f(-x)$ постоянна. В нашем случае можно взять $f(x)=(x-10)\times(x+2)(x+8)$, тогда заданное число равно $f(999)-2f(0)=-f(-999)=1009\cdot 997\cdot 991$. Легко проверить, что все три множителя здесь простые.

С. В. Фомин

M1073. *В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ нашлась точка O, из которой все стороны видны под углом 60°. Докажите, что если $OA_1>OA_3>OA_5$ и $OA_2>OA_4>OA_6$, то $A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6<A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1$.*



Отложим на сторонах угла величиной 60° от его вершины P отрезки $PB_i=OA_i$, $i=1, 2, \ldots, 6$, как показано на рисунке. Поскольку отрезки B_1B_2, $B_2B_3, \ldots, B_6B_1$ соответственно равны отрезкам A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_6A_1$, достаточно доказать, что

$$B_1B_2+B_3B_1+B_5B_6<B_2B_3+B_4B_5+B_6B_1.$$

Это неравенство получается, если сложить 4 неравенства треугольника (см. рисунок):

$$B_1B_2<B_1C_1+C_1B_2,$$
$$B_3C_2<B_3C_1+C_1C_2,$$
$$C_2B_4<C_2C_3+C_3B_4,$$
$$B_5B_6<B_5C_3+C_3B_6,$$

где C_1, C_2, C_3 — точки пересечения отрезка B_1B_6 с отрезками B_2B_3, B_3B_1 и B_4B_5. (Указанные отрезки пересекаются благодаря неравенствам, данным в условии. Например, из неравенств $PB_3<PB_1$ и $PB_6<PB_2$ следует, что точки B_3 и P лежат по одну сторону от B_1B_6, а B_2 и P — по разные, поэтому B_3 и B_2 лежат по разные стороны от B_1B_6, т. е. прямая B_1B_6 пересекает отрезок B_2B_3; аналогично доказывается, что прямая B_2B_3 пересекает отрезок B_1B_6, и, следовательно, отрезки B_2B_3 и B_1B_6 пересекаются.)

А. С. Меркурьев

M1074. *Дана стопка из $2n+1$ карточек, с которой разрешается производить следующие две операции: (А) сверху снимается часть*

Занумеруем карточки сверху вниз числами 0, 1, ..., $2n$ и выложим их последовательно в вершинах правильного многоугольника $A_0A_1\ldots A_{2n}$ (рис. 1). Тогда операции (А) отвечает поворот всего набора карточек вокруг центра многоугольника на угол, кратный $360°/(2n+1)$.

карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка:

(Б) верхние n карточек с сохранением порядка вкладываются в n промежутков между нижними $n+1$ карточками.

Докажите, что с помощью указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n+1)$ различных расположений карточек.

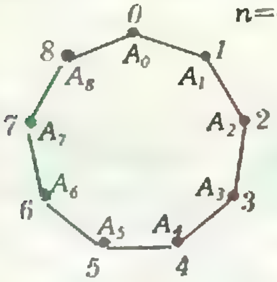


Рис. 1.

а при операции (Б) карточки из вершин A_0, A_1,..., A_{n-1} перекладываются, соответственно, в вершины A_1, A_3,... ...,A_{2n-1}, а из вершин A_n, A_{n+1},..., A_{2n} — в вершины A_2, A_4,..., A_{2n} (рис. 2). Таким образом, после операции (Б) карточки, которые первоначально были соседними, будут стоять через одну. Если же между двумя карточками было заключено k сторон многоугольника (всегда можно считать $k \leqslant n$), то в результате операции (Б) между ними окажется $2k$ сторон. В частности, расстояния между карточками 0 и 1, 1 и 2,..., $2n$ и 0 будут оставаться равными между собой при выполнении операций (А) и (Б) в любом числе и порядке. Поэтому расстановка всех карточек полностью задается положением карточек 0 и 1: если 0 находится в вершине A_i, а 1 — в вершине A_j, то 2 — в такой вершине A_k, что $A_jA_k=A_iA_j$, 3 — в такой вершине A_l, что $A_kA_l=A_iA_j$, и т. д. (рис. 3). Место для карточки 0 можно выбрать $2n+1$ способами, для карточки 1 остается $2n$ мест. Следовательно, число возможных расположений не превосходит $2n(2n+1)$.

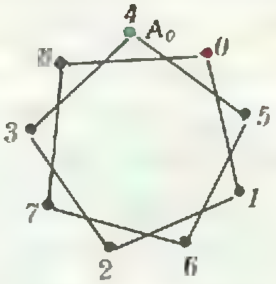


Рис. 2.

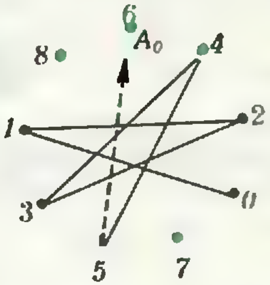


Рис. 3.

Чтобы получить точное число расположений, надо здесь множитель $2n$ заменить на число различных остатков от деления степеней двойки на $2n+1$. (При каждом применении операции (Б) число сторон многоугольника между карточками 0 и 1, отсчитываемое в заданном направлении, нужно удвоить и взять остаток от деления на $2n+1$.)

Д. В. Фомин, В. Н. Дубровский

М1075. *Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого каждая цифра (кроме крайних) строго меньше полусуммы двух соседних с ней цифр.*

Ответ: 96433469. Пусть a_1, a_2,..., a_n — последовательные цифры числа N, удовлетворяющего условию задачи. Рассмотрим разности соседних чисел $d_i=a_{i+1}-a_i$, $i=1,..., n-1$. Условие $a_i<(a_{i-1}+a_{i+1})/2$ можно переписать в виде $a_i-a_{i-1}<a_{i+1}-a_i$, или $d_{i-1} \leqslant d_i-1$. Пусть a_m — наименьшая цифра числа N. Можно считать, что $a_{m-1}>a_m$, $a_m \leqslant a_{m+1}$, т. е. $d_{m-1} \leqslant -1$, $d_m \geqslant 0$. Тогда $d_{m-2} \leqslant d_{m-1}-1 \leqslant -2$, $d_{m-3} \leqslant -3$,..., а $d_{m+1} \geqslant d_m+1 \geqslant 1$, $d_{m+2} \geqslant 2$, $d_{m+3} \geqslant 3$,...

Докажем, что $n \leqslant m+4$. Допустим, что это не так, тогда $a_{m+5} = a_{m+4} + d_{m+4} \geqslant a_{m+4} + 4 \geqslant a_{m+3}+3+4 \geqslant ... \geqslant a_{m+1}+1+2+3+4 \geqslant 10$, но $a_{m+5} \leqslant 9$. Аналогично доказывается, что $m \leqslant 4$ (в противном случае $a_{m-4} \geqslant a_{m-3}-a_{m-4} \geqslant a_{m-3}+4 \geqslant ... \geqslant a_m+10$). Итак, $n \leqslant 8$, причем если $n=8$, то $m=4$. Подставляя $m=4$ в оценки для d_i и учитывая, что $a_1 \leqslant 9$, $a_8 \leqslant 9$, получим:

$a_2=a_1+d_1 \leqslant 9-3=6,\quad a_3 \leqslant a_2-2 \leqslant 4,\quad a_4 \leqslant a_3-1 \leqslant 3;$
$a_7=a_8-d_7 \leqslant 9-3=6,\quad a_6 \leqslant a_7-2 \leqslant 4,\quad a_5 \leqslant a_6-1 \leqslant 3.$

Следовательно, $N \leqslant 96433469$.

С. Е. Рукшин

Ф1084. *Если к обмерзшему стеклу на незначительное время прижать пятак, то вдоль края пятака на стекле протаивает кружок. Почему?*

Когда мы прижимаем пятак к стеклу, он нагревается от руки. От него нагревается и тает иней. А касается монета инея прежде всего по краям, там, где имеется утолщение. Между остальной частью монеты и инеем имеется воздушный зазор. Теплопроводность воздуха намного меньше теплопроводности металла. Поэтому сначала «прогревается» и протаивает иней по кольцу, по краю монеты. После этого монета «ложится» на иней всей поверхностью, и таяние инея происходит по всей площади монеты.

Л. А. Ашкинази

Ф1085. *На рисунке 1 изображен процесс, совершаемый над идеальным газом и переводящий его из состояния A в состояние B. Найдите на графике участки процесса, где температура газа повышается (понижается).*

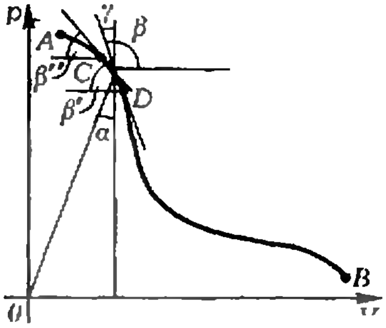


Рис. 1.

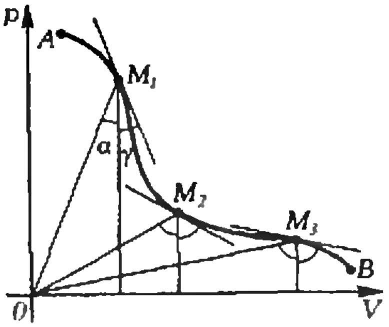


Рис. 2.

Рассмотрим на кривой две достаточно близкие точки процесса C и D и запишем выражение для изменения температуры газа при переходе из точки C в точку D:

$$\Delta T_{CD}=T_C-T_D=\frac{M}{mR}((p+\Delta p)(V+\Delta V)-pV)\approx$$
$$\approx\frac{M}{mR}(p\cdot\Delta V+V\cdot\Delta p).$$

Пусть $\Delta T_{CD}\approx 0$ (это означает, что либо точки C и D лежат на одной изотерме, либо при переходе $C \to D$ температура газа проходит через экстремальное значение (максимальное или минимальное)). Тогда

$$\frac{p}{V}=-\frac{\Delta p}{\Delta V}. \qquad (*)$$

Из рисунка 1 видно, что $\frac{p}{V}=\operatorname{ctg}\alpha$, а при достаточно близких точках C и D

$$\frac{\Delta p}{\Delta V}=\operatorname{tg}\beta'\approx\operatorname{tg}\beta''\approx\operatorname{tg}\beta=-\operatorname{ctg}\gamma.$$

Таким образом, из (*) следует, что

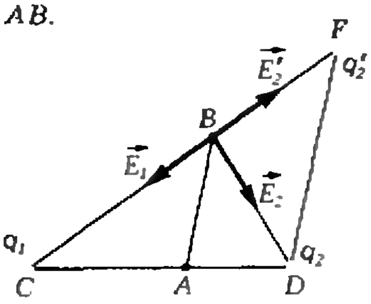
$$\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\gamma,\text{ или }\alpha=\gamma.$$

Предположим теперь, что в какой-либо точке кривой AB $\alpha<\gamma$. Тогда $\operatorname{ctg}\alpha>\operatorname{ctg}\gamma$, и, повторяя приведенные рассуждения в обратном порядке, получим, что $\Delta T_{CD}>0$. Следовательно, температура газа при прохождении через эту точку увеличивается. И наоборот: если в какой-то точке $\alpha>\gamma$, то $\Delta T_{CD}<0$, и температура газа в данном случае уменьшается.

Найдя на графике точки M_1, M_2 и M_3, в которых $\alpha=\gamma$ (см. рис. 2), выясняем, что на участках процесса AM_1 и M_2M_3, где $\alpha<\gamma$, температура газа увеличивается, а на участках M_1M_2 и M_3B ($\alpha>\gamma$) — уменьшается.

И. Ю. Потеряйко

Ф1086. *Суммарная напряженность электрического поля, создаваемого двумя точечными зарядами, в точке A равна нулю, а в точке B модули напряженностей полей этих зарядов одинаковы. Показать, что в точке B напряженность результирующего поля направлена вдоль прямой AB.*



Рассмотрим решение для случая одноименных (отрицательных) зарядов q_1 и q_2, размещенных в точках C и D (см. рисунок). Очевидно, что точка A лежит на отрезке CD, а точка B находится от него на некотором расстоянии. Если, например, через точку D провести прямую, параллельную AB, и в точке пересечения F этой прямой с прямой CB поместить заряд $q_2'=q_2$, то суммарная напряженность полей, создаваемых зарядами q_1 и q_2', в точке B будет равна нулю, так как B делит отрезок CF в соотношении точно таком же, как точка A делит CD $\left(AB \parallel DF \Leftrightarrow \frac{|CA|}{|AD|} = \frac{|CB|}{|BF|}\right)$. Следовательно, $\vec{E}_1+\vec{E}_2'=\vec{0}$, и $|\vec{E}_2'|=|\vec{E}_1|=|\vec{E}_2|$.

Далее. Заряды q_2 и q_2' равны между собой и создают в точке B равные по модулю напряженности; отсюда $|BF|=|BD|$ и $\angle BFD=\angle BDF$. Кроме того, $\angle CBA=\angle BFD$, $\angle ABD=\angle BFD$. Из всего этого следует, что $\angle CBA=\angle ABD$ и BA является биссектрисой угла $\angle CBD$.

Таким образом, напряженность результирующего поля, создаваемого двумя точечными зарядами q_1 и q_2, в точке B будет направлена вдоль биссектрисы AB угла, образованного векторами $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$.

В случае разноименных зарядов задача решается аналогично.

В. Т. Карапетян

Ф1087. *Математический маятник совершает колебания. Угол максимального отклонения от положения равновесия $\alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$. Укажите углы α_1 и α_2, при которых ускорение груза принимает наименьшее и наибольшее значения. Нарисуйте графики зависимости α_1 и α_2 от α_0.*

Ускорение груза не зависит от того, в какую сторону от положения равновесия отклонен маятник, поэтому достаточно рассмотреть положительные углы отклонения α (рис. 1).

Полное ускорение груза $\vec{a}$ есть векторная сумма центростремительного ускорения $\vec{a}_\text{ц}$ и тангенциального ускорения a_τ. Как видно из рисунка 1, $a_\tau=g\sin\alpha$. Центростремительное ускорение — $a_\text{ц}=v^2/l$. Скорость найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=mgl(\cos\alpha-\cos\alpha_0) \Rightarrow v^2=2gl(\cos\alpha-\cos\alpha_0).$$

Таким образом,

$$a=\sqrt{a_\text{ц}^2+a_\tau^2}=g\sqrt{4\,(\cos\alpha-\cos\alpha_0)^2+\sin^2\alpha}.$$

Решение задачи сводится к нахождению наименьшего и наибольшего значений квадратного трехчлена от $\cos\alpha$:

$$f(\cos\alpha)=4(\cos\alpha-\cos\alpha_0)^2+\sin^2\alpha=$$
$$=3\cos^2\alpha-8\cos\alpha\cos\alpha_0+4\cos^2\alpha_0+1.$$

Найдем производную функции f:

$$f'(\cos\alpha)=6\cos\alpha-8\cos\alpha_0.$$

Если $f'(\cos\alpha)<0$, то $f(\cos\alpha)$, а следовательно и ускорение a, убывает и свое наименьшее значение принимает при $\alpha_1=0$ для любых $\alpha_0 \leqslant \alpha_{0\text{л}}=\arccos\frac{3}{4}$. Если же

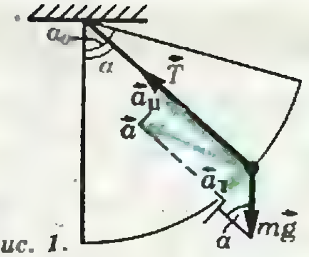


Рис. 1.

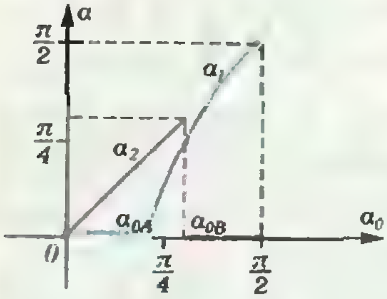


Рис. 2.

$\alpha_{0A} \leqslant \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, то ускорение a принимает минимальное значение при $\alpha_1 = \arccos\left(\frac{4}{3}\cos\alpha_0\right)$ (см. рис. 2).

$$\Delta = f(1) - f(\cos\alpha_0) = 5\cos^2\alpha_0 - 8\cos\alpha_0 + 3.$$

Максимальное значение $f(\cos\alpha)$ (а следовательно, ускорение a) принимает либо при $\cos\alpha = \cos\alpha_0$, либо при $\cos\alpha = 1$. Рассмотрим разность

$$\Delta = f(1) - f(\cos\alpha_0) = 5\cos^2\alpha_0 - 8\cos\alpha_0 + 3.$$

Видим, что

$$\Delta \leqslant 0 \text{ при } \cos\alpha_0 \geqslant 3/5,$$
$$\Delta > 0 \text{ при } \cos\alpha_0 < 3/5.$$

Значит, ускорение a принимает максимальное значение (см. рис. 2)

$$\text{при } \alpha_2 = \alpha_0, \text{ если } \alpha_0 \leqslant \alpha_{0B} = \arccos\frac{3}{5},$$
$$\text{при } \alpha_2 = 0, \text{ если } \alpha_{0B} < \alpha_0 \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

О. А. Седлецкий

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 20)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

В. Вологодский — Омск, с. ш. № 91, 10 кл.
Д. Вольпер — Омск, с. ш. № 66, 10 кл.
А. Гороховский — Киев, с. ш. № 79, 10 кл.
Р. Гринив — Львов, с. ш. № 62, 10 кл.
И. Зефиров — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
И. Кокорев — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
А. Кулик — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
В. Матвеев — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Я. Мустафаев — Баку, с. ш. № 20, 10 кл.
Д. Прокофьев — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
В. Рагулин — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
В. Слитинский — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Д. Туляков — Жданов, с. ш. № 7, 10 кл.
Ф. Фот — Воронеж, с. ш. № 58, 10 кл.
О. Христенко — Караганда, с. ш. № 63, 10 кл.

По физике

А. Белецкий — Канев, с. ш. № 4, 10 кл.
С. Белоусов — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
А. Билибин — Боровичи, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Виткуп — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
П. Вольфбейн — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. Гончаров — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
Н. Горьков — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
С. Дронов — Пущино, с. ш. № 3, 10 кл.
А. Ельяшевич — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
Д. Зеленский — Семипалатинск, с. ш. № 3, 10 кл.
С. Зеленский — Семипалатинск, с. ш. № 3, 10 кл.
А. Зискинд — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
В. Каменькович — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
В. Камчатный — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
А. Комник — Старый Оскол, с. ш. № 16, 9 кл.
А. Коршков — Мозырь, с. ш. № 8, 9 кл.
Ю. Кравченко — Москва, с. ш. № 820, 10 кл.
В. Лендерман — Киев, с. ш. № 208, 10 кл.
А. Мазуренко — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
А. Мамаев — Заволжье, с. ш. № 17, 10 кл.
А. Мацко — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Н. Михайловский — Красноярск, с. ш. № 20, 10 кл.
В. Мороз — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
К. Пенанен — Одесса, с. ш. № 63, 10 кл.
О. Покрамович — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
Р. Сагайдак — с. Матусов Черкасской обл., с. ш. № 1, 10 кл.
Д. Симонян — Рига, с. ш. № 79, 10 кл.
В. Синенко — Канев, с. ш. № 4, 10 кл.
М. Соколов — Одинцово, с. ш. № 11, 10 кл.
Д. Тильга — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.
И. Тодощенко — Пермь, с. ш. № 16, 10 кл.
Г. Фейгин — Тула, с. ш. № 36, 10 кл.
С. Штовба — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
И. Ясников — Тольятти, с. ш. № 59, 10 кл.

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1045—М1060, Ф1058—Ф1072, справились с задачами М1045, М1046, М1051, М1053, М1056—М1060, Ф1058, Ф1062, Ф1063, Ф1065, Ф1068, Ф1071. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Ю. Великина (Днепропетровск) 49, 50, 52, 55; *К. Вербицкий* (Москва) 49, 50, 52, 54; *А. Виницкий* (Калуга) 50, 55; *А. Винцюк* (Киев) 49, 50; *А. Витяев* (Новосибирск) 49, 50, 54; *В. Вологодский* (Омск) 49, 50, 52, 54; *В. Волчков* (Шахтерск) 48—50, 52, 54, 55; *Д. Вольпер* (Омск) 49, 50, 52, 54, 55; *Я. Воробец* (Львов) 49, 50, 52; *М. Выборнов* (Киев) 48—50, 52, 55; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 49, 50, 52, 54; *М. Гольдшейд* (Челябинск) 48—50, 52, 54, 55; *А. Гороховский* (Киев) 48—50, 52, 54, 55; *В. Гравит* (Северодвинск) 49, 50, 52, 54, 55; *Р. Гринив* (Львов) 49, 50, 52, 54, 55; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 49; *Р. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 50; *Н. Дохолян* (Тбилиси) 49; *С. Дронов* (Пущино) 49, 50, 52, 54; *К. Дышлевой* (Черкассы) 52, 54; *И. Жарков* (Свердловск) 48—50, 52, 54, 55; *И. Жильцов* (Свердловск) 52; *Ю. Жуков* (Тула) 50; *Ю. Журавель* (Киев) 49; *Н. Зверев* (Москва) 49, 50, 52, 54, 55; *С. Зелик* (Краматорск) 49, 54; *И. Зефиров* (Химки) 48—50, 52, 54, 55; *Е. Иванов* (Москва) 52, 54, 55; *А. Калинин* (Саратов) 49, 50, 52, 55; *В. Калошин* (Харьков) 49, 50, 52, 54; *С. Кириллов* (Одесса) 49, 52, 54; *О. Кирнасовский* (Винница) 49, 50, 52, 54, 55; *С. Ковaценко* (Винница) 50, 52; *О. Коврижкин* (Майкоп) 49, 52, 54; *А. Козачко* (Винница) 50, 52; *И. Кокорев* (Ленинград) 49, 50, 52, 54, 55; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 49, 50, 55; *А. Коршков* (Мозырь) 49, 50, 52; *Д. Косоня* (Белорецк) 48—50, 52, 54, 55; *В. Крепец* (Новосибирск) 48—50, 52; *Г. Кроник* (Ленинград) 52; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 48—50, 52, 54; *А. Кулик* (Киев) 48—50, 52, 54, 55; *К. Куралбаева* (Алма-Ата) 50; *А. Курило* (Целиноград) 52; *К. Левин* (Киев) 49, 50; *С. Лесик* (Донецк) 49, 50; *А. Лосев* (Ленинград) 48—50, 55; *В. Лысенков* (Белорецк) 48—50, 52, 54, 55; *А. Мальцев* (п. Медведка Курской обл.) 49, 50, 52, 54; *И. Марков* (Киев) 48, 49, 52; *Т. Мартиросова* (Ташкент) 48—50, 52, 54; *В. Матвеев* (Москва) 48—50, 52, 54, 55; *А. Мельник* (Гайворон) 50; *А. Мельников* (Краснодар) 49, 52, 55; *О. Мельников* (Красноярск) 49, 50; *М. Мельцер* (Вильнюс) 48—50, 52, 54, 55; *С. Морозов* (Заволжье) 49, 52; *Ю. Морозов* (Тбилиси) 49; *Я. Мустафаев* (Баку) 48—50, 52, 54, 55; *А. Назарян* (Тбилиси) 48—50, 52, 54; *А. Натальин* (Ленинград) 52; *О. Наумов* (Заволжье) 52; *И. Онульский* (Киев) 52, 55; *О. Павлов* (Новосибирск) 49, 50, 52, 54, 55; *А. Павлунин* (Фрунзе) 49; *В. Павлунин* (Фрунзе) 52; *А. Плачко* (с. Великая Русава Винницкой обл.) 49; *В. Полищук* (Киев) 49, 50, 52; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 49, 50, 52, 54; *И. Пушкарев* (Киров) 52, 54, 55; *В. Рагулин* (Челябинск) 48—50; *Н. Рябова* (Харьков) 50, 52; *Р. Садреев* (Алма-Ата) 52, 55; *И. Сенишин* (Актюбинск) 54; *Л. Сергеев* (Жуковский) 50; *А. Силкин* (Свердловск) 49, 50, 52, 55; *И. Симакова* (Целиноград) 55; *Д. Синицкий* (Ленинград) 49, 50, 52; *С. Синякова* (Москва) 48—50, 52; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) 50, 54; *А. Скопенков* (Саратов) 50, 52; *В. Слитинский* (Киев) 48—50, 52, 54, 55; *Д. Смиренников* (Подпорожье) 50, 52; *Л. Смирнова* (Киров) 48, 50, 52, 55; *А. Смоляк* (Москва) 49, 50; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 48—50; *А. Строев* (Москва) 52; *С. Тихонов* (Воронеж) 50, 52; *Ю. Томилов* (Киев) 49, 50, 52; *Д. Туляков* (Жданов) 49, 50, 52, 54; *А. Тхор* (Червоноград) 50; *В. Федоров* (Полтава) 49; *П. Федосеев* (Новгород) 48—50, 52; *В. Федотов* (Москва) 49, 50, 54; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 49, 50, 52, 54, 55; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) 50, 52, 55; *Ф. Фот* (Томск) 48—50, 52, 54, 55; *М. Фукс* (Москва) 50; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) 49, 50; *О. Христенко* (Караганда) 49, 50, 52, 54; *Л. Цейтлин* (Харьков) 52; *А. Шаповал* (Киев) 48, 50, 55; *О. Шведов* (Москва) 52; *К. Щербаков* (Арзамас) 49, 50, 52; *Я. Эфендиев* (Баку) 49, 50, 52, 54, 55; *А. Яврян* (Ереван) 49, 50.

Физика

А. Андрианов (Кузнецовск) 60, 61; *Д. Андриенко* (Калинин) 67, 70, 72; *О. Армоник* (Гродно) 61; *А. Афонин* (Брест) 59, 61, 69, 70; *А. Баландин* (Воркута) 61; *С. Барарь* (п/о Боровуха Витебской обл.) 70; *С. Бекасова* (Старый Оскол) 70; *А. Белецкий* (Канев) 61; *С. Белоусов* (Ленинград) 59—61, 70, 72; *А. Белый* (Запорожье) 72; *А. Билибин* (Боровичи) 59, 60, 64, 66; *С. Бобровник* (Черновцы) 60, 61, 67, 69, 70, 72; *А. Болотников* (Кузнецовск) 60; *С. Бусленко* (Тула) 60, 70; *В. Быдзан* (Киев) 72; *С. Валюх* (Киев) 69, 70, 72; *И. Велиев* (Баку) 69; *К. Вербицкий* (Москва) 59—61, 66; *А. Винцюк* (Киев) 60, 70; *Д. Виткуп* (Киев) 60, 61, 66, 67, 70; *В. Вовк* (Барвенково) 61; *П. Вольфбейн* (Киев) 59—61, 64, 69, 70, 72; *С. Ганжур* (Петропавловск-Камчатский) 70; *Д. Гирис* (Омск) 70; *А. Гончаров* (Новосибирск) 59, 60, 64, 70, 72; *М. Гончаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 60; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) 70; *Б. Гуревич* (Саратов) 59, 60, 70, 72; *С. Гурский* (Новый Роздол) 70; *С. Дворник* (п. Сарыозек Талды-Курганской обл.) 60, 64, 70; *Е. Демлер* (Новосибирск) 59—61, 64, 70, 72; *Е. Демченко* (Жданов) 59—61, 72; *С. Дронов* (Пущино) 64; *А. Езерский* (Минск) 59, 61, 64, 67, 70, 72; *А. Елжов* (Дубна) 60; *А. Ельяшевич* (Минск) 60; *В. Завадский* (Минск) 59, 60, 70; *В. Завражний* (Фрунзе) 70; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) 70;

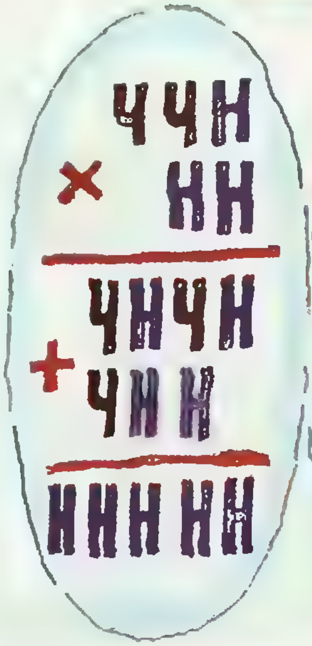
(Окончание см. на с. 38)

Задачи

1. Как перевезти в лодке с одного берега на другой козла, капусту, двух волков и собаку, если известно, что волка нельзя оставлять без присмотра с козлом и с собакой, собака «в ссоре» с козлом, а козел «неравнодушен» к капусте? В лодке только три места, поэтому можно брать с собой одновременно не более двух животных или одно животное и капусту.

2. В соревнованиях по стрельбе участвовало 30 человек. Первый стрелок выбил 80 очков, второй выбил 60 очков, третий выбил среднее арифметическое чисел очков у первых двух, четвертый — среднее арифметическое чисел очков у первых трех. И вообще, каждый следующий выбивал среднее арифметическое чисел очков, выбитых предыдущими стрелками. Сколько очков выбил последний стрелок?

3. Решите арифметический ребус, изображенный на рисунке, подставив вместо букв Ч четные цифры, а вместо букв Н — нечетные.



4. Почему лыжники и конькобежцы после финиша накидывают на себя пальто или одеяло, хотя на дистанции им было очень жарко?

5. Плоскость разбита на квадраты площадью 100 см^2. Как с помощью одной линейки (без делений) получить квадрат площадью 80 см^2?

Эти задачи нам предложили: *Е. В. Чернышов, Н. Я. Антонович, А. П. Савин, В. В. Произволов.*

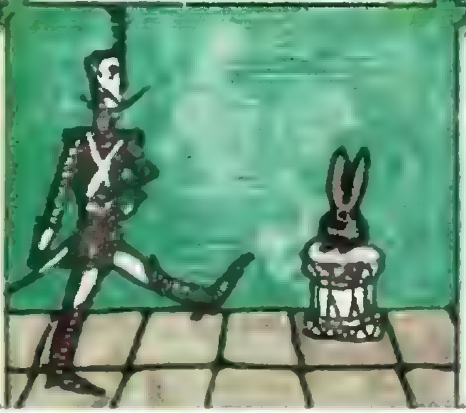
Замечательные числа .
Числа Фибоначчи

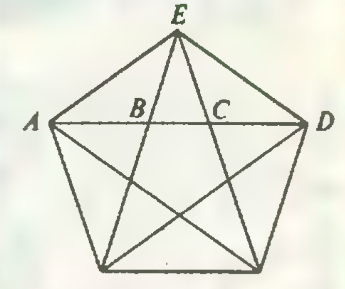
Числа Фибоначчи — это элементы числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., в которой каждое число, начиная с третьего, является суммой двух предыдущих: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$

Эти числа ввел итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) в «Книге абака» (1202). Он получил их как численность семейства кроликов, происходящих от одной пары, при условии, что каждая пара кроликов ежемесячно производит новую пару.

Оказалось, что числа Фибоначчи возникают в самых различных областях жизни. Например, если идти по дорожке, разделенной на n квадратов, каждый раз ступая на следующий квадрат или через один, то количество способов пройти такую дорожку равно f_n.

Числа Фибоначчи оказались связанными с числом $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ — «золотым сечением», а именно: $f_n = \frac{\tau^n - \tau^{-n}}{\sqrt{5}}$. Трудно поверить, что такая формула задает целые числа, но это так.





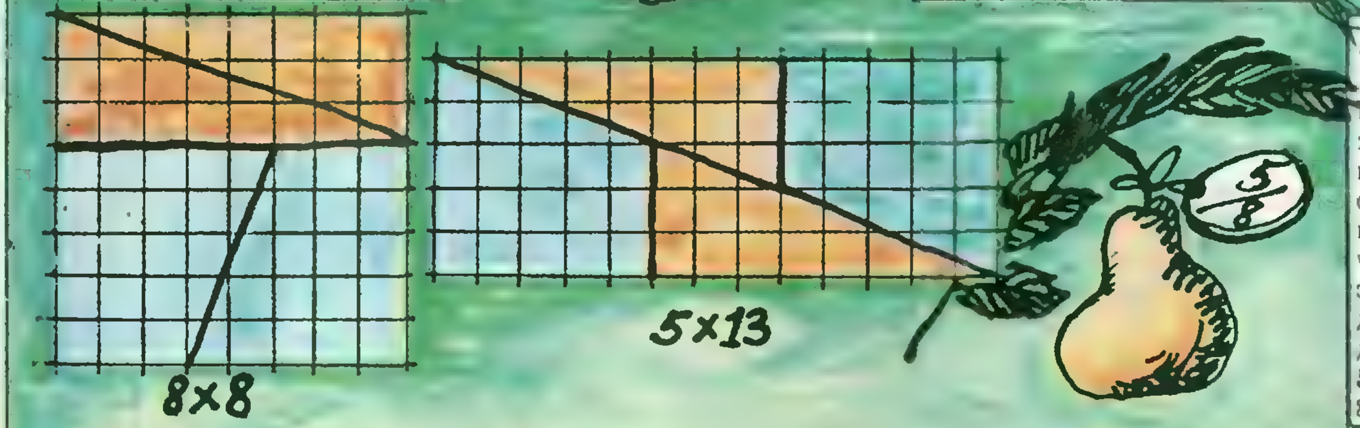
$AE:AB = AB:BC = AD:AC = \tau$

На подсолнухе семечки выстраиваются в спирали, причем количества спиралей, идущих в одну и в другую сторону, различны — они являются последовательными числами Фибоначчи (например, спиралей может быть 34 и 55). То же наблюдается и на плодах ананаса, где спиралей обычно бывает 8

Числа Фибоначчи 3, 5, 8, 13 фигурируют в любопытном геометрическом софизме, утверждающем, что «64 = 65», с помощью разрезания квадрата 8×8 и складывания из него прямоугольника 5×13. Такой же эффект дает любой набор чисел f_{2n-2}, f_{2n-1}, f_{2n}, f_{2n+1} $(n > 3)$.

Числа Фибоначчи возникают и при описании выигрышной стратегии в древней китайской игре «дзяньшицзы», в которой двое играющих берут по очереди камни из двух кучек: либо произвольное количество из одной кучки, либо поровну из двух (выигрывает игрок, берущий последний камень).

Обнаружено, что дроби вида a/b, соответствующие винтообразному расположению листьев на стебельке растения, часто являются отношениями последовательных чисел Фибоначчи. Для бука и орешника это отношение равно 2/3, для дуба и абрикоса — 3/5, для тополя и груши — 5/8, для ивы и миндаля — 8/13, и т. д.



Любопытные соотношения:

$f_1+f_2+\ldots+f_n=f_{n+2}-1;$

$f_1^2+f_2^2+\ldots+f_n^2=f_nf_{n+1};$

$f_1-f_2+\ldots+(-1)^{n+1}f_n^2=1+(-1)^{n+1}f_{n-1};$

$f_n^2-f_{n-1}f_{n+1}=f_{n+2}f_{n-1}-f_nf_{n-1}=(-1)^n;$

$f_{n+m}=f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1};$

$$f_1x+f_2x^2+\ldots+f_nx^n+\ldots=\frac{x}{1-x-x^2},$$

в частности, при $x=\frac{1}{2}$ получаем

$$\frac{f_1}{2}+\frac{f_2}{4}+\ldots+\frac{f_n}{2^n}=2;$$

$$1=1,\ 1+\frac{1}{1}=\frac{2}{1},\ 1+\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2},$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1}}=\frac{5}{3},\ldots,$$

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+1\ldots}}}=\tau.$$

ЧТО И КАК МЫ ВИДИМ

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Один физиолог, показавший действие
слепого пятна, стал
любимцем при дворе
французского короля;
на утомительных
заседаниях
со своими придворными
король развлекался,
«отрубая им головы»:
он смотрел
на одного из них
и следил, как
в это время
«исчезала»
голова другого.

(Из «Фейнмановских
лекций по физике»)

В статье «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» (она была опубликована в прошлом году в декабрьском номере «Кванта») мы напомнили читателю, что разные цвета радуги соответствуют электромагнитным волнам разной длины: от 380 нм (фиолетовый цвет) до 770 нм (красный цвет). Именно электромагнитные волны указанного интервала и составляют видимый участок спектра. К нему непосредственно примыкают инфракрасные волны (более длинные) и ультрафиолетовые (более короткие). Хотя непосредственно глазом эти лучи не воспринимаются, их также относят к оптическому диапазону. Историческая причина этого состоит в том, что для изучения инфракрасных и ультрафиолетовых лучей также можно использовать оптические приборы, аналогичные тем, что применяются для видимого света.

За областью инфракрасных волн лежат волны радиодиапазона (длина волны от 0,1 мм до 10^4 м); за ультрафиолетовыми волнами — рентгеновское излучение (от 10^{-5} нм до 10^2 нм). Свойства радиоволн и волн рентгеновского диапазона сильно отличаются от свойств волн оптического диапазона, и для их изучения применяются принципиально иные методы.

Действие ультрафиолетового излучения вы наверняка ощущали на себе: под действием солнечного света, который содержит и ультрафиолетовые лучи, кожа покрывается загаром. Инфракрасное излучение тоже вам знакомо — вспомните рефлектор-обогреватель, принцип действия которого тот же, что и у прожектора, только в этом случае мы имеем дело с тепловым прожектором. Кстати, инфракрасные лучи еще называют тепловыми лучами.

Хочется обратить внимание читателя на то, что в свете сказанного понятие прозрачности является относительным — через обычное стекло хорошо видно, однако загореть невозможно (другое дело — кварцевое стекло); обычное стекло также плохо пропускает инфракрасные лучи.

Итак, глаз не восприимчив к инфракрасным и ультрафиолетовым лучам. Но и в видимом диапазоне чувствительность глаза также неодинакова к различным цветам. Иллюстрацией этому может служить кривая спектральной чувствительности глаза, которая в относительных единицах передает «остроту» восприятия глазом различных цветов (рисунок 1).

Вопрос о восприятии света и цвета человеком далеко не прост. Основная сложность состоит в том, что, помимо чисто физического преобразования световых сигналов, в формировании ощущения цвета большую роль играет нервная система человека.

Лучи света, попадающие в глаз, преломляются и образуют на сетчатке изображение предмета, который мы разглядываем. (Любопытно, что в древности существовало множество самых разнообразных теорий зрения. Хорошо известное выражение «свет очей» отражает как раз представление древних греков о том, что ощущение видимого возникает из-за

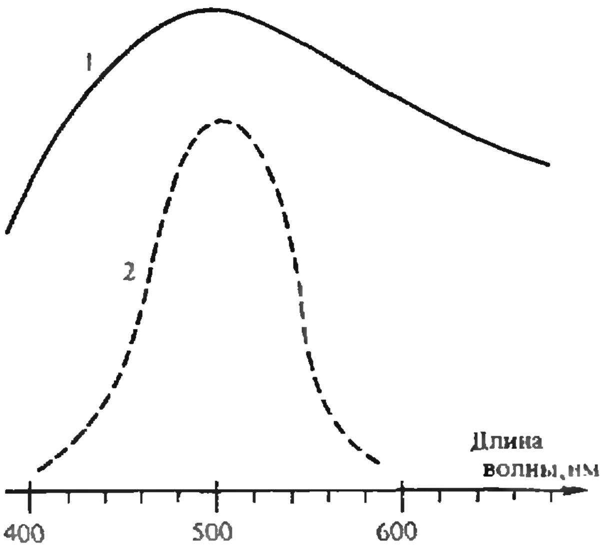


Рис. 1. Кривая 1 характеризует распределение энергии солнечного излучения по длинам волн, а кривая 2 описывает цветовую чувствительность глаза. Видно, что в солнечном свете на область фиолетовых лучей приходится меньше энергии, чем на синюю область; и глаз более чувствителен к синему цвету. Поэтому, хотя фиолетовые лучи рассеиваются сильнее, чем синие, доминирующим оказывается синий цвет, и небо мы видим голубым.

испускания глазами специального «флюида».) Сетчатка представляет собой разветвления зрительного нерва, и нервные окончания бывают двух типов — палочки и колбочки (эти названия связаны с формой). При слабом освещении зрение в основном обусловлено палочками, но, к сожалению, они не способны обеспечить цветовое зрение. За цветовое зрение ответственны колбочки, а они начинают «включаться» лишь при достаточном освещении. С этим, кстати, и связано происхождение выражения «ночью все кошки серы» — при очень слабом освещении все предметы кажутся обесцвеченными.

Слабый свет от звезд, доходящий к Земле, позволяет нам определить цвета лишь самых ярких из них; между тем, сделанные с помощью телескопа цветные снимки звездного неба поражают богатством и красотой красок — к сожалению, глазу они недоступны. Однако чувствительность нашего «бесцветного» зрения поистине удивительна: глаз может в принципе регистрировать даже единичные фотоны. Фотон — квант электромагнитного колебания, как бы самая малая энергетическая порция излучения. (Здесь мы сталкиваемся с тем, что, согласно квантовой теории, свет, с одной стороны, электромагнитная волна, а с другой стороны, поток частиц — квантов или фотонов.)

Как мы уже говорили, формирование цветового ощущения — сложный процесс. Светочувствительные клетки глаза связаны не только с мозгом, но и друг с другом. Глаз как бы сам проводит первичную обработку световой информации. Неслучайно при развитии зародыша глаз формируется путем вырастания волокон непосредственно из мозга, и по сути дела он является частью мозга.

Кстати, то место на сетчатке, откуда выходит, разветвляясь, зрительный нерв, лишено световой чувствительности — там нет палочек и колбочек; оно носит название «слепое пятно». Если изображение предмета на сетчатке попадает на слепое пятно, то предмет не виден. Открыл слепое пятно известный физик Мариотт, сообщение об этом феномене было им сделано на заседании Парижской академии в 1666 году. Он же был тем «физиологом» (из эпиграфа к статье), который научил французского короля гуманному способу «отрубать головы» своим придворным.

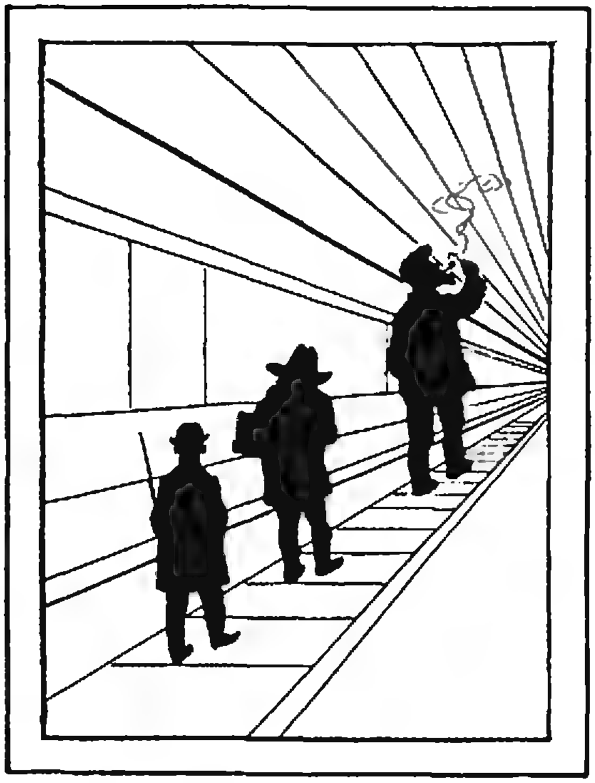


Рис. 2.

Важную роль мозга при восприятии внешних образов иллюстрирует такой пример. Если человек станет носить очки, которые делают изображение перевернутым, то сначала человек все будет видеть «вверх ногами». Однако через некоторое время восприятие внешних образов станет привычным. А вот после снятия очков предметы будут казаться перевернутыми, и потребуется определенное время, чтобы все стало на свои места.

Посмотрите теперь на рисунок 2, где изображены три человечка. Кажется совершенно очевидным, что нижний намного меньше верхнего. Линейка, однако, докажет вам, что все человечки одной высоты. Все дело здесь в лучевых линиях, которые создают ощущение перспективы. Также трудно поверить, что прямые на рисун-

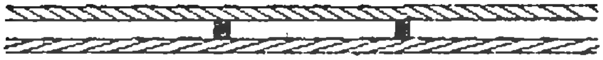


Рис. 3.

ке 3 параллельны. Подобного рода эффекты доставляли неприятности архитекторам еще в древнейшие времена: чтобы очертания постройки казались прямыми, их при строительстве приходилось искривлять. Пожалуй, наиболее яркое впечатление создают картины голландского художника Эшера, наглядно иллюстрирующие условность нашего восприятия (репродукция картины Эшера помещена на второй странице обложки этого номера).

А как вы думаете, почему возникают перед глазами цветные круги, если в полной темноте задеть головой о дверной косяк? а если о фонарь?

Наш глаз плохо приспособлен для строгого анализа цветового состава света. Для этой цели лучше использовать физические приборы (простейший из них — призма). Зато, смешивая в определенной пропорции всего лишь три цвета, например красный, желтый и синий, можно получить практически любой цвет (по крайней мере, ощущение цвета). Это, кстати, широко используется в цветном телевидении. Все краски на экране цветного телевизора возникают в результате соответствующего наложения трех основных цветов. Аналогично, всего три краски используются и при цветной печати. Так, смешав желтую и синюю краски, мы получим зеленый цвет, направив на экран желтый и синий лучи, мы увидим зеленое пятно. Совершенно ясно, что полученный таким способом зеленый цвет вовсе не есть «чистый» зеленый цвет, который входит в состав радуги и отвечает электромагнитной волне определенной длины. Просто-напросто в двух этих случаях создается одинаковое ощущение цвета. Несмотря на сказанное, богатство красок, воспринимаемых человеческим глазом, очень велико — хорошие художники различают до трехсот оттенков.

И в завершение — еще один «цветной» сюжет, из области... физики элементарных частиц. Выдуманные крупнейшим физиком-теоретиком современности Гелл-Маном экзотические крупицы материи — кварки — не только получили право на не совсем обычное существование (в свободном состоянии они находиться не могут), но и приобрели еще и «окраску». Они бывают трех «цветов» — красного, зеленого и синего. Обычный протон, состоящий из трех «разноцветных» кварков, будет по этой теории «белым», т. е. «бесцветным». Смешивая эти три цвета в разных комбинациях, можно получить любой другой цвет видимого спектра, что и применяется в цветном телевидении.

Таким образом, современная физическая наука способна с уверенностью говорить о цвете даже таких объектов, непосредственную возможность наблюдения которых она с не меньшей уверенностью отвергает. Поистине, человеческое воображение не имеет пределов...

И прежде чем поставить точку, предлагаем вам подумать над такими вопросами.

1. Известно, что, загорая в полдень, можно просто «сгореть». А вот опасность солнечного ожога в утренние и вечерние часы практически «нулевая». Почему?

2. Если смотреть на луч прожектора сбоку, то он кажется изогнутым. Почему?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 30)

Ф. Занин (Старый Оскол) **70, 72**; *Д. Звонов* (Челябинск) **61, 70**; *Д. Зеленский* (Семипалатинск) **61, 69**; *С. Зеленский* (Семипалатинск) **69**; *Е. Зельцер* (Киев) **60, 61, 64, 66, 67, 70**; *А. Зискинд* (Винница) **60, 69, 70**; *Я. Зубков* (Алма-Ата) **72**; *К. Зуев* (Вологда) **61, 70**; *И. Илиев* (Плевен, НРБ) **60**; *А. Исаков* (Калининград) **59, 61**; *М. Ифеев* (Москва) **69, 70, 72**; *С. Казенас* (Алма-Ата) **69, 70**; *Е. Казьмирук* (п. Черноголовка Московской обл.) **60, 70**; *А. Каипов* (Алма-Ата) **72**; *В. Каменькович* (Харьков) **60, 64, 69**; *М. Камцева* (Старый Оскол) **70**; *В. Камчатный* (Киев) **72**; *А. Капустин* (Москва) **59—61, 70, 72**; *А. Клочанов* (Алма-Ата) **61, 70**; *М. Ковалев* (Губкин) **72**; *А. Колесник* (Старый Оскол) **61**; *А. Комник* (Старый Оскол) **60, 70**; *А. Коновалов* (Мытищи) **61**; *И. Коновалов* (Киев) **72**; *Е. Корсунский* (Харьков) **59—61, 72**; *А. Коршиков* (Мозырь) **64, 70, 72**; *А. Корытько* (Киев) **60**; *М. Кравченко* (Казань) **70**; *Ю. Кравченко* (Москва) **59—61, 67, 70, 72**; *В. Куклев* (Ленинград) **60, 67**; *Ю. Кумпан* (Москва) **70**; *О. Кушнир* (Дубляны) **60, 70**; *С. Лапин* (Саратов) **72**; *Ю. Левин* (Харьков) **64**; *В. Лендерман* (Киев) **60, 70**; *А. Лосев* (Ленинград) **70**; *И. Лохтин* (Москва) **60, 70**; *О. Лугуев* (Махачкала) **60, 61**; *А. Лутовинов* (Мичуринск) **70**; *А. Львовский* (Москва) **61**; *А. Мазуренко* (Минск) **59—61, 64, 67, 69, 70, 72**; *А. Майков* (Старый Оскол) **60, 61, 70**; *А. Маливанчук* (Киев) **60, 61, 70, 72**; *Р. Малков* (Саратов) **59—61, 64, 66, 69, 70, 72**; *А. Малышев* (п. Медвянка Курской обл.) **59—61**; *А. Мамаев* (Заволжье) **64**; *А. Мацко* (Киев) **60, 61, 72**; *И. Межуев* (Коломна) **59**; *А. Мелеховец* (Брест) **72**; *В. Меркер* (Старый Оскол) **70, 72**; *А. Мина* (Киев) **72**; *Н. Михайловский* (Красноярск) **59—61**; *Я. Михеев* (Киев) **72**; *Е. Моисеев* (Запорожье) **72**; *В. Мороз* (Ленинград) **59—61, 64, 67**; *К. Недбаев* (Брест) **72**; *А. Никитин* (Ленинград) **60, 61, 64**; *К. Николаев* (п. Черноголовка Московской обл.) **70, 72**; *А. Никонюк* (Ровно) **70**; *А. Новик* (Мозырь) **61, 69, 70, 72**; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) **70**; *С. Ночевный* (Запорожье) **60, 72**; *А. Окунев* (Гродно) **61, 72**; *В. Ольховец* (Киев) **70, 72**; *З. Османов* (Тбилиси) **61**; *В. Павлунин* (Фрунзе) **70**; *Д. Пастухов* (Москва) **60, 66, 67, 69, 70, 72**; *К. Пенанен* (Одесса) **59—61, 64, 67, 69, 70, 72**; *И. Петков* (Враца, НРБ) **60**; *Л. Петько* (Минск) **60, 64, 67, 69, 70**; *А. Подтележников* (Харьков) **59—61, 64, 69, 70, 72**; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) **59—61, 72**; *П. Полынкин* (Тула) **61, 69, 70**; *Л. Пономаренко* (Буск) **59**; *Д. Почуев* (Харьков) **60, 61**; *У. Рахманов* (Новосибирск) **72**; *А. Резуненко* (Харьков) **60**; *А. Рожков* (Калининград) **69, 70, 72**; *А. Рыжов* (Горький) **60, 69, 70, 72**; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) **59, 60, 69, 72**; *А. Садыков* (Казань) **70**; *С. Сазонов* (Климовск) **59—61, 66, 70**; *В. Сакбаев* (Пушкино Московской обл.) **70**; *А. Свердлов* (Ленинград) **70**; *В. Свидзинский* (Киев) **60, 64, 67, 70**; *М. Сергазин* (Алма-Ата) **70, 72**; *А. Сибиряков* (Томск) **59, 61, 64, 70, 72**; *А. Сидоров* (Молодечно) **60, 69**; *Т. Ситько* (Киев) **72**; *М. Соколов* (Одинцово) **60, 61, 64, 66**; *А. Стародубов* (Алма-Ата) **70**; *М. Субботин* (Старый Оскол) **70, 72**; *В. Суклиян* (Одесса) **61**; *А. Супруненко* (Киев) **70**; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) **60, 64**; *Д. Тильга* (Алма-Ата) **69, 70**; *А. Тодоров* (Ярославль) **61, 67**; *И. Тодощенко* (Пермь) **59, 60, 64, 69, 70, 72**; *О. Толмачев* (Киев) **72**; *А. Толстых* (Днепродзержинск) **70, 72**; *Ю. Туркин* (Луцк) **61**; *Ю. Уваров* (Ленинград) **60, 61, 64**; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) **59, 64, 69, 72**; *Е. Устимова* (Старый Оскол) **70**; *Е. Ушаков* (Старый Оскол) **66, 70**; *В. Федотов* (Москва) **72**; *Г. Фейгин* (Тула) **60, 70**; *С. Фираго* (Шклов) **59—61, 72**; *Ф. Фот* (Воронеж) **61, 70, 72**; *И. Фролов* (Москва) **60, 61, 67, 70**; *С. Хайретдинов* (Киев) **70**; *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) **59, 60**; *И. Химони* (Днепропетровск) **72**; *А. Хисамов* (Уфа) **59**; *Х. Ходжаев* (Касансайский р-н Наманганской обл.) **72**; *И. Чайка* (Кузнецовск) **59—61, 66, 67, 70**; *О. Чанов* (Брест) **60, 72**; *А. Черепицкий* (п/о Назимово Псковской обл.) **60**; *О. Черных* (Старый Оскол) **70**; *Р. Чистов* (Рига) **70**; *В. Чуев* (Старый Оскол) **70, 72**; *Я. Шанина* (Старый Оскол) **70, 72**; *В. Шварцман* (Брест) **72**; *О. Шведов* (Москва) **67, 72**; *С. Шинкевич* (Березники) **60, 61, 64, 70, 72**; *О. Шиховцев* (Верхняя Салда) **70**; *А. Шишкин* (Уфа) **60**; *С. Штовба* (Винница) **60, 69, 70, 72**; *В. Южанинов* (Мозырь) **61**; *А. Яблоков* (с. Рождественское Костромской обл.) **61**; *И. Ягольницер* (Черновцы) **70**; *В. Янкевич* (Витебск) **67**; *И. Ясников* (Тольятти) **60, 72**.

Новые книги издательства «Наука»

Готовятся к печати:

Богатырев Г. И., Боковнев О. А. *Пособие по математике для подготовительных курсов техникумов на базе 8 классов средней школы.* Учебное пособие. Изд. 2-е, перераб. 23 л. 80 к.

Задачи по физике. Учебное пособие. Под ред. О. Я. Савченко. Изд. 2-е, перераб. 26 л. 1 р. 10 к.

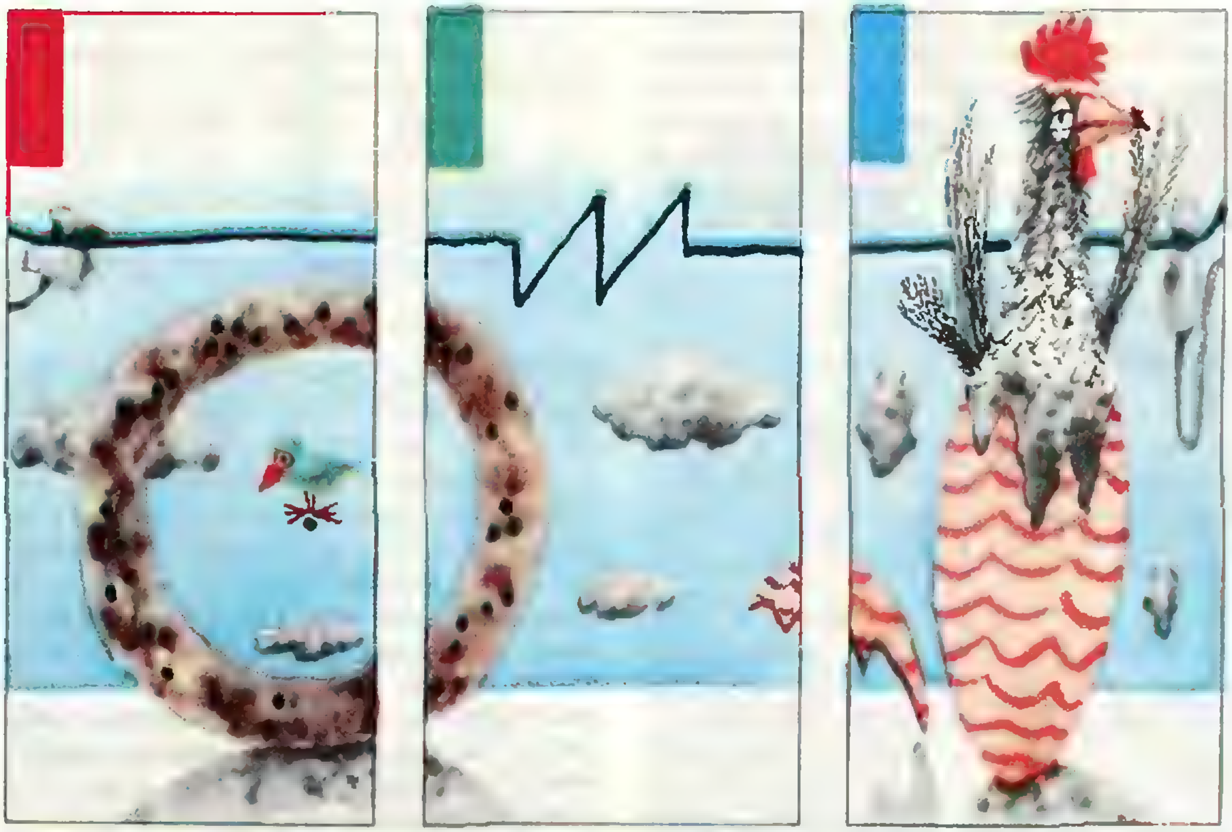
Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. *Драма идей в познании природы (частицы, поля, заряды).* (Библиотечка «Квант»). 10 л. 40 к.

Пособие по математике для поступающих в вузы. Учебное пособие. Под ред. Г. Н. Яковлева. Изд. 3-е, перераб. 41 л. 1 р. 50 к.

Сборник задач и вопросов по физике для средних специальных учебных заведений. Учебное пособие. Под ред. Р. А. Гладковой. Изд. 7-е, перераб. 22 л. 1 р.

Стасенко А. Л. *Физика полета.* (Библиотечка «Квант»). 10 л. 40 к.

(Окончание см. на с. 59)



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Что такое центр масс» предназначена восьмиклассникам, заметка «Как в металле протекает электрический ток?» — девятиклассникам, «О машине времени и теории относительности» — десятиклассникам.

Что такое центр масс

Если вы бросите камень под углом к горизонту, он, как известно, полетит по параболе. А если бросить длинную палку, да еще закрутить ее как следует? Конечно, разные точки палки движутся по-разному, описывая довольно сложные траектории, но полет палки в целом чем-то похож на полет камня: подъем, верхнее положение, спуск. Мало того, если пренебречь сопротивлением воздуха, то движение одной определенной точки палки ничем не будет отличаться от движения камня, свободно летящего по параболе. Эта точка — центр масс палки.

Центр масс существует у любого тела, более того — у любой системы тел. Он обладает замечательными свойствами, с некоторыми из них вас познакомит эта заметка.

Начнем с определения положения центра масс. Рассмотрим систему материальных точек с массами $m_1, \ldots$ $\ldots, m_n$. Как, зная их координаты, найти координаты этой «самой важной точки»? Ответ выглядит так:

$$x_{\text{цм}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \qquad (1)$$

аналогично для координат $y_{\text{цм}}$ и $z_{\text{цм}}$. Почему именно так определяется центр масс, станет ясно позднее, когда мы рассмотрим его динамические свойства. А пока освоимся с выражением (1), обсудив несколько связанных с ним вопросов.

а) В случае двух точек массами m_1 и m_2 выражение для $x_{\text{цм}}$ имеет наглядный смысл: центр масс лежит между точками, ближе к той, у которой масса больше (рис. 1); отношение расстояний до точек обратно отношению их масс (проверьте это сами). Ясно, что в общем случае центр масс лежит где-то между точками системы, отражая распределение масс в пространстве.

б) Все материальные точки «участвуют» в определении положения центра масс совершенно равноправно. Значит, если расположение масс симметрично относительно какой-то точки, то эта точка и будет центром масс. Например, центр масс однородного шара совпадает с его центром (то же для цилиндра, куба и т. п.).

в) И еще одно. Оказывается (попробуйте это доказать), положение центра масс не изменится, если мы, выделив какую-то часть рассматриваемой системы, сосредоточим всю массу этой части в одной точке — ее центре масс. Например, центр масс проволочного треугольника совпадает с центром масс системы трех точек, расположенных в серединах сторон (массы точек равны массам соответствующих сторон).

Перейдем теперь к самому главному — изучению физических свойств центра масс.

Пусть за малое время Δt точки переместятся на $\vec{s}_1, \ldots, \vec{s}_n$. Тогда, как видно из (1), перемещение центра масс будет равно

$$\vec{s}_{\text{цм}} = \frac{m_1\vec{s}_1 + m_2\vec{s}_2 + \ldots + m_n\vec{s}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}$$

(напомним, что проекции вектора перемещения на оси равны изменениям соответствующих координат). Разделив перемещение на Δt, найдем скорость центра масс:

$$\vec{v}_{\text{цм}} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \ldots + m_n\vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (2)$$

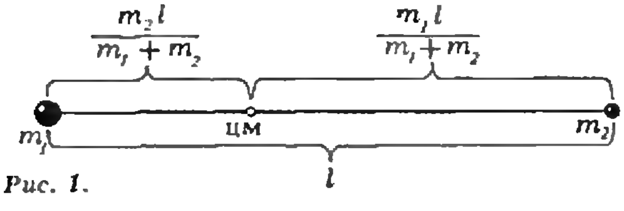


Рис. 1.

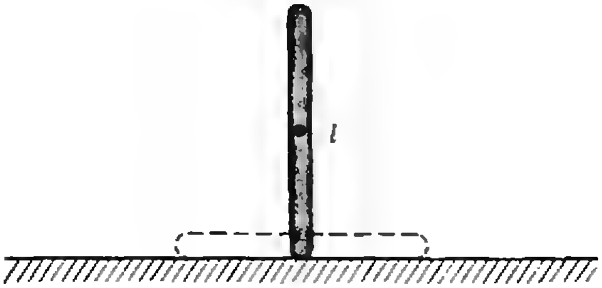


Рис. 2.

Обратите внимание — в числителе стоит не что иное, как полный импульс системы $\vec{P}$. Поэтому выражение (2) можно записать в виде

$$\vec{P} = (m_1 + m_2 + \ldots + m_n)\vec{v}_{\text{цм}}. \qquad (3)$$

Итак, первое свойство: если всю массу системы мысленно сосредоточить в центре масс, то импульс этой воображаемой точки будет равен полному импульсу системы. Что из этого следует? Мы знаем, например, что импульс замкнутой системы сохраняется. Значит, если система замкнута, скорость ее центра масс $\vec{v}_{\text{цм}}$ остается постоянной.

Рассмотрим пример. Однородная тонкая палочка длиной l стоит вертикально на гладком полу (рис. 2). Ее отпускают, после чего она падает плашмя. Как узнать на сколько сдвинется нижний конец палочки к моменту падения? Одна палочка в поле тяготения не является замкнутой системой; но, раз на нее действуют только вертикальные силы, горизонтальная проекция ее импульса не меняется, в нашем случае — остается равной нулю. Значит, центр масс не смещается в горизонтальном направлении, т. е. центр палочки упадет в то место, где она стояла, а ее нижний конец сместится на $l/2$.

Продолжим обсуждение свойств центра масс. Рассмотрим систему двух материальных точек массами m_1 и m_2. Пусть эта система не замкнута, т. е. на каждое тело действуют как внутренние, так и внешние силы. Исходя из второго закона Ньютона, запишем изменение импульса каждой точки за время Δt:

$$m_1\Delta\vec{v}_1 = (\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\,\Delta t,$$
$$m_2\Delta\vec{v}_2 = (\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\,\Delta t,$$

где $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — внешние силы, $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на первую точку со стороны второй, $\vec{F}_{21}$ — соответственно, наоборот. По третьему закону Ньютона $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$, поэтому изменение импульса всей системы равно

$$\Delta\vec{P}=m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\,\Delta t$$

— импульс системы меняется только под действием внешних сил. С другой стороны, из выражения (3) следует, что

$$\Delta\vec{P}=(m_1+m_2)\,\Delta\vec{v}_{\text{цм}}.$$

Отсюда для центра масс получаем соотношение, аналогичное второму закону Ньютона:

$$(m_1+m_2)\Delta\vec{v}_{\text{цм}}=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t,$$

которое можно переписать в более привычном виде:

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=(m_1+m_2)\vec{a}_{\text{цм}}. \qquad (4)$$

Это — самое главное: центр масс движется так, как будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы. Обратите внимание — именно внешние силы. Внутренние силы системы вообще не влияют на движение ее центра масс. Вот почему движение этой точки во многих случаях оказывается достаточно простым.

Это свойство центра масс имеет многочисленные приложения. Например, теперь вам, наверное, ясно, почему середина палки, брошенной под углом к горизонту (о которой шла речь в самом начале заметки), движется, как и камень, по параболе. В отсутствие трения о воздух внешняя сила равна $m\vec{g}$, и, значит, ускорение центра масс, как и ускорение камня, равно $\vec{g}$, независимо от того, происходит ли вращение палки.

Разберем такой пример. Подъемный кран подает на строительную площадку тяжелую плиту. Чтобы развернуть эту плиту, двое рабочих толкают ее в точках A и B с одинаковой по модулю силой (рис. 3). Относительно какой точки начнет поворачиваться плита? Ручаемся, что многие из вас сразу же ответят так: конечно, относительно точки C, лежащей посередине между точками A и B. Не торопитесь! Правильный ответ: относительно точки O — центра масс плиты. Посмотрите на уравнение (4). Раз сумма внешних сил равна

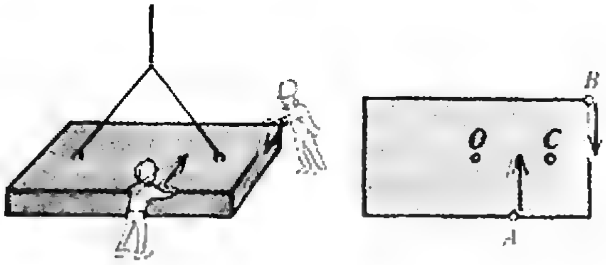


Рис. 3.

нулю, значит, равно нулю ускорение центра масс — он и будет оставаться в покое.

В заключение — еще об одном «удобстве» центра масс. Как следует из уравнения (3), в системе отсчета, связанной с центром масс, полный импульс системы тел равен нулю. Ясно, что в такой системе движение должно выглядеть проще — ведь система как целое покоится. Особенно удобно использовать этот прием, если система замкнута. Ведь тогда ускорение центра масса равно нулю (см. уравнение (4)), и связанная с ним система отсчета является инерциальной. Например, центральный удар двух упругих шаров в такой системе выглядит так просто, что можно сразу угадать ответ: после удара шары разлетаются с такими же скоростями, с какими они вначале сближались. Подумайте сами, почему это так.

А. И. Черноуцан

Как в металле протекает электрический ток?

Этот вопрос обычно не вызывает затруднений у школьников. Как протекает? Да очень просто. Если между концами проводника, например металлического, поддерживать разность потенциалов, то в нем возникает электрическое поле. Действуя на имеющиеся в металле свободные электроны, это поле придает им ускорение в направлении того конца проводника, потенциал которого выше (заряд электронов отрицательный). Возникает направленное движение зарядов, которое и является электрическим током.

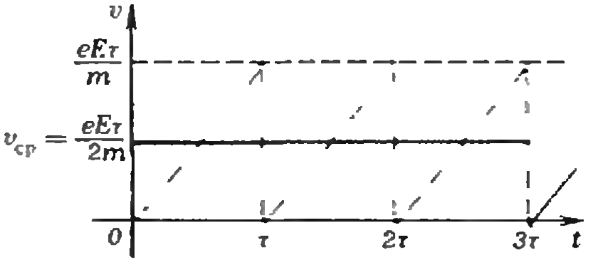
Нельзя сказать, что такой ответ ошибочен. Все слова в нем верны. Однако этот, на первый взгляд исчерпывающий, ответ сразу же вызывает целый ряд других вопросов и возражений. Попробуем в них разобраться.

Как движутся электроны при создании между концами проводника разности потенциалов? Казалось бы, ускоренно, ведь на них все время действует сила $\vec{F}=e\vec{E}$ ($\vec{E}$ — напряженность электрического поля в проводнике). Но, с другой стороны, если бы это действительно было так, то сила тока в любом сечении проводника со временем возрастала бы, что противоречит закону Ома — при постоянном напряжении сила тока, протекающего по проводнику, постоянна: $I=U/R$. Как же быть? Вспомним о внутреннем устройстве металла.

Валентные электроны атомов металлов связаны с атомами весьма слабо. Поэтому при образовании кристаллической решетки они легко отрываются от атомов и образуют довольно плотный электронный газ (даже если от каждого атома оторвется лишь по одному электрону, то их концентрация в таком газе окажется порядка $n \sim 10^{29}$ 1/м^3, в чем вы можете убедиться самостоятельно). Рассуждая выше о протекании тока через металл, мы считали эти электроны свободными. В определенном смысле это верно, но не следует забывать и об их окружении — ионной кристаллической решетке.

Созданная в конце XIX — начале XX веков классическая электронная теория сопротивления металлов предполагала, что в процессе движения под действием электрического поля электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки. Среди этих столкновений бывают и такие, при которых электроны всю приобретенную при разгоне в электрическом поле энергию передают решетке. Именно такие столкновения, их называют эффективными, и ответственны за сопротивление металла. Остальные столкновения для понимания механизма протекания тока можно не принимать в расчет (после них изменяется лишь направление скорости электронов, но не ее величина).

Пусть среднее время между соударениями есть τ. Тогда можно представить себе следующую модель движения электрона в металле, в котором создано электрическое поле. В интервале времени от 0 до τ электрон движется с ускорением $\vec{a}=e\vec{E}/m$, и, следовательно, проекция скорости его направленного движения против поля $\vec{E}$ линейно возрастает со временем: $v=at=eEt/m$. В момент времени τ электрон сталкивается с ионом и полностью передает кинетическую энергию своего направленного движения решетке. Далее он снова ускоряется электрическим полем, и процесс повторяется. График зависимости проекции скорости упорядоченного движения от времени приведен на рисунке.



Такое кусочно-равноускоренное движение можно представить себе как равномерный дрейф электрона в направлении, противоположном полю, со скоростью $v_{ср}=eE\tau/(2m)$. Вычислим связанную с этим движением силу тока.

Число электронов, проходящих через сечение S проводника за время Δt, есть $\Delta N=nSv_{ср}\Delta t$. При этом переносится заряд $\Delta q=e\Delta N=neSv_{ср}\Delta t$. Следовательно, в проводнике протекает ток

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=nev_{ср}S=\frac{ne^2\tau}{2m}SE.$$

Величина

$$j=\frac{I}{S}=\frac{ne^2\tau}{2m}E$$

называется плотностью тока.

Оказывается, полученный нами коэффициент при напряженности поля E, который составлен только из микроскопических характеристик металла, есть не что иное, как величина, обратная удельному сопротивлению металла ρ.

Ну вот, кое-что стало проясняться. Однако вопросы еще остались. Давайте, например, оценим среднюю скорость направленного движения электронов. Пусть по медному проводнику сечением, скажем, 10 мм² и концентрацией электронов $n=1{,}67\cdot10^{29}$ 1/м³ протекает ток $I=10$ А. Тогда средняя скорость

$$v_{ср}=\frac{I}{neS}\approx0{,}04\ \text{мм/с}.$$

Если же по известному из эксперимента значению ρ определить время между эффективными соударениями, то окажется, что $\tau\sim10^{-14}$ с. Поэтому, если предполагать, что пробег между эффективными соударениями происходит со средней скоростью $v_{ср}\sim$ $\sim0{,}1$ мм/с, то мы приходим к абсурдному утверждению: расстояние между двумя соударениями электрона составляет $l=v_{ср}\tau\sim10^{-18}$ м, что на много порядков меньше расстояния между ближайшими ионами в решетке. Следовательно, мы снова чего-то не учли. А не учли мы того, что частицы электронного газа в металле, подобно молекулам идеального газа в сосуде, находятся в постоянном хаотическом движении. Однако, если воспользоваться такой аналогией и вместо $v_{ср}$ подставить в выражение для l тепловую скорость $v_т=\sqrt{3kT/m}$ (см. § 11 «Физики 9»), то этого все равно окажется недостаточно для согласия с опытными данными (убедитесь в этом самостоятельно).

Мы исчерпали возможности классической физики. В действительности последовательная теория сопротивления металлов была построена только в середине двадцатого века с помощью представлений квантовой физики. Оказалось, что электроны в металле движутся с гигантскими скоростями $v_e\sim0{,}01c$ (c — скорость света в вакууме). Это хаотическое движение частиц электронного газа имеет чисто квантовое, а не тепловое происхождение — оно не прекращается даже при абсолютном нуле температуры. Но и при столь огромных скоростях хаотического движения электронов в отсутствие электрического поля средний перенос заряда через выделенное сечение проводника равен нулю. При включении электрического поля на это хаотическое движение накладывается упорядоченный дрейф электронов против поля — как это уже было описано выше. Расстояние же между двумя последовательными соударениями определяется именно большой скоростью хаотического движения и составляет для взятого нами конкретного медного проводника несколько десятков (а может быть, даже сотен) межатомных расстояний, что уже вполне правдоподобно.

И, наконец, последняя неожиданность. Согласно законам квантовой механики, электрон в идеальной периодической кристаллической решетке двигается так, что он... никогда не сталкивается с ионами, ее образующими. А как же быть тогда со всеми нашими предыдущими умозрительными построениями? Как же тогда электроны при своем движении в кристалле передают свою энергию решетке?

Оказывается, при низких температурах электроны сталкиваются с примесными атомами и другими дефектами, всегда имеющимися в решетке реального кристалла. Устраняя их, сопротивление кристаллического металла можно делать все меньше и меньше. При комнатных же температурах электроны в основном рассеиваются на... колебаниях решетки. Если в неподвижной решетке они еще могли «строить» свое поведение так, чтобы «обойти» все периодически повторяющиеся ионы, то когда последние совершают тепловые колебания, электроны уже никак не могут «уследить» за их хаотическим движением и неизбежно сталкиваются то с одним, то с другим.

Вот, вкратце, какие «подводные камни» встретились нам при внимательном рассмотрении, казалось бы, такого ясного вопроса.

А. А. Варламов

О машине времени и теории относительности

В восьмой главе курса физики для 10 класса вы познакомились с постулатами специальной теории относительности (СТО) и основными следствиями из них. Одно из положений СТО утверждает, что одновременность пространственно разделенных событий относительна, т. е. зависит от того, в какой системе отсчета ведется наблюдение. Это утверждение, как и многие другие, относящиеся к теории относительности, кажется странным, даже парадоксальным и уж во всяком случае противоречащим здравому смыслу. А почему?

С первых шагов научной фантастики одним из излюбленных приемов жанра стало «перемещение во времени». Многие авторы используют его для создания красивого «временно́го парадокса», абсурдного замыкания цепочки событий. Так, героиня одного фантастического рассказа перемещается в предыдущее столетие и знакомится с симпатичным юношей, который, как ей известно, должен стать автором замечательных открытий. Именно так и происходит, но только благодаря тому, что сама героиня, обладая хорошей памятью, вовремя излагает ему все детали очередного открытия, известного ей из «будущих» учебников и монографий. Как вы понимаете, никто ничего не открывал. Просто из-за перемещения во времени следствие (героиня рассказа знает детали открытия) произошло раньше причины (совершение самого открытия), что и привело к парадоксу.

Чтобы таких парадоксов не возникало, нельзя, как подсказывает здравый смысл, менять местами прошлое и будущее.

— Стоп! — скажете вы.— В таком случае, что-то не в порядке с теорией относительности. Ведь относительность одновременности означает, что для разных наблюдателей порядок следования событий во времени может быть различным.

Поясним это на конкретном примере. Рассмотрим неподвижно стоящую на рельсах очень длинную платформу *A*, на концах которой находятся два приемника света, и два поезда *B* и *C*, едущих вправо и влево соответственно. В какой-то момент времени в точке, расположенной точно посередине между приемниками, производится мгновенная вспышка света. Назовем это событием № 1. Тогда событие № 2 — луч света фиксируется левым приемником и событие № 3 — луч света фиксируется правым приемником. Ясно, что в системе отсчета, связанной с платформой *A*, события № 2 и № 3 происходят *одновременно.* Однако в системе отсчета, связанной с поездом *B*, который едет вправо, событие № 3 произойдет *раньше,* чем событие № 2, так как правый приемник в этой системе движется навстречу лучу света, а левый приемник от луча света убегает. В системе же отсчета, связанной с поездом *C*, который едет влево, событие № 3 произойдет *позже,* чем событие № 2. Все дело тут, конечно, в том, что для всех трех наблюдателей свет распространяется с одной и той же скоростью (в соответствии со вторым постулатом СТО).

Получается, что с появлением СТО само понятие «раньше-позже» стало относительным. То, что в одной системе отсчета было «раньше», в другой системе может оказаться «позже».

— Все это выглядит очень странным,— скажете вы.— Как мы видели, менять события местами во времени чревато серьезными последствиями.

Оказывается, все не так страшно. Лишая абсолютного смысла понятия «раньше-позже» и «одновременно», СТО никогда не приводит к нарушению причинно-следственных связей между событиями. Если одно событие является следствием другого, то в любой системе отсчета оно будет происходить позже. Обратите внимание — во всех трех системах отсчета (*A*, *B* и *C*) событие № 1 (испускание света) происходит раньше

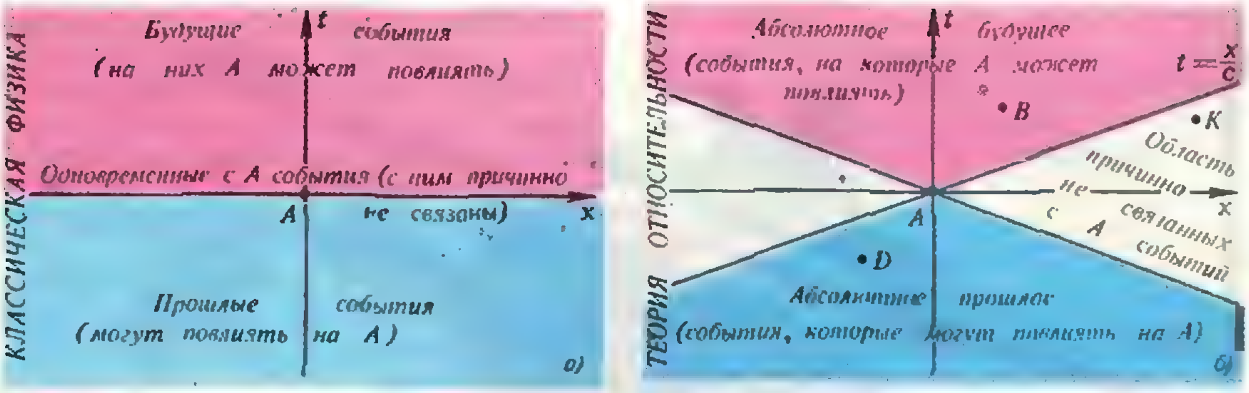

КЛАССИЧЕСКАЯ ФИЗИКА
Будущие события
(на них А может повлиять)
t
Одновременные с А события (с ним причинно не связаны)
A
x
Прошлые события
(могут повлиять на А)
а)
ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ
Абсолютное будущее
(события, на которые А может повлиять)
t
$t = \frac{x}{c}$
B
K
Область причинно не связанных с А событий
x
A
D
Абсолютное прошлое
(события, которые могут повлиять на А)
б)

Схема абсолютной (не зависящей от системы отсчета) классификации событий. Для простоты оставлена лишь одна пространственная координата, т. е. каждому событию соответствует точка на плоскости «пространство (x) — время (t)».

ше, чем события № 2 и № 3 (прибытие этого света на приемники). Оно происходит раньше с точки зрения любого наблюдателя — ни в одной системе отсчета не может свет сначала прийти на приемник, а потом излучиться источником. Вывод ясен: неправильно было бы утверждать, что *любые* два события можно, изменив систему отсчета, поменять местами во времени.

Когда же это возможно, а когда нет? Начнем с другого конца — постараемся установить, когда между двумя событиями может существовать причинно-следственная связь.

В классической (доэйнштейновской) физике на этот вопрос существовал следующий простой ответ: если одно событие происходит позже другого, то оно может быть его следствием, независимо от того, где эти события происходят. Дело в том, что не было никаких оснований полагать, что скорость передачи информации (сигналов) чем-то ограничена. Тогда, если даже событие *B* произошло очень далеко от события *A* и совсем ненамного позже, можно, используя сигнал достаточно большой скорости, передать в точку *B* информацию о событии *A* еще до наступления события *B*. Получается, что любое нарушение временно́й последовательности событий «раньше-позже» могло привести к нарушению причинно-следственных связей. Поэтому естественно, что понятия «раньше-позже» и «одновременно» в классической физике были абсолютными, т. е. не могли зависеть от системы отсчета (см. рисунок).

В соответствии с теорией относительности никакой сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света в вакууме *c*. Исходя из этого, меняется и условие возможной причинной связи между событиями. Если луч света из точки *A* приходит в точку *B* до того, как там произошло событие, то событие *A* может повлиять на событие *B*. Именно в таком случае событие *B* считается причинно связанным с событием *A*. Запишем это условие так:

$$t_B - t_A \geqslant \frac{r_{AB}}{c}, \qquad (1)$$

где r_{AB} — расстояние между точками, где происходят события *A* и *B*. Условие

$$t_A - t_D \geqslant \frac{r_{AD}}{c} \qquad (2)$$

означает, что событие *A* может быть следствием события *D*, т. е. событие *D* является причинно связанным с событием *A*, хотя и в обратном порядке. Если же

$$|t_A - t_K| < \frac{r_{AK}}{c}, \qquad (3)$$

то события, даже не будучи одновременными, полностью независимы одно от другого, никакая информация об одном событии не может прийти к моменту наступления другого.

Все это условно изображено на рисунке. Если, например, событие *B* связано с событием *A* соотноше-

(Окончание см. на с. 50)

Математический кружок

Основной принцип дифференциального исчисления

Часть I: Линейная функция

Член-корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ,
кандидат физико-математических наук
М. С. НИКУЛИН,
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

В этой статье авторам хотелось подтвердить мысль о том, что математика в своей элементарной части является самой простой из наук, так как она изучает наиболее грубые стороны действительности. Это в полной мере относится и к элементам математического анализа, основные идеи которого очень просты и наглядны, если их показывать на том интуитивном уровне, на котором они фактически возникли. К сожалению, очевидность многих результатов математического анализа, их ясный геометрический и физический смысл зачастую уже при первом знакомстве приносятся в жертву проблемам обоснования и так называемой математической строгости.

По существу, основной идеей «высшей математики» является следующее простое соображение, которое мы называем *основным принципом дифференциального исчисления:*

На небольшом участке любой достаточно «хорошей» кривой она успевает мало изогнуться и тем меньше, чем меньше рассматриваемый участок. Поэтому малый кусочек кривой линии почти совпадает с отрезком некоторой прямой, и их близость становится все более совершенной по мере стягивания участка кривой к некоторой точке. Прямая, которая плотнее, чем другая прямая, прижимается к кривой вблизи данной точки, называется касательной к кривой в данной точке. В частности, график достаточно «хорошей» функции на

малом участке почти прямолинеен, и малое изменение функции почти равно малому изменению некоторой линейной функции. Иными словами, «хорошая» функция почти линейна локально, т. е. в бесконечно уменьшающейся окрестности любого значения аргумента. Угловой коэффициент касательной к графику функции называется значением производной от функции в рассматриваемой точке.

«Основной принцип» не является теоремой и не содержит в себе четких определений. Достаточно «хорошая» кривая и «хорошая» функция — понятия, которые можно определить точнее лишь после уточнения и формализации понятия производной. Однако рациональные, степенные, показательные и логарифмические, а также тригонометрические функции — все являются «хорошими». Более того, функции, возникающие при исследовании процессов естествознания и техники, обычно оказываются «хорошими». В качестве «плохой» можно назвать функцию $|x|$ в окрестности нуля.

В этой статье мы, оставив в стороне проблемы обоснования, получим основные результаты школьного курса математического анализа, исходя из «основного принципа» дифференциального исчисления. Но прежде чем перейти к решению этой задачи, которой посвящена вторая часть этой статьи, мы обстоятельно рассмотрим линейную функцию. Это необходимо сделать по двум причинам. Первая состоит в том, что линейная функция в школьном курсе изучается очень рано и, как следствие этого, несколько упрощенно и оторванно от важнейших ее применений. Вторая причина — принципиальная, она связана с особой ролью, которую играет понятие линейной функции в основных концепциях математического анализа.

Определение линейной функции

Линейной функцией называется функция вида $y=kx+b$, где k и b — постоянные. При $k=0$ функция принимает постоянное значение $y=b$. При $b=0$ функция $y=kx$ называется *прямой пропорциональностью*, а параметр k называется *коэффициентом пропорциональности*.

Характеристическое свойство линейной функции

Это свойство состоит в следующем: *приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента.*

Действительно, пусть $y=kx+b$ — данная функция и пусть аргумент изменился от x_1 до x_2. Выразим приращение функции $\Delta y=y(x_2)-y(x_1)$ через приращение аргумента $\Delta x=x_2-x_1$:

$$y(x_2)-y(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=k(x_2-x_1).$$

Таким образом, $\Delta y=k\cdot\Delta x$, т. е. действительно приращение Δy функции $y=kx+b$ пропорционально приращению Δx аргумента с коэффициентом пропорциональности, равным k.

Справедливо обратное утверждение, а именно: *если приращение функции $f(x)$ пропорционально приращению аргумента, то $f(x)$ — линейная функция.*

Действительно, выберем (зафиксируем) некоторое значение x_0. Тогда для любого x в силу условия выполняется равенство

$$f(x)-f(x_0)=k(x-x_0),$$

откуда

$$f(x)=kx-kx_0+f(x_0),$$

т. е. функция имеет вид:

$$f(x)=kx+b, \text{ где } b=f(x_0)-kx_0,$$

значит, $f(x)$ — линейная функция.

Итак, мы приходим к выводу, что отмеченным свойством обладает линейная и только линейная функция, поэтому и называют его *характеристическим свойством линейной функции.*

Монотонность линейной функции

При $k>0$ функция $y=kx+b$ — возрастающая, при $k<0$ — убывающая.

Докажем это при $k>0$; пусть $x_2>x_1$, тогда

$$y(x_2)-y(x_1)=kx_2+b-(kx_1+b)=k(x_2-x_1)>0,$$

т. е. $y(x_2)>y(x_1)$, что и требовалось доказать.

Композиция линейных функций

Сложная функция, являющаяся композицией линейных функций, тоже *линейная функция с коэффициентом пропорциональности, равным произведению коэффициентов пропорциональности составляющих ее функций.*

Действительно, пусть

$F(x)=f(g(x))$ и $f(x)=k_1x+b_1$, $g(x)=k_2x+b_2$.

Тогда

$$F(x)=k_1(k_2x+b_2)+b_1=$$
$$=k_1k_2x+k_1b_2+b_1=kx+b,$$

где $k=k_1k_2$, $b=k_1b_2+b_1$.

Очевидно, что утверждение справедливо для сложной функции, составленной из любого числа линейных функций.

График линейной функции

Теорема. *График линейной функции $y=kx+b$ — прямая.*

Читатель без труда докажет эту теорему, пользуясь подобием прямоугольных треугольников. Однако нетрудно построить и доказательство, не используя теории подобия, опираясь на монотонность линейной функции.

Пусть $y=kx+b$, и мы рассматриваем точки на графике с абсциссами 0, x_1, $2x_1$, $3x_1$, ... Покажем, что эти точки лежат на одной прямой. Идея доказательства ясна из рисунка 1. Все розовые треугольники равны, и сумма углов при любой из точек рассматриваемого ряда равна 180°, так как сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°, и третий угол при каждой из точек прямой. Следовательно, гипотенузы треугольников продолжают друг друга и составляют прямую. По той же причине точки графика с абсциссами 0, x_1/n, $2x_1/n$, ..., nx_1/n, ... лежат на прямой, и она совпадает с предыдущей, ибо содержит точку с абсциссой $x_1=nx_1/n$. Натуральное число n можно взять сколь угодно большим, так что найденная прямая L содержит точки графика со сколь угодно густо расположенными абсциссами.

Покажем, что все точки графика лежат на той же прямой L. Допустим, что точка (x_0, y_0) графика лежит выше прямой L. (Если точка расположена ниже, рассуждение аналогично.) Тогда, как и прежде, мы убедимся в том, что на прямой L', соединяющей точку $(0, b)$ с точкой (x_0, y_0), точки графика с абсциссами 0, x_0/m, $2x_0/m$, ... расположены сколь угодно густо. Таким образом, в этом предположении точки графика функции $y=kx+b$ «прыгали» бы сколь угодно часто с прямой L на прямую L', что невозможно в силу монотонности линейной функции. Итак, любая точка графика лежит на построенной ранее прямой.

Обратно, любая точка (x_2, y_2) этой прямой принадлежит графику $y=kx+b$. Действительно, точка (x_2, kx_2+b) есть точка графика и, в силу доказанного, принадлежит прямой, а так как на прямой, не параллельной оси ординат, есть только одна точка с абсциссой x_2, то $y_2=kx_2+b$.

Из доказанной выше теоремы следует, что *график прямой пропорциональности* ($b=0$) *— прямая, проходящая через начало координат.*

При решении задач часто приходится прибегать к утверждению, обратному теореме о графике линейной функции: *любая прямая, непараллельная оси ординат, есть график некоторой линейной функции.*

Докажем его.

Пусть данная прямая проходит через точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1), где $x_0\neq x_1$ (рис. 2). Всегда можно подобрать уравнение вида $y=kx+b$, для которого пары чисел (x_0, y_0) и (x_1, y_1) будут решением:

$$\begin{cases} y_0=kx_0+b, \\ y_1=kx_1+b. \end{cases}$$

Для этого достаточно положить

$$k=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}, \quad b=y_0-\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x_0.$$

Прямая — график линейной функции

$$y=\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x+y_0-\frac{y_0-y_1}{x_0-x_1}x_0-$$

проходит через две точки (x_0, y_0) и (x_1, y_1); это — единственная прямая, проходящая через эти две точки, значит, она совпадает с данной прямой, что и доказывает наше утверждение.

Применение характеристического свойства линейной функции

Пример 1. *Написать уравнение прямой а) с угловым коэффициентом $k=3$, проходящей через точку $(-7, 2)$, б) проходящей через точки $(-8, -10)$ и $(2, 4)$.*

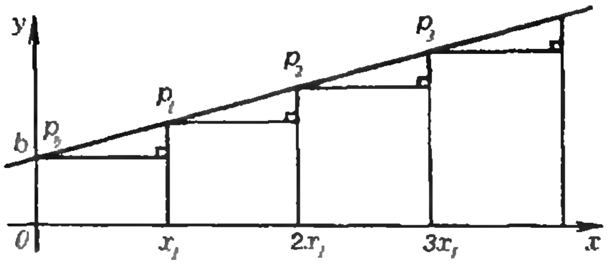


Рис. 1.

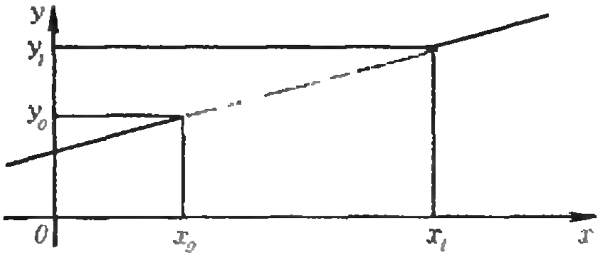
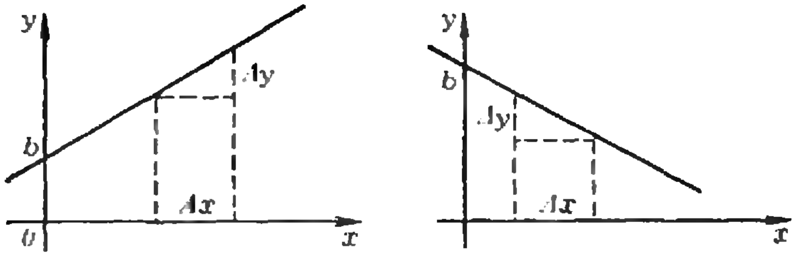


Рис. 2.



а) б)

Рис. 3.

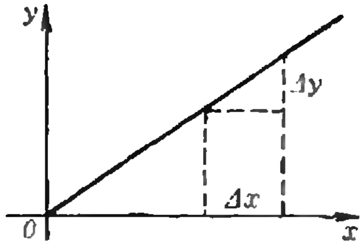


Рис. 4.

Решение. а) Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка искомой прямой; тогда $\Delta y = y - 2$ и соответствующее приращение аргумента равно $\Delta x = x + 7$. Уравнение прямой имеет вид:

$$y - 2 = 3(x + 7).$$

б) Вычислим угловой коэффициент

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 + 10}{2 + 8} = 1{,}4.$$

Мы пришли к предыдущей задаче, но имеем одну «лишнюю» точку. Выбираем любую из двух и составляем уравнение прямой, например, $y - 4 = 1{,}4(x - 2)$; можно было написать и $y + 10 = 1{,}4\,(x + 8)$.

Пример 2. *Изучается зависимость, описываемая линейной функцией $y = kx + b$; значения величины x получаются в результате измерений. С какой точностью необходимо выполнять измерения величины x, чтобы вычислять значения величины y с точностью до ε?*

Решение. Ошибку в измерении величины x можно считать приращением аргумента x, т. е. принять за Δx. Тогда в силу характеристического свойства линейной функции ошибка в определении величины y будет равна $\Delta y = k \cdot \Delta x$. Требуется $|\Delta y| \leqslant \varepsilon$, откуда $|\Delta x| \leqslant \varepsilon / |k|$.

Это элементарный результат, но он находит применение в весьма общих и совсем не элементарных ситуациях.

Геометрический и физический смысл параметров k и b в уравнении прямой $y = kx + b$

Геометрический смысл параметра k состоит в том, что *k равен тангенсу угла наклона прямой к оси абсцисс* (с учетом направления отсчета угла). Модуль k говорит о том, насколько круто (близко к вертикали) проходит прямая, поэтому k называют *угловым коэффициентом* прямой. Знак k показывает, в каком направлении идет прямая (возрастает или убывает линейная функция).

Остановимся более подробно на физическом смысле параметров k и b. Возьмем графики двух линейных функций (рис. 3 *а*, *б*) и будем присваивать переменным (по осям координат) различные наименования так, чтобы каждый раз данная прямая описывала бы некий возможный процесс.

1) Пусть графики изображают процесс изменения температуры некоторого физического тела. По оси ординат откладывается температура ($y = T$) в градусах Цельсия, по оси абсцисс время ($x = t$) в секундах. Тогда

$$k = \frac{\Delta T}{\Delta t}\ \frac{\text{град}}{\text{с}}$$

— скорость изменения температуры. В случае а) $|k|$ — скорость нагрева, в случае б) $|k|$ — скорость охлаждения, $b = T\,(0)$ — начальная температура.

2) Пусть $y = m$ — масса горючего в граммах, $x = t$ — время в секундах. Тогда

$$k = \frac{\Delta m}{\Delta t}\ \frac{\text{г}}{\text{с}},$$

$|k|$ — скорость расхода горючего, в случае а) $b = m\,(0)$ — израсходованное горючее до начала движения, в случае б) $b = m(0)$ — запас горючего на момент начала движения.

3) Пусть $y = A$ — работа в джоулях, $x = t$ — время в секундах. Тогда

$$k = \frac{\Delta A}{\Delta t}\ \frac{\text{Дж}}{\text{с}}$$

— «скорость изменения работы» — мощность, $b = A\,(0)$ — работа, совершенная к началу отсчета.

4) «Классический» пример. Для случая а) $y=s$ — путь, пройденный точкой в метрах, $x=t$ — время в секундах. Тогда $k=\frac{\Delta s}{\Delta t}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость изменения пути, т. е. скорость движения, $b=s(0)$ — путь к началу отсчета времени.

Для случая б) y — координата точки, движущейся по прямой, $x=t$ — время в секундах, $k=\frac{\Delta y}{\Delta t}\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$ — скорость изменения координаты, $b=y(0)$ — начальное положение точки на прямой.

Рассмотрим и частный случай линейной функции — прямую пропорциональность: $y=kx$ (рис. 4).

5) Пусть график изображает зависимость массы металлического стержня от его длины: $y=m$ — масса в граммах, $x=l$ — длина в сантиметрах. Тогда $k=\frac{\Delta m}{\Delta l}\,\frac{\text{г}}{\text{см}}>0$ — линейная плотность стержня.

6) Пусть график изображает зависимость массы m некоторого вещества от объема V. Тогда $k=\frac{\Delta m}{\Delta V}\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}>0$ — объемная плотность данного вещества.

Средняя скорость и линейная функция

Вернемся к «чистой» математике. Математик изучает функции, отвлекаясь от конкретного физического содержания. Он по оси ординат откладывает отвлеченные числа (значения функции), по оси абсцисс — тоже отвлеченные числа (значения аргумента).

Желая сделать математические понятия наглядными, выразительными и подчеркивая связь с реальной действительностью, математики называют $k=\Delta y/\Delta x$ — *скоростью изменения* линейной функции, а b — *начальной ординатой.*

Используя физическую терминологию, характеристическое свойство линейной функции можно сформулировать так: *линейная функция характеризуется постоянством скорости изменения.*

Заметим, что в отношении линейной функции не возникает проблем с употреблением понятий «средняя скорость» и «мгновенная скорость» изменения функции. Вполне естественно считать, что поскольку «средняя скорость» изменения линейной функции на любом промежутке одна и та же, то и «мгновенная скорость» изменения линейной функции в каждой точке тоже постоянна и равна «средней скорости». Иначе обстоит дело в общей ситуации, когда приходится говорить о «мгновенной скорости» изменения не линейной функции.

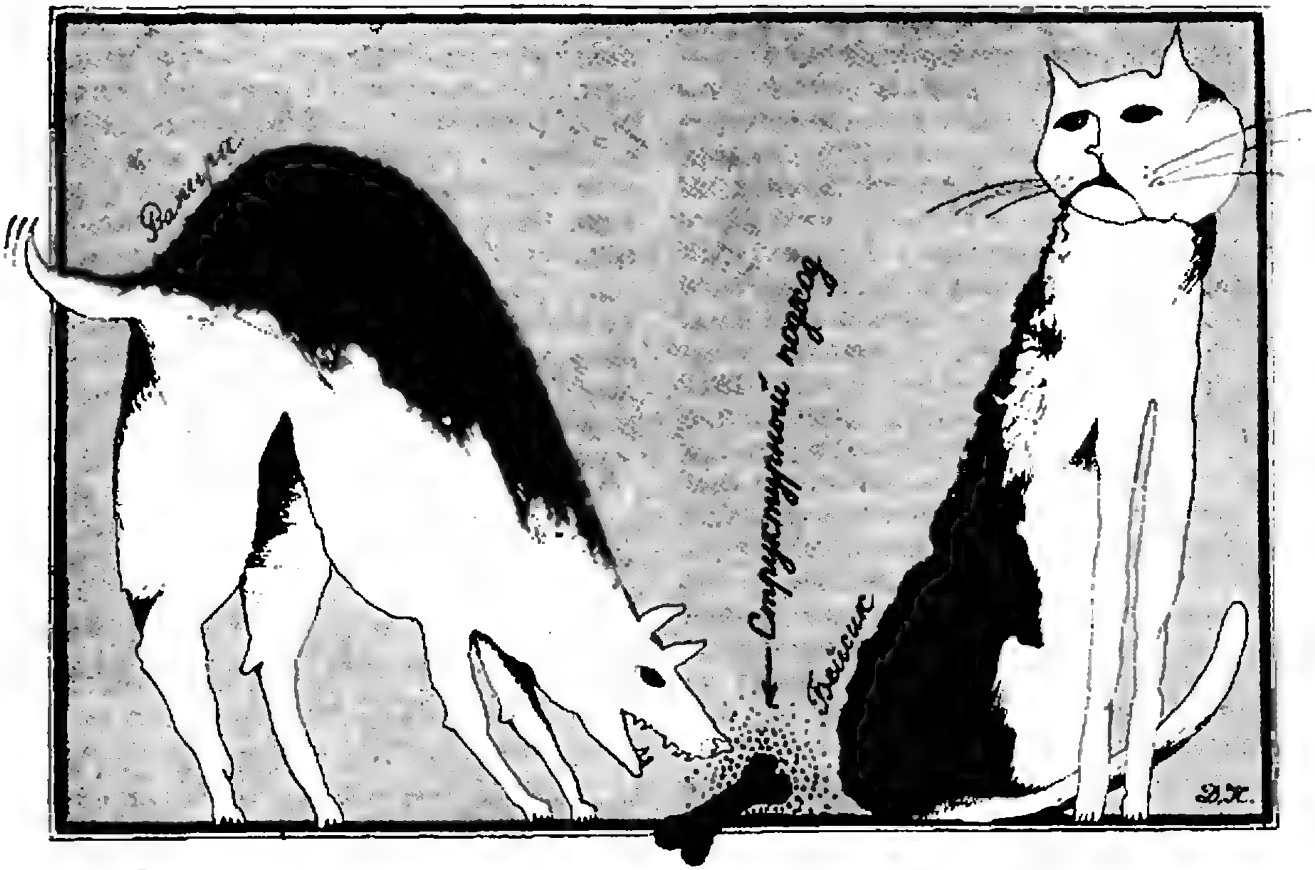
О машине времени и теории относительности

(Начало см. на с. 44)

нием (1), то такое же соотношение связывает эти два события в любой системе отсчета — ведь условие причинной связи не может измениться. Поэтому область событий B называют «абсолютным будущим» по отношению к событию A. Точно так же событие D, которое может повлиять на событие A, для любого наблюдателя происходит раньше, чем A. А вот событие K, не связанное с A причинной зависимостью, при надлежащем выборе системы отсчета может быть сделано одновременным с A (попробуйте убедиться в этом самостоятельно) или даже поменяться с ним порядком следования, и это не приведет ни к каким парадоксам.

Итак, мы убедились, что при внимательном анализе выбранное нами положение СТО — относительность одновременности — оказалось не противоречащим здравому смыслу. Правда, пришлось немножко подправить сам здравый смысл.

А. И. Черноуцан



Искусство программирования

Структурный подход и язык программирования Бейсик

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ, С. Г. ХЛЕБУТИН

В последние годы как среди профессиональных программистов, так и среди преподавателей информатики, наиболее популярным стал так называемый *структурный подход* к программированию. Суть этого подхода состоит в том, чтобы писать команды в порядке их исполнения (однако при этом команды могут быть и *составными* — например команда *ветвления* или *цикла*,— и тогда содержащиеся внутри них более «мелкие» команды могут при исполнении пропускаться или повторяться). Структурный подход исключает так называемую *передачу управления по меткам* — один из традиционных приемов программирования на таких «классических» языках, как *Фортран* или *Кобол*.

Преимущество структурированных программ состоит в том, что они легче читаются и анализируются, и поэтому для них понимание сути работы алгоритма и проверка его правильности становятся возможными, а вероятность допустить ошибку (например, *зацикливание*) уменьшается. Поэтому сейчас структурирование программ все больше считается хорошим стилем грамотного и систематического программирования.

Это отразилось и на школьном курсе информатики: как школьный алгоритмический язык, так и первый из изучаемых языков программирования (*Рапира*), по своей сути основаны на структурном подходе. Этого, однако, нельзя сказать о втором языке, изучаемом в школьном учебнике информатики — языке программирования *Бейсик*. Беглый взгляд на любую программу, написанную на Бейсике, позволяет сразу убедиться в ее неструктурности: каждая строчка начинается с номера (метки) и часто встречаются команды типа GOTO 90 или GOSUB 210 (передача управления по метке).

Можно ли связать структурный подход, реализованный в школьном алгоритмическом языке, с написанием программ на неструктурном языке Бейсик? Оказывается — можно. Цель этой статьи — показать, как именно это делается. Более точно, мы укажем простую методику, позволяющую «автоматически» переводить программы, написанные на школьном алгоритмическом языке, на язык Бейсик.

При этом мы не будем стремиться к тому, чтобы написать наилучшую (скажем, кратчайшую) программу на Бейсике, отвечающую алгоритму, записанному на школьном алгоритмическом языке. Напротив, мы будем вводить ряд дополнительных строчек (начинающихся со слова REM), не нужных для исполнителя (ЭВМ), но обеспечивающих структурность полученной программы, ее читаемость.

Мы предполагаем, что читатель знаком — хотя бы в общих чертах — со школьным алгоритмическим языком и языком Бейсик. Мы считаем, что нам дана готовая программа на алгоритмическом языке; наша цель — перевести ее на Бейсик. В данной программе могут встретиться следующие основные конструкции школьного алгоритмического языка: 1) типы переменных и констант; 2) таблицы; 3) оператор присваивания; 4) оператор ветвления; 5) оператор цикла; 6) операторы ввода и выводы; 7) заголовок алгоритма; 8) способы вызова подпрограмм, передача параметров.

Укажем по порядку, как переводится каждая из этих конструкций.

1) **Типы переменных и констант** в школьном алгоритмическом языке следующие: *натуральные*, *целые*, *вещественные* и *литерные*. В Бейсике тип переменной не описывается, а обозначается символом после имени переменной: % — целая, ¤ — литерная, нет символа — вещественная. Натуральных переменных в Бейсике нет, вместо них будем использовать целые. При переводе будем оставлять описания типа в комментариях (начинающихся со слова REM), а всюду в программе после имен целых и литерных переменных ставить % и ¤ соответственно. Например, если в программе встретилось

нат i, цел k, вещ a, лит t

то мы пишем (номер строки мы обозначаем буквой n)

```
n REM НАТ I, ЦЕЛ К, ВЕЩ А, ЛИТ Т
```

а в программе используем переменные I %, N %, A, T¤.

2) **Таблицы** также бывают трех типов. Минимальное значение индексов в Бейсике равно 0. Если в программе встретилось

вещ таб x [0:10], цел таб k [0:3, 0:5]

мы пишем (номера строк опущены)

```
REM ВЕЩ ТАБ X [0:10]
 ЦЕЛ ТАБ К [0:3, 0:5]
 DIM X (10), К % (3,5)
```

Заметим, что строчка, начинающаяся со слова REM, не повлияет на исполнение алгоритма (хотя она вводится в ЭВМ и появляется в распечатке программы). Мы ее пишем с тем, чтобы иметь более подробное и наглядное описание переменных, чем то, которое дается следующей строчкой перевода.

3) **Оператор присваивания** (значок :=) алгоритмического языка переводится на Бейсик знаком равенства (=). Например, строчка $x:=x+1$ переводится как X=X+1.

4) **Оператор ветвления** предлагается переводить так:

```
 если усл              IF (NOT усл) THEN n1
 то                                  серия 1
    серия 1           GOTO n2
 иначе            n1  REM ИНАЧЕ
    серия 2                          серия 2
все               n2  REM ВСЕ
```

или в сокращенной форме (без иначе)

```
если усл               IF (NOT усл) THEN  n
 то серия                            серия
все                n  REM ВСЕ
```

Здесь усл — условие, n_1, n_2, n — номера строк.

5) **Оператор цикла** (цикл пока) предлагается переводить по следующей схеме:

```
пока усл          n1  IF (NOT усл) THEN n2
 нц                                  серия
    серия             GOTO n1
 кц               n2  REM КОНЕЦ ЦИКЛА
```

В цикле для при переводе можно использовать оператор FOR:

```
для i от min до max
шаг h                   FOR I=min TO max STEP H
  нц                                 серия
     серия              NEXT I
  кц                    REM КОНЕЦ ЦИКЛА
```

(шаг h может быть опущено, при этом шаг полагается равным 1).

6) **Операторы ввода и вывода**, строго говоря, отсутствуют в алгоритмическом языке. Если, однако, они добавлены к языку (например, как в «Кванте», 1986, № 11, с. 40 или как в «Е — практикуме»*), то они переводятся словами INPUT и PRINT соответственно. В противном случае следует в конце программы на Бейсике написать PRINT X, где X — имя переменной (или список имен переменных), стоящей после слова рез в заголовке программы.

7) **Заголовок алгоритма** (процедуры, функции или основной программы) пишется в комментариях, т. е. переписывается после слова REM. Слово кон заменяется на RETURN (или на END в основной программе), слово нач игнорируется.

Для организации подпрограмм в Бейсике имеются операторы GOSUB и RETURN. Например, для вызова подпрограммы КВУР (a, b, c, x_1, x_2) (начинающейся со строки 170 и вычисляющей корни x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$), чтобы решить уравнение $x^2+(P+2)x+4Q$, нужно написать:

```
REM КВУР (1, P+2, Q*4, X, У)
A=1
B=P+2
C=Q*4
GOSUB 170
X=X1
У=X2
REM КОНЕЦ ВЫЗОВА КВУР
```

Если какая-нибудь процедура всегда вызывается с одними и теми же аргументами, имеет смысл написать ее так, чтобы они и были ее формальными параметрами, при этом вызов будет состоять только из GOSUB n. Если нет, подобная оптимизация опасна: получится, что некоторые переменные вызывающей процедуры могут быть испорчены при вызове.

В качестве примера мы приводим программу приближенного решения уравнения F(X)=0 с данной точностью E методом деления данного отрезка [A, B] пополам. Для конкретности выбрано очень простое уравнение ($X^2=4$); однако, заменив должным образом лишь одну команду (с номером 1020), можно пользоваться этой программой для решения любого другого уравнения. Читателю мы предлагаем прочитать программу и разобрать работу алгоритма. Мы уверены, что структурированность программы и знание школьного алгоритмического языка позволит ему с легкостью выполнить это задание.

```
10 REM АЛГ ТЕСТ
20 REM НАЧ ВЕЩ A,B,E,C
30   PRINT "ЛЕВЫЙ КОНЕЦ="
40   INPUT A
50   PRINT "ПРАВЫЙ КОНЕЦ="
60   INPUT B
70   PRINT "ТОЧНОСТЬ="
80   INPUT E
90 REM ДИХ(A,B,E,C)
100   GOSUB 200
110 REM КОНЕЦ ВЫЗОВА ДИХ
120   PRINT "ОТВЕТ=",C
130 REM КОН
140  END
200 REM АЛГ ДИХ(A,B,E,C)
210 REM    АРГ A,B,E,C
220 REM    РЕЗ C
230 REM НАЧ ВЕЩ U,V
240 REM    U=F(A)
250   X=A
260   GOSUB 1000
270   U=Z
280 REM КОНЕЦ ВЫЗОВА F
290 IF(NOT B-A>=E) THEN 460
300 REM  НЦ
310   C=(A+B)/2
320 REM    V=F(C)
330       X=C
340       GOSUB 1000
350       V=Z
360 REM КОНЕЦ ВЫЗОВА F
370   IF(NOT U*V>=0) THEN 400
380 REM  ТО
390        A=C
400 REM  ВСЕ
410   IF(NOT U*V<=0) THEN 440
420 REM  ТО
430        B=C
440 REM  ВСЕ
450   GOTO 290
460 REM  КЦ
470 REM КОН
480 RETURN
1000 REM АЛГ ВЕЩ F(ВЕЩ X)
1010 REM НАЧ
1020    Z=X*X-1024
1030 REM КОН
1040 RETURN
```

---

*) Тренажер для освоения алгоритмического языка на машине «Ямаха».

Варианты вступительных экзаменов

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Решите уравнение

$$\arcsin\frac{3-5\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-6\cos 2x}{5}=x-\frac{\pi}{3}.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\left|\log_2\frac{4}{x}\right|-3}>\frac{1}{\left|\log_2\frac{x}{2}\right|-1}.$$

3. Из точки A к окружности радиусом R проводится касательная AM (M — точка касания). Секущая, проходящая через точку A, пересекает окружность в точках K и L, причем L — середина отрезка AK, угол AMK равен 60°. Найдите площадь треугольника AMK.

4. При каких значениях параметра a множество решений системы неравенств

$$\begin{aligned}&x^2+(a+4)x+4a\leqslant y,\\&3x+y-(2a+4)\leqslant 0\end{aligned}$$

содержит отрезок $[-2;\ -1]$ оси Ox?

5. Точка M — середина ребра AD единичного куба $ABCDA'B'C'D'$. Через середину отрезка $B'M$ перпендикулярно ему проводится плоскость. Найдите расстояние от центра куба до этой плоскости.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найдите все решения уравнения $\sin x+\cos 3x=0$, удовлетворяющие неравенству

$$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}>0.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_2(x^2-x+1)}+1\geqslant\frac{\log_2(x+3)}{\log_2(x^2-x+1)}.$$

3. Две окружности радиусами 3 и 4, расстояние между центрами которых равно 5, пересекаются в точках A и B. Через точку B проведена прямая, пересекающая окружности в точках C и D так, что $CD=8$ и B лежит между C и D. Найдите площадь треугольника ACD.

4. Прямая касается параболы $y=-x^2+2x+2$ в точке A и пересекает ось Ox в точке B, а ось Oy в точке C. Известно, что точка A лежит в 1-й четверти координатной плоскости и $2AB=AC$. Найдите уравнение касательной.

5. В треугольной пирамиде $SABC$ ребра AB, BC и BS имеют длину 2 и взаимно перпендикулярны. Через середины ребер AC и SB проводится плоскость, пересекающая ребро AB и образующая равные углы с плоскостями граней ABS и ABC. Найдите величины этих углов.

Вариант 3

(факультет естественных наук и геолого-геофизический факультет)

1. Решите уравнение

$$(13x^2+2x-14)\cdot\arccos x=0.$$

2. Решите уравнение

$$2^{2\sin 2x-2\cos 2x+3}-\left(\frac{1}{6}\right)^{\cos 2x-\sin 2x-\log_6 14}+3^{2\sin 2x-2\cos 2x+1}=0.$$

3. При каком значении высоты прямоугольная трапеция с острым углом 30° и периметром 6 имеет наибольшую площадь?

4. Имеются три куска сплава меди с никелем в отношениях 2:1, 3:1 и 5:1 по массе. Из них сплавлен кусок массой 12 кг с отношением меди к никелю 4:1. Найдите массу каждого исходного куска, если масса первого была вдвое больше массы второго.

5. Дана пирамида $ABCD$. Ребро DC перпендикулярно плоскости основания ABC, $AB=3\sqrt{3}$, $BC=3$, угол ACB равен $\pi/3$, $DC=\sqrt{13}$. Проведена сфера радиусом 5 с центром в вершине D. Найдите длину линии пересечения сферы с основанием ABC.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстрации.

После текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

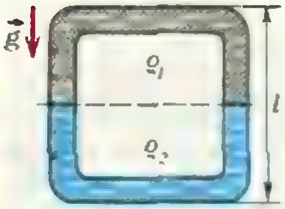


Рис. 1.

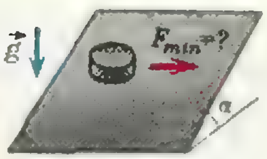


Рис. 2.

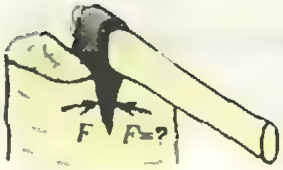


Рис. 3.

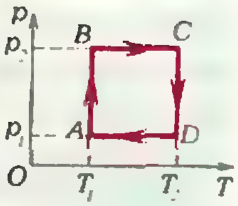


Рис. 4.

Вариант 1

1. Посередине закрытой с торцов трубы длиной $2L$ и сечением S находится поршень. Слева и справа от поршня заключены разные газы при одинаковом давлении p. На сколько сместится поршень, если он станет проницаемым для одного из газов? Сила трения поршня о трубу равна F. Температуру газов считать постоянной. (51 %)

2. Узкая трубка постоянного сечения образует квадрат со стороной l, закрепленный в вертикальной плоскости (рис. 1). Трубка заполнена равными объемами двух не проникающих друг в друга жидкостей с плотностями ϱ_1 и ϱ_2. Вначале более плотная жидкость заполняла верхнюю часть трубки. В некоторый момент жидкости пришли в движение. Найдите их максимальную скорость. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g. (55 %).

3. Проволочное кольцо радиусом R имеет проводящую перемычку, расположенную вдоль диаметра. В левую и правую полуокружности включены конденсаторы емкостями C_1 и C_2. Кольцо помещено в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией $B(t)=B_0t/T$, перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и затем прекращают изменять поле. Найдите заряды, установившиеся на конденсаторах. (29 %)

4. Оцените, с какой скоростью может бежать по Луне космонавт в легком удобном скафандре. (37 %)

5. Две одинаковые бутылки заполнены водой. В одну из них вставляют трубочку, отверстие которой закрыто пальцем. Бутылки одновременно переворачивают и в тот же момент открывают отверстие трубочки. Из бутылки с трубочкой вода вытекает заметно быстрее. Объясните явление. (91 %)

Вариант 2

1. На плоскости, образующей угол α с горизонтом, лежит шайба массой m (рис. 2). Какую минимальную силу надо приложить к шайбе в горизонтальном направлении вдоль плоскости, чтобы она сдвинулась? Коэффициент трения равен μ. (49 %)

2. Два плоских конденсатора емкостью C каждый соединены параллельно и заряжены до напряжения U. Пластины одного из конденсаторов могут двигаться свободно навстречу друг другу. Найдите их скорость в тот момент, когда зазор между пластинами конденсатора уменьшится вдвое. Масса каждой пластины равна M. Силу тяжести не учитывать. (55 %)

3. В цилиндрической трубе на расстояниях L и $2L$ от закрытого торца справа от него находятся два поршня, которые могут перемещаться без трения. В левом отсеке находятся пары воды при давлении p_0, а в правом — воздух при том же давлении. Давление насыщенных паров воды равно $2p_0$. Правый поршень медленно вдвинули на расстояние a. На сколько сдвинется левый поршень? Температуру паров воды и воздуха считать постоянной. (39 %)

4. Лесоруб ударил топором по чурбаку. Топор застрял, войдя в чурбак наполовину (рис. 3). Оцените силу, с которой сжимается лезвие топора. (36 %)

5. Лазерный луч падает на прозрачную плоскопараллельную пластину, одна поверхность которой закрашена, так что способна рассеивать свет во всех направлениях. На пластине видна следующая картина: светлая точка в центре, темный круг с резко очерченной границей и светлый ореол за кругом. Объясните явление. (27 %)

Вариант 3

1. Диаграмма циклического процесса для одного моля газа в координатах p, T образует прямоугольник $ABCD$ (рис. 4), стороны BC и AD которого соответствуют давлениям p_2 и p_1, а AB и CD — температурам T_1 и T_2. Найдите максимальный и минимальный объемы газа. Газовая постоянная равна R. (83 %)

2. Два проводящих шара радиусами r и R расположены далеко друг от друга и соединены с обкладками конденсатора емкостью C. Шару радиусом r сообщили заряд Q. Какой заряд оказался на другом шаре? Емкостью проводов пренебречь. (33 %)

3. По тонкой проволочной винтовой спирали, стоящей вертикально, скользит нанизанная на проволоку бусинка. Радиус спирали равен R, угол наклона проволоки к горизонту равен α. Найдите установившуюся скорость бусинки, если коэффициент трения ее о проволоку равен μ. Ускорение свободного падения равно g. (36 %)

4. Человек нечаянно наступил на лежащие вверх зубьями грабли. Оцените, с какой скоростью грабли ударят его по лбу. (39 %)

5. В металлический сосуд с подкрашенной жидкостью введена тонкая трубка так, что столб жидкости виден в выступающей части трубки. Если поставить сосуд на разогретую плитку, то столбик жидкости в трубке сначала опустится, а потом пойдет вверх. Объясните явление. (59 %)

Публикацию подготовили *М. Л. Вишневский, В. М. Копытов, Г. В. Меледин*

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\log_3(2\sin x-1+18\sin^2 x)=-\log_{\frac{1}{3}}(1-7\sin x).$$

2. Двое рабочих, работая одновременно, выполняют некоторую работу за 15 минут. Сколько времени потребуется второму рабочему, чтобы выполнить эту работу одному, если известно, что первый рабочий выполнит ее на m часов быстрее, чем второй?

3. Решите неравенство

$$(c+1)<(c+2)\cdot 3^{\sqrt{x-1}}.$$

4. Правильная четырехугольная пирамида $SPQRT$ пересечена плоскостью, равноудаленной от точек S, P, Q, R, T. Определите площадь сечения этой плоскостью шара, вписанного в пирамиду $SPQRT$, если высота пирамиды SO имеет длину h, а величина угла SPQ равна α.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-7{,}5x+14}\,\log_2|x-3|\leqslant 0.$$

2. В двух сосудах емкостью по 5 л каждый содержится раствор щелочи. Первый сосуд содержит 3 л p-процентного (по объему) раствора щелочи, второй — 4 л $2p$-процентного раствора такой же щелочи. Сколько литров из второго сосуда надо перелить в первый, чтобы получить в нем 10-процентный раствор щелочи?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (a^2-a)\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+2\cos y=a+6, \\ 3\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)+\cos y=4, \end{cases} \qquad a\in\mathbf{R}.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ величина угла BSD, образованного двумя противоположными боковыми ребрами SB и SD, равна 2α. Через точку A параллельно прямой BD проведена плоскость π, пересекающая общую линию плоскостей ASC и BSD в точке P, удаленной от прямой SB на расстояние $d>0$. Определите радиус сферы, описанной около пирамиды $SABCD$, если плоскость π образует с плоскостью основания $ABCD$ угол величины α.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шарик массой $m=50$ г прикреплен к двум одинаковым невесомым пружинам и нити (рис. 1), угол $\alpha=60°$, жесткость каждой пружины $k=10$ Н/м. В некоторый момент нить обрывается, и шарик начинает движение с ускорением $a=2$ м/с^2. Найдите максимальную скорость, которую приобретает шарик при своем движении, если расстояние между точками закрепления пружин не превышает удвоенной длины недеформированной пружины. Силой тяжести пренебречь.

2. Шайба лежит в конической чаще на расстоянии $r=20$ см от вертикальной оси конуса (рис. 2). Угол между образующей и осью конуса $\alpha=60°$, коэффициент трения между шайбой и чашей $\mu=0{,}8$. С какой угловой скоростью следует вращать чашу вокруг ее оси, чтобы шайба вылетела из чаши?

3. Альфа-частица с кинетической энергией W налетает на первоначально покоившееся ядро атома гелия. При какой энергии частицы сблизятся на расстояние $r=1\cdot10^{-13}$ м? Иметь в виду, что в момент максимального сближения скорости обеих частиц одинаковы.

4. В цилиндре с площадью основания $S=100$ см^2 находится газ при температуре $t=27$ °С. На высоте $h=30$ см от основания цилиндра расположен поршень массой $m=60$ кг. Какую работу совершит газ при расширении, если его температуру медленно повысить на $\Delta t=50$ °С? Атмосферное давление $p_0=1{,}0\cdot10^5$ Па.

5. По двум параллельным проводникам, находящимся друг от друга на расстоянии $l=0{,}5$ м, перемещают с постоянной скоростью $v=10$ м/с проводник-перемычку (рис. 3). Между левыми концами проводников включены последовательно два конденсатора, причем емкость C_2 больше емкости C_1 в $n=1{,}5$ раза. Вся система находится в однородном магнитном поле, направленном перпендикулярно к плоскости, в которой лежат проводники. Найдите индукцию магнитного поля, если на конденсаторе емкостью C_2 напряжение $U_2=0{,}5$ В. Сопротивление проводников пренебрежимо мало́.

6. Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U=200$ В, влетела в точке *1* (рис. 4) в область поперечного однородного магнитного поля с индукцией $B=4\cdot10^{-3}$ Тл. Расстояние между точками *1* и *2* равно $l=1$ м. Найдите отношение заряда частицы к ее массе.

7. Протон, отношение заряда к массе которого $e/m=1\cdot10^4$ Кл/кг, движется без начальной скорости из точки O (рис. 5) в области

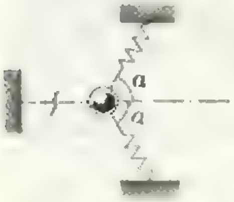


Рис. 1.

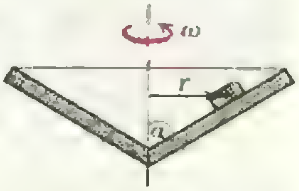


Рис. 2

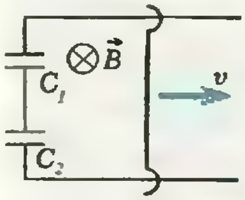


Рис. 3.

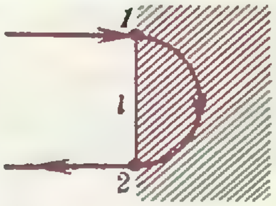


Рис. 4.

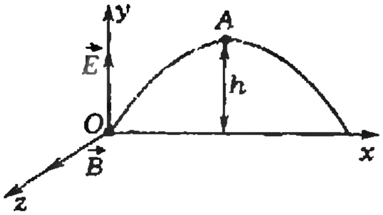


Рис. 5.

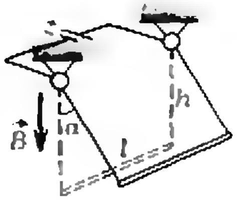


Рис. 6.

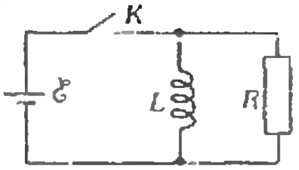


Рис. 7.

пространства, где созданы однородные взаимно перпендикулярные электрическое и магнитное поля с $E = 10$ кВ/м и $B = 0{,}02$ Тл. Найдите ускорение протона в вершине траектории — точке A, если $h = 0{,}5$ м.

8. Перекладина длиной $l = 20$ см и массой $m = 24$ г подвешена горизонтально на двух тонких невесомых проводах в вертикальном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}08$ Тл (рис. 6). К точкам закрепления проводов подключен источник тока, при этом в цепи поддерживается постоянный ток $I = 2{,}5$ А. Длина проводов $h = 0{,}12$ м. Провода отклоняют на угол $\alpha = 30°$ от вертикального положения и отпускают. Найдите скорость перекладины в момент, когда провода проходят через вертикальное положение. Индуктивностью пренебречь.

9. Можно ли, имея конденсаторы емкостями $C_1 = 120$ пФ и $C_2 = 156$ пФ и катушку индуктивностью $L = 125$ мкГн, получить колебательный контур, настроенный на длину волны $\lambda = 350$ м?

10. К источнику тока подключены катушка индуктивностью $L = 0{,}80$ Гн и резистор сопротивлением $R = 25$ Ом (рис. 7). Сразу после размыкания ключа K в резисторе выделяется тепловая мощность $P = 100$ Вт. Сопротивление обмотки катушки пренебрежимо мало́. Какое количество теплоты выделится в резисторе к моменту прекращения тока в цепи?

Публикацию подготовили *А. П. Горячев, Д. Ф. Калиниченко, Н. А. Кудряшов, В. В. Светозаров, М. Н. Стриханов*

Московский институт стали и сплавов

Математика
Вариант письменного экзамена

1. Вычислите

$$\left(\frac{12}{\sqrt{15}-3}\ \frac{28}{\sqrt{15}-1}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)(6-\sqrt{3}).$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-3)^2}=3.4 \quad \text{при} \quad 2<x.$$

3. Найдите величину $(x+y)^2$, если

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}=1, \\ y-x=1. \end{cases}$$

4. Слиток меди с оловом массой 12 кг содержит 45 % меди. Сколько килограмм чистого олова надо прибавить к этому слитку, чтобы получившийся новый сплав содержал 40 % меди?

5. Решите уравнение

$$\lg(0{,}5+x)=\lg 0{,}5-\lg x.$$

6. Решите неравенство

$$15\cdot 25^{x-1}-2\cdot 5^{x+1}>5^3.$$

В ответе запишите наименьшее целое решение этого неравенства.

7. Найдите наименьшее целое значение параметра t, при котором неравенство

$$(t^2-1)x^2+2(t-1)x+1>0$$

имеет место при всех значениях x.

8. К параболе $y=2x^2-3x-14$ проведена касательная, которая образует с положительным направлением оси OX угол $\dfrac{3\pi}{4}$. Найдите ординату точки касания.

9. Вычислите без таблиц

$$\frac{\sin^2(-120°)\cos 420°+\operatorname{tg}(-225°)}{\sin 315°\cos 315°}.$$

10. Решите уравнение

$$2\sin^2 x=3\cos x.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $\left[-2\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11. В прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 26, вписана окружность радиусом 4. Найдите периметр треугольника.

12. В основании четырехугольной пирамиды лежит параллелограмм, острый угол которого равен 30°, а высота равна $2\sqrt{3}$. Найдите объем пирамиды, если все двугранные углы при основании равны 60°.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Центрифуга, вращаясь, делает $n = 30$ об/мин. Определите линейную скорость точки, лежащей на расстоянии $l = 6$ м от центра вращения. Ответ дайте в СИ.

2. К находящемуся на горизонтальной плоскости бруску массой $m = 10$ кг приложена горизонтальная сила $F = 5$ Н. Определите силу трения между бруском и плоскостью, если коэффициент трения $\mu = 0{,}1$. Ускорение свободного падения считать равным $g = 9{,}8$ м/с^2. Ответ дайте в СИ.

3. Пуля летит с некоторой начальной скоростью. Она пробивает доску толщиной $d = 3{,}6$ см и продолжает полет со скоростью, составляющей 0,8 начальной. Какой максимальной толщины доску она может пробить?

Сила сопротивления доски постоянна. Ответ дайте в СИ.

4. Тело массой $m = 12$ кг изготовлено из вещества с плотностью $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите объем тела. Ответ дайте в СИ.

5. В баллоне емкостью $V = 10^{-2}$ м³ находится газ при температуре $t = 27$ °С. Вследствие утечки давление снизилось на $\Delta p = 10^5$ Па. Какое количество молекул вышло из баллона, если температура не изменилась? Постоянная Больцмана $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К. Ответ дайте, умножив результат на 10^{-20}.

6. Кусок свинца ударяется о препятствие со скоростью $v = 350$ м/с. Какая часть свинца расплавится, если все количество теплоты, выделяемое при ударе, поглощается свинцом? Температура свинца перед ударом $t = 27$ °С, температура плавления свинца $t_{пл} = 327$ °С, удельная теплоемкость свинца $c = 126$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления свинца $\lambda = 26{,}4 \cdot 10^3$ Дж/кг.

7. Сила, действующая на заряд $q = 1$ Кл, помещенный в электростатическое поле, равна $F = 1$ Н. Найдите напряженность поля. Ответ дайте в СИ.

8. Найдите сопротивление нихромового стержня диаметром $d = 1$ см и массой $m = 779$ г. Плотность нихрома $D = 7{,}9$ г/см³, удельное сопротивление $\rho = 10^{-6}$ Ом · м. Ответ дайте в СИ.

9. Пучок электронов, направленный параллельно обкладкам плоского конденсатора, на пути $l = 4$ см отклоняется на расстояние $x = 2$ мм от первоначального направления. Какую скорость имеют электроны? Напряженность электрического поля в конденсаторе $E = 22\,500$ В/м. Отношение заряда электрона к его массе $e/m = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг. Ответ дайте в км/с.

10. Определите энергию фотона рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ нм (1 нм $= 10^{-9}$ м). Ответ дайте в СИ, разделив результат на 10^{-13}. Постоянная Планка $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

Вариант 2

1. Тело, брошенное вертикально вверх, упало на землю через $t = 4$ с. С какой начальной скоростью было брошено тело? Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с². Ответ дайте в СИ.

2. Через блок, массой которого можно пренебречь, перекинута нить, на которой висят две гири с массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 6$ кг. Найдите натяжение нити. Ускорение силы тяжести $g = 9{,}8$ м/с². Ответ дайте в СИ.

3. Чему равно изменение кинетической энергии тела массой $m = 4$ кг, если его скорость увеличилась с $v_1 = 2$ м/с до $v_2 = 3$ м/с? Ответ дайте в СИ.

4. Какую работу совершает человек при подъеме груза массой $m = 2$ кг на высоту $h = 2$ м с ускорением $a = 3$ м/с²? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с². Ответ дайте в СИ.

5. При нагревании идеального газа на $\Delta T = 1$ К при постоянном давлении его объем увеличился на $n = 1/100$ первоначального объема. Найдите начальную температуру газа. Ответ дайте в СИ.

6. Для расплавления $m = 15$ кг стали потребовалось израсходовать количество теплоты $Q = 24 \cdot 10^6$ Дж. Определите КПД печи, если начальная температура слитка $t = 20$ °С, а температура плавления $t_{пл} = 1300$ °С. Удельная теплоемкость стали $c = 460$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 2{,}7 \cdot 10^5$ Дж/кг. Ответ дайте в процентах.

7. Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 4$ см, разность потенциалов между ними $U = 12$ В. Какую скорость получит электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $l = 6$ мм? Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг. Ответ дайте в СИ, разделив результат на 10^5.

8. Две дуговые лампы и добавочное сопротивление соединены последовательно и включены в сеть с напряжением $U_0 = 110$ В. Найдите величину добавочного сопротивления, если падение напряжения на каждой лампе $U = 40$ В, а ток в цепи $I = 15$ А. Ответ дайте в СИ.

9. Определите силу, действующую на проводник длиной $l = 10$ см при токе $I = 10$ А в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}12$ Тл, если угол между проводником и магнитной индукцией равен 90°. Ответ дайте в СИ.

10. Человек видит свое изображение в плоском зеркале. На какое расстояние нужно передвинуть зеркало, чтобы изображение сместилось на $l = 1$ м? Ответ дайте в СИ.

Публикацию подготовили *М. Ю. Дигилов, О. Н. Дьяченко, Е. А. Шведов*

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\frac{3x-1}{x-4}+\frac{x-2}{2x-13}=1.$$

2. Решите неравенство

$$(x-3)\sqrt{x^2-x-2}\geqslant 0.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x \sin(\pi+3x)=\cos 2x \cos(\pi-2x).$$

4. Решите неравенство

$$\log_{(3x-5)}4-\log_{(-6x-2)}16\geqslant 0.$$

5. В треугольнике ABC проведены высоты AD и CE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и AED, если $AB=6$, $AC=5$, $CB=7$.

6. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt{4x+a}+1\geqslant 2x.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$(x-\sqrt{7})(x+\sqrt{7})-2(x-2)^2=0.$$

2. Решите неравенство

$$x^2-4\left(\sqrt{-x-\frac{1}{4}}\right)^2>0.$$

3. Решите уравнение

$$\cos 9x-\cos 7x-\cos(\pi+3x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_5(x^2-9x+20)\cdot\log_{5-x}25\geqslant\frac{\log_5 10-1}{\log_{25}(5-x)}.$$

5. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BD и AE. Найдите отношение площадей треугольников ABC и BDE, если $AB=5$, $BC=8$, $AC=7$.

6. Для каждого значения параметра a найдите все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$|x+1|+2a|1-2x|=3/2.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. После прекращения действия силы, удерживающей пробковый шарик на глубине $H=1$ м, шарик вынырнул из воды и поднялся на высоту $h=0{,}5$ м над поверхностью. Определите среднюю силу сопротивления воды движению шарика. Сопротивление воздуха не учитывать. Масса шарика $m=100$ г, плотность пробки $\rho=200$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

2. Два спутника движутся в одном направлении по круговым орбитам, лежащим в одной плоскости, со скоростями $v_1=7{,}8$ км/с и $v_2=7{,}6$ км/с. Определите минимальное расстояние между спутниками и промежуток времени, через который они вновь будут находиться на этом же расстоянии. Радиус Земли принять равным $R=6400$ км.

3. Математический маятник совершает колебания. В положении наибольшего отклонения ускорение грузика маятника в 20 раз больше, чем в момент прохождения положения равновесия. Найдите угол максимального отклонения маятника.

4. Открытую с обеих сторон узкую цилиндрическую трубку длиной $l=1{,}25$ м погружают до половины в ртуть. Затем закрывают верхнее отверстие трубки и вынимают ее из ртути. При этом в трубке остается столбик ртути длиной $h=27$ см. Чему равно атмосферное давление? Плотность ртути $\rho=13\,600$ кг/м^3.

5. Два заряженных шарика, массы которых $m_1=0{,}2$ г и $m_2=0{,}8$ г и заряды $q_1=3\cdot10^{-7}$ Кл и $q_2=2\cdot10^{-7}$ Кл, соединены легкой непроводящей нитью длиной $l=20$ см и движутся вдоль силовой линии однородного электрического поля напряженностью $E=10^4$ Н/Кл. Вектор напряженности электрического поля направлен вертикально вниз. Определите ускорение шариков и натяжение нити.

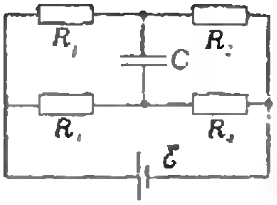


Рис. 1.

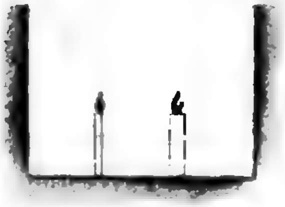


Рис. 2.

6. Математический маятник представляет собой шарик массой $m=1$ г и зарядом $q=10^{-8}$ Кл, подвешенный на легкой непроводящей нити. Определите, во сколько раз изменится период колебаний этого маятника, если его поместить в однородное электрическое поле напряженностью $E=5\cdot10^5$ Н/Кл, направленное: а) вертикально вниз; б) вертикально вверх; в) горизонтально.

7. Определите заряд конденсатора в электрической цепи, показанной на рисунке 1, где $R_1=20$ Ом, $R_2=30$ Ом, $R_3=10$ Ом, $R_4=40$ Ом, $\mathscr{E}=10$ В, $r=0$, $C=2$ мкФ.

8. Мотор лифта питается от источника постоянного тока с ЭДС $\mathscr{E}=240$ В и внутренним сопротивлением $r=0{,}2$ Ом. Определите скорость подъема лифта, если его масса $m=500$ кг, сопротивление обмотки мотора $R=0{,}6$ Ом, сила тока в цепи $I=50$ А. Определите также ЭДС электромагнитной индукции, возникающей в обмотках мотора при его вращении. Механическими потерями пренебречь.

9. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}4$ Тл под углом $\alpha=30°$ к направлению поля и движется по винтовой линии радиусом $R=0{,}5$ см. Найдите кинетическую энергию протона (масса протона $m=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг, заряд $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл).

10. Две свечи, высоты которых одинаковы и равны $h=10$ см, находятся на некотором расстоянии друг от друга (рис. 2). Расстояние от каждой свечи до ближайшей стены комнаты такое же, как между свечами. С какой скоростью движутся тени от свечей по стенам, если одна свеча сгорает за 10 мин, а другая — за 20 мин?

Публикацию подготовили *В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева, И. М. Матусевич*

Новые книги издательства «Наука»

Имеются в продаже:

Вихман Э. *Квантовая физика.* Учебное руководство. Изд. 3-е, испр. Пер. с англ. (Берклеевский курс физики, т. 4). 1986. 392 с. 1 р. 20 к.

Задачи по математике. Уравнения и неравенства. Справочное пособие. 1987. 240 с. 85 к.

Сборник задач по элементарной физике. Пособие для самообразования. Б. Б. Буховцев и др. Изд. 5-е, перераб. 1987. 416 с. 85 к.

Информатика и научно-технический прогресс. (Кибернетика — неограниченные возможности и возможные ограничения). 1987. 189 с. 65 к.

Ишлинский А. Ю. *Классическая механика и силы инерции.* 1987. 319 с. 2 р. 30 к.

Кирсанов В. С. *Научная революция XVII в.* 1987. 341 с. 2 р. 70 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин № 3 «Книга — почтой» «Академкнига».

Ответы, указания, решения

Сплетение скрещивающихся прямых

1. $-1, 1, -1$.

2. Коэффициенты противоположны.

4. Первую прямую можно выбрать p способами, после чего вторую придется выбирать из $p-1$ прямых, затем третью — из $p-2$ прямых. Действуя так, мы выбираем упорядоченную тройку, и выбор можно произвести $p(p-1)(p-2)$ способами. При этом каждая неупорядоченная тройка получится 6 раз (так как тройка упорядочивается шестью способами: при ее упорядочении первая прямая выбирается из трех прямых, вторая — из двух оставшихся, а третья определена выбором первых двух).

5. Ясно, что одно из чисел p, $p-1$, $p-2$ делится на 3. При сокращении на 3 степень двойки, на которую делится сокращаемый сомножитель, не изменяется. Если p четно, то и $p-2$ четно, и числитель рассматриваемой дроби делится на 4 (и даже на 8), а вся дробь четна. Если p нечетно, то из сомножителей числителя четен только средний. Если p при делении на 4 дает остаток 1, то средний сомножитель делится на 4 и вся дробь четна. Если же p при делении на 4 дает остаток 3, то средний сомножитель не делится на 4 (он делится только лишь на 2), и дробь нечетна.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\{\arcsin 3/4;\ \arcsin(-1/3);\ \pi-\arcsin 3/4\}$. Указание: уравнение $\arcsin f(x)=g(x)$ равносильно системе $f(x)=\sin g(x)$, $-\pi/2\leqslant g(x)\leqslant\pi/2$.

2. $(0;\ 1/2)\cup(1;\ 4)\cup(32;\ \infty)$.

3. $3\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)R^2/8$. Указание. Пусть O — центр окружности, а проходящие через K и L прямые, параллельные AM, пересекают прямую OM в точках D и N соответственно. Тогда $\angle DMK=30°$, $\angle KOD=60°$, поэтому $OD=\frac{1}{2}R$, $DN=NM=\frac{3}{4}R$, $ON=\frac{1}{4}R$, $NL=\frac{\sqrt{15}}{4}R$. Площадь треугольника MDK равна разности площадей трапеции $AMDK$ и треугольника MDK.

4. $a\in[-7/2;\ 1]$. Указание. Множество решений системы содержит отрезок AB тогда и только тогда, когда оно содержит точки A и B.

5. $1/12$. Указание. Если O — центр куба, K — середина отрезка $B'M$, N — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на $B'M$, то KN — искомое расстояние.

Вариант 2

1. $(32n+m)\pi/8$, $m=-1, 2, 3, 7, 10, 11$, $n\in Z$.

2. $(-3;\ (3-\sqrt{17})/4)\cup(0;\ 1)\cup[(3+\sqrt{17})/4;\ \infty)$.

3. $384/25$. Указание. $AB=24/5$. Пусть O_1 и O_2 центры окружностей радиусами 3 и 4; AH, O_1K, O_2L — перпендикуляры, опущенные на CD. Тогда $KL=\frac{1}{2}CD=4$. Проведем прямую O_1N, параллельную CD; треугольник O_1O_2N подобен треугольнику ABH, откуда $AH=\frac{96}{25}$, а площадь треугольника ACD равна $\frac{1}{2}CD\cdot AH=\frac{384}{25}$.

4. $y=-2x+6$. Указание. Если $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки A, то $y_0=-x_0^2+2x_0+2$, $-x_0(-2x_0-2)=2y_0$, $x_0>0$, $y_0>0$.

5. $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$. Обозначим через M и N середины ребер AC и SB. N_1, N_2 — точки, симметричные точке N относительно биссекторных плоскостей, делящих угол между плоскостями ABC и ABS пополам. Плоскость MNN_1 не пересекает прямую AB. Плоскость MNN_2 образует с плоскостями ABC и ABS угол $\operatorname{arctg}\sqrt{5}$.

Вариант 3

1. $\{1, (\sqrt{183}-1)/13\}$.
2. $x_1=k\pi$, $x_2=\pi(4n-1)/4$; $n, k\in Z$.
3. 1.
4. 1,93 кг, 0,96 кг, 9,12 кг.
5. $\pi\sqrt{3}/3$.

Физика

Вариант 1

1. Газ просачивается сквозь поршень до тех пор, пока его давление по обе стороны не станет одинаковым. Тогда при сравнении сил, действующих на поршень, его можно не учитывать. Тем самым, задача свелась к совсем простой: в одном отсеке давление равно нулю, а в другом — длиной $(L+x)$ — оно равно p'. По закону Бойля — Мариотта $p'(x+L)=pL$. Из условия равновесия поршня $F=p'S$. Отсюда получаем:

$$x=L(pS/F-1) \text{ при } pS/2<F<pS;$$
$$x=0 \text{ при } pS\leqslant F;$$
$$x=L \text{ при } pS/2\geqslant F.$$

2. См. решение задачи Ф1094, которое будет опубликовано позже.

3. См. решение задачи Ф1096, которое будет опубликовано позже.

4. Бег — последовательность фаз полета после толчков ног. Если считать (в грубой модели), что характер толчка со временем не изменяется, то дальность полета между толчками $s\sim 2v_0^2\sin\alpha\cos\alpha/g_Л$ и время полета $t\sim 2v_0\sin\alpha/g_Л$. Отсюда средняя скорость $v=s/t\sim v_0\cos\alpha$ не зависит от ускорения свободного падения, т. е. скорость бега на Луне по порядку величины должна быть близкой к скорости на Земле. (Результат можно увидеть сразу, так как горизонтальная составляющая скорости, если не учитывать особенности толчков, не должна зависеть от ускорения свободного падения.)

5. В бутылке без трубочки вода при вытекании образует разреженную область вверху, которая препятствует вытеканию. Оно продолжится только после того, как через воду «пробулькнет» пузырек воздуха, выравнивающий давление с атмосферным. В результате вода из этой бутылки вытекает медленнее, чем из другой, где трубочка обеспечивает постоянное нормальное давление над водой (хотя и уменьшает несколько площадь, через которую вытекает вода, проходя через горлышко бутылки).

Вариант 2

1. Сила трения ($\mu mg \cos\alpha$) направлена против равнодействующей сил тяжести и внешней ($\sqrt{F_{\min}^2+(mg\sin\alpha)^2}$). Приравнивая силы, получаем

$$F_{\min}=mg\sqrt{\mu^2\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}\ \text{при}\ \mu\geqslant\operatorname{tg}\alpha,$$
$$F_{\min}=0\ \text{при}\ \mu<\operatorname{tg}\alpha.$$

2. Из закона сохранения заряда $2CU=Q_1+Q_2$, из равенства разностей потенциалов на обкладках конденсаторов $Q_1/(2C)=Q_2/C$ и из закона сохранения энергии $2\frac{Mv^2}{2}=2\frac{CU^2}{2}-\left(\frac{Q_1^2}{2(2C)}+\frac{Q_2^2}{2C}\right)$ имеем

$$v=\sqrt{\frac{CU^2}{3M}}.$$

3. Из условия равновесия для левого поршня давление p_1 слева и справа от него должно быть одним и тем же. Тогда и объемы в левом и правом отсеках до начала конденсации пара должны быть одинаковыми. Таким образом, пока $p_1\leqslant 2p_0$, длина каждого отсека равна $(2L-a)/2=L-a/2$ и смещение левого поршня

$$x=a/2\ \text{при}\ a\leqslant L.$$

При дальнейшем вдвигании правого поршня пары воды конденсируются, и давление, одинаковое в обоих отсеках, будет постоянным и равным $2p_0$. Значит, и расстояние между поршнями l будет постоянным и равным $L/2$ (по закону Бойля — Мариотта $p_0L=2p_0l$, откуда $l=L/2$). Отсюда (объемом сконденсировавшейся воды пренебрегаем)

$$x=2L-a-L/2=3L/2-a\ \text{при}\ L\leqslant a\leqslant 3L/2.$$

Наконец,

$$\text{при}\ a>3L/2\ x=L.$$

4. Работа против сил сжатия лезвия топора F на пути s (размер обуха) равна $Fs\sim mv^2/2$, где m — масса топора, v — его скорость. Будем считать, что топор, как и руки, движется примерно с той же скоростью, что и ноги при беге. Таким образом,

$$F\sim mv^2/(2s)\sim 5\cdot 10^3\ \text{Н}$$

при $m\sim 1$ кг, $s\sim 10^{-2}$ м и $v\sim 10$ м/с.

5. См. решение задачи Ф1102, которое будет опубликовано позже.

Вариант 3

1. Из уравнения Менделеева — Клапейрона для одного моля газа — $pV=RT$ — следует, что угол наклона α изохоры к оси температур таков, что $\operatorname{tg}\alpha=p/T=R/V$. Таким образом, максимальный наклон соответствует минимальному объему и наоборот:

$$V_{\min}=RT_1/p_2,\ V_{\max}=RT_2/p_1.$$

2. Пусть на обкладке конденсатора окажется заряд q, тогда на шаре остается заряд $Q-q$, на другой обкладке возникнет заряд $Q-q$, а на шаре радиусом R — заряд $+q$ (из закона сохранения заряда). Приравнивая разности потенциалов между обкладками конденсатора и между шарами, получаем

$$4\pi\varepsilon_0 q/C=(Q-q)/r-q/R,$$

откуда

$$q=\frac{Q}{1+r(1/R+4\pi\varepsilon_0/C)}.$$

3. Так как скорость v бусинки постоянна, сила трения μN уравновешивает «скатывающую» силу $mg\sin\alpha$. Из второго закона Ньютона получаем

$$\left(\frac{mv^2\cos^2\alpha}{R}\right)^2+(mg\cos\alpha)^2=N^2=\left(\frac{mg\sin\alpha}{\mu}\right)^2.$$

Отсюда

$$v=\frac{\sqrt{Rg}}{\cos\alpha}\left(\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}\right)^2-\cos^2\alpha\right)^{1/4}\ \text{при}\ \operatorname{tg}\alpha>\mu.$$

4. Грубая оценка по порядку величины из закона сохранения энергии дает: $mv_{\text{ц.т}}^2/2+mgl/2\sim Fh$, где $F\sim(M_{\text{чел}}/2)g$ — сила давления одной ноги стоящего человека. Отсюда $v_{\text{ц.т.}}\sim\sqrt{(Mh/m-l)g}$, $v_{\text{т}}/v_{\text{ц.т}}=2$ (так как $v=\omega r$), т. е.

$$v_{\text{т}}\sim 2\sqrt{(Mh/m-l)g}\sim 15\ \text{м/с}$$

при $M/m\sim 70$, $h\sim 0{,}1$ м, $l\approx 1{,}5$ м, $g=10$ м/с^2.

5. Вначале быстро разогреваются тонкие стенки металлического сосуда, и объем его увеличивается, поэтому уровень жидкости понижается. Затем прогревается сама жидкость, ее объем растет, и уровень в трубке повышается.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $x=(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3}+\pi n,\ n\in Z.$

2. $(2m+1+\sqrt{4m^2+1})/4.$

3. $\left[1;\ 1+\log_3^2\frac{c+1}{c+2}\right)$ при $c\in]-\infty;\ -2[\cup[1;\ \infty)$ при $c\in]-2;\ \infty)$.

4. $\frac{\pi h^3}{4}\left(\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}\right),\ \pi h^2\left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\frac{\pi}{4}<\alpha<\operatorname{arcctg}1/3;\qquad \pi h^2\left(\frac{1-\operatorname{ctg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\operatorname{ctg}^2\alpha$ при $\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\leqslant\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Указание. Пусть ASB — осевое сечение пирамиды, проходящее через середины ребер PT и QR, $AB=a$, $\angle ABS=\varphi$, C — центр вписанного в пирамиду шара, r — его радиус, Π_1 и Π_2 — прямые, по которым возможные секущие плоскости пересекают вписанный шар (рис. 1). Тогда $h=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\varphi$, $r=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\cos\varphi=$ $=\operatorname{ctg}\alpha$. Вычисляя $r_1=C_1E$ и $r_2=C_2O$ и учитывая, что при $2r<h/2$, т. е. при $4\operatorname{tg}\varphi/2<$ $<\operatorname{tg}\varphi$ или $0<\operatorname{ctg}\alpha<\frac{1}{3}$, плоскость π_1 не пересекается с вписанным шаром, получаем ответ.

Вариант 2

1. $[2;\ 3)\cup(3;\ 7/2]\cup\{4\}$.

2. $3(10-p)/(2p-10)$ при $p\in[50/7;\ 10]$.

3. $\{\pi+4\pi n;\ 2\pi k\}$, $k,n\in Z$ при $a\in]-1;\ 3[$. Указание. Из второго уравнения следует, что $\sin x/2=1$, $\cos y=1$.

4. $R=\frac{d}{2\sin\alpha|\cos 2\alpha|}$, $R=\frac{d}{2\sin\alpha}$, если $\alpha\neq$

$\neq \frac{\pi}{4}$; $R = \frac{d}{\sqrt{2}}$, если $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Рассмотрим осевое сечение пирамиды (рис. 2 и 3). По условию задачи точка P лежит на высоте пирамиды SO или на ее продолжении, но не совпадает с точкой S, так как $d > 0$. Обозначим $AD = a$, $SO = h$. Тогда $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $h = \frac{a \operatorname{ctg} \alpha}{\sqrt{2}}$. Точка P может лежать или выше основания пирамиды (может быть, даже выше точки S), или ниже этого основания. Поэтому или $AE \perp SC$, или $AE \perp SA$. Из $\triangle AOP$ получаем $OP = \frac{a \operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{2}}$, $AP = \frac{a}{\sqrt{2} \cos \alpha}$.

В зависимости от положения точки P имеем: или $d = |AE - AP| = \left| a\sqrt{2}\cos\alpha - \frac{a}{\sqrt{2}\cos\alpha} \right| = \frac{a|\cos 2\alpha|}{\sqrt{2}\cos\alpha}$, или $d = AP = \frac{d}{\sqrt{2}\cos\alpha}$, т. е. или $a = \frac{d\sqrt{2}\cos\alpha}{|\cos 2\alpha|}$, или $a = d\sqrt{2}\cos\alpha$. Но во всех случаях $2R = h + x = \frac{a}{\sqrt{2}} (\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha) = \frac{a\sqrt{2}}{\sin 2\alpha}$, и потому либо $R = \frac{d}{2\sin\alpha|\cos 2\alpha|}$, либо $R = \frac{d}{2\sin\alpha}$.

Физика

1. $v_{\max} = \sqrt{\frac{m}{2k} \frac{a}{\cos\alpha}} = 0{,}2$ м/с.
2. $\omega = \sqrt{\frac{g}{r} \frac{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}} = 11$ с$^{-1}$.
3. $W = \frac{2q_\alpha^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{8e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = 1{,}84 \cdot 10^{-14}$ Дж.
4. $A = (p_0S + mg)\, h \frac{\Delta t}{(t + 273)} = 79$ Дж.
5. $B = \frac{U_2}{vl}(1 + n) = 0{,}25$ Тл.
6. $\frac{q}{m} = \frac{8U}{B^2l^2} = 1 \cdot 10^8$ Кл/кг.
7. $a = \frac{e}{m}\left(B\sqrt{\frac{2eEh}{m}} - E\right) = 1 \cdot 10^{12}$ м/с^2.
8. $v = \sqrt{2gh(1 - \cos\alpha) - \frac{2BIlh\sin\alpha}{m}} = 0{,}35$ м/с.
9. Можно, если конденсаторы соединить параллельно.
10. $Q = \frac{PL}{2R} = 1{,}6$ Дж.

Московский институт стали и сплавов

Математика

1. 33. 2. 4,2. 3. 9. 4. 1,5. 5. 0,5. 6. 2. 7. 1. 8. —15. 9. 1,25. 10. 3. 11. 60. 12. 24.

Физика

Вариант 1

1. $v = 2\pi nl = 18{,}84$ м/с.
2. $F_{\text{тр}} = F = 5$ Н ($F < F_{\text{тр max}} = \mu mg = 9{,}8$ Н).
3. $d_{\max} = d/(1 - 0{,}8^2) = 0{,}1$ м.
4. $V = m/\rho = 0{,}012$ м^3.
5. $N = \Delta pV/(kT) = 24 \cdot 10^{20}$; ответ: 24.
6. $\alpha = (v^2/2 - c\,(t_{\text{пл}} - t))/\lambda = 0{,}89$.
7. $E = F/q = 1$ В/м.
8. $R = 16\rho ml/(D\pi^2d^4) = 0{,}016$ Ом.
9. $v = l\sqrt{\frac{e}{m}\frac{E}{2x}} \cdot 10^{-3} = 3980$ км/с.
10. $W = hc/\lambda = 4 \cdot 10^{-13}$ Дж; ответ: 4 Дж.

Вариант 2

1. $v_0 = gt/2 = 19{,}6$ м/с.
2. $T = 2m_1m_2g/(m_1 + m_2) = 29{,}4$ Н.
3. $\Delta W_k = m(v_2^2 - v_1^2)/2 = 10$ Дж.
4. $A = m(g + a)h = 52$ Дж.
5. $T = \Delta T/\alpha = 100$ К.
6. $\eta = \frac{(cm(t_{\text{пл}} - t) + \lambda m)}{Q} \cdot 100\,\% = 53{,}7\,\%$.
7. $v = \sqrt{\frac{2eUl}{md}} = 8 \cdot 10^5$ м/с; ответ: 8 м/с.
8. $R = (U_0 - 2U)/I = 2$ Ом.
9. $F = BIl = 0{,}12$ Н.
10. $x = l/2 = 0{,}5$ м.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $[-1; 31/5]$.
2. $\{2; -1\} \cup [3; \infty)$.

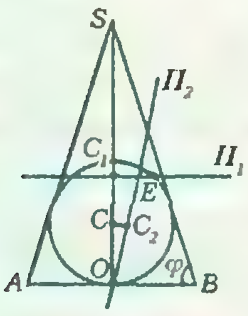


Рис. 1.

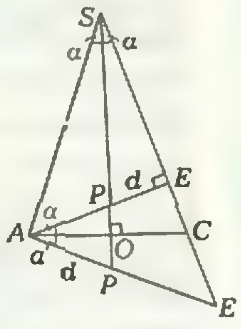


Рис. 2.

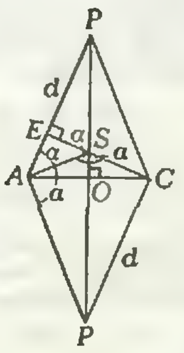


Рис. 3.

3. $x=\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $n\in Z$.

4. $[-3;\ -2)$.

5. 49/5. Указание. $S_{ABC}/S_{AED}=BC/(AE\cos\beta)$.

6. При $a<-3$ — решений нет, $x=1$ при $a=-3$; $[(2-\sqrt{a+3})/2;\ (2+\sqrt{a+3})/2]$ при $a\in(-3;\ -2]$; $[-a/4;\ (2+\sqrt{a+3})/2]$ при $a>-2$. Указание. Рассмотрите графики функций $y=\sqrt{4x+a}$ и $y=2x-1$ и исследуйте их взаимное положение в зависимости от a.

Вариант 2

1. $[3;\ 5]$

2. $(-\infty;\ -2-\sqrt{3})\cup(-2+\sqrt{3};\ -1/4]$.

3. $x_1=\pi k/5$, $x_2=\pi(2l+1)/6$, $k, l\in Z$.

4. $(-\infty;\ 3)$.

5. 3,9. Указание. $S_{BDC}/S_{ABC}=DC/AC=8/13$.

6. $\{1/2\}$ при $a\in(-\infty;\ -1/4)$; $[1/2;\ \infty)$ при $a=-1/4$; $\{(4a-5)/(8a+2);\ 1/2\}$ при $a\in(-1/4;\ 1/4)$; $[-1;\ 3/2]$ при $a=1/4$; $\{1/2\}$ при $a\in(1/4;\ \infty)$. Указание. График левой части уравнения представляет собой ломаную, состоящую из двух лучей и отрезка, с вершинами в точках $(-1;\ 6a)$ и $(1/2;\ 3/2)$.

Физика

1. $F=mg\left(\frac{\rho_в}{\rho}-\frac{h}{H}-1\right)=3{,}5$ Н.

2. $\Delta R_{\min}=gR^2\left(\frac{1}{v_2^2}-\frac{1}{v_1^2}\right)=352$ км; $\tau\approx20$ ч.

3. $\alpha=2\,\mathrm{arctg}\,(1/40)\approx3°$.

4. $p_a=2\rho gh(l-h)/(l-2h)=10^5$ Па.

5. $a=g+E(q_1+q_2)/(m_1+m_2)=14{,}8$ м/с^2; $T=E(q_1m_2-q_2m_1)/(m_1+m_2)+q_1q_2/(4\pi\varepsilon_0l^2)=15{,}5\cdot10^{-3}$ Н.

6. а) $\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{g+qE/m}}=0{,}82$;

б) $\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{g-qE/m}}=1{,}42$;

в) $\frac{T}{T_0}=\sqrt{\frac{g}{\sqrt{g^2+q^2E^2/m^2}}}=0{,}95$.

7. $q=C\mathcal{E}\left(\frac{R_1}{R_1+R_2}-\frac{R_3}{R_3+R_4}\right)=4\cdot10^{-6}$ Кл.

8. $v=\frac{\mathcal{E}I-I^2(R+r)}{mg}=2$ м/с;

$\mathcal{E}_{инд}=\mathcal{E}-I(R+r)=200$ В.

9. $W=q^2B^2R^2/(2m\sin^2\alpha)=1{,}2\cdot10^{-16}$ Дж.

10. $v_1=0$; $v_2=1{,}5$ см/мин.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 2)

Вопросы и задачи

1. За счет отражения света на границе вода — воздух.

2. Да, если изготовить изо льда собирающую линзу.

3. Лучи света слабо преломляются при переходе из воды в глаз и не дают резкого изображения на сетчатке.

4. Свет, отраженный от аквалангиста при больших углах падения лучей, испытывает полное внутреннее отражение от границы «вода — воздух». Свет же, отраженный от рыбака при любом угле падения, проходит в воду.

5. Показатель преломления вещества.

6. Со скоростью 4 м/с.

7. Из-за рассеяния света капельками воды в тумане.

8. См. рис. 4.

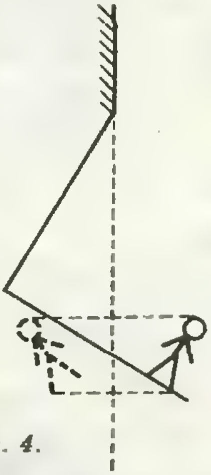


Рис. 4.

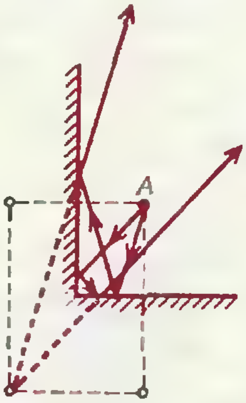


Рис. 5.

9. Многократным внутренним отражением лучей света, попавших в драгоценный камень.

10. Солнечный свет, рассеянный атмосферой, значительно ярче света звезд.

11. Три (см. рис. 5).

12. Щурясь, люди как бы уменьшают «диафрагму» зрачка, и изображение становится более резким.

Микроопыт

С помощью очков для дальнозорких можно сфокусировать, например, поток солнечного света, с очками для близоруких — нельзя.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 2)

1. Больше будет закрытая часть (см. рис. 6).

2. Последняя цифра числа A^3 зависит только от последней цифры числа A. Выпишем эти

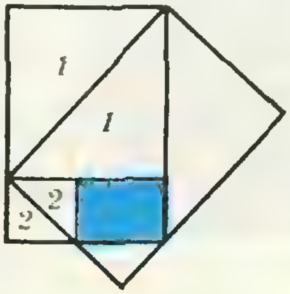


Рис. 6.

цифры в таблицу:

A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9

Из этой таблицы видна справедливость утверждения задачи.

3. Воздух является плохим проводником тепла. Распушая перья, птицы увеличивают слой воздуха между наружным воздухом и телом.

4. Запишем условие задачи: $700+10x+y=100x+10y+7+117$. Отсюда $90x+9y=576$ или $10x+y=64$. Значит, $x=6$, $y=4$, а искомое число — 764.

5. $763\times852\times941=611\,721\,516$.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1987, № 11, 12)

Задание 21 (С. Левман, 1938 г., переработка Я. Владимирова). Тема простого клапана в четырех вариантах. После **1. Кg8!** грозит 2. **Кh6** и 3. **Кf7×**. Черные должны двигать пешки b7 и c7, подключая ладью для защиты седьмой горизонтали. Но при этом происходит перекрытие ладьи по другим горизонталям, что и решает дело. 1...**b6** 2. **Кe7!** (конь возвращается обратно) и 3. **Кc6×**; 1...b5 2. Лc3! и 3. Лc5×, 1...**c6** 2. **Сe7!** и 3. Сd6×, 1...c5 **2.** **Лe8!** и 3. **Лd5×**.

Задание 22 (Л. Валье, 1944 г.). **1. c4!** с угрозой **2.** **К:** a5 ba 3. c5×. Черная ладья пытается спасти короля: 1...**Л**:a4 2. Сc6! и 3. **Лd7×**, 1...**Л:b3** 2. Сd5! и 3. **Лe6×**, 1...**Л:b5** 2. **Кd4**. **Лe5** 3. **Лd8×**, 1...Л:c4 2. **К:b6!** Лc7 3. **Лh6×** (черный ладейный крест).

Задание 23 (Н. Григорьев, 1933 г.). **1. Крa1!!** (но не 1. Крb2? **d4** 2. **Крc1** Крc3 3. **Крd1** **d3!** **4.** cd Кр:d3 и не 1. **Крb1?** Крc3! **2.** Крc1 d4 3. Крb1 d3!) **1...Крc3** (если 1...d4, то 2. **Крb2**, а если 1...**Крa3**, то **2.** **Крb1** **Крb4** **3.** **Крc1!**) **2. Крb1 Крb4** (2...d4 3. Крc1!) **3. Крc1!!** (но не 3. Крb2? d4!) **3...Крc3** (3...d4 4. Крd2) **4. Крd1!!** (но не 4. **Крb1?** **Крb4!** 5. **Крc1** **Крc3**) **4...d4** **5. Крc1 d3 6. cd Кр:d3** (если 6...Кр:b3, то 7. **Крd2** и симметричной игрой) **7. Крb2 Крd4** **8. Крa3 Крc5 9. Крa4 Крb6 10. Крb4** и выигрышем. В этом этюде, как и в следующем, важны не только правильные ходы, но и ложные следы.

Задание 24 (Н. Григорьев, 1933 г.). **1. a4!** (но не 1. **Крe8?** **Крc7** **2.** **Крe7** **b5!** 3. **Крe6** **b4** **4.** ab cb 5. **Крd5** a5! **6.** **Крc5** **a4** **или** **4.** a4 **Крb6** 5. **Крd6** Крa5 6. **Кр:c5** пат) **1...Крd7** (1...a5 2. **Крe8** **Крc7** 3. **Крe7** **Крc6** **4.** **Крd8**) **2. a5! Крd6 3. Крf7** (но не 3. ab? **Крc6** **4.** Крe7 **Кр:b6** 5. **Крd6** **Крa5!** **6.** Кр:c5 пат) **3...Крd7 4. Крf6! Крd6 5. Крf5 Крc7** (5...Крd7 6. **Крc5** **Крc6** 7. **Крe6** b5 8. **Крe5!** **Крc7** **9.** **Крd5** bc 10. bc **Крd7** 11. **Кр:c5** **Крc7** **12.** Крd5 и т. д.) **6. Крe6 Крc6 7. Крe7 Крc7 8. Крe8 Крc8** (8...Крc6 9. **Крd8!** ba 10. **Крe7!** **Крc7** 11. **Крe6** **Крc6** 12. **Крe5** Крc7 13. **Крd5** **Крb6** **14.** **Крd6** Крb7 15. **Кр:c5** Крc7 16. **Крd5** **Крd7** 17. c5 Крc7 18. c6 **Крd8** 19. **Крc4** **Крc8** **20.** **Крd4!** — метод треугольника! — 20...**Крd8** **21.** Крd5 Крc8 22. **Крd6** **Крd8** 23. c7+ Крc8 24. Крc6) **9. ab Крb7 10. Крd7 Кр:b6 11. Крc8 Крc6 12. Крb8 Крb6 13. Крa8 a5 14. Крb8 a4! 15. ba Крa5 16. Крb7 Кр:a4 17. Крc6 Крb4 18. Крd5**, и белые выигрывают.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. П. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябен, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Т. Н. Кольченко,
А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор И. Б. Румянцева

Сдано в набор 18.01.88. Подписано к печати 24.02.88.
Т-04694 Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 22,1 Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 6,85
Тираж 196 058 экз. Цена 40 коп. Заказ 51

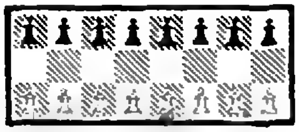
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

ДВЕ ИГРЫ

В прошлый раз мы упомянули о шахматах Доусона, в которые играют на доске 3×8 одними пешками. Пешки ходят и бьют по обычным правилам, причем взятие обязательно. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход,— все его оставшиеся пешки запатованы.

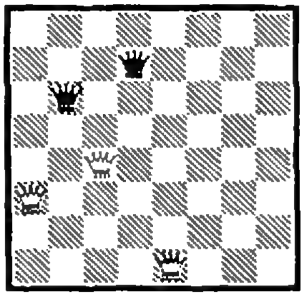


Пусть первый ход белых 1. a2, тогда черные вынуждены ответить 1...ba, и белые тоже 2. ba. Теперь вертикали «a» и «b» «вышли из игры», а ход черных. Если они играют 2...f2, то белые должны ходить 3. ef или 3. gf. После разменов от трех заполненных вертикалей «e», «f» и «g» остается лишь одна «f» с застопорившимися на ней пешками, а очередь хода снова за белыми. Итак, любой ход приводит к уменьшению числа вертикалей, на которых еще можно ходить, на 3, 2 или 1 (если соседние вертикали пусты) и передаче хода партнеру. Поэтому игру можно переформулировать так: *белые и черные по очереди ставят пешки на 2-ю горизонталь на поля, не граничащие с уже занятыми; кто не может сделать ход — проигрывает.* Дальше мы будем рассматривать игру в этой формулировке.

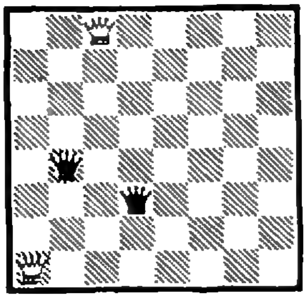
Надо сказать, что анализ игры на доске 3×n при произвольных значениях n представляет собой весьма сложную математическую проблему. Рассмотрим n от 1 до 8. При n=1 и n=2 победа за белыми (1. a2). Выигрывают они и при n=3 (1. b2, но не 1. a2? c2). При n=4 верх берут черные (1. a2 c2; 1. b2 d2). Легко проверить, что при следующих трех значениях n (n=5, 6, 7) снова побеждают белые, а при n=8 уже им не избежать поражения. Ввиду симметрии достаточно рассмотреть четыре «дебюта»: 1. a2 e2 2. g2 c2; 1. b2 f2! 2. d2 h2; 1. c2 e2 2. g2 a2; 1. d2 f2 2. a2 h2.

В принципе можно вывести рекуррентные соотношения для определения результата игры при различных значениях n, но простой формулы или правила, позволяющего выявить победителя при данном n, не существует. Еще сложнее анализ «мизерной» формы шахмат Доусона (именно ее первоначально предложил автор игры): проигрывает тот, кто делает последний ход.

Рассмотрим еще одну интересную шахматно-математическую игру, связанную со знаменитой «задачей о восьми ферзях». Два игрока по очереди ставят ферзей на вертикали «a», «b», «c» и т. д. Никакие два из них не должны бить друг друга (цвет ферзей не имеет значения). Проигрывает игрок, который не может сделать очередного хода.



В этой партии сделано 5 ходов — выиграл начинающий (все поля вертикали «f» контролируются уже выставленными ферзями).



Здесь сделано 4 хода — выиграл второй игрок (на вертикали «e» не осталось ни одного доступного поля). Кстати, это самая короткая партия.

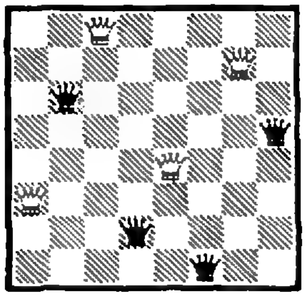
Интересен и такой вариант игры: игрок, сделавший последний ход, выигрывает столько очков, сколько свободных вертикалей осталось при этом на доске. При таком подходе в первом примере белые выиграли 3 очка, а во втором черные — 4.

Возникает вопрос: чем же завершается эта «игра ферзей» в каждом из двух вариантов? Полный перебор (около 7000 партий) был осуществлен на компьютере. И вот что оказалось.

В первом варианте «игры ферзей» у второго игрока имеется выигрышная стратегия, при наиболее упорном сопротивлении первого игрока партия заканчивается после восьмого хода.

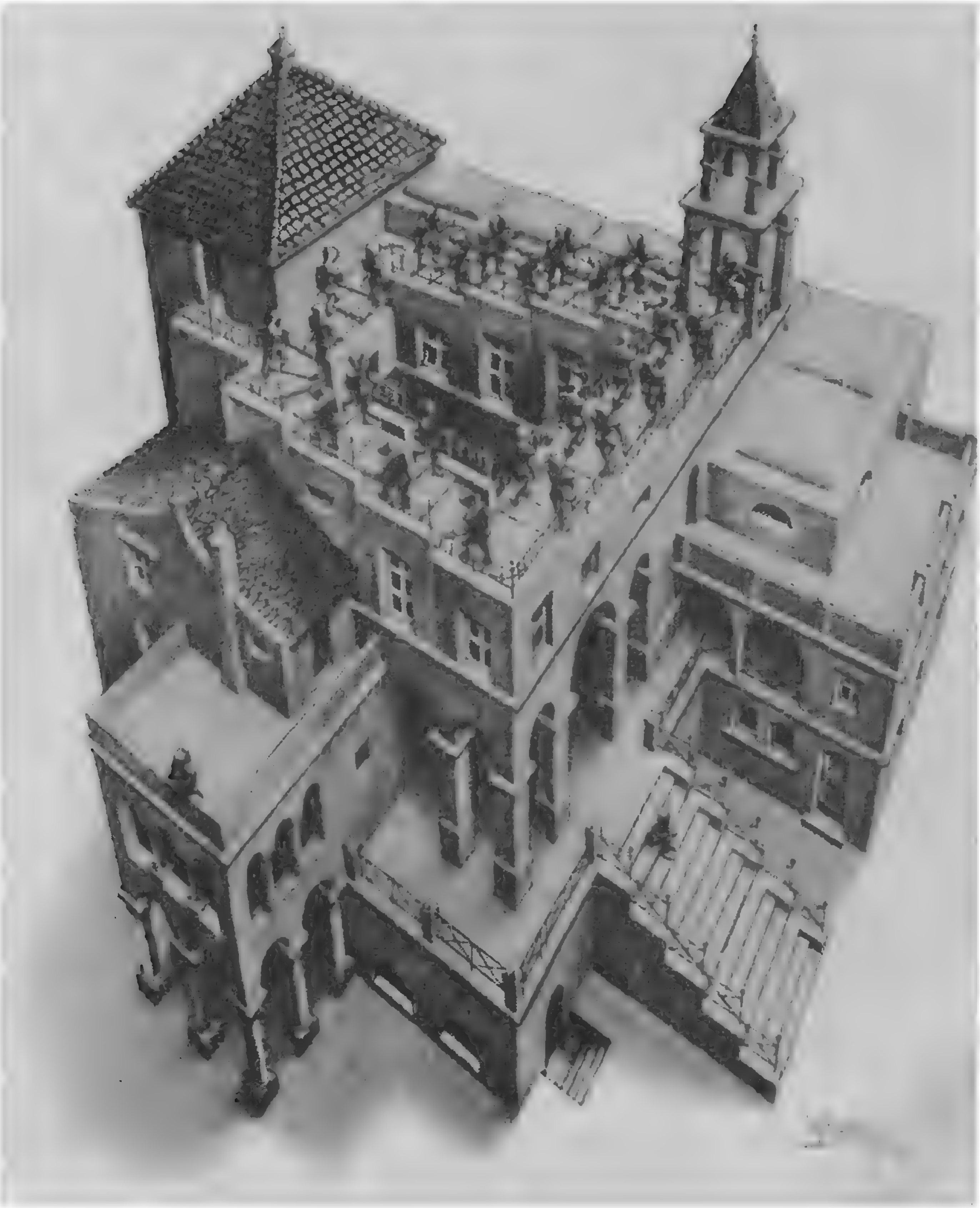
Во втором варианте при наилучших действиях обоих игроков партия также длится восемь ходов и заканчивается вничью — выигрыш игрока, поставившего последнего ферзя, составляет 0 очков! (В терминах математической теории игр это означает, что цена игры равна 0.)

Вот один из примеров оптимальной (для обоих вариантов) партии.



Читателям предлагается рассмотреть «игру ферзей» на доске n×n. Можно высказать гипотезу, что в первом варианте игры на нечетных досках побеждают белые, а на четных — черные. Во втором варианте партия вновь заканчивается вничью (нулевой выигрыш). При этом, если кто-то из игроков отклонится от расстановки n не угрожающих друг другу ферзей на доске n×n, то он должен проиграть.

Е. Я. Гик

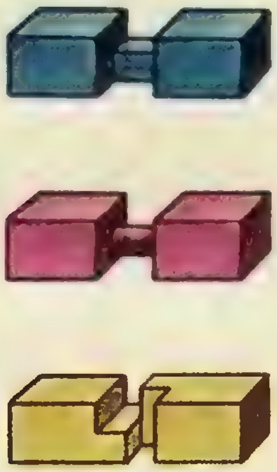


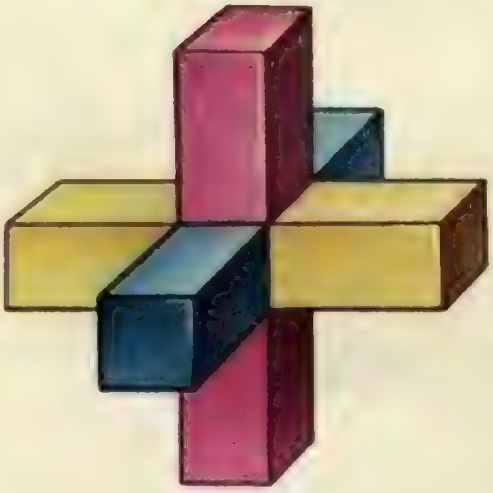
Цена 40 коп.

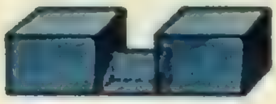
Индекс 70465

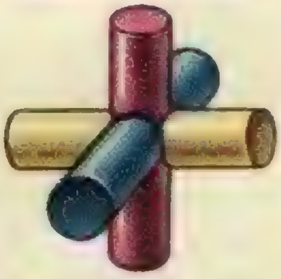
Как соединить крест-накрест три бруска? Задачу эту приходилось решать нашим предкам еще в глубокой древности, когда они начали строить первые жилища. С тех пор изобретены сотни различных способов: бруски связывают, зацепляют, сколачивают, свинчивают, склеивают, сваривают. Некоторые соединения, придуманные очень давно, так оригинальны и остроумны, что превратились в занимательные головоломки. Две из них мы предлагаем читателям. В первом варианте крест собирается из трех брусков с различной конфигурацией вырезов; на рисунке они показаны слева. Секрет в том, что один из брусков может поворачиваться вокруг продольной оси. За счет этого и удается собирать и разбирать узел. Во втором варианте крест составляется из трех одинаковых брусков (рисунок справа вверху). Но как бы мы ни складывали два из них, третий к ним присоединить невозможно. Поэтому надо одновременно сдвигать все три бруска к центру узла. Элементы головоломок нетрудно сделать самим из деревянных брусков квадратного сечения. Вырезы в брусках нужно сделать точно и аккуратно — только в этом случае собранный узел будет прочным. В заметках о головоломках, которые мы регулярно публикуем с прошлого года, в основном рассказывалось о устройстве головоломок и об алгоритмах решения. Можно сказать, что обсуждались задачи из «алгебры головоломок». Сейчас мы предлагаем читателям задачу из «геометрии головоломок». Попробуйте придумать способ крестообразного соединения трех круглых брусков с вырезами. Предложенные выше конструкции вырезов для этого не годятся. Узел должен быть сборно-разборным, состоять из трех элементов и иметь вид, показанный на рисунке справа, без дополнительных видимых линий разреза. Из различных решений лучшим считается то, при котором внутри узла окажется меньше пустого места. Признаемся, что нам неизвестно, разрешима ли эта задача.

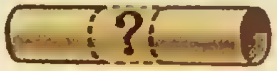
А. К.











НОМЕР
4

Квант

Основан в 1970 году

1988

4

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *И. Д. Новиков.* Вселенная как тепловая машина

9 *Ю. М. Львов, Л. А. Фейгин.* Ленгмюровские пленки — путь к молекулярной электронике?

14 *М. Гарднер.* Рамсеевская теория графов

21 Интервью с американским математиком Рональдом Грэхемом

Задачник «Кванта»

27 Задачи М1096—М1100, Ф1108—Ф1112

28 Problems М1096—М1100, Р1108—Р1112

29 Решения задач М1071, М1076—М1080, Ф1088—Ф1092

36 Избранные школьные задачи

«Квант» для младших школьников

37 Задачи

38 *А. П. Савин.* Десять цифр

Калейдоскоп «Кванта»

40 Простые машины

Лаборатория «Кванта»

44 *В. Ф. Яковлев.* «Физика для дураков»

Математический кружок

48 *Д. К. Фаддеев, М. С. Никулин, И. Ф. Соколовский.* Основной принцип дифференциального исчисления. Часть II: Свойства производной

Практикум абитуриента

54 *В. А. Петров.* Неравенства и графики

56 *А. И. Буздин, С. С. Кротов.* Поверхностное натяжение и капиллярные явления

62 **Варианты вступительных экзаменов**

Информация

68 Заочная физическая школа при МГУ

69 Омскому НОУ — 20 лет

73 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(61)*

Смесь *(72)*

Наша обложка

1 *Читайте в этом номере статью на с. 2!*

2 *Этот рисунок Леонардо да Винчи, сделанный 500 лет назад,— своеобразный анонс «Калейдоскопа «Кванта» из этого номера.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломка Рамсея.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

ВСЕЛЕННАЯ КАК ТЕПЛОВАЯ МАШИНА

Доктор физико-математических наук
И. Д. НОВИКОВ

Мы живем в расширяющейся Вселенной. Этот факт был предсказан теоретически советским математиком А. А. Фридманом и подтвержден в конце 20-х годов американским астрофизиком Э. Хабблом.

Нестационарность окружающего нас мира имеет определяющее значение для физических процессов во Вселенной. В этой статье мы расскажем о некоторых общих закономерностях тепловых процессов в макромире. Применение открытых в прошлом веке законов термодинамики ко всей Вселенной приводило раньше к странным выводам, порой к парадоксам. И мы рассмотрим здесь некоторые из них. Но прежде чем обращаться к этим проблемам, напомним очень кратко суть теоретического предсказания Фридмана.

Основная мысль работы Фридмана гениально проста и состоит в следующем. В очень больших масштабах (как теперь известно, в масштабах более многих сотен миллионов световых лет) материя в виде галактик, их скоплений распределена в пространстве однородно. Взаимное притяжение гигантских масс неизбежно приведет к их движению и взаимному перемещению. Приводит это движение к расширению или сжатию системы — зависит от начальных условий, от того, например, сообщили ли какие-то силы начальные скорости разлета веществу, из которого потом образовались галактики (т. е. произошел ли в прошлом своеобразный взрыв Вселенной), или, скажем, начальное состояние вещества было очень разреженным, и силы взаимного тяготения стягивали его, заставляя сжиматься со все нарастающей скоростью.

А. А. Фридман использовал в своих работах релятивистскую теорию тяготения А. Эйнштейна, обобщившую на случай сверхсильных полей закон всемирного тяготения И. Ньютона. Однако важные закономерности его выводов можно пояснить и в рамках теории Ньютона, не обращаясь к сложной теории Эйнштейна.

Нам потребуется основной закон движения масс Вселенной. Этот закон можно вывести из следующих соображений. Рассмотрим во Вселенной большой сферический объем с радиусом R много сотен световых лет (так чтобы распределение материи можно было считать однородным). Обозначим его массу M. Из наблюдений известно, что галактики удаляются друг от друга, т. е. наш объем расширяется, его граница удаляется от центра. Как с течением времени будет меняться скорость v этого расширения?

Согласно закону Ньютона на галактику массой m ($m \ll M$), находящуюся на границе нашего объема, со стороны всей массы шара действует сила притяжения

$$F = \frac{GMm}{R^2}.$$

Эта сила тормозит расширение. Оказывается, что силы тяготения, действующие на галактику со стороны всех неограниченно простирающихся внешних масс, учитывать не надо, так как они направлены в разные стороны и при сложении точно урав-

---

Настоящая статья появилась в ходе работы автора над книгой «Как взорвалась Вселенная». Книга будет выпущена в свет издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» в этом году. Очень советуем приобрести эту книгу. Из нее вы узнаете о современных представлениях космологии, о проблемах, стоящих перед учеными в этой области.

новешивают друг друга (мы этого доказывать здесь не будем). Теперь уже легко написать закон движения галактики на границе шара, а значит и закон движения самóй границы шара. Для этого запишем полную энергию E галактики. Она складывается из кинетической энергии $E_к = \frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии тяготения $E_п = -\frac{GMm}{R}$ (заметьте, что энергия тяготения отрицательна):

$$E = E_к + E_п = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R}. \qquad (1)$$

Подчеркнем, что в силу закона сохранения энергии полная энергия E не меняется — $E = \text{const}$.

Из формулы (1) видно, что если $E > 0$, то радиус шара может увеличиваться неограниченно — v при этом хоть и уменьшается, но не обращается в нуль. При $R \to \infty$ энергия E целиком определяется кинетической энергией движения. Если же $E < 0$, то тяготение останавливает расширение шара, v обращается в нуль при некотором максимальном значении радиуса $R_{\max}$ —

$$R_{\max} = \frac{GMm}{|E|}, \qquad (2)$$

а затем шар начинает сжиматься.

Так как наш шар был выбран произвольно, а распределение материи во Вселенной однородно, то движение границы шара по существу описывает движение любых больших масс во Вселенной. Перепишем уравнение (1), поделив его на m, в виде

$$\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{R} = \text{const}', \qquad (3)$$

где $\text{const}' = E/m$. Это уравнение описывает изменение с течением времени расстояний R между любыми далекими галактиками или частицами вещества во Вселенной (в прошлом, когда галактик еще не было). Таким образом, уравнение (3) есть уравнение динамики Вселенной.

К сказанному добавим следующее. Согласно теории Эйнштейна тяготение меняет геометрические свойства пространства, «искривляет» его. Если $\text{const}' < 0$ ($E < 0$), то геометрия оказывается подобной геометрии на сфере, параллельные прямые пересекаются, а само пространство оказывается замкнутым, имеющим конечный объем. Искривленность пространства задается «радиусом кривизны мира» l, а полный объем замкнутой Вселенной по порядку величины есть $V \sim l^3$. Изменение l с течением времени описывается, как и изменение других расстояний во Вселенной, законом (3).

Прослеживая изменение R или l в прошлом, мы приходим к заключению, что расширение началось с формально точечных размеров и бесконечной плотности материи ρ — как говорят, с сингулярного состояния. Мы употребили слово «формально», чтобы подчеркнуть, что это заключение — лишь математическая идеализация, ибо при очень больших плотностях (как показывают оценки, при $\rho \approx 10^{94}$ г/см^3) должны проявляться новые физические закономерности. В частности, в этих условиях должны появиться особые, так называемые вакуумноподобные состояния материи, природа которых еще не совсем ясна и которые обусловили возникновение сил отталкивания, вызвавших начальный взрыв Вселенной. Естественно возникает вопрос: а что было до того? Однозначного ответа пока нет, и специалисты рассматривают здесь разные возможности.

Все сказанное выше позволяет нам представить эволюцию Вселенной в прошлом следующим образом. До сингулярного состояния происходило сжатие Вселенной, плотность материи увеличивалась, и в конце концов возникло сверхплотное сингулярное состояние. Законы природы в этом состоянии мы знаем еще очень плохо, точнее — только догадываемся о некоторых из них. В этом состоянии, вероятно, возникают огромные силы гравитационного отталкивания, которые останавливают сжатие Вселенной и заставляют ее начать расширяться. В этой расширяющейся Вселенной мы и живем сегодня.

Возможен ли такой «сценарий» эволюции Вселенной?

В принципе — возможен. До недавнего времени некоторые специалисты относились к нему весьма благосклонно. Вероятно, это отношение связано в первую очередь с чисто субъективными причинами. Действительно, в таком сценарии время длит-

флуктуации

ся «от минус бесконечности до плюс бесконечности»; хотя в сингулярном состоянии и возникают «какие-то неясности», но «река времени» не имеет ни истока, ни конца (в полном согласии с нашими привычными и «наглядными» представлениями). Правда, в простейшем варианте есть заметный дефект. А именно: мы считаем, что в далеком прошлом Вселенная сжималась из бесконечно разреженного начального состояния. Уж очень примитивно и «наивно» выглядит это начальное состояние бесконечно малой плотности.

Указанный «дефект» пытались убрать следующим образом. Будем считать, что постоянная const′ в уравнении (3) меньше нуля. Тогда расширение Вселенной должно смениться сжатием. Если теперь мы положим, что после сжатия до сингулярного состояния наступает новое расширение (так ли это — мы пока не знаем), то это означает повторение цикла: новое расширение Вселенной, затем новое сжатие и т. д. Таким образом, мы получили пульсирующую модель Вселенной. На первый взгляд эта модель выглядит очень привлекательно. Казалось бы, в ней нет истока «реки времени», Вселенная существует вечно. Кроме того, нет и странного состояния бесконечно малой плотности в далеком прошлом, а вместо этого предстает картина в среднем неизменной вечной Вселенной с бесконечным числом циклов пульсаций.

Но оказалось, что дело обстоит вовсе не так просто, и подобный сценарий эволюции Вселенной вряд ли может осуществляться в действительности. Трудности, которые возникают в такой теории, уходят своими корнями в середину прошлого века.

В 1850 году немецкий физик Р. Клаузиус и в 1851 году независимо от него английский физик У. Томсон открыли закон, известный как второе начало термодинамики. В формулировке Томсона этот закон звучит следующим образом: в природе невозможен процесс, единственным результатом которого была бы механическая работа, совершенная за счет охлаждения теплового резервуара. Отсюда следовало, что невозможно полное превращение тепла в механическую энергию. Это означает, что если изолировать какую-либо систему, то в конце концов в этой системе все виды энергии перейдут в тепло, а тепло равномерно распределится по всей системе — наступит, как говорят, термодинамическое равновесие.

На практике мы прекрасно знаем проявление этого закона. В механических системах трение приводит к переходу механической энергии в тепло. В тепловых машинах мы можем, правда, переводить тепловую энергию в механическую работу. Но для этого обязательно надо поддерживать разницу в температурах нагревателя и холодильника, иначе машина работать не будет, а на это надо затрачивать энергию, и часть затрачиваемой энергии при этом также переходит в тепло. Так происходит непрерывное накапливание тепла, переход всех видов энергии в тепло. Позже Клаузиус дал математическое выражение второго начала термодинамики.

Томсон и Клаузиус поняли важнейшее значение открытого ими закона термодинамики для эволюции всей Вселенной. Действительно, вся Вселенная должна рассматриваться как изолированная система, и для нее обмен энергией с какими-то «другими системами» невозможен. Значит, во Вселенной все виды энергии должны перейти в конце концов в тепло, тепло равномерно распределится по Вселенной. Хотя закон сохранения энергии при этом не нарушается, энергия никуда не исчезает и остается в виде тепловой энергии, но она оказывается «бессильной», лишенной возможности превращения в механическую работу, и все макроскопические движения во Вселенной прекратятся. Такое мрачное состояние получило название «тепловой смерти» Вселенной. Читатель, наверное, согласится, что название это очень точно характеризует саму суть описанного состояния. Но Вселенная, в которой мы живем, явно не находится в состоянии «тепловой смерти»! Отсюда напрашивались теологические выводы: либо Вселенная существует сравнительно недолго и не пришла еще к состоянию «тепловой смерти», либо «кто-то» со стороны вмешивается в эволюцию Вселенной, не давая ей развиваться к состоянию «тепловой смерти».

Проследим, как эти мрачные предсказания опровергались наукой. Термодинамические идеи Клаузиуса и Томсона были развиты австрийским физиком Л. Больцманом. Он показал, в чем заключается смысл второго начала термодинамики. Тепло является по существу хаотическим движением атомов или молекул, составляющих материальные тела. Поэтому переход энергии механического движения отдельных частей системы в тепло означает переход организованного движения в хаотическое, увеличение беспорядка в системе. То же можно сказать и о других видах движения материи. Такое увеличение беспорядка неизбежно в силу статистических законов, если только на систему не влиять извне, не способствовать сохранению порядка.

Больцман показал, что мерой беспорядка в системе является величина, введенная еще Клаузиусом,— энтропия. Чем больше хаос — тем больше энтропия. Переход отдельных видов движения материи в тепло означает рост энтропии. Если все виды энергии перешли в тепло, а тепло равномерно распределилось по системе, то это состояние максимального хаоса уже не меняется с течением времени и соответствует максимуму энтропии.

Но такая интерпретация означает, что второе начало термодинамики не всегда выполняется абсолютно точно, возможны отклонения от него. Действительно, смысл этого закона состоит в том, что изолированная система переходит во все более вероятное состояние хаотического движения частичек, ее составляющих. Но в ходе такого перехода возможны случайные отклонения, флуктуации. Так, например, в каком-то небольшом объеме газа атомы при столкновениях с соседями могут случайно приобрести одинаково направленные импульсы, т. е. могут случайно начать двигаться в одном направлении. Это будет уже не тепловое (хаотическое) движение, а направленное движение какого-то объема газа в целом. Тепловое движение частиц случайно перешло в направленное механическое движение. Но, разумеется, такие случаи очень редки и маловероятны. И чем больший объем в газе мы будем брать, тем с меньшей вероятностью с ним могут случаться подобные казусы. В целом, за исключением очень редких и небольших флуктуаций, энтропия изолированной системы всегда растет, и система приходит в наиболее вероятное состояние максимума энтропии, в котором должна пребывать неограниченно долго. Но все же, хотя и редко, то в одном месте системы, то в другом по закону случая будут происходить отклонения от этого состояния, как правило очень небольшие.

Вот на этом пути Больцман и искал выхода из мрачного заключения о «тепловой смерти» Вселенной.

Бесконечная Вселенная, говорил он, вечно пребывает в наиболее вероятном состоянии термодинамического равновесия с максимальной энтропией. Но в любом объеме ее возможны редкие отклонения от этого состояния — флуктуации. Правда, в больших объемах заметные флуктуации очень редки. Но если у нас в запасе бесконечное время, то мы можем дождаться сколь угодно большой случайной флуктуации в огромных объемах. Вот в такой гигантской флуктуации, согласно Больцману, мы и живем.

Флуктуационная гипотеза Больцмана была единственной (с точки зрения тогдашней физики) попыткой опровержения вывода о «тепловой смерти» вплоть до открытий Фридмана и Хаббла.

Эти открытия в корне изменили наши представления о том, к какому состоянию направлена эволюция процессов во Вселенной. Прежде всего, выяснилось, что определяющую роль в эволюции Вселенной играет тяготение. В рассуждениях о «тепловой смерти» тяготение вообще игнорировалось. Между тем этого делать никак нельзя.

В обычных рассуждениях о переходе всех видов энергии в тепло и замирании в результате этого всех процессов в изолированной системе полагалось, что общее количество энергии системы не меняется. Конечно, скажет читатель, это предположение справедливо — ведь система изолирована. Откуда же может взяться дополнительная энергия, способная поддерживать движение в системе?

Разумеется, закон сохранения полной энергии незыблем. Но мы не учли в наших рассуждениях энергию тяготения. А эта энергия своеобразна — она отрицательна (см. формулу (1)). Как это сказывается на происходящих во Вселенной процессах? Попробуем разобраться в этом на таком примере: рассмотрим газовый шар, между частицами которого действуют силы тяготения. Предположим, что сначала вещество шара было холодное и было рассеяно в пространстве, взаимное тяготение между частицами было крайне мало, и гравитационная энергия вещества практически была равна нулю. Пусть постепенно под действием хотя и слабого тяготения вещество собирается в шар, и этот шар сжимается все дальше тяготением. Ясно, что вещество шара при этом набирает все бо́льшую скорость и, следовательно, все бо́льшую кинетическую энергию движения. Эта положительная энергия нарастает за счет тяготения. Но в силу закона сохранения энергии, полная энергия системы должна сохраняться. Значит рост положительной энергии движения сопровождается уменьшением потенциальной энергии тяготения, т. е. ростом ее абсолютной величины (ведь $E_п < 0$). Теперь понятно, что при сжатии системы положительная часть ее энергии может возрастать за счет тяготения. Вот это обстоятельство раньше, когда на тяготение не обращали должного внимания, и не учитывалось. Раз положительная часть энергии изолированной системы может возрастать, то нарастание энтропии (которое обязательно происходит) не обязательно ведет к замиранию процессов.

Таким образом, вывод о «тепловой смерти» в том виде, как он делался в середине прошлого века, когда не принимался во внимание факт нестационарности Вселенной,— неправилен.

Посмотрим теперь, как конкретно «работает» тяготение в модели пульсирующей Вселенной, опровергая вывод о замирании всех макроскопических движений в мире.

В пульсирующей Вселенной в каждом цикле происходит увеличение энтропии, накопление тепла (согласно второму началу термодинамики, справедливость которого, конечно, не нарушается). Накопление тепловой энергии происходит в больших масштабах, например, при свечении звезд, перерабатывающих запасы ядерной энергии в излучение. Будем предполагать, что в сингулярном состоянии энтропия не может резко уменьшаться.

Энтропия нарастает от цикла к циклу. На первый взгляд, это должно было бы приводить к замиранию пульсаций, к уменьшению их амплитуды. Казалось бы, картина должна быть подобна затуханию колебаний маятника, когда трение в его подвесе постепенно переводит энергию колебаний в тепло. На самом деле картина пульсаций в такой модели Вселенной выглядит совсем иначе — амплитуда пульсаций Вселенной увеличивается!

Покажем это.

Обратимся прежде всего к формуле (3). В каждом цикле в момент максимума расширения Вселенной (см. формулу (2)), когда расширение сменяется сжатием, скорость v движения вещества шара на мгновение обращается в нуль. Приравнивая $v=0$ в выражении (3), мы получим условие для этого момента: $\frac{GM}{R_{\max}} = -\text{const}'$. (Напомним, что в нашей модели $\text{const}' < 0$.) Теперь подставим в это выражение $M = \frac{4}{3}\pi R_{\max}^3 \varrho_*$, где ϱ_* — плотность вещества в момент максимума расширения. После этого получим: $\varrho_* R_{\max}^2 = \text{const}''$. Наконец вспомним, что радиус кривизны мира l изменяется со временем точно так же, как и радиус шара R. Поэтому и для радиуса кривизны $l_{\max}$ — в максимуме расширения Вселенной — мы

(Окончание см. на с. 20)

ЛЕНГМЮРОВСКИЕ ПЛЕНКИ — ПУТЬ К МОЛЕКУЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОНИКЕ?

Кандидат физико-математических наук
Ю. М. ЛЬВОВ,
доктор физико-математических наук
Л. А. ФЕЙГИН

Без электронной техники немыслима жизнь современного человека: электроника — это микрокалькуляторы и ЭВМ, проигрыватели и магнитофоны, наручные часы и электронные игрушки. Но чтобы создать все эти действующие устройства, нужно иметь набор «кирпичиков» — элементов электроники, и чем мельче будут эти «кирпичики», тем более «умную» электронную схему можно собрать в корпусе микрокалькулятора или часов. Так, например, если первые ЭВМ занимали большие залы, заставленные шкафами с электронными схемами, то теперь за счет миниатюризации элементов такая же по мощности ЭВМ имеет размер всего с тумбочку.

На рисунке 1 приводится в виде графика размер электронного элемента в зависимости от года производства. График охватывает 1930—2000 годы. Сначала основным элементом были электронные лампы (размер 1—5 см); создание транзисторов позволило в 10 раз уменьшить размер «кирпичика» электроники; следующий шаг — появление микросхем (интегральных и больших интегральных схем), когда на одном кристалле создаются уже целые устройства,— позволил еще в 10—100 раз уменьшить размер элемента, доведя его до 1 мкм. Такие микросхемы — основной «строительный материал» сегодняшней электроники. Дальше лежат пока не достигнутые размеры в десятки нанометров, т. е. $\sim 10^{-8}$ м. Такой элемент микроэлектроники оказался бы размером с большую органическую молекулу. Если считать, что темпы миниатюризации электронных элементов останутся прежними, то к 2000 году можно ожидать создания молекулярной электроники. И очень может быть, что сегодняшние читатели «Кванта» в своей будущей работе будут составлять схемы электронных машин уже из молекул, каждая из которых будет выполнять какую-либо логическую или арифметическую операцию. Другим важнейшим плюсом молекулярной электроники (помимо миниатюрности) является возможность использования в элементах размером в несколько нанометров физических явлений, имеющих квантово-механическую природу.

Буквально в последние годы в физике твердого тела возникла и бурно развивается новая область — мезоскопика, которая изучает вопросы о протекании тока в сверхмалых электротехнических элементах. Сейчас становится понятным, что, по-видимому, есть теоретические пределы дальнейшей миниатюризации. Дело в том, что при очень малых размерах элемента каждый «проводок» имеет свою индивидуальную вольтамперную характеристику (подобно тому

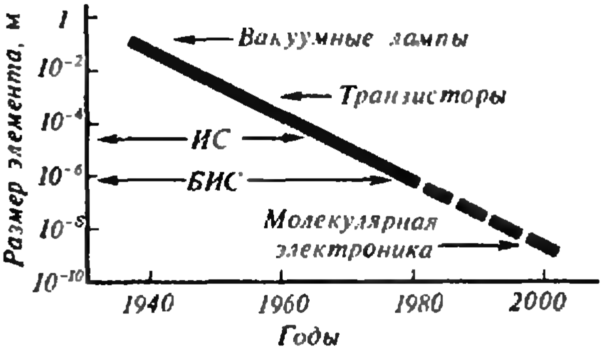


Рис. 1.

как каждый человек имеет свои характерные отпечатки пальцев), и она может существенно отличаться от линейной (соответствующей закону Ома). В будущих разработках элементов молекулярной электроники учет подобных эффектов может оказаться существенным.

Но как же собирать схемы из таких маленьких «кирпичиков»? Уже сегодня разработаны технологические методы, позволяющие «собирать» устройства размером в десятки и сотни нанометров. Это, например, метод молекулярной эпитаксии*), когда молекулы слой за слоем укладываются в тонкие пленки. Мы же хотим рассказать о другом методе, который в последние годы привлек внимание исследователей. Это так называемый ленгмюровский метод, позволяющий получать тонкие пленки органических молекул, содержащие точно 1, 2, 3, ..., 25 и т. д. молекулярных слоев в образце.

История этих пленок началась в XVIII веке с опытов американского ученого Б. Франклина. Франклин вылил малое количество оливкового масла на поверхность пруда, покрытую мелкой рябью, и вскоре рябь стихла, поверхность стала гладкой. Из этого Франклин заключил, что ничтожное количество масла сумело покрыть всю поверхность. Опыт был описан в 1790 году в журнале «Философские записки», издававшемся Лондонским королевским обществом (Академия наук Англии). Через сто лет английский физик У. Рэлей выдвинул предположение, что в таких экспериментах на поверхности воды образуется пленка толщиной всего в один слой молекул. Зная исходный объем масла, можно, поделив его на площадь пленки, вычислить ее толщину (а следовательно, размер молекулы масла). Она оказалась чрезвычайно малой — всего около 10 нм. В дальнейшем в лабораториях были поставлены опыты, позволившие более точно оценить размеры молекул масла.

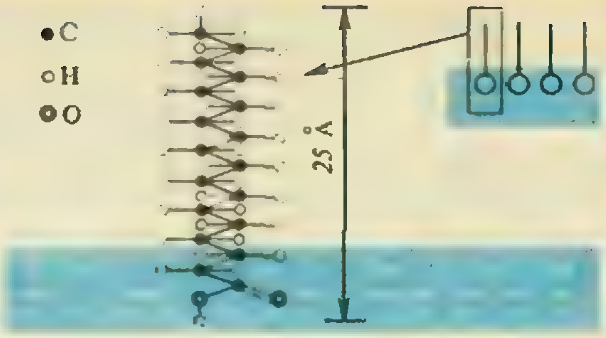


Рис. 2.

Подобный опыт можно провести дома в ванне. Для этого следует капнуть в заполненную ванну масла (предпочтительно оливкового, так как оно растекается по поверхности воды лучше, чем подсолнечное). Через несколько минут пленка распространится на всю ванну. Отметим, что довольно трудно определить границу масла (чтобы лучше видеть ее, можно посветить на поверхность фонариком). Кроме того, пленка будет неравномерной по толщине, она будет содержать как бы окошки, где слой масла очень тонкий, и более толстые перегородки. Но, тем не менее, оценить толщину пленки мы сможем. Однако в нашем опыте есть один серьезнейший минус — мы не знаем, сколько молекул по толщине образуют пленку, и не можем добиться однородности пленки по толщине.

На строгий физический уровень такие опыты поставил американский

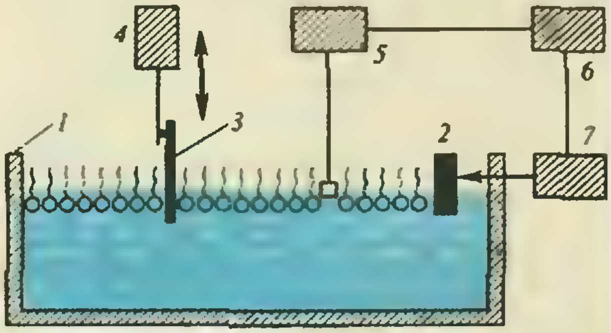


Рис. 3. Ленгмюровская установка: 1 — ванна с водой. 2 — подвижный барьер. 3 — подложка. 4 — мотор, управляющий опусканием подложки. 5 — устройство, измеряющее поверхностное натяжение. 6 — электронная схема, вырабатывающая сигнал для работы мотора 7, двигающего барьер.

---

*) Эпитаксии (от греческих слов επι...— на, над, сверх, после и ταξις — расположение) — ориентированный рост одного монокристалла на поверхности другого (подложки) (*Советский энциклопедический словарь*. М.: Советская энциклопедия, 1980).

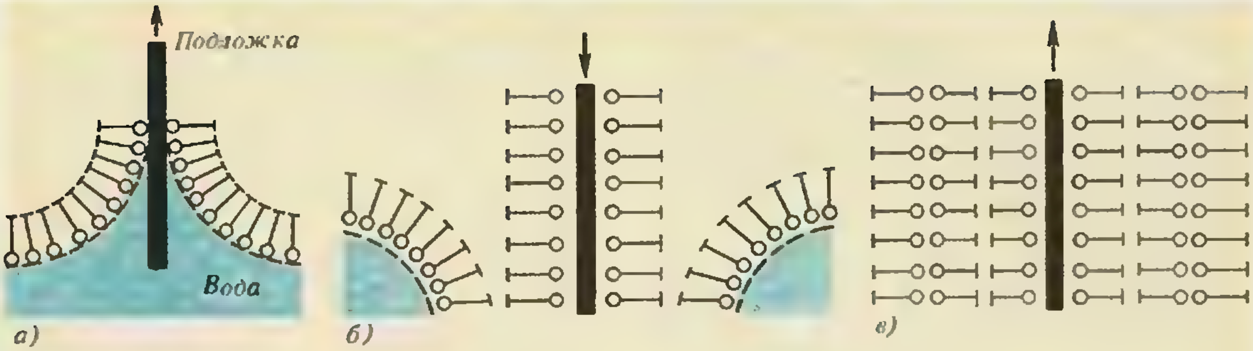


Рис. 4.

физик И. Ленгмюр, получивший за данные работы в 1932 году Нобелевскую премию. Примерно так же, как в свое время Ленгмюр, и сейчас получают молекулярные пленки (их и называют ленгмюровскими). Поэтому опишем этот способ подробнее.

Сначала разберемся, как располагаются молекулы на поверхности воды. Пленки по ленгмюровской методике можно получить из так называемых амфифильных органических молекул, т. е. молекул, содержащих гидрофильную («любящую» воду) и гидрофобную («не любящую» воду) части. Именно такими являются молекулы жирных кислот (масел). На рисунке 2 изображено расположение молекулы стеариновой кислоты на поверхности воды. Гидрофильная «голова» молекулы погружена в воду, а гидрофобный «хвост» расположен на воздухе и не дает молекуле уйти в воду.

Чтобы получить на поверхности воды монослой таких молекул, поступают следующим образом. Масло растворяют в летучем органическом растворителе, например в ацетоне, так, чтобы относительная концентрация молекул масла была малой (около 0,01 %). На поверхность воды в специальной установке, называемой ленгмюровской ванной (рис. 3), помещают каплю такого раствора. Капля быстро «разбегается» по поверхности воды, ацетон испаряется, и на поверхности воды остаются разбросанными одиночные амфифильные молекулы масла.

Эти молекулы надо собрать в однородный масляный слой. Для этого по поверхности воды в ленгмюровской ванне передвигают барьер (см. рис. 3), с помощью которого сгоняют все молекулы к одному краю ванны и поджимают их так, что на поверхности воды образуется пленка, молекулы в которой расположены в один слой (мономолекулярная пленка). Теперь эту пленку надо перенести на специально обработанную подложку (кремниевую или стеклянную пластинку). Делают это так. Подложку, находящуюся в ванне (см. рис. 3), начинают очень медленно, со скоростью ~1 см/ч, поднимать. Подложка хорошо смачивается водой, и гидрофильные «головы» молекул, не желая расставаться с водой, «тянутся» за ней (рис. 4, *а*) и в конечном итоге оказываются «прилипшими» к подложке. Так на подложке вырастает точно один слой молекул, ориентированных определенным образом — «голова» на подложке, «хвост» наружу. Начнем опускать подложку назад, в ванну. Теперь подложка не смачивается водой (рис. 4, *б*), за ней утягивается вниз пленка масла — образуется второй мономолекулярный слой, «сцепленный» с первым «хвостами». Наружу, в воду, торчат гидрофильные «головы» молекул, и если мы снова начнем поднимать подложку, вода, вновь хорошо ее смачивающая, «потянется» за ней, а за водой — «головы» молекул. Так что повторно поднятая подложка будет «одета» в три мономолекулярных слоя, ориентированных определенным образом (рис. 4, *в*). Таких слоев мы можем получить сколько угодно, и всегда будем точно знать, сколько молекулярных слоев расположено на подложке.

В развитие методов переноса таких пленок на твердотельные подложки большой вклад внесла ученица И. Ленгмюра К. Блоджетт, поэтому такие пленки на подложках называют пленками Ленгмюра — Блоджетт или Л—Б пленками.

Конечно, в реально работающих ленгмюровских установках все не так просто. Во-первых, необходимо строго контролировать процесс собирания одиночных молекул, «рассеянных» на поверхности воды в ванне (такое состояние называют «двумерным газом» молекул). По мере образования пленки «плотность упаковки» молекул меняется: сначала они упакованы менее плотно («двумерная жидкость»), а затем более плотно («двумерное твердое тело»); соответственно изменяется поверхностное натяжение в слое. На этом этапе очень важно не пережать барьером, иначе молекулы начнут налезать друг на друга слоями. Нанесение пленки производят в режиме «твердое тело».

Во-вторых, по мере переноса молекул на подложку в молекулярном слое на поверхности воды будут образовываться дыры. Чтобы избежать этого, барьером поддавливают пленку, все время уменьшая ее площадь; этот процесс отслеживает электронная система. Автоматизировано движение подложек, контролируется температура, степень кислотности среды и т. п.

Естественно, создавая «кирпичики» электроники, для начала надо иметь Л—Б пленки проводники, полупроводники и диэлектрики. В самое последнее время удалось получить такие пленки. Общая схема работ такова: выбирается нужная молекула, например, краситель, затем к ней химически «пришивается» гидрофобный хвост — и теперь можно пытаться наносить пленку на подложку по описанной методике.

С помощью ленгмюровской методики можно реализовать очень привлекательную с точки зрения электроники идею — идею молекулярной архитектуры. Действительно, мы можем перенести на подложку сначала слой молекул вещества А, затем слой молекул вещества Б, затем — вещества В и т. д. Правда, для этого нужно несколько ленгмюровских ванн, заполненных разными веществами, или же одна многосекционная ванна. Такие установки уже созданы. Итак, мы умеем теперь наслаивать различные молекулы друг на друга, строго контролируя процесс и не ошибаясь ни на один слой. Значит, можно пытаться создавать элементы молекулярной электроники размером около 10 нм, запланированные на нашем графике (см. рис. 1) на 2000 год. Как создавать? На этот счет идей немало. Ну, хотя бы такая: попробуем создать элемент по аналогии с известной электронной лампой — триодом. Принцип работы триода вам знаком: электроны с катода, увлекаемые электрическим полем, летят к аноду, а их поток регулируется изменением электрического потенциала на расположенной посередине сетке. Как мог бы выглядеть «пленочный» аналог триода? Сделаем так: подготовим электрод — он будет аналогом катода; затем нанесем на него один слой молекул диэлектрика; на диэлектрик — один слой проводящих молекул — это аналог сетки; затем — опять один слой диэлектрических молекул; и наконец, сверху еще один электрод — анод. Роль вакуума, обеспечивающего в триоде пролет электронов от катода к аноду, в нашем «приборе» играют тонкие диэлектрические прослойки, через которые электроны могут проходить с помощью туннельного механизма (квантового эффекта «просачивания» электронов сквозь диэлектрическую прослойку толщиной 1—10 нм). Вот и готов триод размером всего в 10—20 нм. Пока этот триод только фантазия, но целый ряд подобных МДМ (металл — диэлектрик — металл) и МДП (металл — диэлектрик — полупроводник) элементов с использованием ленгмюровских пленок уже создан.

Ленгмюровские пленки применяются в качестве сверхтонкого и очень однородного электронного резиста. С помощью электронного пучка на пленке рисуется микросхема. В тех местах, где «прошелся» пучок электронов, молекулы пленки полимеризуются и становятся нерастворимыми для органических растворителей, в то время как с остальных участков кристалла-подложки пленка смывается.

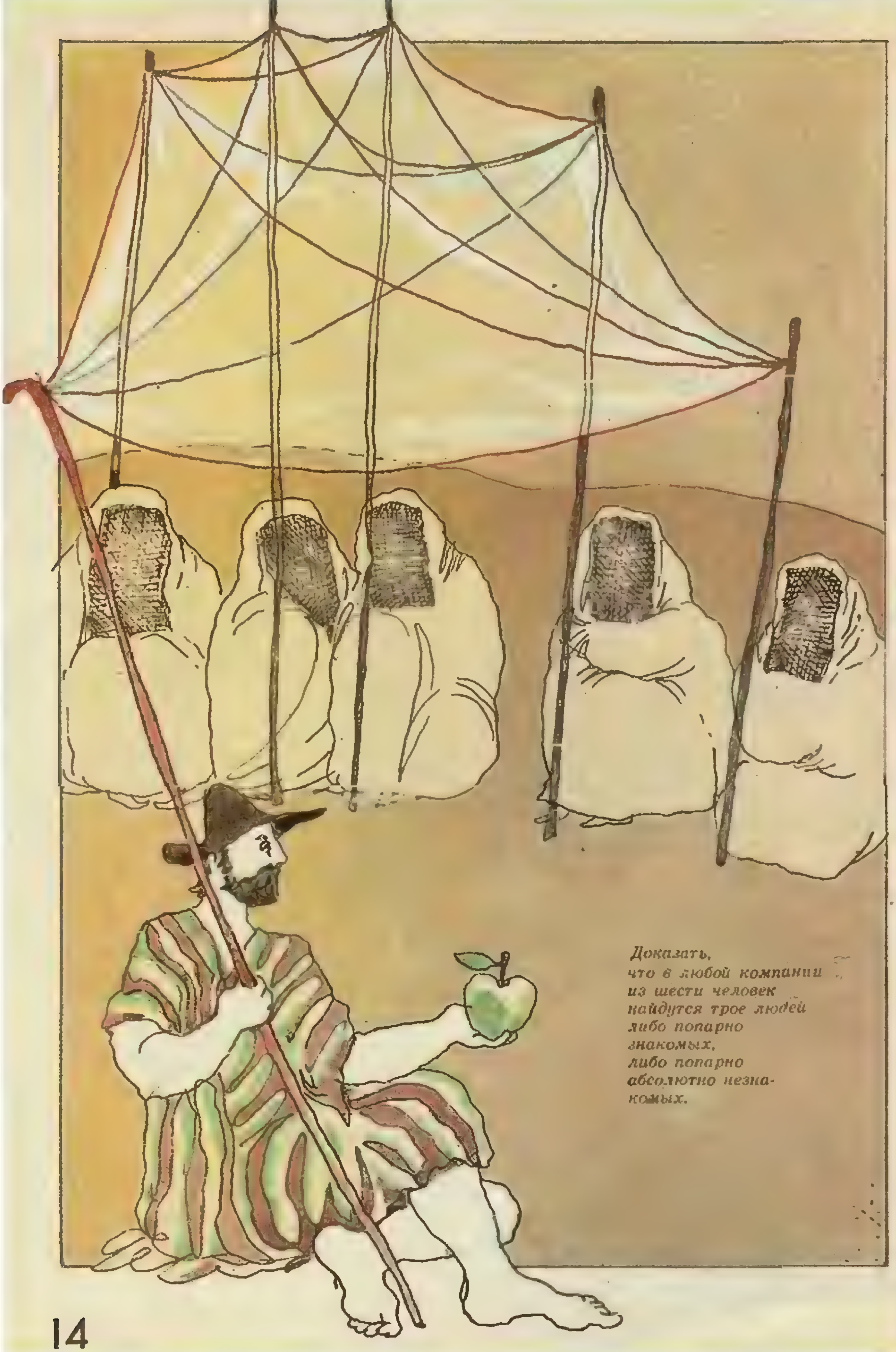
Еще одно применение ленгмюровских пленок — молекулярно-упорядоченная смазка. Когда мы капаем масло в подшипник, то между трущимися частями пространство заполняется сотнями и тысячами слоев молекул масла, которые и уменьшают трение — сухое трение заменяется жидким. Однако в современных высокоточных устройствах такая смазка не годится. Например, при считывании информации с дисков магнитной записи, применяемых в современных ЭВМ, используется такая схема: над быстро вращающимся диском движется считывающая головка. Расстояние между головкой и поверхностью диска не должно превышать 20—30 нм. Как же здесь уменьшить трение? Специалисты японской фирмы «Сони» покрыли магнитный диск однослойной ленгмюровской пленкой и показали, что такая «смазка» позволяет почти в 100 раз повысить износостойкость головки и длительность сохранности записи на диске.

Но все же главное, что волнует исследователей,— это создание на основе ленгмюровской технологии принципиально новых элементов электроники. Очень перспективно здесь внедрение в ленгмюровские пленки больших органических молекул, уже «умеющих» выполнять какие-либо сложные операции. Сама природа разработала и создала для нас тысячи таких маленьких «заводиков» — это молекулы белков. Например, молекула белка родопсина при поглощении кванта света меняет свое состояние — происходит перемещение протона, которое может быть зарегистрировано. Если с помощью ленгмюровской технологии включить молекулы родопсина в пленку, то получится очень чувствительный датчик света. Уже созданы молекулярные датчики, позволяющие регистрировать мизерные концентрации газов, всерьез обсуждается создание «искусственного носа», представляющего собой «мозаику» из молекул, чувствительных к различным газам.

Создание элементов молекулярной электроники требует решения целого ряда задач. Например, как подпаять проводок к такому элементу (устройства «ввода — вывода»)? Как наблюдать, что же у нас получилось в результате молекулярного строительства? Действительно, длина волны видимого света составляет ~0,5 мкм, а размер элементов — около 10 нм, т. е. в 50 раз меньше. Значит, увидеть отдельный элемент нельзя даже в лучший оптический микроскоп.

Для контроля пробных образцов, изготовленных по ленгмюровской технологии, используются более сложные методы наблюдения — например, рентгеноструктурный анализ. Обычно используется рентгеновское излучение с длиной волны $\lambda = 0{,}154$ нм. Излучение рассеивается на молекулярных элементах, создавая дифракционную картину, содержащую чередующиеся максимумы и минимумы, в этой картине и зашифровано изображение. Из положения максимумов по углу рассеяния (2θ) на первом этапе обработки результатов по формуле Вульфа — Брегга ($2d \sin \theta = n\lambda$) рассчитывают толщины молекулярных пленок (d) и расстояния между соседними молекулами, а затем с помощью расчетов на ЭВМ удается уточнить расположение в молекулярных элементах более мелких деталей — группировок атомов и даже отдельных атомов.

Итак, методика Ленгмюра позволяет в принципе использовать молекулы в качестве строительного материала для электронных схем. Можно надеяться, что созданные таким методом элементы молекулярной электроники через 5—10 лет будут реально использоваться.



Доказать,
что в любой компании
из шести человек
найдутся трое людей
либо попарно
знакомых,
либо попарно
абсолютно незнакомых.

Мы предлагаем вам с небольшими сокращениями перевод с английского статьи известного американского популяризатора математики М. Гарднера «Математические игры», опубликованной в 1977 году в журнале «Scientific American».

РАМСЕЕВСКАЯ ТЕОРИЯ ГРАФОВ

М. ГАРДНЕР

Теория графов изучает множества точек, или вершин, соединенных линиями. Хотя несколько статей о рамсеевской теории графов были опубликованы в 30-х годах венгерским математиком Паулем Эрдешем и другими, серьезная работа по исследованию того, что теперь называется числами Рамсея, началась только в конце 50-х годов. Одним из стимулов исследования была приведенная на с. 14 невинно выглядящая головоломка.

Эту головоломку легко преобразовать в задачу о графах. Шесть вершин соответствуют шести людям. Соединим пару вершин, соответствующих двум знакомым людям, красной линией, а пару вершин, соответствующих двум незнакомым людям, синей линией. Теперь задача состоит в том, чтобы доказать, что, как бы мы ни выбирали цвета линий, у нас неизбежно получится или красный треугольник (соответствующий тройке попарно знакомых), или синий треугольник (соответствующий тройке попарно незнакомых).

Теория Рамсея, имеющая дело с такими задачами, названа по имени Фрэнка Пламптона Рамсея. Рамсею было всего 26 лет, когда он умер в 1930 году после тяжелой операции.

Его отец был президентом колледжа Магдалины в Кембридже, а брат — архиепископом Кентерберийским. Экономисты знают Рамсея за его замечательный вклад в экономическую теорию. Логики знают Рамсея за его упрощения разветвленной теории типов Бертрана Расселла и за придуманное им подразделение логических парадоксов на логические и семантические.

В 1928 году Рамсей сделал доклад в Лондонском математическом обществе по ставшей теперь классической работе «Об одной проблеме в формальной логике». В этой работе Рамсей получил глубокий результат о множествах, который известен теперь как теорема Рамсея. Оказалось, что эта теорема, подобно многим теоремам о множествах, имеет большое число разнообразных неожиданных применений к комбинаторным задачам. Теорема эта в ее полной общности слишком сложна, чтобы объяснить ее здесь. Для наших целей будет достаточно посмотреть, как она применяется к теории раскрашивания графов.

Если каждая из n вершин соединена линией с каждой другой вершиной, то граф называется *полным графом с n вершинами* и обозначается символом K_n. При этом для нас неважно, как именно расположены вершины и проведены линии. На рисунке 1 показаны обычные способы изображения полных графов, имеющих от двух до шести вершин.

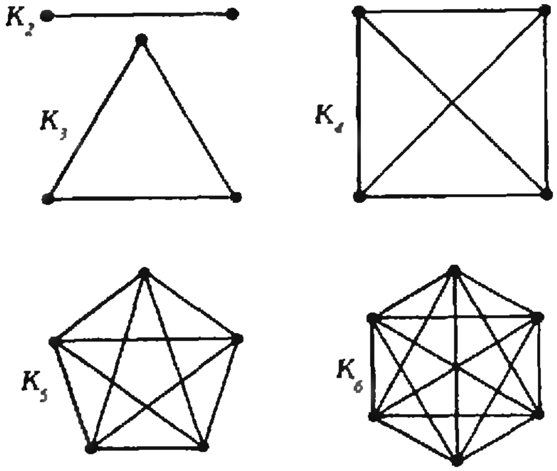


Рис. 1.

Предположим, что мы произвольным образом раскрасили линии графа K_n в красный или синий цвет. Мы можем раскрасить все линии в красный цвет, раскрасить все линии в синий цвет или использовать оба цвета. Такая раскраска называется *2-раскраской* графа. 2-раскраска есть, конечно, простой способ разбиения всех пар из наших n вершин на два непересекающихся класса. Аналогично, 3-раскраска линий разбивает эти пары на три непересекающихся класса, и вообще, r-раскраска разбивает пары вершин на r попарно непересекающихся классов.

Подграф полного графа — это какой-угодно граф, содержащийся в полном графе в том смысле, что все его вершины и линии принадлежат этому полному графу. Легко видеть, что всякий полный граф является подграфом всякого полного графа с бóльшим числом вершин. Многие простые графы имеют названия. На рисунке 2 показаны четыре семейства графов: *цепи*, *циклы*, *звезды* и *колеса*. Заметим, что *колесо с четырьмя вершинами* есть просто другое изображение графа K_4.

Рассмотрим теперь задачу, в которой участвуют шесть карандашей различных цветов. Каждому цвету мы поставим в соответствие любой тип графа, какой нам нравится. Например:

1. *красный:* пятиугольник (пятивершинный цикл),
2. *оранжевый:* тетраэдр,
3. *желтый:* семивершинная *звезда*,
4. *зеленый:* 13-вершинная *цепь*,
5. *синий:* восьмивершинное *колесо*,
6. *фиолетовый:* галстук-бабочка (два треугольника ровно с одной общей вершиной).

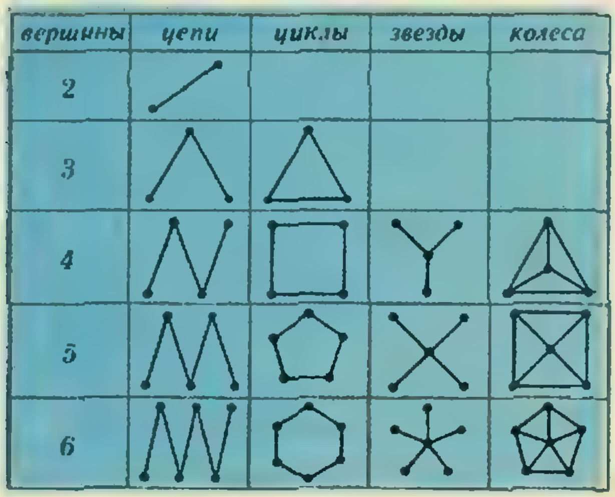


Рис. 2.

Зададим теперь любопытный вопрос. Существуют ли полные графы, при любой 6-раскраске которых обязательно получится подграф одного из перечисленных выше типов? Другими словами, как бы мы ни раскрашивали такой полный граф шестью карандашами, мы непременно получим либо красный пятиугольник, либо оранжевый тетраэдр, либо желтую семивершинную звезду, и т. д. Теорема Рамсея утверждает, что все полные графы, начиная с определенного конечного размера, обладают этим свойством. Наименьший граф из этого бесконечного семейства называется *графом Рамсея для заданного множества подграфов*. Число его вершин называется *числом Рамсея для этого множества подграфов.*

С каждым графом Рамсея связана как игра, так и головоломка. Игра в нашем примере заключается в следующем. Два игрока по очереди берут любой из шести карандашей и раскрашивают одну линию в графе Рамсея. Первый, кто закончит раскрашивание одного из заданных подграфов, считается проигравшим. Так как граф является графом Рамсея, игра не может закончиться вничью. Более того, граф Рамсея — это наименьший полный граф, на котором ничья невозможна.

Головоломка касается полного графа, имеющего на одну вершину меньше, чем граф Рамсея. Очевидно, это наибольший полный граф, на котором игра может закончиться вничью. Такой граф называется *критическим графом Рамсея для заданного множества подграфов*. Головоломка состоит в нахождении раскраски критического графа, при которой не возникает ни одного из заданных подграфов. Такая раскраска называется *критической раскраской.*

Я не имею понятия, чему равно число Рамсея для шести указанных подграфов. Соответствующий полный граф будет таким большим (содержащим сотни вершин), что об игре на нем не может быть и речи, а связанная с ним головоломка также настолько трудна, что лежит за пределами возможностей машинного поиска. Тем не менее игры и головоломки Рамсея с меньшими полными графами и с карандашами только двух цветов могут быть вполне занимательными.

Наиболее известная игра Рамсея называется *Сим**). Она играется на полном графе из шести вершин (K_6), который моделирует задачу о компании из шести человек. Нетрудно доказать, что 6 есть число Рамсея для следующих двух подграфов:

1. *красный:* треугольник (K_3),
2. *синий:* треугольник (K_3).

В классической теории Рамсея принято полные графы обозначать просто числами. Так что мы можем выразить приведенный выше результат компактной формулой: $R(3, 3)=6$. Это означает, что число вершин наименьшего полного графа, который при любой 2-раскраске обязательно содержит *одноцветный* (красный или синий) треугольник, равно 6.

Таким образом, если два игрока поочередно раскрашивают граф K_6 в красный или синий цвет, то один из них непременно проиграет, завершив построение одноцветного треугольника. Соответствующая головоломка весьма проста; она состоит в том, чтобы 2-раскрасить критический граф K_5 так, чтобы не было одноцветных треугольников.

Оказывается, если граф K_6 2-раскрашен, то обязательно найдутся по крайней мере два одноцветных треугольника. (Если их точно два и они разного цвета, они образуют *галстук-бабочку*.) Возникает интересный вопрос. Каково наименьшее число одноцветных треугольников, которые получаются при 2-раскраске полного графа с n вершинами? На этот вопрос первым ответил А. В. Гудман. Формулу Гудмана удобно разбить на три части:

если $n=2k$, *то наименьшее число одноцветных треугольников равно* $1/3 \cdot k(k-1)(k-2)$;

если $n=4k+1$, *то наименьшее число одноцветных треугольников равно* $1/3 \cdot 2k(k-1)(k+1)$;

если $n=4k+3$, *то наименьшее число одноцветных треугольников равно* $1/3 \cdot 2k(k+1)(4k-1)$.

Таким образом, для полных графов, имеющих от 6 до 12 вершин, наименьшее число одноцветных треугольников равно соответственно 2, 4, 8, 12, 20, 28 и 40.

При случайной 2-раскраске будет, как правило, получаться больше одноцветных треугольников. Если раскраска графа Рамсея содержит в точности наименьшее число одноцветных треугольников, то она называется *экстремальной*. Всегда ли существует экстремальная раскраска, в которой все одноцветные треугольники имеют один и тот же цвет? В 1961 году Леопольд Сове показал, что ответ на этот вопрос утвердителен.*) Это порождает новый класс головоломок. Например, нарисуйте полный граф с 7-ю вершинами. Можете ли вы 2-раскрасить этот граф так, чтобы не получилось синих треугольников и получилось не более четырех красных треугольников? (Ответ см. на с. 73.)

Очень мало известно о «классических» числах Рамсея. *Классическое число Рамсея* — это число Рамсея, отвечающее ситуации, когда все графы из заданного множества являются полными. Способа, который позволял бы практически вычислять классические числа Рамсея, неизвестно. Алгоритм известен, конечно: нужно просто перебирать все возможные раскраски полных графов, поднимаясь по этой лестнице до тех пор, пока не будет найден граф Рамсея. Трудность этой задачи возрастает экспоненциально и к тому же с такой скоростью, что она быстро становится недоступной никакому компьютеру. Еще меньше известно о том, кто выигрывает — первый игрок или второй — при условии, что оба играют правильно. В случае игры Сим задача решена (выигрывает второй игрок), но почти ничего не известно об играх Рамсея, в которых участвуют бóльшие полные графы.

---

*) М. Гарднер. *Математические новеллы.*— М.: Мир, 1974, гл. 33. Здесь и далее примечания С. В. Белого.

*) На самом деле ответ утвердителен только для четных n и $n=7$.

Пока мы рассматривали только разновидность игры Рамсея, которую Фрэнк Харари, знаменитый специалист по теории графов, назвал *игрой уклонения*. Как он заметил, возможны, по крайней мере, три других типа игры. Например, в *игре достижения* (проводящейся на том же графе, что игра Сим) выигрывает первый игрок, который завершит построение одноцветного треугольника. Две другие игры продолжаются до тех пор, пока все линии не будут раскрашены, и выигравшим считается игрок, который завершил построение либо бóльшего, либо меньшего числа одноцветных треугольников. Эти последние две игры являются наиболее трудными для анализа, а игра достижения — наиболее легкой. Ниже *под игрой Рамсея мы понимаем игру уклонения.*

Кроме числа $R(3,3)$, значение которого лежит в основе игры Сим, известно еще только пять нетривиальных классических чисел Рамсея для 2-раскрасок:

1. *$R(3,4)$ равно 9.* При любой 2-раскраске графа K_9 мы обязательно получим красный тругольник (K_3) или синий тетраэдр (K_4). Никто не знает, кто выигрывает, если играть в соответствующую игру Рамсея.

2. *$R(3,5)$ равно 14.*

3. *$R(4,4)$ равно 18.* Таким образом, при любой 2-раскраске графа K_{18} обязательно получится одноцветный тетраэдр (K_4). (Это неплохая игра Рамсея, но играть в нее нелегко из-за трудности распознавания тетраэдров.) Указанное свойство 2-раскрасок графа K_{18} соответствует тому факту, что *в любой компании из 18 человек найдется либо четверка попарно знакомых, либо четверка попарно незнакомых.*

4. *$R(3,6)$ равно 18. В той же самой компании (из 18 человек) найдутся либо трое попарно знакомых, либо шестеро попарно незнакомых.* В каком отношении эти два множества находятся к двум тетраэдральным множествам из предыдущего примера — интересный вопрос, который как будто бы никто не исследовал.

5. *$R(3,7)$ равно 23.**)

Заметим, что предыдущий список не содержит $R(5,5)$. Дело в том, что до сих пор никто не знает, чему равно число вершин полного графа, при любой 2-раскраске которого возникает одноцветный граф K_5. Стефан Барр из Отделения дальних связей американской телефонной и телеграфной компании, ведущий эксперт по рамсеевской теории графов, считает возможным, что число $R(5,5)$ никогда не будет найдено, настолько велик скачок в сложности. Даже задача нахождения числа $R(4,5)$, полагает он, настолько трудна, что и она, возможно, никогда не будет решена. В обоих случаях, однако, известны оценки: число $R(5,5)$ находится между 38 и 67 включительно, а число $R(4,5)$ — между 25 и 29 включительно**).

Известно еще одно классическое число Рамсея, но уже для 3-раскрасок. Это — число $R(3,3,3)$, и оно равно 17. Таким образом, *при любой 3-раскраске графа K_{17} обязательно получится одноцветный треугольник.* На самом деле получится несколько одноцветных треугольников, но точное число их неизвестно***).

Равенство $R(3,3,3)=17$ впервые было доказано в 1955 году. В игре Рамсея для этого графа используются карандаши трех цветов. Игроки поочередно раскрашивают линии графа в любой цвет, какой они хотят, пока один из игроков не проиграет, завершив построение одноцветного треугольника. Кто выигрывает, если оба игрока играют наилучшим образом? Никто не знает. Соответствующая головоломка Рамсея заключается в построении 3-раскраски критического графа K_{16}, при которой отсутствуют одноцветные треугольники. На четвертой странице обложки показано одно из двух существенно разных решений.

---

*) Недавно с помощью ЭВМ было найдено еще одно классическое число Рамсея: $R(3,9)=36$

**) Сейчас эти оценки имеют вид: $42\leqslant R(5,5)\leqslant 55$ и $25\leqslant R(4,5)\leqslant 28$.

***) Недавно было доказано, что получится как минимум 4 или 5 одноцветных треугольников.

Что можно сказать о $R(3, 3, 3, 3)$ — числе вершин минимального полного графа, при любой 4-раскраске которого возникает одноцветный треугольник? Это число неизвестно, хотя верхнюю оценку — 64 — для него нашел Йон Фолкман — блестящий комбинато́рщик, погибший в 1964 году в возрасте 31 года. Лучшая нижняя оценка — 51 — содержится в диссертации Фан Чунг — молодой китаянки из лабораторий Белла.

Существует много захватывающих обобщений классической теории Рамсея. Наиболее очевидное мы уже рассматривали; нахождение того, что называется обобщенными числами Рамсея для r-раскрасок полных графов, при которых обязательно возникают заданные подграфы, отличные от полных. Пионерами на этой территории были Вацлав Хватал и Харари; последние же пять лет раскопками на ней занимается Барр. Рассмотрим, например, задачу нахождения чисел вершин минимальных полных графов, в которых появляется одноцветная звезда с n вершинами. Для 2-раскрасок эту задачу первым решил Харари. В 1973 году Барр и Робертс решили ее для произвольного числа цветов.

Другая обобщенная задача Рамсея заключается в нахождении чисел Рамсея для 2-раскрасок полных графов, при которых появляется определенное число «разобщенных» одноцветных треугольников. (Треугольники называются *разобщенными*, если они не имеют общих вершин.) В 1975 году Барр, Эрдеш и Спенсер доказали, что если число разобщенных треугольников равно $d > 2$, то соответствующее число Рамсея равно $5d$. Для раскрасок более чем в два цвета задача остается нерешенной.

Для *колес* задача не решена в общем случае даже для двух цветов. Число вершин для *колеса с четырьмя вершинами*, т. е. для тетраэдра, равно, как мы видели, 18. *Колесо с пятью вершинами* (т. е. «колесо с втулкой и четырьмя спицами») имеет число Рамсея 15. Для колеса с шестью вершинами задача не решена, хотя известно, что в этом случае число Рамсея лежит в пределах от 17 до 20 включительно. *Предполагаемое* его значение равно 20.*) Если оно действительно равно 20, то полные графы с 17-ю, 18-ю и 19-ю вершинами обладают 2-раскраской без *шестивершинного* (с пятью «спицами») *колеса*. Было бы весьма интересно получить такую раскраску хотя бы для K_{17}.

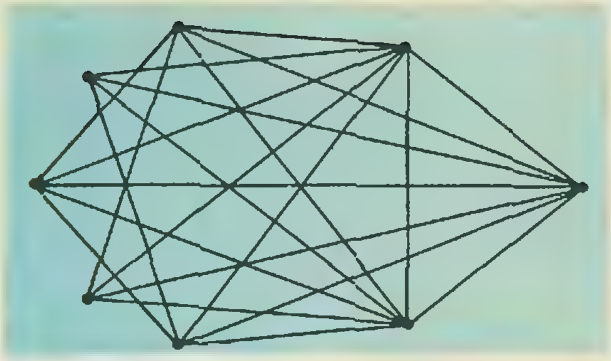


Рис. 3.

В 1968 году Рональд Грэхем, один из ведущих американских комбинаторщиков**), нашел остроумное решение одной проблемы рамсеевского типа, поставленной Эрдешем и Хайналом. *Каков наименьший граф, не содержащий K_6, при любой 2-раскраске которого возникает одноцветный треугольник?* Грэхем нашел единственное решение, которое представляет собой восьмивершинный граф, показанный на рисунке 3. Читатель может попытаться доказать, что этот граф обладает нужным свойством.

Что будет, если в последней задаче граф K_6 заменить другим полным графом? Вопрос бессмыслен для K_3, потому что K_3 — это и есть треугольник. В случае графа K_5 задача не решена. Наилучшее известное решение — это 18-вершинный граф, построенный Робертом Ирвингом в

---

*) Недавно Фаудри доказал, что это число не больше 19.

**) В этом номере (с. 21) мы публикуем интервью с Рональдом Грэхемом. *(Примеч. ред.).*

1973 году*). Случай графа K_1 еще дальше от решения. Фолкман в работе, опубликованной посмертно, доказал, что такой граф Рамсея существует. Однако число вершин графа, который дает конструкция Фолкмана, столь громадно, что его невозможно даже записать, не прибегая к специальным ухищрениям. Эрдеш установил премию в 100 долларов тому, кто найдет решение этой проблемы, содержащее менее миллиона вершин *).

Граф Фолкмана — драматическая иллюстрация огромных трудностей, которые возникают в проблеме Рамсея, даже если в формулировке проблемы не участвует граф более чем с четырьмя вершинами.

---

*) Болгарские математики Н. Г. Хадживанов и Н. Д. Ненов построили пример 15-вершинного графа; они же доказали, что требуемый граф не может содержать менее 12 вершин.

*) Франкл и Рёдль недавно доказали, что существует граф Фолкмана с числом вершин n, меньшим 10^{12}.

Вселенная как тепловая машина

(Начало см. на с. 2)

должны записать

$$\varrho_* l_{\max}^2 = \text{const}'''. \qquad (4)$$

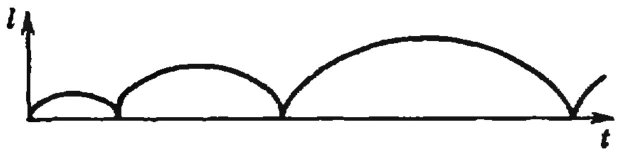
Мы уже говорили, что объем замкнутого мира $V \approx l^3$. По порядку величины этот объем в максимуме расширения равен $l_{\max}^3$, а полная масса материи **М** во Вселенной —

$$\varrho_* l_{\max}^3 = \text{M}. \qquad (5)$$

Поделив (5) на (4), получим:

$$l_{\max} = \frac{\text{M}}{\text{const}'''}.$$

Итак, $l_{\max}$ пропорционально полной массе материи во Вселенной **М**. Но масса **М** складывается из суммы масс частиц, энергии их движения и энергии фотонов. Тепловая энергия все время увеличивается (согласно второму закону термодинамики). Это означает, что будет расти и **М**, а значит — и пропорциональная ей величина $l_{\max}$, характеризующая амплитуду пульсаций Вселенной. Таким образом, имеет место не затухание пульсаций, а их раскачка! Такой вывод был получен в 1934 году американским физиком Р. Толменом. Откуда берется энергия на раскачку? Очевидно, раскачка идет за счет отрицательной энергии гравитационного поля (так что сумма положительной энергии и отрицательной не меняется, закон сохранения энергии выполняется).



Согласно выводу американского физика Р. Толмена, так меняется во времени радиус кривизны Вселенной.

Возможно ли, что наша реальная Вселенная описывается рассмотренной моделью? Вряд ли это так. Дело в том, что хотя никакого подобия старой картины «тепловой смерти» не существует, но в ходе пульсаций тепло, энтропия все более накапливаются. Если бы было бесконечное число пульсаций, то и энтропия накопилась бы бесконечная. А этого нет. Значит, бесконечного числа пульсаций не было. Но тогда исчезает главная привлекательная черта модели — ее бесконечное время существования в прошлом. И мы снова возвращаемся к проблеме начала. О том, как решается эта проблема современной наукой, читатель сможет узнать из уже упоминавшейся книги «Как взорвалась Вселенная?».

Развеяв один миф — миф о «тепловой смерти Вселенной», — наука пришла к новой не менее загадочной проблеме — проблеме начала расширения Вселенной. Именно на решении этой проблемы сосредоточено сейчас внимание специалистов-космологов. Таков вечный путь познания, проникновения в тайны природы, когда что-то познанное порождает еще более грандиозные вопросы.

Рональд Грэхем, действительный член Национальной академии наук США, является одним из крупнейших в мире специалистов по комбинаторике, идеи и методы которой используются во всех без исключения областях математики и точного естествознания. Находясь в Москве, профессор Грэхем согласился дать интервью для «Кванта».

ИНТЕРВЬЮ С ПРОФЕССОРОМ РОНАЛЬДОМ ГРЭХЕМОМ

— Профессор Грэхем, когда и каким образом вы впервые заинтересовались математикой? Что повлияло на ваш выбор: семья, учителя, *книги, соревнования?*

— Сильный интерес к математике я впервые почувствовал в начальной школе, в третьем или четвертом классе. Особенно хорошо помню, как, познакомившись с алгоритмом извлечения квадратных корней — вы знаете этот старый итерационный алгоритм,— я заинтересовался, возможно ли сделать то же самое для кубических корней и для более высоких степеней. И я нашел аналогичный способ решения. Меня поддержал учитель, хорошо относившийся к моим увлечениям.

Позднее, когда я учился в младших классах средней школы, мне помогали два других учителя. Видя, что я могу решить любую задачу по алгебре, учитель мне как-то сказал: «Вот задача, которую ты решить не сможешь». В задаче речь шла о скорости роста популяции мышей, зависящей от их численности, т. е. мне пришлось бы иметь дело с дифференциальным уравнением. Что же, учитель оказался прав — задачу решить я не смог. Тогда он дал мне учебник анализа и сказал: «Если хочешь узнать решение — прочти эту книгу». Я так и сделал. Тогда математика меня и захватила.

До этого я увлекался звездами, собирался стать астрономом. Только позднее я узнал, что наблюдение за звездами — это еще далеко не вся астрономия. Но эта наука интересует меня по-прежнему. Кроме диплома математика у меня есть еще один — по физике.

Дома мне мало чем могли помочь. Дело в том, что в нашей семье я первым закончил колледж.

— Как вы стали математиком-исследователем?

— Насколько я помню, в средней школе и на младших курсах университета такой цели я для себя не ставил — мне просто было интересно заниматься математикой. Потом, в 1950 году, я начал подготовку по специальной программе, дававшей право поступления в университет еще до окончания средней школы. Чтобы заниматься по этой программе, необходимо сдать определенные тестовые экзамены. По математике я оказался лучшим в Соединенных Штатах. В 15 лет я поступил в Чикагский университет, в котором знаменитый просветитель Р. М. Хатчинс ввел тогда систему гуманитарного образования «Книги классиков». Суть ее заключалась в том, что студенты читали не о Ньютоне, а самого Ньютона (или Дарвина) в оригинале. В начале обучения проводилось тестирование, выявлявшее, что студент знает, а что — нет. Как оказалось, я хорошо знал математику, физику, химию, но гораздо хуже — психологию, общественные науки, французский. В принципе, изучение гуманитарных дисциплин было полезным, хотя и не отвечало моим научным интересам.

Проучившись три года в Чикаго, я поступил в Калифорнийский университет, где занялся электротехническим машиностроением. Я проучился еще год, но диплома у меня по-прежнему не было. Если после четырех лет обучения в колледже студент не имел диплома, тогда его могли призвать в армию. Чтобы этого не случилось со мной, я в 1955 году пошел добровольцем в ВВС. Три года я служил на Аляске. Заняться там было особенно нечем, и я поступил в колледж, закончил его и получил диплом физика. Хотя я прослушал много курсов по математике, диплом математика я не получил: этот колледж не имел права давать диплом по математике.

После демобилизации я вернулся в Калифорнийский университет (в Беркли) и проучился там еще три года в аспирантуре. Работу на звание доктора философии я написал под руководством профессора Д. Г. Лехмера, еще когда учился в Беркли, до военной службы. Позднее Лехмер стал моим научным руководителем. Таким образом, я, как говорится, вышел на широкую дорогу, и тогда же (в 1961 году) я поступил в знаменитые лаборатории фирмы Белл, где с тех пор и работаю.

За это время я несколько раз был приглашенным профессором математики или информатики в Стандорфе, в Калифорнийском технологическом институте, в Калифорнийском университете и в Принстоне. Я принимаю такие приглашения потому, что занятия со способными студентами всегда дают хороший импульс в работе.

— Профессор Грехем, вы — серьезный математик, но, кроме того, вы еще и... виртуозный жонглер. Расскажите об этом.

— Я заинтересовался жонглированием сразу после поступления в университет. Сейчас у меня высокий рост и атлетическое телосложение, тогда я был младше своих сокурсников и ниже их ростом. Поэтому мне трудно было наравне со всеми заниматься наиболее популярными в США видами спорта — баскетболом и американским футболом. В Чикагском университете я стал заниматься гимнастикой, и притом не совсем обычной. Это была смесь гимнастики, танца, жонглирования и упражнений на одноколесном велосипеде. Тогда я и открыл для себя жонглирование. Кроме того, я занялся прыжками на батуте. По существу, это тоже одна из форм жонглирования, в которой «предметом» является сам человек.

— Имеет ли жонглирование какое-нибудь отношение к вашей любви к математике?

— Взаимосвязь между математикой и жонглированием гораздо сильнее, чем это может показаться. Из трех тысяч членов международной ассоциации жонглеров довольно значительная часть занимается вычислительной наукой. На мой взгляд, общность математики и жонглирования хорошо подмечена в следующем высказывании: «Главная трудность жонглирования в том, что шар летит только туда, куда его бросают». Т. е. все зависит от человека. В составлении программ ситуация точно такая же: человек пишет программу, а компьютер делает то, что ему приказано. Здесь встает вопрос управления: жонглирование очень алгоритмично, в нем есть ритмы, модели, и конца этому нет, как нет предела совершенствованию — всегда хочется добавить еще один шар. В математике все то же самое: каждый ответ рождает два новых вопроса, и так до бесконечности.

— Что вам больше по душе: разработка теории или решение задач? Идете ли вы от методики к решению задач или в обратном направлении?

— Я отвечу на Ваш вопрос иначе, чем сделал бы это мой коллега, знаменитый венгерский математик П. Эрдеш, который решение задач ставит выше всего остального и разработал сравнительно мало систематических теорий. Я бы сказал так: сначала обычно работаешь над решением конкретной задачи, потом подмечаешь какую-то закономерность. Но как только появляется методика, применимая к решению всех задач данного типа, ее можно развить, и она превращается в теорию.

Область математики, в которой я работаю — комбинаторика. Долгое время ее считали тихой заводью топологии. Лет двенадцать тому назад французский математик Ж. Дьедонне назвал комбинаторику «математикой на завтрак». Думаю, он имел в виду, что это лишь преддверие главного этапа ее развития. Есть и другая крайность: иной раз, говоря о комбинаторике, ее называют «комбинаторной теорией». Как теория, она еще не сравнима с алгебраической топологией или дифференциальной геометрией, хотя в них многие ключевые результаты и носят комбинаторный характер.

Конкретные задачи можно рассматривать как ступени создания методики или теории: если методика хороша для решения данной конкретной задачи, значит исследование идет по верному пути. Здесь возникает и более глубокий вопрос: создана ли математика искусственно или она существует вечно? Большинство математиков, которых я знаю, уверены, что математика в каком-то смысле существовала и раньше, а ученый просто открывает ее для людей. Но тут можно спросить: как же в таком случае быть с музыкой, с Бетховеном? Открыл ли он фортепианную сонату, посвященную Вальдштейну*) или создал ее? Ответ, наверное, можно сформулировать следующим образом: принципы, которые легли в основу сонаты, существовали, но их непосредственное применение, сами ноты — все уже сотворено композитором. То же относится и к математике: мож-

---

*) Соната № 21 До мажор «Аврора». (*Примеч. перев.*).

но придумать конкретное доказательство, но не его основополагающие принципы. Теория чисел, теорема о разложении на простые множители останутся без изменения и на другой планете. В других областях, например в квантовой механике, наблюдение может изменить или создать наблюдаемое, хотя это и кажется несколько таинственным.

Возвращаясь к вашему вопросу, хочу добавить, что решить конкретную задачу всегда интересно, но это еще не дает полного удовлетворения. Нужно идти дальше: открыть методику гораздо важнее, чем получить отдельный результат.

— Один из наших читателей прислал нам следующую задачу, связанную с гипотезой Эрдеша: n бесконечных арифметических прогрессий покрывает первые 2^{2^n} натуральных чисел; доказать, что они покрывают весь натуральный ряд. Что вы можете сказать про эту задачу?

— Это утверждение, или его вариант с заменой 2^{2^n} на $2n!$, сравнительно несложно доказать по индукции. Но дело в том, что сама гипотеза Эрдеша (в которой вместо 2^{2^n} фигурирует 2^n — и эта оценка уже точная!) доказана Криттенденом и Ван ден Эйденом (1969 г.). Доказательство трудное, о нем коротко не расскажешь.

При решении подобных задач очень важен первый этап — убедиться, справедлива ли гипотеза: вы то пытаетесь строить контрпримеры, то — доказываете какие-то частные случаи, более слабые утверждения или следствия гипотезы; так происходит, пока вы окончательно не обретете уверенность в справедливости того, что доказываете.

— Задачи на арифметические прогрессии связаны с именем Ван-дер-Вардена. Имеются ли хорошие задачи по этой тематике?

— Вот интересная задача, связанная с теоремой Ван-дер-Вардена: Обозначим, в его честь, через $W(k)$ наименьшее натуральное число такое, что при любом разбиении чисел от 1 до $W(k)$ на два класса, хотя бы в одном из них найдется k-членная арифметическая прогрессия. (Ван-дер-Варден доказал, что $W(k)$ существует при любом k.) Легко видеть, что $W(2)=3$, $W(3)=9$; известно еще, что $W(4)=35$, $W(5)=178$, но уже $W(6)$ не найдено даже с помощью компьютера. Я предлагаю гипотезу, что $W(k)$ растет не быстрее, чем «башня» из k двоек $2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}$. Но есть основания сомневаться даже в этой оценке: есть некоторые похожие комбинаторные задачи, связанные с именем Рамсея, где встречаются функции, растущие еще быстрее. Вы знаете, есть такая широко известная на Западе «Книга рекордов Гинесса». Так вот, там есть «самое большое число, реально использованное в математическом доказательстве». Оно было придумано мной в связи с одной задачей теории Рамсея.

— Одна задача такого «рамсеевского» типа, которой также занимался Эрдеш, недавно обсуждалась в «Кванте»: из какого наименьшего числа $S(k)$ точек на плоскости можно заведомо выбрать k точек, лежащих в вершинах выпуклого k-угольника? Есть гипотеза Секереша, что $S(k)=2^{k-2}+1$. Видимо, надежд на ее доказательство в общем случае пока не прибавилось?

— Да, найти значение $S(k)$ или даже дать хорошие его оценки — видимо, очень трудная задача. Задачу можно варьировать: доказать, что при большом числе точек N среди всех k-угольников с вершинами в этих N точках доля выпуклых составляет не менее C_k, где $C_k>0$ зависит только от k, и пытаться оценивать C_k. А вот еще вариант этой задачи: найти из какого числа $n=f(k)$ точек всегда можно выбрать «пустой» выпуклый k-угольник (т. е. такой, внутри которого больше нет ни одной из этих n точек). Оказывается, такое $f(k)$ существует для $k=3$, 4 и 5, а для $k\geqslant7$ его просто не существует. Для $k=6$ — никто ничего не знает.

А вообще эту задачу Эрдеш называет «задачей со счастливым концом»: дело в том, что ею вместе с Секерешом увлеклась его аспирантка Эстер Клейн, и все это кончилось тем... что аспирантка стала женой Секереша.

— Могли бы вы сказать что-нибудь об истоках теории Рамсея, привести простые примеры теорем рамсеевского типа?

— В качестве почти шуточного, но типичного примера рамсеевской теоремы приведу такое утверждение:

*среди любых 6 людей всегда существует 3 попарно знакомых или 3 попарно незнакомых.**) Такие теоремы возникали и до Рамсея. Например, есть такая известная теорема И. Шура, доказательство которой, пожалуй, по плечу наиболее подготовленным читателям «Кванта»; *при любой раскраске чисел натурального ряда в два цвета существует монохроматическое решение (x, y, z) диофантового уравнения $x+y=z$* (т. е. решение, составленное из чисел x, y, z одного цвета). Занимаясь более тщательным изучением истории, я пришел к выводу, что впервые теорема рамсеевского типа появлялась в трудах Д. Гильберта в 1892 году.

— Если уж говорить о предыстории теории Рамсея, не кажется ли вам, что следует ее вести не от результатов Шура, а скорее от принципа ящиков Дирихле?

— Ну, это уж слишком далекая история, это времена Адама и Евы!

— Есть задачи, которые неожиданно завоевывают популярность. Например, вы, конечно, слышали и такой: начав с некоторого натурального x_1, положим $x_{n+1}=x_n/2$, если x_n четно, и $x_{n+1}=(3x_n+1)/2$, если x_n — нечетно; всегда ли в этой последовательности встретится 1 (после чего она зацикливается)? Недавно школьники принесли нам лист с огромными машинными экспериментами, показывающими, как непредсказуемо поведение этой последовательности. Кажутся ли вам подобные задачи интересными?

— О таких задачах — просто формулируемых, но порой очень сложных,— трудно заранее сказать, есть ли в них какая-либо математическая идея, сложны они или нет, стоит ли на них тратить большие усилия. Но среди задач про «итерации» есть поистине удивительные. Например, вы знаете, как обычно сложно могут вести себя последовательности, задаваемые простыми формулами типа $x_{n+1}=x_n(a-x_n)$. Возьмем такую, более сложную, формулу: $x_{n+2}=(1+x_{n+1})/x_n$. Оказывается (если в ней не встречается 0 или —1), она всегда периодична с периодом 5. А $x_{n+3}=(1+x_{n+1}+x_{n+2})/x_n$ — с периодом 8. Есть ли еще подобные примеры? (Кажется, для линейных выражений в числителе и знаменателе их больше нет, но из многочленов более высокой степени их можно сконструировать.)

Еще пример: положим

$$x_{n+1}=[\sqrt{2x_n(x_n+1)}],\ x_1=1,$$

где [...] — «целая часть»; тогда первые члены будут 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13. Ясно, что x_n растет примерно как $\sqrt{2}n$, так что x_{n+2} примерно вдвое больше x_n. Оказывается, $d_n=x_{2n+1}-2x_{2n+1}$ будет 0 или 1, и если записать их по порядку, то мы получим 1,011010100 ...— в точности двоичную запись $\sqrt{2}$! Для $\sqrt{3}$, например, ничего подобного я уже не знаю.

Последний пример: пусть $\psi_1=2$, $\psi_{n+1}=\psi_n-1/\psi_n$. Будет ли ψ_n неограниченным? Ответ почти наверняка положительный, но никто это не умеет доказать.

— Считаете ли вы, что вычислительная наука, информатика, поглотит математику?

— Это довольно трудный вопрос. Большинство наиболее талантливых ученых в США пользуются компьютерами с самого начала своей научной деятельности. Если их интересуют графы или числа, то на компьютере можно проводить самые разнообразные эксперименты. Играя в компьютерные игры, школьники в США начинают пользоваться компьютерами в возрасте 6—7 лет. Потом круг математических занятий можно расширить с помощью тех же компьютеров.

Ситуация на рынке рабочей силы такова, что спрос на специалистов по вычислительным методам огромен. Поэтому многие талантливые молодые люди рассматривают компьютеры в контексте своей будущей профессии.

Как молодые, так и уже признанные математики приходят к выводу, что вычислительный эксперимент является источником важных и интересных задач. Например, на Международном конгрессе в Беркли результаты трех из шестнадцати пленарных докладов были построены на использовании компьютеров. Работа многих математиков связана с «гиперкубическими машинами». В них входит около 64 000 процессоров, соединенных в топологии 16-мерного куба. Такие машины являются источниками интереснейших математических задач.

---

*) См. статью М. Гарднера в этом номере. *(Примеч. ред.)*

Идет нескончаемая дискуссия о том, «поглотит» ли информатика математику или наоборот. Использование в информатике особо сложных математических результатов свидетельствует о большей ее зрелости. Возьмем к примеру Адлемана и Хуанга, которые занимаются доказательством простоты целых чисел с помощью так называемого «криптографического экрана RSA». В своей работе они опираются на глубокие теоретические результаты Фалтингса, получившего в 1986 году медаль Филдса. Если в вычислительной науке используются такого рода сложнейшие результаты алгебраической геометрии, то это значит, что информатика не стоит на месте.

С другой стороны, для того чтобы математика сохраняла свою жизнеспособность, ей нужны настоящие задачи; традиционными же источниками задач являлись физика и астрономия. Замыкаясь в себе, математика становится бесплодной, примером чему служит такая ее ветвь, как теория категорий. В таком случае необходимо вернуться назад, к некогда питавшим математику корням. Сегодня одним из главных источников задач становится вычислительная наука. Но при этом компьютеры не заменили мышления ученого.

В завершении я бы сказал, что взаимоотношения между математикой и вычислительной техникой приобретают характер симбиоза.

— Как один из организаторов Международного конгресса математиков в Беркли (лето 1986 года) и приглашенный докладчик Всемирного конгресса общества Бернулли в Ташкенте (осень 1986 года), не хотели бы вы сказать несколько слов об отношениях между советскими и американскими учеными?

— Как председателю правления организационного комитета конгресса в Беркли, мне было очень приятно, что в нем приняло участие такое значительное число приглашенных докладчиков из Советского Союза — более, чем когда-либо в прошлом. Мы надеемся, что и в дальнейшем эта тенденция сохранится.

На мой взгляд, сотрудничество между советскими и американскими математиками расширяется. В этом плане хорошим признаком можно считать конгресс общества Бернулли в Ташкенте. Это крупнейший форум математиков, состоявшийся в Советском Союзе со времен Международного конгресса математиков 1966 года. Я думаю, что конгресс в Ташкенте прошел успешно.

Конечно, одним из препятствий является элементарный языковой барьер. Американцы печально известны своей неохотой изучать иностранные языки. Поэтому большое значение приобретает эффективный обмен переводными математическими изданиями — книгами, журналами.

В Советском Союзе много сильных математиков. Было бы очень жаль, если их коллеги за рубежом не смогли бы оперативно знакомиться с полученными в СССР результатами. Здесь можно отметить последовательный характер математических исследований. Работа каждого ученого строится на результатах других. Еще Ньютон говорил: «Если мне и удавалось видеть немного дальше других, то лишь потому, что я стоял на плечах гигантов».

Например, большой интерес вызвали результаты советского ученого А. Разборова. Недавно они были улучшены американским математиком Р. Смоленским. Рукопись работы уже передана Разборову, и я уверен, что это существенно ускорит ход его дальнейших исследований. Такого рода мелочи дают порой большие результаты.

Конечно, будут еще препятствия и преграды. Но математики любят трудные задачи. На этот случай бытует поговорка:

Атак те задачи достойны,
Которые держатся стойко.

На будущее я смотрю с большим оптимизмом.

Беседу провел *А. Б. Сосинский*
Перевод с английского *М. М. Романовской*

Задачи

М1096 — М1100, Ф1108 — Ф1112

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 июля 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например *«М1096» или «Ф1108»*. В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

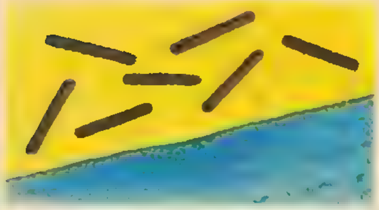


Рис. 1.

М1096. Диаметр d окружности разбит на k равных частей, и через каждую точку деления проведена хорда, перпендикулярная диаметру. Докажите, что сумма длин всех хорд не меньше $0{,}5\,kd$ и меньше $0{,}8\,kd$.

Р. Харитонов, А. Чагиров (ученики 10 класса)

М1097. Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат основания — четное число.

В. В. Произволов

М1098. На окружности расставлены n точек, занумерованных подряд числами $1, 2, ..., n$. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую две точки с номерами одной четности. Любая хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто делает последний ход. При каждом $n=4, 5, 6, ...$ выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию: начинающий или его партнер.

В. Г. Чванов

М1099*. В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 6783 космонавта, причем известно, что среди любых четырех из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж.

Н. Н. Силкин, М. В. Волков

М1100*. На берегу прямолинейной реки лежат бревна (не пересекающие друг друга отрезки; рис. 1). Каждое бревно составляет с линией берега угол меньше 45°. Докажите, что для любого расположения бревен обязательно найдется бревно, которое можно закатить в реку, не задевая остальных. (Поворачивать бревно при качении не разрешается.)

В. Г. Ильичев

Ф1108. Для наглядной демонстрации воздействия лазерного излучения на вещество изготовлена мишень в виде маленького серебряного шарика, закрепленного в вершине легкого пустотелого конуса (рис. 2). Одна сторона шарика отполирована, а другая зачернена. Мишень устанавливают основанием конуса на шероховатую горизонтальную плоскость и на поверхности шарика-мишени фокусируют излучение от мощного импульсного лазера.

Оцените, при какой минимальной энергии светового импульса произойдет опрокидывание мишени. На какую из сторон шарика (отражающую или поглощающую) следует направить излучение?

Считайте, что масса шарика $m=3$ г и много больше массы конической подставки; высота конуса $h=6$ см, диаметр основания $d=3$ мм; коэффициент отражения отполированной поверхности $r=0{,}99$, коэффициент поглощения зачерненной поверхности $a=0{,}99$; длительность лазерного импульса $\tau=10$ нс.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Задачник „Кванта"

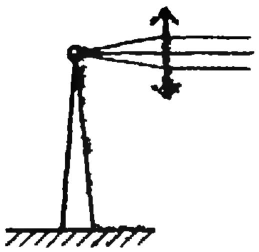


Рис. 2.

Ф1109. С наклонной плоскости скатываются две бутылки: одна — пустая, другая — заполненная водой. Какая из них скатится быстрее? Какая из этих бутылок поднимется на бо́льшую высоту, если их пустить вверх по наклонной плоскости с одинаковыми начальными скоростями? Считать, что проскальзывания нет.

А. И. Буздин

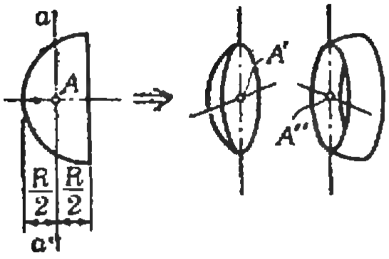


Рис. 3.

Ф1110. Почему, когда при температуре около 0 °C ешь мороженое, пар изо рта начинает идти сильнее?

А. Ю. Алексеев

Ф1111. Равномерно заряженную полусферу разрезали на две части так, как показано на рисунке 3 (по линии aa'), и эти части разнесли на большое расстояние. В какой точке напряженность электрического поля больше — в точке A' или в точке A'' (см. рисунок)?

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

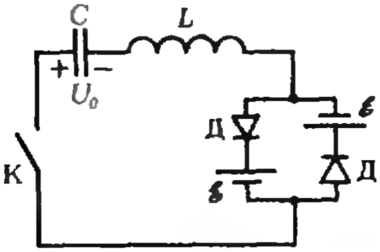


Рис. 4.

Ф1112. В схеме, приведенной на рисунке 4, при разомкнутом ключе К конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_0. Ключ замыкают, и через какое-то время ток в цепи прекращается. Какова должна быть величина U_0, чтобы напряжение на конденсаторе установилось равным $U_y = 1$ В при изменившейся полярности пластин, если ЭДС каждой батареи в цепи $\mathcal{E} = 1{,}5$ В? Диоды считать идеальными.

А. И. Киркинский

Problems

M1096 — M1100, P1108 — P1112

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the

M1096. The diameter d of a circle is divided into k equal parts and a chord perpendicular to the diameter is drawn through each dividing point. Prove that the total length of all the chords is not less than $0.5kd$ and less than $0.8kd$.

R. Kharitonov, A. Chagirov (10th form students)

M1097. The coordinates of the vertices of an isoceles triangle are integers. Prove that the square of the base is an even number.

V. V. Proizvolov

M1098. n points on the circle are numbered in order 1, 2, ..., n. Two play the following game. Each player in turn draws a chord joining points of the same parity. Each chord has no common points and no common end points with any other. The player who makes the last move wins. For each $n=4, 5, 6, \ldots$ determine which player (the one making the first move or his opponent) has a winning strategy.

V. G. Chvanov

M1099*. A group of 6783 astronauts prepares for a flight to Mars. It is known that among any four of them three can be chosen, forming a compatible crew for the landing module. Prove that it is possible to chose 5 astronauts, any three of whom constitute a compatible crew.

N. N. Silkin, M. V. Volkov

M1100*. Logs (non intersecting segments) lie near the rectilinear shore of a river, each forming an angle of less than 45° with the shoreline. Prove that one of the logs may be rolled into the river

envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

without changing direction or touching the other logs (see figure Рис. 1 on p. 27). The number of logs is finite.

V. G. Il'ichev

P1108. To demonstrate the effect of laser rays on matter, a special target, consisting of a small silver ball fixed at the vertex of a light empty cone, was designed (see figure Рис. 2). One side of the ball is polished, the other blackened. The target is placed so that the base of the cone lies on a rough horizontal surface. The laser ray from a powerful impulse laser is focused on the silver ball. Estimate the minimal energy of light impulse needed to overturn the target. To what side of the ball (the reflecting or absorbing one) should the ray be directed? You may assume that the mass of the ball is $m=3$g and is much greater than that of the supporting cone; the height of the cone is $h=6$cm, the diameter of its base is $d=3$mm; the coefficient of reflection from the polished surface is $r=0.99$, the absorbtion coefficient of the blackened surface is $a=0.99$; the duration of the laser impulse is $\tau=10$ns.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P1109. Two bottles, one empty, the other filled with water, roll down an inclined plane. Which will roll down faster? Which of these bottles will roll up to the highest level if they are sent back up the inclined plane with the same initial velocity. It may be assumed that there is no slippage.

A. I. Buzdin

P1110. When one eats ice cream when the temperature is about 0 °C, more vapor comes out of one's mouth. Why?

A. Yu. Alekseev

P1111. A uniformly charged half sphere was cut into two pieces as shown on figure Рис. 3 (along the line aa') and these two parts were moved far away from each other. Where is the value of the electric field greater — at the point A' or at the point A'' (see the figure)?

S. P. Kim, A. I. Latynin

P1112. In the circuit shown on figure Рис. 4, with the switch K disconnected, the capacitor is charged up to the voltage U_0. The switch is then turned on, and after a certain time current ceases to flow in the circuit. For what value of U_0 will the established voltage on the capacitor equal $U_e=1$ V (with the polarities of the plates interchanged), if the EMF of each source is $\mathcal{E}=1.5$ V? The diodes may be assumed ideal.

A. I. Kirkinski

Решения задач

M1071, M1076 — M1080, Ф1088 — Ф1092

M1071. *На доске нарисовано поле для игры в «цифры» (см. рисунок справа).*

Двое играющих ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела (—) какую-нибудь цифру. Каждый дальнейший ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоя-

((((((((_*_)*_)*_)*_)*_)*_)*_)*_)*_)

Ответ: выигрывает первый игрок. Чтобы выиграть, он должен, пока это возможно, записывать нечетную цифру, причем на первых четырех своих ходах операцию он может выбирать произвольно, а на последнем (пятом) — так, чтобы промежуточный результат стал четным (т. е. сложение, если предыдущий результат и выписываемая цифра нечетны, и умножение во всех

щую слева звездочку (*) на знак сложения или умножения; при этом ни одна цифра не должна встречаться дважды. В конце игры вычисляется значение полученного выражения. Если это четное число, то выигрывает первый игрок, нечетное — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

других случаях). Поскольку у второго игрока к последнему ходу останется заведомо четная цифра, независимо от выбора операции окончательный результат будет четным.

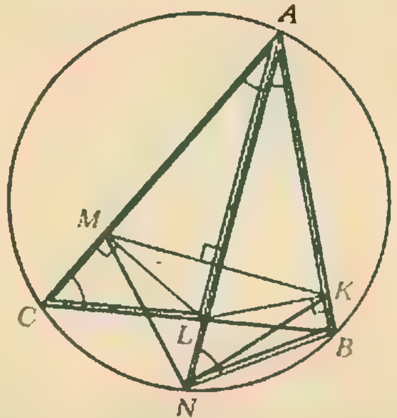
С. А. Генкин

М1076. *Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N (отличной от A); K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC. Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику ABC.*

Площадь треугольника ABC равна $(AB\cdot AC\cdot\sin\alpha)/2$, где $\alpha=\angle BAC$, а площадь четырехугольника $AKNM$ равна $AN\cdot KM/2$ (поскольку, очевидно, его диагонали AN и KM перпендикулярны). Поэтому достаточно доказать, что

$$AB\cdot AC\cdot\sin\alpha=AN\cdot KM.$$

Треугольники ACL и ANB подобны ($\angle CAL=\angle NAB$, так как AL — биссектриса, а $\angle ACL=\angle ANB$, так как эти углы опираются на одну и ту же дугу AB окружности ABC). Следовательно, $AB/AN=AL/AC$, т. е. $AB\cdot AC=AL\cdot AN$. Остается заметить, что $KM=AL\cdot\sin\alpha$ (KM — это хорда окружности с диаметром AL, на которую опирается вписанный в эту окружность угол KAM величины α).



И. А. Кушнир

М1077. *Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n ($n\geqslant 1$) элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что:*

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot p_n(k)=$
$=0\cdot p_n(0)+1\cdot p_n(1)+\ldots$
$\ldots+n\cdot p_n(n)=n!$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k-1)^2 p_n(k)=n!$.

а) Заметим прежде всего, что

$$\sum_{k=0}^{n} p_n(k)=n!, \qquad (1)$$

так как в левой части стоит суммарное число перестановок, имеющих $0, 1, \ldots, n$ неподвижных точек, т. е. просто число всех перестановок. Теперь докажем, что при $1\leqslant k\leqslant n$

$$kp_n(k)=np_{n-1}(k-1), \qquad (2)$$

считая, что $p_0(0)=1$. Для этого подсчитаем двумя способами число N пар (f, i), где f — произвольная перестановка n элементов с k неподвижными точками, а i — любая из этих точек ($f(i)=i$). С одной

Примечание. Перестановкой конечного множества S называется взаимно однозначное отображение f множества S на себя; число всех перестановок множества из n элементов равно $n!=1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$. Элемент a множества S называется неподвижной точкой перестановки f, если $f(a)=a$.

стороны, каждая из этих $p_n(k)$ перестановок входит в k пар, поэтому $N=kp_n(k)$. С другой стороны, если $f(i)=i$, то на множестве из $n-1$ элементов, отличных от i, перестановка f имеет $k-1$ неподвижных точек, следовательно, каждый из n элементов i входит в $p_{n-1}(k-1)$ пар, т. е. $N=np_{n-1}(k-1)$.

Суммируя равенства (2) по $k=1, \ldots, n$ и учитывая (1) (с заменой n на $n-1$), получим

$$\sum_{k=0}^{n} kp_n(k)=n\sum_{k=1}^{n} p_{n-1}(k-1)=n\cdot(n-1)!=n!.$$

б) Докажем сразу более общее тождество

$$s(n, m)=\sum_{k=m}^{n} \frac{k!}{(k-m)!}\, p_n(k)=n! \qquad (3)$$

при всех $n\geqslant m$, $m=0, 1, 2, \ldots$ (по определению, $0!=1$). При $m=0$ оно совпадает с (1), при $m=1$ — с утверждением а), а при $m=2$ эквивалентно б), поскольку

$$\sum_{k=0}^{n} (k-1)^2 p_n(k)=\sum_{k=0}^{n} k(k-1)p_n(k)-\sum_{k=0}^{n} kp_n(k)+$$
$$+\sum_{k=0}^{n} p_n(k)=s(n, 2)-s(n, 1)+s(n, 0).$$

Из тождества (2) следует, что при $1\leqslant m\leqslant k\leqslant n$

$$\frac{k!}{(k-m)!}\, p_n(k)=k(k-1)\ldots(k-m+1)p_n(k)=$$
$$=n(k-1)\ldots(k-m+1)p_{n-1}(k-1)=$$
$$=n(n-1)(k-2)\ldots(k-m+1)p_{n-2}(k-2)=\ldots$$
$$\ldots=n(n-1)\ldots(n-m+1)p_{n-m}(k-m)=$$
$$=\frac{n!}{(n-m)!}\, p_{n-m}(k-m).$$

Суммируем эти равенства по $k=1, 2, \ldots n$:

$$s(n, m)=\frac{n!}{(n-m)!}\, s(n-m, 0)=n!.$$

Другое доказательство (3) можно получить из почти очевидного соотношения $p_n(k)=C_n^k p_{n-k}(0)$, где $C_n^k=n!/(k!(n-k)!)$ — число k-элементных подмножеств множества из n элементов (число сочетаний).

Наш читатель Л. М. Коганов (Москва) сообщил еще об одном обобщении этой задачи, принадлежащем американскому математику Дж. Голдману: если $S(q, i)$ — это число разбиений множества $\{1, 2, \ldots, q\}$ на i непустых непересекающихся множеств, то

$$\sum_{k=0}^{n} k^q p_n(k)=n!\sum_{i=1}^{m} S(q, i),$$

где $m=\min(n, q)$. Доказательство этого соотношения, предложенное Л. М. Погановым, напоминает вывод формулы (2) и сводится к подсчету двумя способами количества пар (f, φ), где f — произвольная перестановка множества из n элементов, а φ — произвольное отображение множества $\{1, 2, \ldots, q\}$ в множество неподвижных точек перестановки f.

В. Н. Дубровский

M1078. *Функция f определена на множестве N_0 всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n))=n+1987$ не может выполняться для всех n из N_0.*

Допустим, что утверждение задачи неверно и функция f, удовлетворяющая равенству $f(f(n))=n+1987$ при $n\in N_0$, существует. Тогда

$$f(n+1987)=f(f(f(n)))=f(n)+1987,$$

и, следовательно,

$$f(n+1987k)=f(n)+1987k \qquad (*)$$

при всех $n, k\in N_0$. Рассмотрим теперь произвольное целое r, $0\leqslant r\leqslant 1986$, и поделим число $f(r)$ на 1987 с остатком:

$$f(r)=1987p+q,\ \ 0\leqslant q\leqslant 1986.$$

По условию $f(f(r))=r+1987$,
и в силу (*) $f(f(r))=f(q+1987p)=f(q)+1987p$.
Поскольку $r\leqslant 1986$, возможны только два случая:

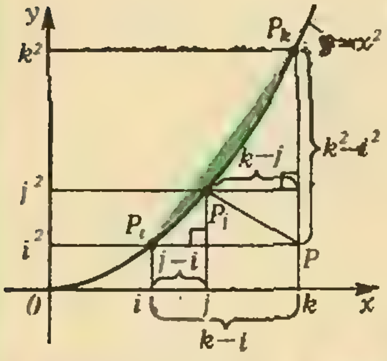
1) $p=0$, т. е. $f(r)=q$, а $f(q)=r+1987$;

2) $p=1$, т. е. $f(r)=q+1987$, а $f(q)=f(f(r))-1987=r$.

В обоих случаях, очевидно, $f(r)\neq f(q)$, а значит, $r\neq q$. Таким образом, множество 0, 1, ..., 1986 можно разбить на пары (a, b) так, что в каждой паре $f(a)=b$, $f(b)=a+1987$. Но в этом множестве нечетное число элементов. Полученное противоречие показывает, что функции с требуемыми свойствами не существует.

В. В. Вавилов

M1079. *Пусть n — натуральное число, $n\geqslant 3$. Можно ли расположить на плоскости n точек так, чтобы расстояние между любыми двумя выражалось иррациональным числом, а площадь треугольника с вершинами в любых трех — рациональным числом (отличным от нуля).*



$S_{P_iP_jP_k}=S_{PP_iP_k}-S_{PP_jP_k}-S_{PP_iP_j}$

Ответ: можно; искомыми точками являются, например, точки $P_i\ (i;\ i^2)$, $i=1, 2, ..., n$, т. е. точки на параболе $y=x^2$ с натуральными абсциссами.

В самом деле,

$$P_iP_j=\sqrt{(j-i)^2+(j^2-i^2)^2}=|j-i|\sqrt{1+(j+i)^2}.$$

Но число вида $1+m^2$ (у нас $m=j+i$) не может быть квадратом рационального числа r, потому что в таком случае r было бы натуральным и из равенства $r^2=1+m^2$ получалось бы противоречивое неравенство:

$$1=r^2-m^2=(r-m)(r+m)\geqslant r+m>1.$$

Таким образом, все расстояния P_iP_j иррациональны.

В то же время площадь треугольника $P_iP_jP_k$ при $i<j<k$, как видно из рисунка, равна

$$\frac{1}{2}((k-i)(k^2-i^2)-(k-j)(k^2-i^2)-(k-i)(j^2-i^2)),$$

т. е. рациональна.

Вообще, площадь любого треугольника, вершины которого имеют целые координаты, рациональна. Это показывает, что условия задачи легко выполнимы: можно брать любой набор точек целочисленной решетки, заботясь лишь о том, чтобы расстояния между ними были иррациональны.

В. В. Вавилов

M1080. *Пусть q — натуральное число, $q\geqslant 2$. Докажите, что если k^2+k+*

Достаточно доказать, что если среди чисел от 0 до $q-2$ есть такое k, что $f(k)=k^2+k+q$ — составное, то такое число есть и в промежутке от 0 до $\sqrt{q/3}$.

$+q$ — простое число для всех целых k, где $0\leqslant k\leqslant\sqrt{q/3}$, то k^2+k+q — простое для всех целых k, где $0\leqslant k\leqslant q-2$.

Пусть y — наименьшее целое неотрицательное число, такое что $f(y)$ — составное. Обозначим через p наименьший простой делитель $f(y)$, тогда $f(y)\geqslant p^2$. Ниже мы докажем, что если $y\leqslant q-2$, то $p\geqslant 2y+1$, ввиду чего

$$y^2+y+q\geqslant(2y+1)^2=4y^2+4y+1,$$

и, следовательно, $y^2<q/3$, т. е. $y<\sqrt{q/3}$.
Итак, остается доказать, что $p\geqslant 2y+1$ при $y\leqslant q-2$.

Предположим противное: $p\leqslant 2y$ и рассмотрим разность

$$f(y)-f(x)=(y-x)(y+x+1).$$

Когда x изменяется от 0 до $y-1$, выражение $y-x$ принимает значения $y, y-1, \dots, 1$, а $y+x+1$ — значения $y+1, y+2, \dots, 2y$. Следовательно, при некотором x, $0\leqslant x\leqslant y-1$, число $f(y)-f(x)$ делится на p. Но в силу выбора y и p число $f(y)$ делится на p, а $f(x)$ — простое, поэтому $f(x)$ должно быть равно p. В то же время

$$y-x<y+x+1\leqslant q+x-1<q+x+x^2=f(x),$$

поэтому $p=f(x)$ не может делить $(y-x)(y+x+1)$. Противоречие.

Заметим, что результат задачи применим к знаменитому трехчлену Эйлера $f(x)=x^2+x+41$: легко проверить, что $f(x)$ простое для $x=0, 1, 2, 3$, а отсюда (поскольку $\sqrt{41/3}<4$) следует, что $f(x)$ — простое для всех 40 целых x от 0 до 39.

В. Ф. Лев

Ф1088. *Невесомая лестница закреплена во вращающемся со скоростью $f=10$ об/мин невесомом подвесе так, что может свободно качаться относительно верхней ступеньки (рис. 1). Обезьяна массой $m=30$ кг начинает спускаться по лестнице. На каком расстоянии l от подвеса она будет находиться, когда вертикальное положение лестницы перестанет быть устойчивым?*

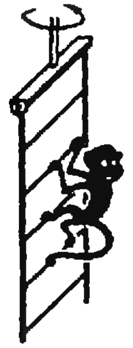


Рис. 1.

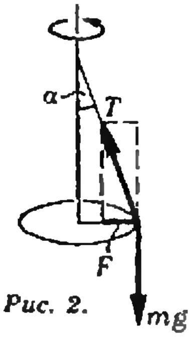


Рис. 2.

Пусть лестница отклонилась от вертикали на малый угол α. В этот момент движение обезьяны будем рассматривать как движение по окружности радиусом $\sim l\alpha$ (рис. 2). Центростремительное ускорение обезьяны —

$$a=(2\pi f)^2 l\alpha.$$

Это ускорение ей может сообщить сила реакции T со стороны лестницы — это единственная сила, которая имеет проекцию F на горизонтальную плоскость. Если $F>ma$, то обезьяна (с лестницей) будет возвращаться к вертикали — вертикальное положение лестницы будет устойчивым.

Из рассмотрения сил (рис. 2) ясно, что $F=mg\alpha$. Из условия

$$mg\alpha>m(2\pi f)^2 l\alpha$$

находим:

$$l<g/(2\pi f)^2=10\text{ м}.$$

При l большем 10 м равновесие неустойчивое.

А. В. Андрианов

Задачник „Кванта"

Ф1089. *При перелете со станции «Мир» на станцию «Салют-7», которые находились на одной орбите, наши космонавты затормозили свой корабль, перешли на более низкую орбиту и за время $t=30$ часов нагнали «Салют-7», который летел впереди «Мира» на расстоянии $L=3000$ км. Считая орбиты круговыми, определить, на сколько километров промежуточная орбита ниже основной. Высота обеих орбит много меньше радиуса Земли $R_З=6400$ км.*

Запишем разность угловых скоростей корабля на промежуточной орбите и станции:

$$\omega_1 R_1 t-\omega_2 R_2 t=(\omega_1 R_1-\omega_2 R_2)t=R_З t(\omega_1-\omega_2)\approx L \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\omega_1-\omega_2)=L/R_З t \qquad (1)$$

(мы учли, что высоты орбит малы по сравнению с радиусом Земли, т. е. $R_1\approx R_2\approx R_З$). В то же время, учитывая, что $\omega=\frac{v}{R}=\sqrt{\frac{GM}{R^3}}=\sqrt{\frac{gR_З^2}{R^3}}$ (M — масса Земли), можем записать:

$$\omega_1-\omega_2=\sqrt{gR_З^2}\left(\sqrt{\frac{1}{R_1^3}}-\sqrt{\frac{1}{R_2^3}}\right)=$$
$$=\sqrt{gR_З^2}\left(\sqrt{\frac{1}{(R_2-\Delta R)^3}}-\sqrt{\frac{1}{R_2^3}}\right)\approx$$
$$\approx\sqrt{\frac{g}{R_З}}\left(\sqrt{\frac{1}{(1-\Delta R/R_З)^3}}-1\right)\approx\sqrt{\frac{g}{R_З}}\,\frac{1/(1-\Delta R/R_З)^3-1}{\sqrt{1/(1-\Delta R/R_З)^3}+1}\approx$$
$$\approx\sqrt{\frac{g}{R_З}}\,\frac{3\Delta R/R_З}{2}. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2), найдем ΔR:

$$\Delta R=\frac{2L}{3t}\sqrt{\frac{R_З}{g}}\approx 15 \text{ км}.$$

М. В. Семенов

Ф1090. *Ясной морозной ночью посмотрите на небо. Какие звезды мерцают более заметно: находящиеся высоко над горизонтом или низко, и почему?*

Мерцание звезд обусловлено турбулентными потоками воздуха в земной атмосфере, которые возникают из-за неравномерного прогрева атмосферы. В основном это восходящие потоки, возникающие из-за разности температур земной поверхности и прилегающих к ней слоев воздуха. Эти потоки приводят к тому, что плотность атмосферы в данном месте непрерывно меняется. Соответственно, меняется показатель преломления, и поэтому идущие от звезд лучи света преломляются то в одном, то в другом направлении — звезды мерцают. Этот эффект особенно заметен вблизи Земли; поэтому «низкие» звезды, лучи которых по пути к наблюдателю проходят больший путь вблизи Земли, чем лучи «высоких» звезд, мерцают заметнее.

А. С. Бутов

Ф1091. *Подвешенный на нерастяжимой нити длиной l шарик с массой m и зарядом q находится в центре обруча, по которому равномерно распределен заряд Q (рис. 1). Радиус обруча R; заряды q и Q одноименные. Определить*

Пусть шарик сместился на малое расстояние Δx ($\Delta x\ll R$) от центра обруча (смещение по вертикали при этом пропорционально Δx^2, и мы им пренебрежем, считая, что движение происходит в плоскости обруча). Посмотрим, какая сила $F_э$ действует на заряд q шарика со стороны заряда обруча Q. Из соображений симметрии (см. рис. 2) понятно, что напряженность поля, создаваемого зарядом Q в точке A, направлена вдоль радиуса обруча. Так же направлена и сила $F_э$.

частоту малых колебаний шарика. Воспользоваться формулой $(1+x)^n \approx 1+\alpha x$ $(x \ll 1)$.

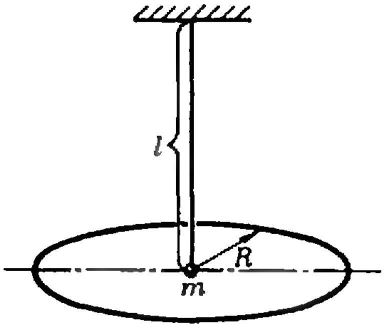


Рис. 1.

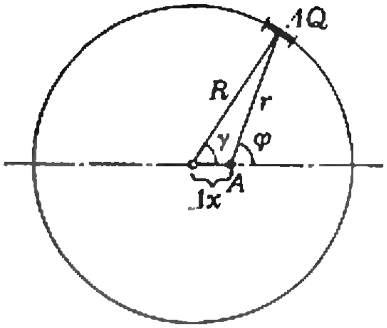


Рис. 2.

Задачник „Кванта"

Чтобы найти $F_э$, посчитаем силу $f_э$, действующую на заряд q со стороны малого элемента обруча, находящегося на расстоянии r от заряда q (см. рис. 2). Заряд этого элемента —

$$\Delta Q = \frac{Q}{2\pi R} R \cdot \Delta\gamma = \frac{Q}{2\pi}\Delta\gamma \approx \frac{Q}{2\pi}\Delta\varphi$$

($\varphi \approx \gamma$, поскольку $\Delta x \ll R$). Выразим r через R и Δx (воспользовавшись теоремой косинусов):

$$r^2 = R + (\Delta x)^2 - 2R \cdot \Delta x \cdot \cos\gamma \approx R^2 + (\Delta x)^2 - 2R \cdot \Delta x \cdot \cos\varphi \approx R^2 - 2R \cdot \Delta x \cdot \cos\varphi.$$

Таким образом,

$$f_э = -k\frac{\Delta Q \cdot q}{r^2} \approx -k\frac{Qq}{2\pi}\frac{1}{R^2 - 2R \cdot \Delta x \cdot \cos\varphi}\Delta\varphi.$$

Полная сила $F_э$ равна $\int\limits_0^{2\pi} f_э \cos\varphi \, d\varphi$, т. е.

$$F_э = -k\frac{Qq}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{R^2 - 2R\cdot\Delta x\cdot\cos\varphi}d\varphi =$$

$$= -k\frac{Qq}{2\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi}{1 - \frac{2\Delta x}{R}\cos\varphi}d\varphi \approx$$

$$\approx -k\frac{Qq}{2\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1 - \frac{2\Delta x}{R}\cos\varphi\right)^{-1}\cos\varphi \, d\varphi \approx$$

$$\approx -k\frac{Qq}{2\pi R^2}\int\limits_0^{2\pi}\left(1 + \frac{2\Delta x}{R}\cos\varphi\right)\cos\varphi \, d\varphi =$$

$$= -k\frac{2Qq\cdot\Delta x}{2\pi R^3}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi \, d\varphi = -k\frac{Qq\cdot\Delta x}{\pi R^3}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}d\varphi =$$

$$= -k\frac{Qq\cdot\Delta x\cdot\pi}{\pi R^3} = -k\frac{Qq}{R^3}\Delta x.$$

Теперь запишем уравнение движения шарика:

$$m(\Delta x)'' = -\left(mg\sin\alpha + k\frac{Qq\cdot\Delta x}{R^3}\right),$$

где α — угол отклонения нити маятника от вертикали. Поскольку нас интересуют малые колебания, $\sin\alpha \approx \Delta x/l$, и

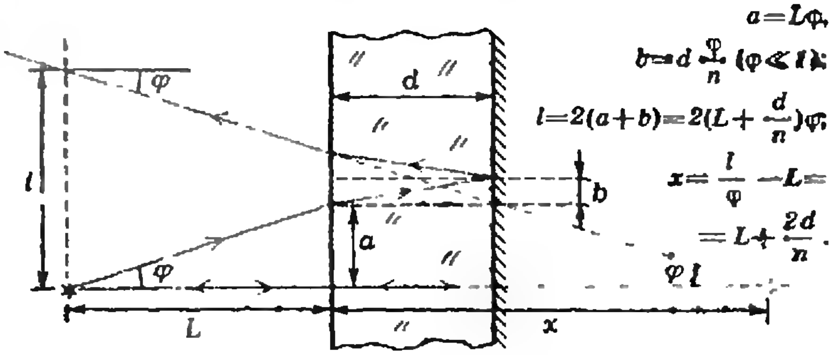
$$m(\Delta x)'' = -\Delta x\left(m\frac{g}{l} + k\frac{Qq}{R^3}\right).$$

Это — уравнение гармонических колебаний с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l} + k\frac{Qq}{R^3 m}}.$$

Г. В. Григорьев

Ф1092. *Найти положение изображения точечного источника, находящегося на расстоянии L от передней поверхности толстой плоскопараллельной стеклянной пластины, посеребренной с задней стороны (см. рисунок). Изображение рассматривается перпендикулярно к поверхности пластины. Толщина пластины d, показатель преломления стекла n.*



$a = L\varphi,$

$b = d\dfrac{\varphi}{n}\ (\varphi \ll 1);$

$l = 2(a+b) = 2\left(L + \dfrac{d}{n}\right)\varphi;$

$x = \dfrac{l}{\varphi} - L =$

$= L + \dfrac{2d}{n}.$

На рисунке выполнено построение изображения в пластине. Как видно из рисунка, изображение находится за пластиной на расстоянии $x = \frac{l}{\varphi} - L = L + \frac{2d}{n}$ от ее передней поверхности.

В. К. Петерсон

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 + x_1x_2 &= 1,\\ x_2 + x_2x_3 &= 1,\\ \dots\dots&\dots\\ x_{99} + x_{99}x_{100} &= 1,\\ x_{100} + x_{100}x_1 &= 1. \end{aligned}$$

2. Докажите, что существует натуральное число, куб которого оканчивается на 1987.

3. Даны 3 целых положительных числа. Их наибольший общий делитель равен 1, сумма любых двух делится на третье. Найдите эти числа.

4. Даны три положительных числа x, y, z. При каком условии существует треугольник, высоты которого имеют длины x, y, z?

5. В одной книге описан такой случай. Резиновый мяч влетает в дверь комнаты, отражается от стены, потом — от другой стены и, не задев ни одного предмета, вылетает в дверь в точности там, где он влетел. Могло ли это быть?

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2}\sin a,\\ \cos x + \cos y = \sqrt{2}\cos a. \end{cases}$$

7. Квадратное уравнение $x^2 + px - q = 0$ имеет решения. Числа p и q изменили, каждое не более чем на 1 % от его абсолютной величины. Известно, что получившееся уравнение также имеет решения. Можно ли гарантировать, что бо́льшее из решений нового уравнения отличается от бо́льшего из решений старого уравнения не более, скажем, чем на 10 % от абсолютной величины последнего?

8. Каков наименьший возможный радиус круга, в котором можно расположить четыре неперекрывающихся круга радиусом 1?

9. Даны четыре отрезка длиной a, b, c, d. При каком условии из них можно составить замкнутую самопересекающуюся ломаную, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой?

10. Нарисуйте график функции

$$y = |1 - |1 - |1 - |1 - |1 - x|||||.$$

Десятый класс

11. Решите в целых положительных числах уравнение $x^y = 48\,261\,724\,457$.

12. Найдите общую область определения функций

$$f_n(x) = \underbrace{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \ldots + \sqrt{x + 1}}}}}_{n}.$$

13. Дан многогранник, ни одно плоское сечение которого не имеет больше 4 сторон. Докажите, что это — тетраэдр.

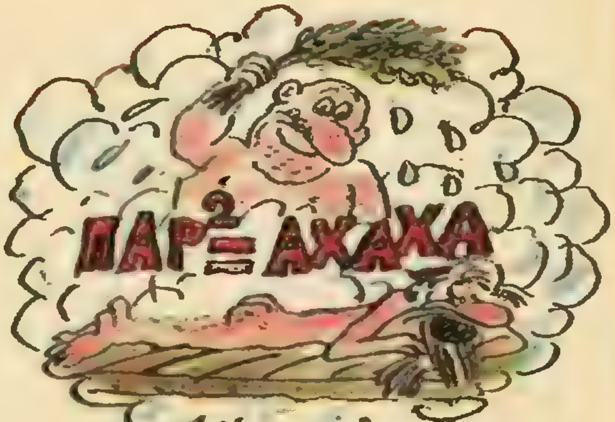
14. Прямой круговой цилиндр и прямой круговой конус имеют общее основание. Объем каждого из них равен 1. Найдите объем их общей части.

15. При каких a и b формула $\sqrt{x} \approx ax + b$ гарантирует наибольшую точность при $4 \leqslant x \leqslant 9$? Другими словами, при каких a и b наибольшее значение выражения $|\sqrt{x} - (ax + b)|$ при $4 \leqslant x \leqslant 9$ является наименьшим?

Публикацию подготовил Д. Б. Фукс

Задачи

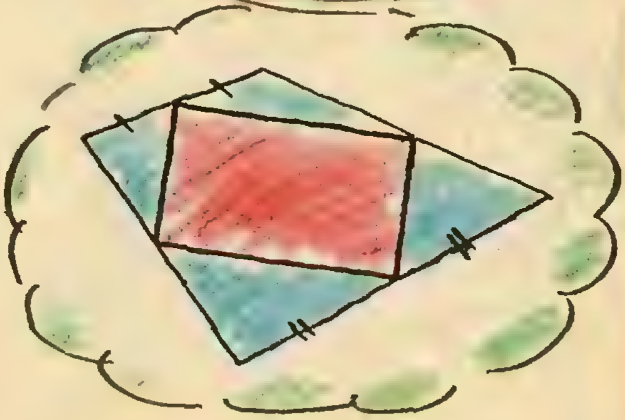
1. Мите подарили микрокалькулятор. Возводя числа 2 и 5 в одинаковые степени, он обнаружил, что числа $2^5=32$ и $5^5=3125$ начинаются с одной и той же цифры — 3. Могут ли одинаковые степени чисел 2 и 5 начинаться с другой (одной и той же для обоих чисел) цифры?



2. Решите ребус, изображенный на рисунке (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные).

3. Маугли попросил своих друзей-обезьян принести ему орехов. Обезьяны набрали поровну орехов и понесли Маугли. По дороге они поссорились, и каждая обезьяна бросила в каждую по ореху. В результате Маугли досталось лишь 33 ореха. По скольку орехов собрали обезьяны (известно, что каждая обезьяна принесла больше одного ореха)?

4. Город раскинулся на восточном склоне горы. Утром усталый путешественник, расположившийся у подножия горы, видит отражение солнца в оконных стеклах. Он замечает, что «светящиеся окна» со временем перемещаются: в одних домах — «гаснут», а в других — «зажигаются». Куда они перемещаются: вверх или вниз, налево или направо? Объясните это явление.

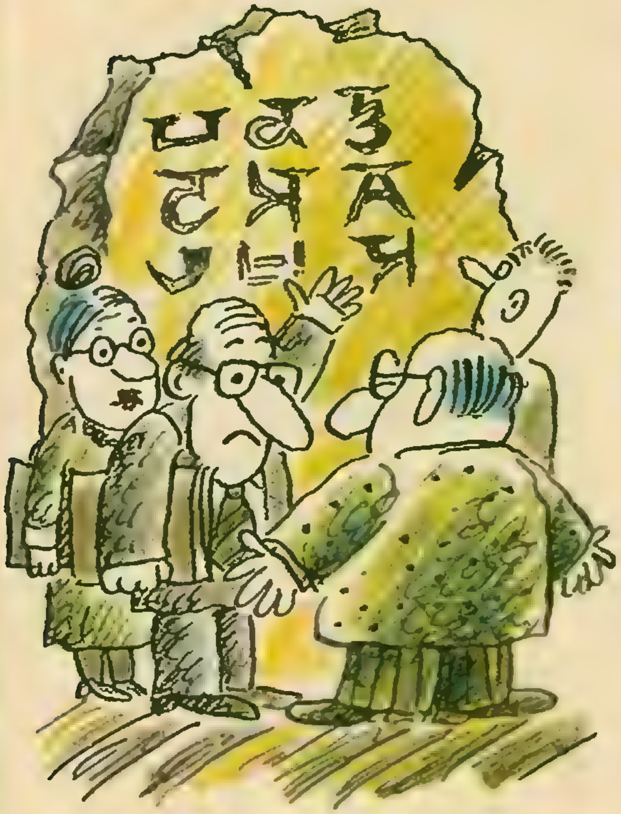


5. Вокруг прямоугольника описан четырехугольник так, что две противоположные вершины прямоугольника являются серединами двух противоположных сторон четырехугольника (см. рисунок). Докажите, что площадь прямоугольника равна половине площади четырехугольника.

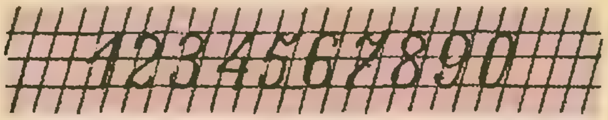
Эти задачи нам предложили: Г. А. Гальперин, Абрам Арба, ученик 9-го класса из Киева С. Ляшенко, А. И. Буздин, В. В. Произволов.

ДЕСЯТЬ ЦИФР

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

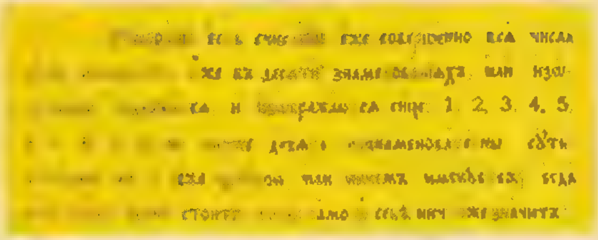


Грамотность начинается с умения писать и считать. Уже в 3-4 года, поднимаясь по лестнице, мы уверенно считаем ступеньки: «Раз, два, три, четыре, пять, ...». А в первом классе пишем в тетради цифры:



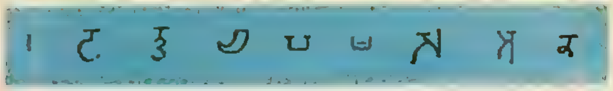
Эти цифры называются *арабскими*, хотя арабы лишь передали в Европу индийскую десятичную систему счисления с ее цифрами. Об этом мы читаем в «Книге абака» итальянского математика Леонардо Пизанского (Фибоначчи): «Девять индусских знаков следующие: 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. С помощью этих знаков и знака 0, который называется по-арабски «сифр», можно написать какое угодно число». Фибоначчи, издавший свою книгу в 1202 году, многое почерпнул из знакомства с математическими трудами арабов. Любопытно, что сам порядок цифр при их перечислении: 9, 8, 7, ... отражает их заимствование у арабов, поскольку арабы пишут справа налево, а не слева направо.

Наверное, вы уже поняли, что слово «цифра» произошло от названия нуля у арабов, а в России еще очень долго слово «цифра» означало значок нуля. Поглядите на кусочек текста из «Арифметики» Магницкого (1703).

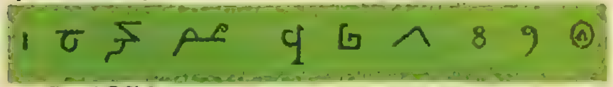


Переводится на современный русский язык этот текст так: «Нумерация есть счет или способ представлять совершенно все числа с помощью десяти знаков, которые изображаются так: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0. Из них девять — значащие, а последний же 0 (который цифрой нуль, или ничем, именуется) сам по себе ничего не значит, когда стоит отдельно.»

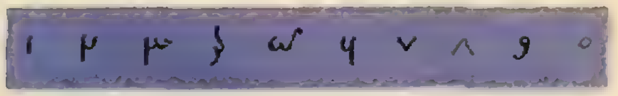
Обратите внимание, что буквы в старинном тексте еще сильно отличаются от современных, а цифры — те же, что и в ваших учебниках. Но, конечно же, они не сразу стали такими. В 200 году в Индии они имели вид:



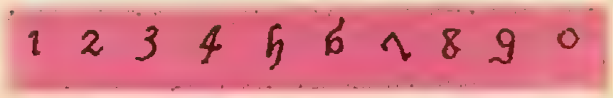
Со временем написание цифр совершенствовалось, причем по-разному в разных местностях Индии. Появился нуль и возникла позиционная система записи чисел. Арабы выбрали из этих различных видов цифр наиболее удачные. От них цифры продолжили свой путь по Земле. Вот как они выглядят у римского писателя Боэтия (600 год):



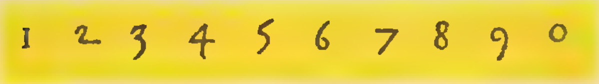
В 1350 году в сочинениях греческого монаха Максима Плануда мы видим их такими:



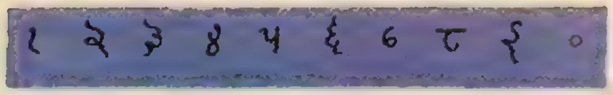
В 1480 году в книге «Зеркало Вселенной» англичанина Какстона они изображаются вот так:



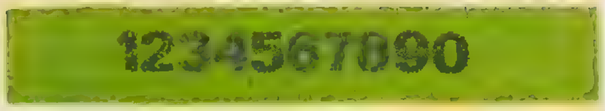
И лишь в 1522 году в книге итальянца Тонсталля они приобретают более-менее современный вид:



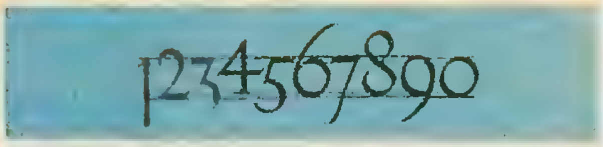
Любопытно, что в самой Индии цифры тоже видоизменялись и к началу XX века стали выглядеть так:



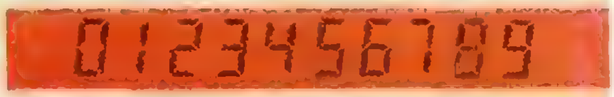
Хотя в XVI веке в Европе уже было сильно развито книгопечатание, цифры в книгах того времени, как мы видим, очень похожи на рукописные. Многие художники работали над созданием разнообразных типографских шрифтов — над формой букв и цифр,— стараясь придать им приятный для глаза вид (при этом каждый знак должен был достаточно сильно отличаться от другого). Вот один из цифровых шрифтов:



Но история цифр на этом не кончается. Совсем недавно в ряде стран стали использовать вот такую запись:

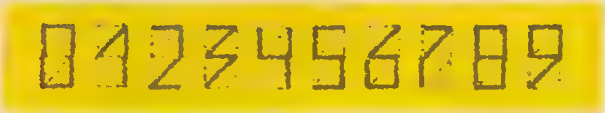


Чем эти цифры лучше обычных? А тем, что у четных цифр «хвостики» идут вверх, а у нечетных — вниз. Теперь трудиее спутать, скажем, цифры 2 и 5. Правда, это нововведение широко не привилось, но вот такое начертание цифр знакомо каждому из вас:

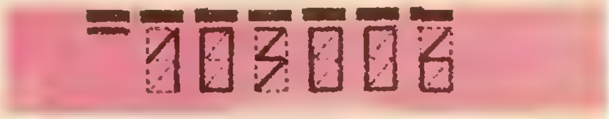


Такие цифры мы видим на микрокалькуляторах и ручных электронных часах. С помощью набора семи отрезков удается достаточно «узнаваемо» изобразить каждую из десяти цифр.

Еще одно изображение цифр, связанное с потребностями техники, мы видим на обороте каждого почтового конверта:



Здесь в написании цифр участвуют уже девять отрезков. Эти цифры предназначены для электронной машины, сортирующей корреспонденцию. Жирные черточки над индексом на конверте нужны для того, чтобы машина смогла точно настроиться на написанный нами индекс:



Коль мы уже заговорили об электронных машинах, то отметим, что хотя они воспринимают от нас числа в десятичной записи и в том же виде выдают нам результаты вычислений, но для «внутренних нужд» они поль-

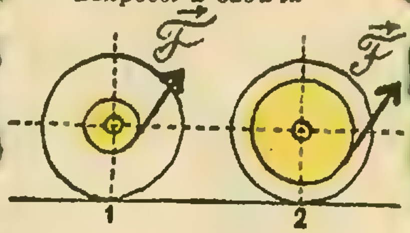
(Окончание см. на с. 42)

Архимед пустил в ход свои машины

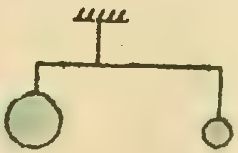
Плутарх

А так ли хорошо знакомы вам простые машины?

Вопросы и задачи

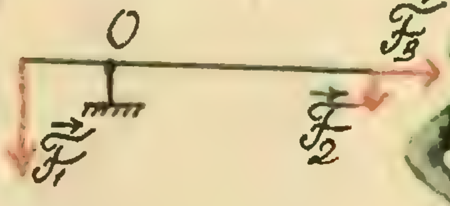


1. В какую сторону будут двигаться катушки, изображенные на рисунке, под действием небольшой силы F?

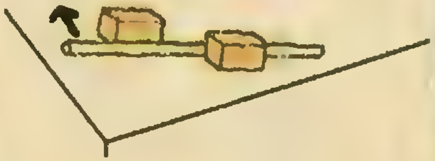


2. На невесомом рычаге уравновешены стальные шары. Нарушится ли равновесие, если шары погрузить в воду?

Вопросы и задачи

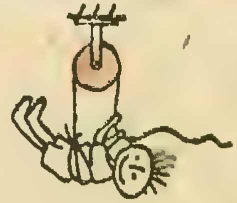


4. Рычаг уравновешен, как показано на рисунке, силами F_1 и F_2. Нарушит ли равновесие сила F_3?

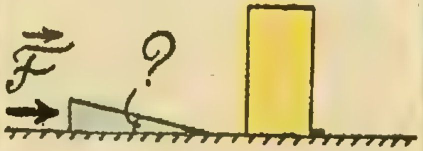


5. Бруски пытаются сдвинуть с места рычагом. Какой из брусков сдвинется, если их массы одинаковы?

Вопросы и задачи



7. Мальчик подтягивается вверх, используя неподвижный блок. Выигрывает ли он при этом в силе?

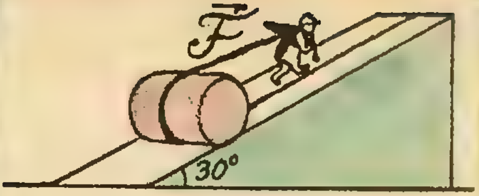


8. Каким должен быть угол в основании клина, чтобы с его помощью можно было опрокинуть груз?

3. Как надо соединить подвижные и неподвижные невесомые блоки, используя минимальное их число, чтобы получить выигрыш в силе в 3 раза?

Любопытно, что...

...способ крепления мускулов в теле человека и животных обеспечивает конечностям быстроту движений, более важную, чем сила. В этом проявляется «золотое правило механики»: что теряется в силе, выигрывается в расстоянии. Правило легко можно проследить, наблюдая за рычагом, образуемым согнутой в локте рукой при подъеме, например, гири.



6. По наклонной плоскости при помощи веревки поднимают бочку. Какой выигрыш в силе получают при таком подъеме?

Любопытно, что...

...погибший от руки римского солдата при взятии Сиракуз, Архимед вошел в историю как один из первых ученых, работавших на войну, и как первая жертва войны среди людей науки.

9. При выполнении какого условия винт может служить для крепления деталей?

10. Два мальчика стоят на противоположных сторонах канавы с водой. У каждого из них — доска, длина которой немного меньше ширины канавы. Как им с помощью досок перебраться через канаву?

Микроопыт

Полоску из жести уравновесьте на острие карандаша. Проверьте, нарушится ли равновесие, если согнуть один из концов полоски?

Что читать в «Кванте» о простых машинах

1. «Метод виртуальных перемещений» — 1980, № 9;
2. «О простых машинах» — 1985, № 4, с. 17.

Калейдоскоп „Кванта"

Достаточно присмотреться ко многим окружающим нас инструментам и приспособлениям — плоскогубцам и щипцам для орехов, тачке и вороту, кусачкам и обыкновенному винтику,— как обнаруживается, что в основе их устройства лежат всего два типа так называемых простых машин: рычаг и наклонная плоскость. Их разновидности и комбинации известны с древних времен — еще Архимед применял системы рычагов и блоков для подъема больших тяжестей и строил военные метательные машины. С тех пор, конечно, простые машины претерпели существенные изменения, но не потеряли своего значения и по сегодняшний день в технике, строительстве и военном деле. Мы надеемся, что на примерах предлагаемых задач вы сможете углубить свои знания в одном из важнейших разделов механики — статике, в частности вспомнить знаменитое «золотое правило механики».

зуются двоичной системой счисления. На перфоленте, используемой в ЭВМ для хранения и передачи информации, первые 9 цифр выглядят так:

Цифре 0 соответствует пробел. Маленькие пробитые точки посредине перфоленты служат для ее перемещения и фиксации.

Тем, кто не знаком с двоичной системой счисления, сообщим, что она, как и десятичная система, является позиционной системой: значение величины числа зависит от входящих в число цифр и от их мест в написании числа. И если в десятичной системе 10 единиц предыдущего разряда составляют единицу следующего разряда, то в двоичной системе единицу следующего разряда составляют две единицы предыдущего. Поэтому для записи чисел в двоичной системе достаточно всего двух цифр — 0 и 1:

$$1=1_2,\ 2=10_2,\ 3=11_2,\ 4=100_2,\ 5=101_2,\ 6=110_2,\ \ldots$$

(маленькая цифра 2 справа числа означает, что запись произведена в двоичной системе счисления).

Сравнив эти записи с перфолентой на рисунке, вы увидите, что пробой на перфоленте соответствует цифре 1 а его отсутствие — цифре 0.

Машина читает запись на перфоленте с помощью фотоэлементов: они отмечают пробитые отверстия с помощью света, проникающего через отверстия (в непробитых участках лента загораживает фотоэлемент от источника света).

Похожий принцип заложен и в основу так называемого *полóсного кода.*

Многие из вас, вероятно, обращали внимание на полосатый прямоугольник, встречающийся на ярлыках разнообразных импортных товаров (рис. 1):

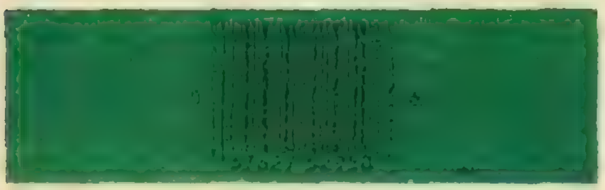


Рис. 1.

Что означают эти полоски? Оказывается, с их помощью записывают расположенное внизу число — *код товара.* Компьютер, находящийся в кассовом аппарате, с помощью фотоэлементов считывает код (для этого либо проводят табличку с кодом в специальном месте кассового аппарата, либо по коду проводят «считывающим карандашом», соединенным с кассовым аппаратом). Таким образом компьютер получает информацию о продаваемом товаре. В соответствии с ней он выдает из своей памяти цену товара, а сам запоминает, что экземпляр данного товара куплен. В результате в каждый момент известно, сколько экземпляров какого товара куплено и на какую сумму, какой товар нужно еще доставить в торговый зал.

Но как устроен полосный код?

С помощью полосок можно записывать число так, как на перфоленте: тонкая черная полоска — это 1, а тонкая белая полоска — это 0 (рис. 2). Но представлять число можно по-разному. Можно просто записать его в двоичной системе счисления (например, число 5 762 752 950 запишется в двоичной системе так: $101\,010\,111\,011\,111\,001\,010\,000\,110\,110\,110_2$). А можно каждую цифру числа записать в двоичной системе — тогда на одну цифру будет достаточно четырех полосок, а затем представить число набором получившихся полосок.

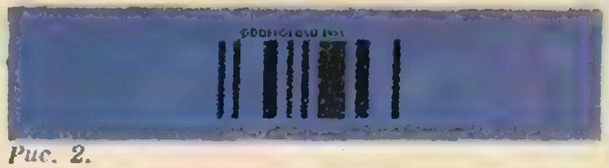


Рис. 2.

В примере, приведенном на рисунке 1, каждая цифра записана также отдельно, но не в двоичной системе, а по-другому. Каждой цифре соответствует семь значков 0 и 1. Код состоит из двух частей — левой и правой, цифры в левой и в правой частях записываются в соответствии с таблицей (см. с. 43).

Посмотрим сначала на левую часть таблицы. Видно, что запись каждого числа начинается с 0 и заканчивается 1; эти знаки не характеризуют числа, а служат для отделения

Левая часть кода		Правая часть кода	
0	0001101	0	1110010
1	0011001	1	1100110
2	0010011	2	1101100
3	0111101	3	1000010
4	0100011	4	1011100
5	0110001	5	1001110
6	0101111	6	1010000
7	0111011	7	1000100
8	0110111	8	1001000
9	0001011	9	1110100

одного числа от другого. На само число приходится 5 знаков, и они выбраны так, чтобы любые два числа различались не менее, чем в двух местах. Легко видеть, что запись чисел в правой части таблицы «симметрична» записи слева, а именно, вместо цифры 0 на соответствующем месте стоит цифра 1, а вместо 1 стоит 0.

На рисунке 1 каждой цифре соответствует описанная комбинация из семи полосок, расположенная над ней. Все, что мы говорили, относится к «коротким» полоскам. Первые три «длинные» полоски, средние и последние полоски (им соответствуют наборы 101) являются указателями *начала*, *середины* и *конца* шифра. Длинные полоски, следующие за тремя первыми, соответствуют цифре, расположенной сбоку слева (цифре 0 на рисунке 1). Аналогично, длинные полоски перед последними тремя полосками соответствуют цифре, расположенной сбоку справа (цифре 6 на рисунке 1).

Эти «боковые» числа служат для защиты считывания от ошибок. Их значения подобраны так, чтобы утроенная сумма чисел, стоящих на четных местах, сложенная вместе с суммой чисел, стоящих на нечетных местах, делилась на 10. Суммирование производится слева направо; считается, что цифра, стоящая сбоку слева, находится на нулевом (значит, четном) месте. В нашем случае (см. рис. 1)

$$3\cdot(0+7+2+5+9+0)+$$
$$+(5+6+7+2+5+6)=100.$$

Если компьютер неправильно прочтет одну из цифр, он сразу обнаружит ошибку. Компьютер не сможет обнаружить ошибку лишь в том случае, если он прочтет по крайней мере две цифры ошибочно, причем так, чтобы ошибки «скомпенсировались» и полученная сумма снова делилась на 10. Но вероятность этого чрезвычайно мала.

Такая защищенность от ошибок очень важна, иначе за батон хлеба компьютер мог бы потребовать от покупателя стоимость, скажем, коробки шоколадных конфет.

Защита от ошибок заложена и в стандартной форме написания почтового индекса. Об этом вы можете прочесть в статье десятиклассника Я. Карпова «Оптимальная кодировка почтового индекса» («Квант», № 11, 1987).

В заключение заметим, что в последнее время многие люди пишут ноль вот так: Ø. Это — профессионалы-программисты. Дело в том, что в программе для ЭВМ буквы и цифры могут довольно произвольно перемежаться. Чтобы отличить нуль от буквы О, и введена запись Ø. Этим сняты возможные ошибки при использовании латинского шрифта. А при использовании русского шрифта возникает возможность спутать букву З с цифрой 3, а букву Ч с цифрой 4. Может быть, и эти цифры «изменятся»?

Лаборатория „Кванта"

«Физика для дураков»

В. Ф. ЯКОВЛЕВ

Ученье в институте давалось мне тяжело. Может быть, именно поэтому меня особенно возмущали часто встречающиеся в курсах физики и математики ремарки типа «как известно...», «отсюда без труда получаем...», «легко видеть...» Откуда известно? Почему легко? Напротив, очень тяжело, а иногда и просто невозможно! Такие ремарки не только дезинформируют студентов и учащихся, но способствуют появлению у них комплекса неполноценности.

А может, они прикрывают некомпетентность авторов учебников? В самом деле,— способный студент разберется даже в изобилующем ошибками тексте. Уверен, что, если бы мне предложили написать, например, курс анализа бесконечно малых, отняв от меня лекционные конспекты и учебники, я бы сделал это так, что Евклид и Архимед отлично бы во всем разобрались. Отсюда следует, что учебники для умных людей писать просто, эта задача по плечу и дуракам. А написать учебник для людей с умеренными способностями — вот это непросто. Но зато — какая благородная задача!

Представьте себе: «Квантовая механика для умственно отсталых», «Высшая математика для круглых дураков» — да этим книгам цены бы не было! И надо обязательно разбросать по тексту этих книг такие ремарки: «отсюда с трудом получаем...», «нелегко видеть, что...» и т. д. У читателей, преодолевших соответствующие нехитрые премудрости, просто крылья бы вырастали.

После сказанного легко представить, какова была моя радость, когда, читая книгу известного физика Г. А. Гамова «Материя, земля, небо» (изданную в США в 1959 году), я обнаружил в ней ссылку на другую книгу, вышедшую в 1908 году в Петербурге и называвшуюся, судя по Гамову, «Physics for Fools». Это название по-русски звучит так: «Физика для дураков». Я чуть не закричал на весь читальный зал библиотеки: «Эврика!» Но радость моя была преждевременной, поскольку фамилии автора Гамов не указал.

После изнурительных поисков в различных каталогах и библиографических справочниках я обнаружил заветную книгу. На ее титульном листе значилось:

Издание Общества
для Поощрения Глупости

*

Новая физика без приборов

*

Полное описание
общедоступных опытов,
легко выполнимых домашними
и др. средствами

*

Лучший досуг для тоскующих
по физике и астрономии

*

По многочисленным
новейшим источникам
и открытиям составил

*

СЕРГЕЙ
ОЛИМПОВ

На хранящемся в Государственной публичной библиотеке им. М. Е. Салтыкова-Щедрина экземпляре имеется дарственная надпись: «Глубокоуважаемому Василию Евгеньевичу Мурашинскому на добрую память от автора. С.·М.»

Хотя книга Олимпова была не совсем такой, о какой я грезил в студенческие годы, знакомство с ней не вызвало разочарования. По стилю она близка к опубликованному у нас в свое время сборнику переводов «Физики шутят» (М., Мир, 1966). Во втором издании (1968 г.) этого сборника анекдотов и веселых историй в дополнение к шуткам физиков зарубежных прибавлены шутки наших земляков. Мне кажется, что выдержки из книги Сергея Олимпова могли бы украсить такого рода издание.

Несколько слов о личности автора книги. Мои попытки ее установить долгое время не приводили к успеху: такой фамилии я не находил ни в физических журналах тех лет, ни в адресных книгах «Весь Петербург» или «Вся Москва», ни в многотомном словаре псевдонимов.

Но однажды, когда я в очередной раз прочитал приведенную дарственную надпись, я посмотрел на подпись «С. М.» свежим взором. Почему «М»? И тут меня осенило. Как чаще всего выбирают себе псевдоним? Сохраняют свое имя, а отчество превращают в фамилию. Если это так, то автора звали Сергеем Олимпиевичем, а фамилия его, вероятно, начиналась на букву «М». Это была вполне хорошая зацепка, и теперь можно было попробовать начать розыск — например, в ежегодно публиковавшихся списках членов Русского физико-химического общества, протоколы заседаний которого помещал на своих страницах журнал этого общества.

Взяв несколько томов журнала, по времени недалеко отстоявших от известной мне «метки» — 1908 год, я быстро справился с задачей и нашел Сергея Олимпиевича Максимовича. После этого, вновь обратившись к упомянутым выше справочникам, ежегодникам «Весь Ленинград» и изданной в 1934 году Академией наук СССР книге «Научные работники Ленинграда», я без труда обнаружил, что родился Сергей Олимпиевич 5 августа 1876 года в Петербурге, в 30-х годах жил в Ленинграде (на проспекте Огородникова) и работал в Государственном институте геодезии и картографии, занимаясь прикладными вопросами аэрофотосъемки и физикой явлений фотографического изображения, а также измерением различных характеристик фотоматериалов (есть такая область физики: сенситометрия, или фотографическая метрология). С. О. Максимович преподавал в Фотокинотехникуме, сотрудничал в Государственном оптическом институте и в Ленинградском физико-техническом институте (в последнем в 20-х годах интенсивно исследовались явления рассеяния и диффракции рентгеновских лучей, и в одном из отчетов по этой работе указывалось, что ее исполнители «непрерывно пользовались советами и ценными указаниями С. О. Максимовича»).

Сергей Олимпиевич был, помимо этого, очень остроумным человеком и прекрасно рисовал. В этом можно убедиться, посмотрев на публикуемые здесь его рисунки и подписи к ним.

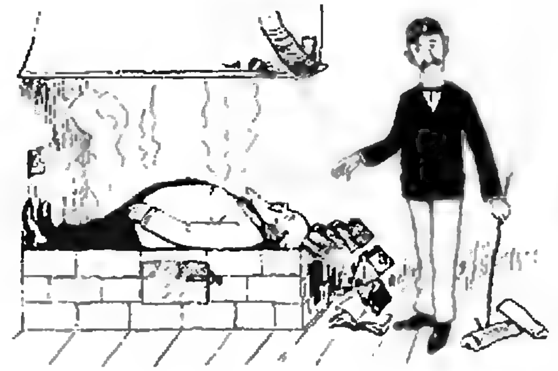


Рис. 1. Теплотное удлинение.

Все тела удлиняются от теплоты, поэтому, например, рельсы всегда делают короче, чем следует. Этот опыт может повторить каждый у себя дома.

Положите престарелого и незлобивого родственника на холодную плиту так, чтобы он упирался ногами в стену, и головой в стопку книг на краю плиты. Разведите огонь, и вы увидите, как по мере нагревания родственник будет удлиняться и передвигать книги, пока они не упадут. Несмотря на очевидность явления, станем его продолжать. С повышением температуры явление изменится: родственник станет деформироваться и наконец вскочит и убежит. Таким образом все будут наглядно убеждены в законе, который ученые называют превращением теплоты в движение.

Если положить родственника сразу на раскаленную плиту, он может перейти в сфероидальное состояние, и опыт не удастся.

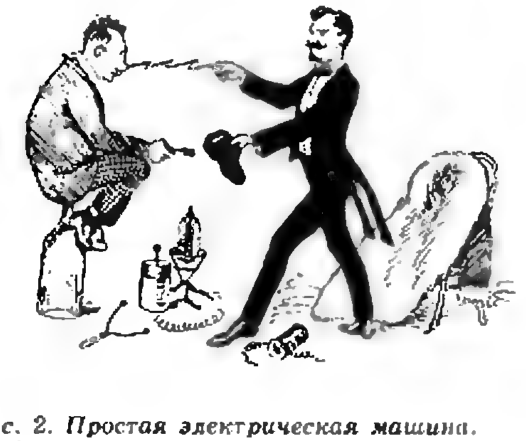


Рис. 2. Простая электрическая машина.

Опыты с большими электрическими машинами недешевы да и небезопасны. Между тем, каждый может построить себе такую машину при помощи простых домашних средств.

Посадите вашего знакомого на четвертную бутыль и дайте ему в руки вилку. Между тем, посильнее натрите резиновую галошу о лисью шубу и поднесите ее к вилке. В скором времени послышится характерное шипение, и из носа знакомого можно будет извлекать длинные яркие искры, особенно заметные в темноте. При помощи этого несложного прибора можно произвести все опыты, описанные в учебниках физики: зарядить лейденскую банку, зажечь маленькую лампочку накаливания и даже привести в движение швейную машину или велосипед.

От времени до времени полезно смазывать знакомого и бутыль, на которой он сидит, теплым вазелином.

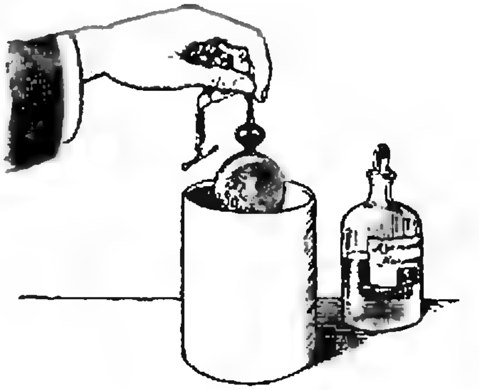


Рис. 3. Электролиз.

Кажется, что может быть прочнее золотых часов? Никогда не тускнеющий блеск металла, движение стрелок, как бы указывающих время,— все говорит нам о постоянстве, о вечности. На самом деле это не так. Возьмите массивные золотые часы с анкерным ходом и осторожно опустите их вечером в смесь азотной и соляной кислот, налитых в объемистую фарфоровую банку. На другой день часы как бы исчезнут: останутся только стеклышко и циферблат. Их надо вынуть и сполоснуть, высушить и хранить в гигроскопической вате. О часах не беспокойтесь: в природе ничего не теряется! Перелейте зеленоватую жидкость в бутылку с притертой пробкой и храните ее в темноте.

В следующем нашем издании — «Химия без приборов» (так и не осуществленном — В. Я.) — мы дадим точные наставления, как получить часы обратно. Читатель, конечно, догадался, что для этого мы воспользуемся услугами чародея XX столетия — электричеством. Машина, описанная в опыте 2, окажет нам при этом еще раз значительную, неоценимую услугу.

(Во время второй мировой войны лауреат Нобелевской премии Фредерик Жолио-Кюри, желая уберечь золотую Нобелевскую медаль, растворил ее примерно описанным способом и бутылку с раствором прятал в течение всех лет оккупации. После освобождения Франции Жолио-Кюри, не без помощи чародея XX века, выделил растворенное золото, переправил его в Швецию и получил новый экземпляр Нобелевской медали.— В. Я.)

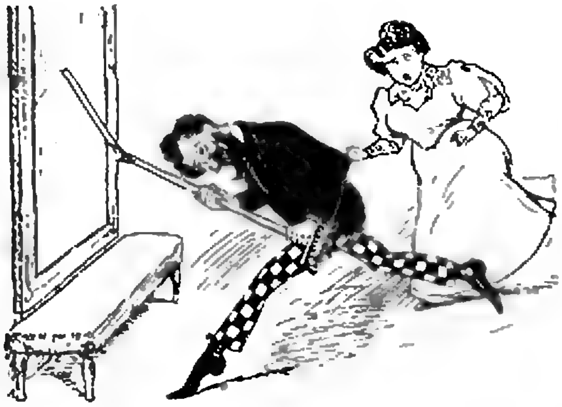


Рис. 4. Преломление света.

«Что Вы делаете! — вскрикивает в ужасе хозяйка дома, видя, как вы быстро направляетесь к зеркалу с поднятой палкой.— Вы разобьете зеркало!»

Ничуть не бывало. Из законов оптики вы знаете, что угол падения связан с углом преломления определенным условием, и потому достаточно сильно хватить по зеркалу концом палки так, чтобы соблюсти это условие, и палка переломится, но зеркало даже не затрещит — к немалому удивлению присутствующих.

Обыкновенное стекло, не зеркало, при таких условиях, конечно, разбилось бы вдребезги.

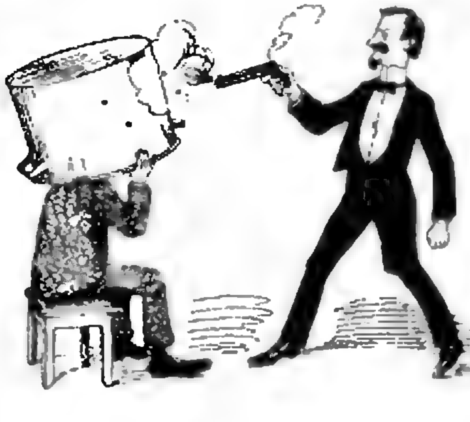


Рис. 5. Распространение звука.

Как известно, звук распространяется по поверхности металлических тел. На этом основан интересный опыт, изображенный здесь. На голову желающего надевают тонкостенный жестяной котел и стреляют в него в упор из пистолета, пулемета или мортиры. Лицу под котлом оглушительный выстрел покажется не громче щелчка.

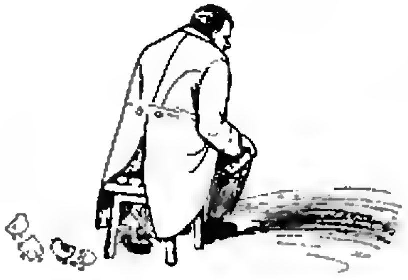


Рис. 6. Человек на яйцах. (К физиологии птиц)

Этот опыт производит большую сенсацию, особенно в кругу хозяек дома. «Кто из вас может вывести цыплят в течение четверти часа?»

Окинув торжествующим взором безмолвное собрание, вы удаляетесь и, отыскав на дворе наседку, отбираете из-под нее два десятка хорошо насиженных яиц. Вернувшись в залу, вы кладете их на табурет, но предварительно ставите под него, незаметно для публики, зажженную керосиновую лампу и скрываете ее под полами сюртука. Скрытая теплота керосина разовьет необыкновенно скоро цыплят, которые и огласят комнату веселым чириканием. Надо только стараться не раздавить яиц.

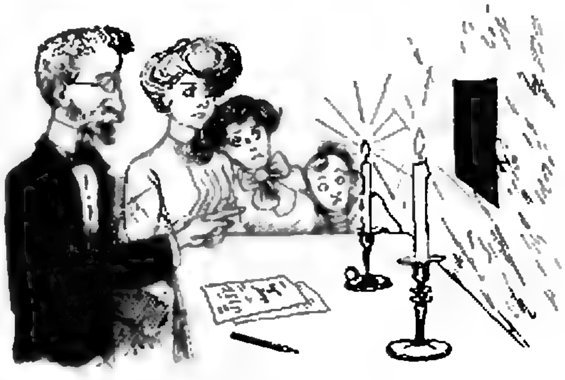
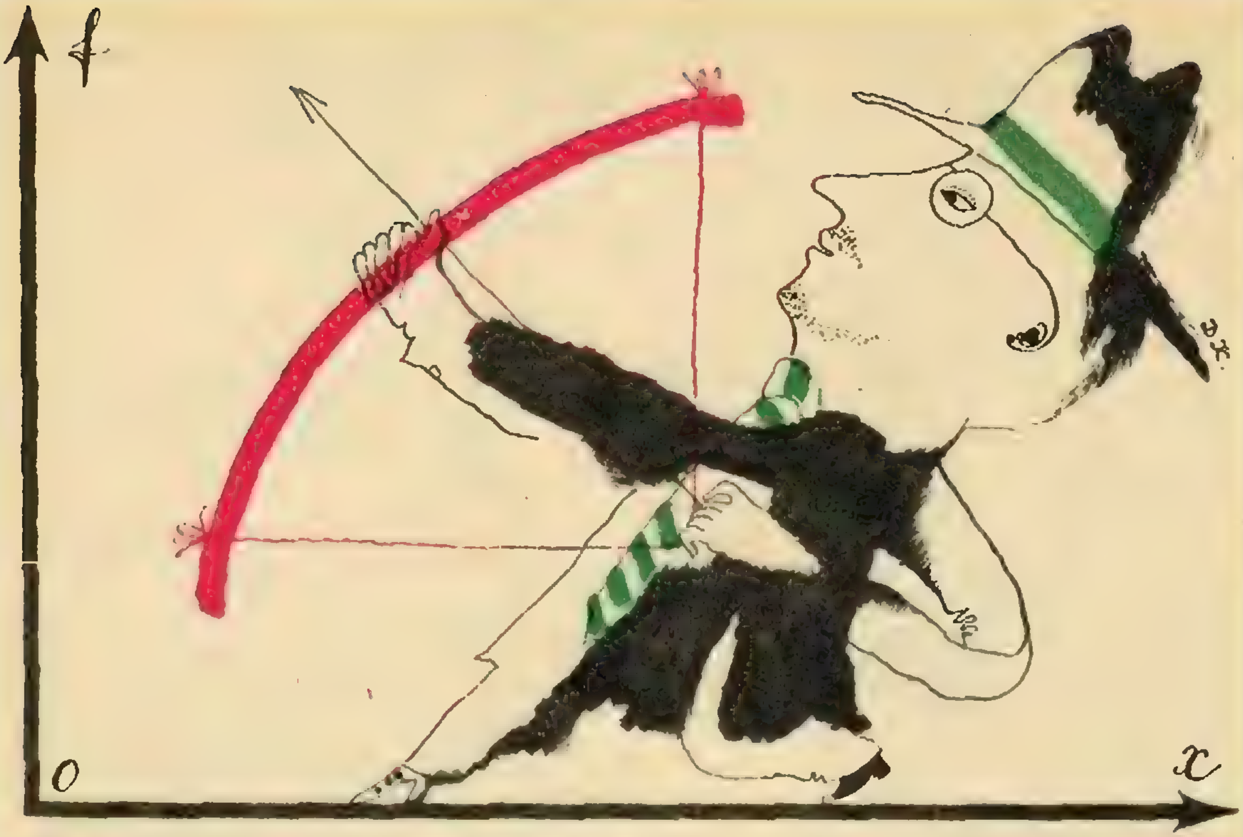


Рис. 7. Интерференция и диффракция.

Прикрепите к стене, по возможности мраморной, лист белой бумаги и осветите его свечкой. Теперь зажгите другую, разумеется, при строго определенной разности расстояний. Можно было бы ожидать, что свету прибавится, но окажется, что лист бумаги потемнеет. Это и есть интерференция, которую великий Ньютон назвал золотым ключом Провидения.



Математический кружок

Основной принцип дифференциального исчисления

Часть II: Свойства производной

Член корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ,
кандидат физико-математических наук
М. С. НИКУЛИН,
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

В нашей предыдущей статье (см. «Квант» № 3) мы рассказали об *основном принципе дифференциального исчисления*. (Коротко он состоит в том, что график хорошей функции на достаточно малом промежутке почти не отличается от графика линейной функции.) Затем мы подробно изучили свойства линейной функции. В частности, мы определили *мгновенную скорость* изменения линейной функции как $k = \Delta y/\Delta x$, т. е. приняли ее равной средней скорости на любом промежутке.

В общем же случае (т. е. для произвольной функции) такое определение непригодно: средняя скорость для разных промежутков может быть не одинаковой. В общей ситуации мы сталкиваемся с противоречием, суть которого в том, что мы пытаемся говорить о «мгновенном значении» величины, которая по своему физическому смыслу может рассматриваться только как функция от промежутка. Корректное определение понятий вроде мгновенной скорости изменения существенно использует формальный математический аппарат предельного перехода.

Заметим, однако, что обоснование элементов анализа на основе теории пределов было осуществлено О. Коши только в начале XIX столетия, т. е. спустя более двух тысяч лет после появления некоторых идей, лежащих в основе дифференциального исчисления, и через 200 лет после его создания Ньютоном и Лейбницем. Математический анализ, включающий в себя дифференциальное и интегральное исчисления, был ведущей и высоко развитой ветвью математики к тому моменту, когда было дано его обоснование.

Применение «основного принципа» и привлечение линейной функции поможет нам дать наглядное, интуитивно ясное определение понятия «мгновенной скорости» в общем случае, минуя теорию пределов.

Здесь мы и подошли к вопросу о том, почему *линейная функция занимает особое место в математике.*

Дело в том, во-первых, что все, что касается линейной функции, как в аспекте проблем исследования функций, так и в плане геометрического и физического истолкования результатов, очень просто и наглядно. Именно эти простота и наглядность отвели линейной функции особую роль в математике при изучении свойств тех функций, которые наиболее часто встречаются в приложениях.

Второе и самое существенное обстоятельство было отмечено в первой части статьи: ко всем элементарным функциям и к большинству функций, к которым мы приходим при изучении зависимостей между реальными величинами, применим *«основной принцип»* дифференциального исчисления.

Иначе говоря, при решении определенного круга задач каждую из этих функций вблизи фиксированной точки можно заменить линейной, график которой есть касательная к графику рассматриваемой функции в выбранной точке. Поскольку важнейшие свойства линейной функции определяются ее угловым коэффициентом, то по угловому коэффициенту касательной, т. е. по значению производной от функции в данной точке, можно судить о поведении самой функции вблизи выбранной точки.

Мы не будем здесь останавливаться на технике вычисления производной (считая, что читатель в какой-то мере ей владеет). Заметим лишь, *что (как* показано в статье «О касательной к графику функции», см. «Квант», 1986, № 3) для некоторых функций значение производной можно получить, исходя из по существу *элементарных соображений.*

Геометрическое и физическое истолкование производной $f'(x_0)$ от функции $f(x)$ в данной точке x_0

В соответствии с «основным принципом» считаем *функцию $f(x)$ вблизи* точки x_0 линейной, а малый кусочек ее графика совпадающим с отрезком касательной в точке x_0. Тогда $f'(x_0)$ показывает, насколько круто наклонен (и в какую сторону) маленький кусочек графика функции $f(x)$, содержащий точку $f(x_0)$. В этом состоит *геометрический смысл производной.*

Например, по таблице

x	1	2	3	4
$f(x)$	0,5	2	3	1,5
$f'(x)$	1	2	0	−2

мы можем построить не только сами точки графика, но и маленькие кусочки графика, содержащие табличные точки (рис. 1).

Мы знаем, что в тех случаях, когда прямая есть график зависимости между двумя физическими величинами, угловой коэффициент прямой имеет ясный физический смысл. Этот же физический смысл имеет и производная от функции (не линейной), *если эта* функция описывает зависимость между теми же величинами. Но только численное значение $f'(x_0)$ производной от функции $f(x)$ в точке x_0 уже нельзя отнести ко всей функции в целом, а *лишь к малой окрестности* точки x_0. Например, если функция $T=f(t)$ описывает зависимость между температурой тела и временем его нагрева (рис. 2), то $f'(t_0)$ есть скорость изменения температуры (скорость нагрева) на малом интервале времени, содержащем точку t_0. Последнее утвержде-

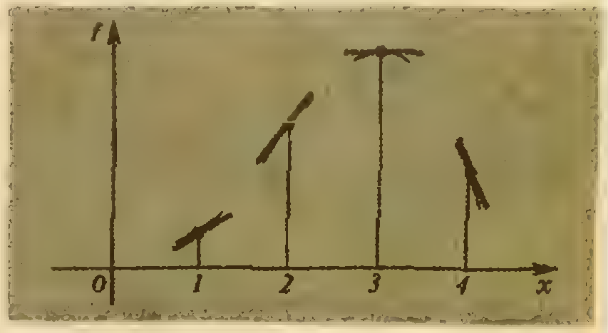


Рис. 1.

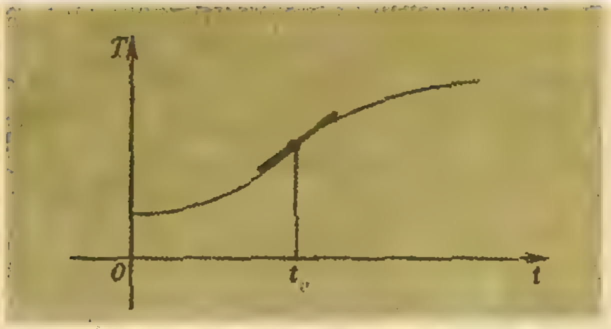


Рис. 2.

ние тем более точное, чем меньше интервал, содержащий точку t_0. Поэтому $f'(t_0)$ называют скоростью нагрева в момент времени t_0. Отвлекаясь от конкретного физического содержания, мы говорим, что $f'(x_0)$ есть *скорость изменения функции* $f(x)$ в точке x_0.

Приближенные вычисления

Теорема. *Абсолютная погрешность в вычислении значения функции примерно равна абсолютной погрешности измерения аргумента, умноженной на модуль значения производной в соответствующей точке.*

Доказательство. Действительно, пусть x_0 — приближенное значение аргумента и x — неизвестное точное значение аргумента, заведомо близкое к x_0. Величину $\Delta x=x-x_0$ абсолютной погрешности примем за малое приращение аргумента. Считая (в соответствии с «основным принципом») функцию $y(x)$ вблизи точки x_0 линейной с угловым коэффициентом $y'(x_0)$, получим в силу характеристического свойства линейной функции (доказанного в первой части статьи) $\Delta y=y'(x_0)\cdot\Delta x$, что и требовалось доказать.

Следует понимать, что высказанное утверждение справедливо в предположении, что абсолютная погрешность аргумента действительно достаточно мала для данной функции.

Если известно значение функции $f(x)$ в точке x_0 и требуется вычислить значение $f(x)$ вблизи точки x_0, то, исходя из «основного принципа», можно заменить трудоемкие вычисления функции приближенными вычислениями по уравнению касательной в точке x_0. Именно,

$$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).}$$

Приближенное приращение функции, вычисленное «по касательной», т. е.

$$f'(x_0)(x-x_0),$$

называется *дифференциалом функции* и обозначается символом df. Приращение аргумента $x-x_0$ называют *дифференциалом независимой переменной* и обозначают dx. Таким образом,

$$\boxed{df=f'(x_0)\,dx.}$$

В терминах дифференциалов «основной принцип» следует понимать так, что истинное приращение «хорошей» функции на малом интервале отличается от приращения, вычисленного «по касательной», на величину, пренебрежимо малую по сравнению с df. Здесь необходимо отметить одно важное свойство дифференциала: *разность $\Delta f-df$ между истинным приращением функции и ее дифференциалом не просто намного меньше, чем df, — при уменьшении dx эта разность убывает существенно быстрее, чем dx.* Точный смысл термина «существенно быстрее» и соответствующее доказательство возможны только после надлежащего более строгого описания исходных понятий анализа.

Мы ограничимся разъяснением смысла терминов «одинаково быстро» и «существенно быстрее» на конкретных примерах. Величины, связанные прямой пропорциональной зависимостью, изменяются одинаково быстро, именно, изменение одной в n раз приводит к изменению другой тоже в n раз. Величины, связанные, например, квадратичной зависимостью, изменяются с разными скоростями. Действительно, если $y=x^2$, то при уменьшении $|x|$ в 10 раз y уменьшается в 100 раз, при уменьшении $|x|$ в 100 раз y уменьшается в 10000 раз и т. д. Вообще, если $y=x^a$, где $a>1$, то при стремлении $|x|$ к нулю y убывает существенно быстрее, чем $|x|$. Это подтверждается тем, что отношение $y/x=x^{a-1}$ приближается к нулю при стремлении x к нулю. То же можно сказать о разности $\Delta f-df$ — отношение $(\Delta f-df)/dx$ стремится к нулю при стремлении dx к нулю.

Два свойства дифференциала — 1) дифференциал функции пропорцио-

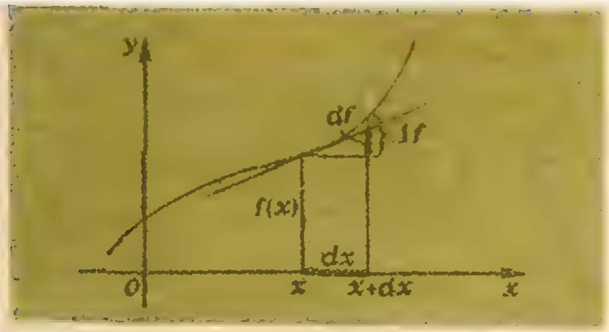


Рис. 3.

нален дифференциалу аргумента и 2) разность между истинным приращением функции и ее дифференциалом убывает существенно быстрее, чем дифференциал аргумента,— вполне характеризуют дифференциал функции и определяют его наиболее элементарные, но важнейшие приложения в физике, технике и т. д. Дело в том, что дифференциал (в отличие от производной) часто бывает виден «на глаз» и может быть найден проще, *чем производная. После* этого производная может быть вычислена как отношение дифференциалов: $df=f'(x_0)dx$,

$$f'(x_0)=\frac{df}{dx}.$$

Пример 1. *Вычислить* $f'(0)=f'(x)|_{x=0}$, *если* $f(x)=x^3-3x^2+4x$.

Решение. Вблизи $x=0$ дифференциал аргумента равен самому аргументу ($dx=x$), а приращение функции — значению функции. Часть приращения функции, пропорциональная dx, есть слагаемое $4x$, а остальные слагаемые, содержащие x, убывают вблизи нуля существенно быстрее, чем x. Так что в точке $x=0$ имеем $df=4dx$, а значит, $f'(x)=4$.

Оба свойства дифференциала хорошо иллюстрируются графически (рис. 3). На этом рисунке значение dx выбрано довольно большим, однако «на глаз» видно, что при уменьшении dx разность $\Delta f-df$ убывает существенно быстрее, чем Δx.

Дифференцирование сложной функции

Исходя из «основного принципа» легко получить выражение для производной и дифференциала сложной функции.

Пусть $F(x)=f(g(x))$. Считаем функцию $g(x)$ линейной «в малом» вблизи *точки* x, *а функцию* $f(t)$ — линейной вблизи точки $t=g(x)$. Тогда в силу теоремы о композиции линейных функций, доказанной в первой части нашей статьи, $F(x)$ — линейная вблизи x и ее угловой коэффициент равен произведению угловых коэффициентов функций g и f, т. е.

$$F'(x)=k_1\cdot k_2,\text{ где } k_1=f'(t)\big|_{t=g(x)}$$
$$\text{и } k_2=g'(x).$$

Для дифференциала сложной функции получаем выражение

$$dF(x)=k_1\cdot k_2\cdot dx=$$
$$=f'(t)\big|_{t=g(x)}\cdot g'(x)dx.$$

Поскольку $g'(x)dx=dg(x)$, получаем

$$\boxed{dF(x)=f'(t)\big|_{t=g(x)}\cdot\ dg(x).}$$

Это важное равенство говорит, что *форма записи дифференциала не зависит* от того, что находится под знаком функции — независимая переменная или функция от другой переменной. Это свойство дифференциала называют *инвариантностью.* Свойство инвариантности дифференциала помогает легче освоить технику дифференцирования сложных функций.

Пример 2. *Найти производную от* $F(x)=\sqrt{\sin(3x-1)}$, *зная, что* $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(\sin x)'=\cos x$ и $(3x-1)'=3$.

Решение:

$$dF(x)=(\sqrt{t})'\big|_{t=\sin(3x-1)}\cdot\ d\sin(3x-1)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin(3x-1)}}(\sin t)'\big|_{t=3x-1}d(3x-1)=$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{\sin(3x-1)}}\cos(3x-1)3dx=$$
$$=\frac{3\cos(3x-1)}{2\sqrt{\sin(3x-1)}}dx.$$

Раскрытие неопределенности типа 0/0

Часто приходится изучать поведение дроби вблизи точки, в которой числитель и знаменатель обращаются в нуль. Непосредственные вычисления с помощью даже высокоточных ЭВМ могут дать в этих случаях грубую ошибку из-за уничтожения значащих

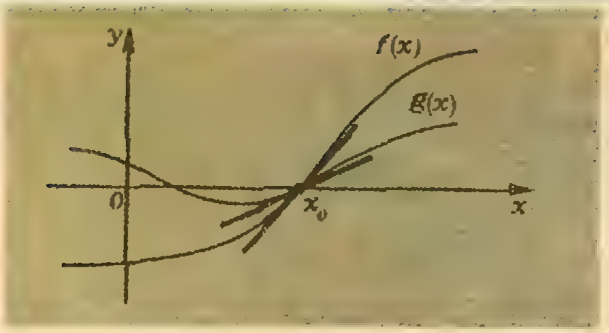


Рис. 4.

$f(x)/g(x)$ при значениях x, приближающихся к x_0, если в этой точке числитель и знаменатель обращаются в нуль. Считаем $f(x)$ и $g(x)$ линейными вблизи точки x_0, малые кусочки их графиков заменяем касательными к графикам этих функций в точке x_0. Таким образом, считаем, что

$f(x)=f'(x_0)(x-x_0)$, $g(x)=g'(x_0)(x-x_0)$.

Тогда, если $g'(x_0)\neq 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)(x-x_0)}{g'(x_0)(x-x_0)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Надо помнить, что фактически это равенство приближенное, но тем более точное, чем ближе x к x_0. Мы получили правило, известное в математике как *правило Лопиталя для раскрытия неопределенности типа* 0/0.

На языке пределов это правило читается так: предел отношения $\frac{f(x)}{g(x)}$ при $x\to x_0$, если $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$, равен отношению производных $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \qquad (g'(x_0)\neq 0).$$

Пример 3. *Составить таблицу значений функции*

$$f(x)=\frac{2x^2-x-\sin\pi x/2}{\sqrt{x}-\cos(1-x)}$$

вблизи точки $x=1$.

Решение. Результаты вычислений на МК В3-34 показаны в таблице 1. Применим правило Лопиталя

$$\left(2x^2-x-\sin\frac{\pi}{2}x\right)'\Big|_{x=1}=$$

$$=\left(4x-1-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x\right)\Big|_{x=1}=4-1=3,$$

$$(\sqrt{x}-\cos(1-x))'\big|_{x=1}=$$

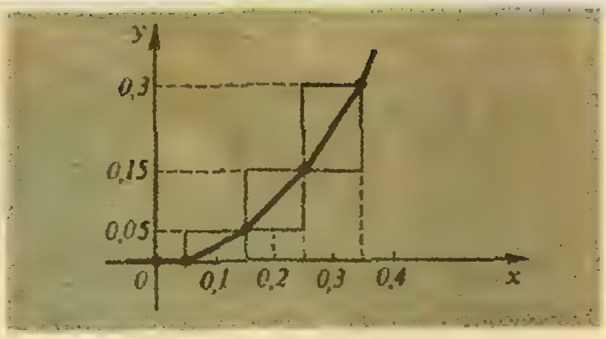


Рис. 5

$$=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin(1-x)\right)\Big|_{x=1}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при стремлении x к 1 значения $f(x)$ приближаются к числу $3:(1/2)=6$. Из таблицы видно, что ошибки в вычислениях начинаются довольно далеко от предела точности МК — уже при $x=1{,}0001$.

Признак возрастания (убывания) функции на интервале

Теорема. *Если в каждой точке интервала угловой коэффициент (производная) к графику функции в этой точке больше нуля, то функция возрастает на этом интервале, а если меньше нуля — то убывает.*

Действительно, пусть угловой коэффициент касательной к графику функции больше нуля. Тогда касательная в любой точке графика является поднимающейся прямой и, следовательно, любой достаточно малый участок графика есть поднимающаяся линия. Интуитивно ясно, что график в целом есть поднимающаяся линия и, следовательно, функция возрастает. Аналогично, отрицательность производной во всех точках интервала влечет убывание функции на этом интервале.

Численное решение дифференциальных уравнений

Во многих случаях удается получить зависимость между величинами, содержащую их производные, т. е. в виде *дифференциального уравнения*. Далеко не всегда уравнение удается разрешить, т. е. найти функции, являющиеся решением данного дифферен-

Таблица 1

0 x	1,1	1,01	1,001	1,0001	1,00001	1,000001
$f(x)$	6,1762693	6,0196529	6,0039984	6,012024	6,1224489	7,5

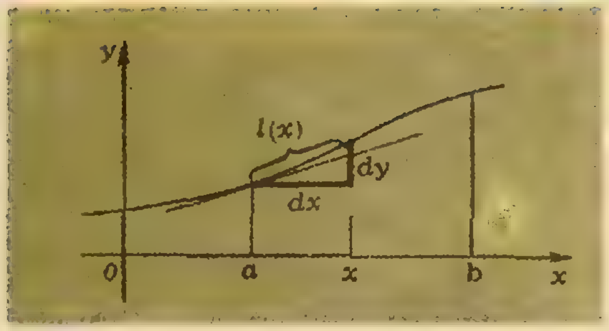


Рис. 6.

циального уравнения. Однако исходя из «основного принципа», можно получить приближенное (численное) решение дифференциального уравнения.

Пример 4. *Восстановить на интервале* [0; 1] *функцию по дифференциальному уравнению:* $y'(t)=5t$ *и начальному условию* $y(0)=0$.

Решение. Составим таблицу значений производной:

Таблица 2

t	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$y'(t)$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5

Будем считать, что вблизи табличных точек (согласно «основному принципу») график функции тесно прилегает к отрезкам касательных. Разобьем интервал [0; 1] на части [0; 0,05]; [0,05; 0,15]; [0,15; 0,25], и т. д. до [0,95; 1]. Вершины ломаной, заменяющей функцию, расположим в точках деления: 0; 0,05; 0,15; 0,25;... ; 0,95; 1. Взяв угловые коэффициенты звеньев ломаной из таблицы, получим график (рис. 5). На этом рисунке построена только часть графика. Постройте самостоятельно весь график и убедитесь, что он хорошо совпадает с точным решением $y=2{,}5t^2$.

Определение длины участка кривой, являющейся графиком функции $y=f(x)$, на интервале $[a; b]$

На рисунке 6 показан график функции $y=f(x)$. Надо найти длину части графика на интервале $[a; b]$. Рассмотрим функцию $l(x)$, значения которой равны длине участка графика от точки $x=a$ до некоторого x, $x\in[a; b]$. Найдем дифференциал функции $l(x)$ в точке x. Считая функцию $f(x)$ *«в малом» линейной*, получим

$$dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx=$$

$$=\sqrt{1+(f'(x))^2}dx,$$

откуда

$$l'(x)=\frac{dl}{dx}=\sqrt{1+(f'(x))^2}.$$

Очевидно, что $l(a)=0$. Мы пришли к известной задаче о восстановлении функции по ее производной (дифференциалу) и начальному условию. В *терминах интегрального исчисления* нам необходимо вычислить

$$\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}dx.$$

Заметим, что именно *при решении* задачи на вычисление длины кривой, даже в простых с виду случаях, мы приходим к *неберущимся интегралам*, т. е. к интегралам, не выражающимся через элементарные функции. Например, при вычислении длины части синусоиды, получаем уравнение $l'(x)=\sqrt{1+\cos^2 x}$ или интеграл

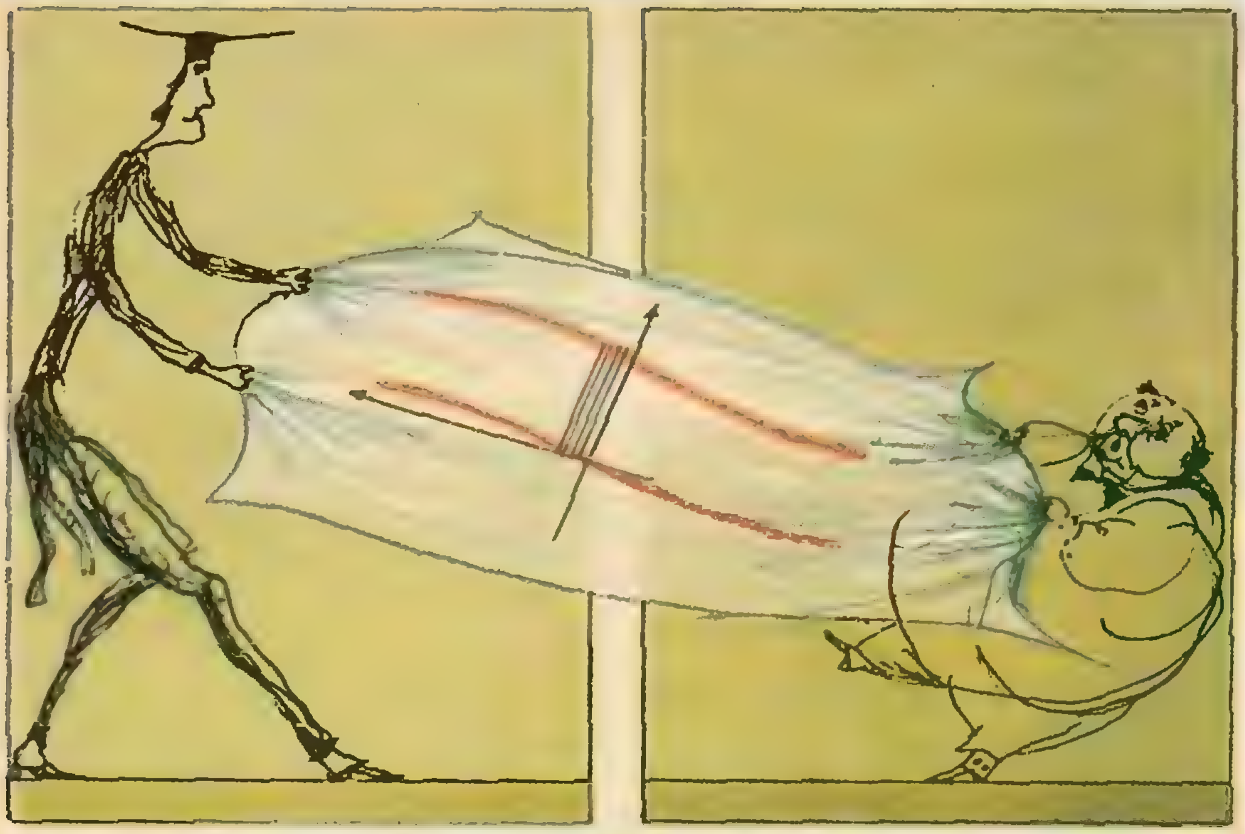
$$\int_a^b\sqrt{1+\cos^2 x}\,dx.$$

Аналогично при вычислении длины участка гиперболы $y=1/x$ получим уравнение $l'(x)=\sqrt{1+1/x^4}$ и интеграл

$$\int_a^b\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx.$$

Упражнение. Постройте численное решение двух последних дифференциальных уравнений методом, описанным в статье. Найдите длину участка синусоиды на интервале $[0; \pi/2]$ и длину участка гиперболы на интервале [1; 2].

В заключение заметим, что описанные идеи более *подробно развиты* в книге «Элементы высшей математики для школьников» авторов настоящей статьи (М.: «Наука», 1987). В этой же книге дано достаточно строгое обоснование *«основного принципа»* и более строгие доказательства теорем на основе понятия бесконечно малой величины.



Практикум абитуриента

Неравенства и графики

Кандидат физико-математических наук
В. А. ПЕТРОВ

Практически в каждом вузе на письменном экзамене по математике требуется решить неравенство. Это задание нередко лидирует по количеству неправильных ответов. Ошибки возникают из-за неточного или неполного использования свойств соответствующих функций.

Универсальной «шпаргалкой», по которой можно прочитать все свойства функции, является ее график. Поэтому при решении более или менее сложных неравенств полезно прибегать к последовательному использованию графиков элементарных функций. Такой прием позволяет автоматически, без напряжения памяти, переходить к равносильным неравенствам; при этом сама собой учитывается (ее учесть чаще всего забывают) область допустимых значений. Кроме того, геометрическая иллюстрация, как всегда, способствует более сознательному пониманию существа применяемых преобразований. Рассмотрим конкретные примеры.

Пример 1. *Решить неравенство*

$$2^{\sqrt{\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{tg}x}-1}<1. \qquad (1)$$

Решение. Обозначим показатель степени через t. Тогда неравенство (1) принимает вид

$$2^t<1. \qquad (1')$$

Изобразим график функции $y=2^t$ (рис. 1). Отметим на оси Oy интересующие нас значения. Они заполняют луч $(-\infty; 1)$. Спроектируем этот луч на график, а выделившуюся после этого часть графика спроектируем на ось Ot. Тем самым мы нашли решения вспомогательного неравенства (1′): $t>0$. Поэтому неравенство (1) равносильно неравенству

$$\sqrt{\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}}\operatorname{tg}x}<1. \qquad (2)$$

Обозначив теперь через t подкоренное выражение, получим неравенство

$$\sqrt{t}<1, \qquad (2')$$

решения которого находим с помощью графика функции $y=\sqrt{t}$ (рис. 2). Это полуинтервал $0\leqslant t<1$. Поэтому неравенство (2) равносильно двойному неравенству

$$0\leqslant \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} \operatorname{tg} x<1. \qquad (3)$$

Из графиков функций $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} t$ (рис. 3) и $y=\operatorname{tg} x$ (рис. 4) получаем

$$\frac{\sqrt{3}}{3}<\operatorname{tg} x\leqslant 1 \Leftrightarrow k\pi+\frac{\pi}{6}<x\leqslant\frac{\pi}{4}+k\pi$$

$$(k=0, \pm 1, \ldots).$$

Пример 2. *Решить неравенство*

$$3x+2+\sqrt{5x+4}<0.$$

Решение. Пусть $5x+4=t$. Тогда

$3x+2=\frac{3t-2}{5}$, т. е. $\sqrt{t}<\frac{2-3t}{5}$.

Изобразим на одном чертеже графики функций $y=\sqrt{t}$ и $y=\frac{2-3t}{5}$ (рис. 5). Чтобы найти абсциссу точки пересечения графиков, решим уравнение

$$5\sqrt{t}=2-3t \Rightarrow 9t^2-37t+4=0.$$

Из рисунка видно, что подходит лишь один корень уравнения: $t=1/9$. Выбрав те значения t, для которых парабола расположена ниже прямой, получаем:

$$0\leqslant t<1/9, \text{ или } -4/5\leqslant x<-7/9.$$

Решите самостоятельно следующие неравенства, предлагавшиеся на вступительных экзаменах:

1. $\log_6((x-1)(x-5))\leqslant 1.$
2. $\log_{0,3}(x^2-x-20)-\log_{0,3}(x+4)>0.$
3. $\sqrt{\log_3\frac{2x-3}{1-x}}<1.$
4. $|x^2-4x|<5.$
5. $\log_{\frac{1}{4}}\frac{x-3}{x+3}\geqslant-\frac{1}{2}.$
6. $0{,}5^x\leqslant 0{,}25^{x^2-0{,}5}.$
7. $|x|>2\sqrt{x^2-2x+1}.$
8. $3x+\sqrt{5x+9}<-5.$
9. $\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{x+1}-x)<2.$
10. Найдите область определения функции $y=\sqrt{\log_2(5-x)-1}$.

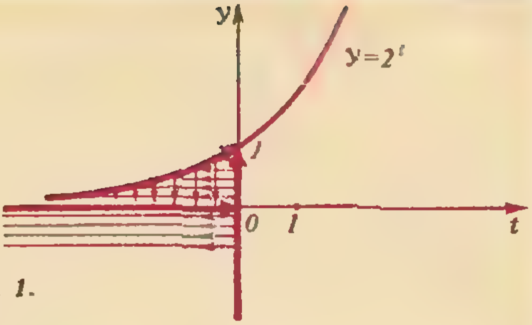


Рис. 1.

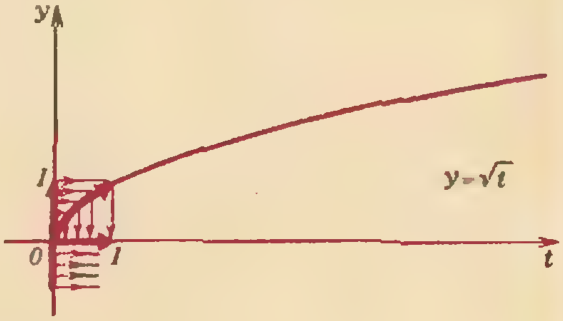


Рис. 2.

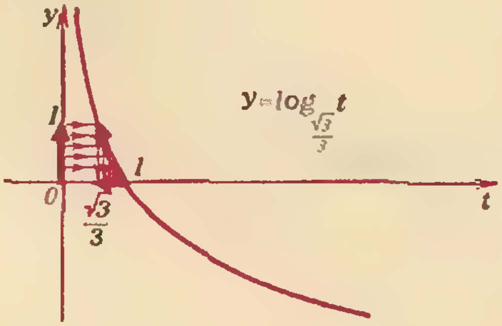


Рис. 3.

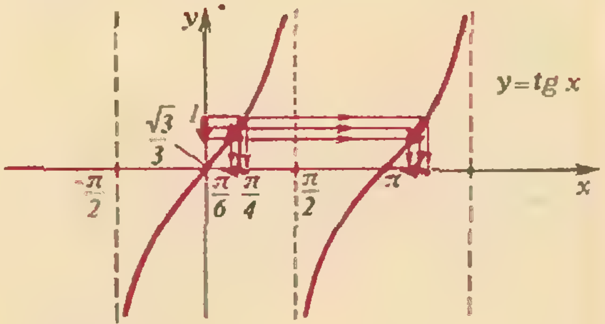


Рис. 4.

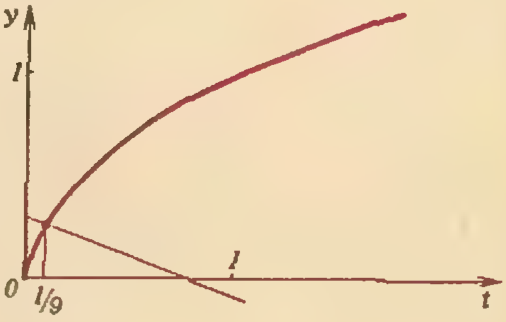
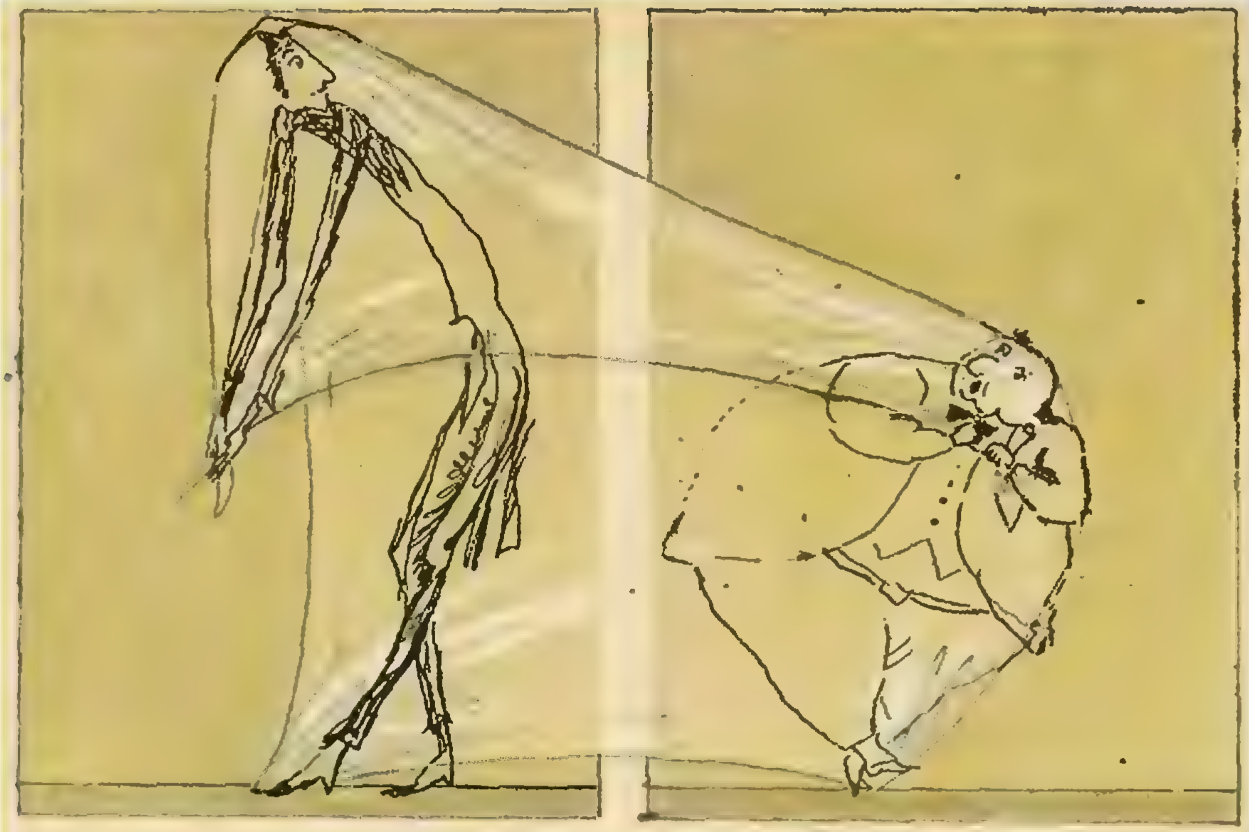


Рис. 5.



Практикум абитуриента

Поверхностное натяжение и капиллярные явления

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Вступительные экзамены в вузы по физике в прошлом году проводились по новой программе, в которую включен ряд вопросов, отсутствующих раньше. Так, появилась новая тема «Свойства поверхности жидкости. Поверхностное натяжение. Смачивание. Капиллярные явления» (мы привели дословную формулировку), которая дает возможность экзаменационным комиссиям предложить задачи и по этому кругу вопросов.

Поскольку задачи такого типа в пособиях для подготовки в вузы последних лет практически отсутствуют, а тема содержит большое число тонкостей, при написании этой статьи мы стремились упредить возможные неожиданные экзаменационные ситуации. Отчасти поэтому мы уделяем больше внимания обсуждению отдельных теоретических вопросов, а не занимаемся только решением стандартных задач.

Поверхностное натяжение

Для начала стоит сказать несколько слов о специфике сил поверхностного натяжения, действующих на границе жидкости и ее пара.

Как известно, молекулы жидкости находятся так близко друг к другу, что взаимодействие между ними не учитывать нельзя. Поэтому при оценке внутренней энергии системы жидкость — пар существенную роль играет не только кинетическая энергия движения молекул, но и потенциальная энергия их взаимодействия.

Характерный радиус взаимодействия молекул жидкости приблизительно равен среднему расстоянию между ними, так что каждая молекула фактически взаимодействует лишь с ближайшими соседями. Молекулы вблизи свободной поверхности жидкости находятся в особом положении по сравнению с объемными молекулами, поскольку они взаимодействуют с молекулами как жидкости, так и ее пара (а это взаимодействие существенно слабее). Можно сказать, что на молекулы приповерхностного слоя приходится иная доля потенциальной энергии системы, чем на объемные молекулы.

Понятно, что при возможных изменениях формы жидкости при заданном объеме и фиксированной температуре внутренняя энергия, отвечающая объемным молекулам, не меняется, а вклад поверхностной энергии будет тем больше, чем больше будет площадь свободной поверхности жидкости.

Коэффициентом поверхностного натяжения жидкости σ называют отношение работы ΔA, которую необходимо совершить, чтобы увеличить площадь поверхности жидкости на величину ΔS, к величине ΔS, т. е.

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S},$$

или можно сказать, что коэффициент поверхностного натяжения равен поверхностной энергии, приходящейся на единицу площади поверхности.

Объектами, в поведении которых наиболее ярко проявляется роль поверхностной энергии, являются мыльные пленки.

Рассмотрим следующую ситуацию. На мыльной пленке плавает петля из нити длиной l (рис. 1, *а*). Часть пленки, находящуюся внутри нити, осторожно прокалывают. Какую фигуру образует при этом нить? Каково натяжение нити в положении равновесия, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ?

Очевидно, что после прокалывания оставшаяся пленка будет вести себя так, чтобы максимально уменьшить величину своей поверхности. Это приведет к тому, что при заданной длине нити (l) дырка образует фигуру максимальной площади. Как известно, такой фигурой будет круг (рис. 1, *б*). Радиус круга найдем из соотношения

$$2\pi r = l, \text{ т. е. } r = \frac{l}{2\pi}.$$

Для определения натяжения нити рассмотрим малый элемент ее длины $\Delta l = r\Delta\varphi$ (рис. 2). Он находится под действием двух сил натяжения $\vec{T}_1$ и $\vec{T}_2$ ($T_1 = T_2 = T$), действующих со стороны соседних к элементу участков нити и направленных по касательным, и силы $2\vec{F}_н$ поверхностного натяжения мыльной пленки ($\vec{F}_н$ — сила со стороны одной поверхности пленки). Из условия равновесия элемента нити получим (проектируя силы на направление к центру круга):

$$2T\frac{\Delta\varphi}{2} - 2F_н = 0$$

(мы учли малость элемента и положили $\sin\varphi = \varphi$). Чтобы найти силу $F_н$, дадим пленке (мысленно) возможность еще сократиться, так что элемент Δl переместится на величину Δs. Энергия пленки при этом уменьшится на $\Delta E = 2\sigma\Delta l \cdot \Delta s$ за счет работы сил

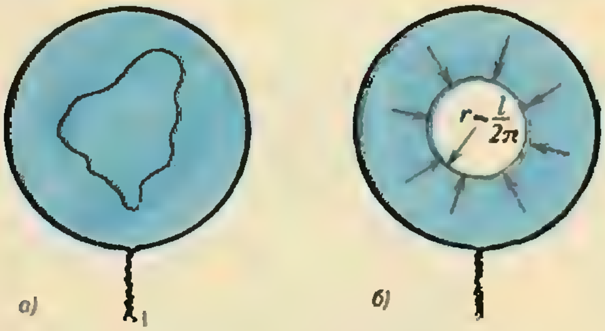


Рис. 1.

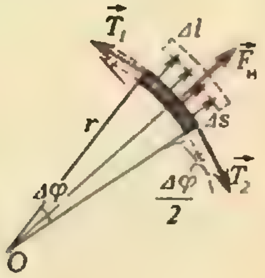


Рис. 2.

натяжения пленки $\Delta A = 2F_н \Delta s$. Откуда

$$\Delta E = \Delta A, \text{ и } F_н = \sigma \Delta l.$$

Таким образом, коэффициент поверхностного натяжения (характеризующий в данном случае одну из поверхностей мыльной пленки) получает еще одну интерпретацию — это сила, действующая на единичный линейный элемент границы поверхности и перпендикулярная этому элементу:

$$\sigma = \frac{F_н}{\Delta l}.$$

Поскольку $T\Delta\varphi = 2F_н$, натяжение веревки будет равно

$$T = 2\frac{F_н}{\Delta\varphi} = \sigma\frac{l}{\pi}.$$

Мы подробно остановились на этой задаче потому, что она показывает, откуда берут свое происхождение силы поверхностного натяжения. Оказывается, для проведения количественных расчетов удобно представление о том, что наличие поверхностной энергии эквивалентно тому, как если бы поверхность жидкости находилась в растянутом состоянии. При этом считают, что силы, растягивающие пленку, приложены к ее линейной границе. Если границу эту мысленно провести, деля пленку на две части, то части будут взаимодействовать между собой с силами, перпендикулярными границе. Казалось бы, все это очень похоже на растяжение резиновой пленки. И тем не менее, имеется принципиальное отличие. Состоит оно в том, что по мере увеличения поверхности пленки жидкости силы поверхностного натяжения остаются постоянными, тогда как при увеличении растяжения резиновой пленки натяжение в ней увеличивается. Итак, аналогия действительно есть, но пользоваться ею нужно осторожно. Тем не менее, при решении задач «силовой язык» часто оказывается более привычным, и им тоже стоит овладеть. Рассмотрим в связи с этим такие задачи.

Задача 1. *Пленки двух жидкостей разделены подвижной планкой длиной l (рис. 3). Коэффициент поверхностного натяжения одной жидкости σ_1, другой σ_2. С какой силой нужно действовать на планку, чтобы она находилась в покое?*

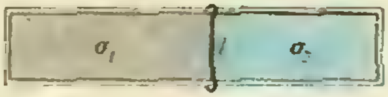


Рис. 3.

Пусть, для определенности, $\sigma_2 > \sigma_1$. Предоставленная самой себе, система стремится к состоянию с минимальной поверхностной энергией, при этом пленка с бóльшим коэффициентом поверхностного натяжения будет стремиться сократиться, растягивая при этом другую пленку и перемещая планку. Сила, действующая со стороны правой жидкости, будет равна $F_2 = 2\sigma_2 l$, а со стороны левой — $F_1 = 2\sigma_1 l$ (мы учли, что пленки имеют две поверхности). Чтобы планка находилась в равновесии, к ней, очевидно, необходимо приложить силу

$$F = F_2 - F_1 = 2(\sigma_2 - \sigma_1)l.$$

Задача 2. *Внешний радиус мыльного пузыря R, толщина его стенки h. Чему равно давление воздуха внутри пузыря? Чему равно давление в толще мыльной пленки? Считать, что пленка тонкая ($h \ll R$). Давление воздуха вне пузыря p_0. Коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.*

Хорошо знакомая всем сферическая форма мыльных пузырей обусловлена действием сил поверхностного натяжения. Действительно, если потенциальной энергией мыльной пленки в поле тяжести можно пренебречь по сравнению с ее поверхностной энергией (для тонких пленок это как раз имеет место), то последняя и будет ответственна за наблюдаемую геометрию. Но при неизменном объеме воздуха, содержащегося внутри пузыря, фигурой с наименьшей площадью поверхности будет шар. Следовательно, в равновесном состоянии пленка будет иметь форму сферической оболочки.

Разобьем (мысленно) сферическую оболочку на две равные половины и рассмотрим одну из них (рис. 4). Запишем условие равновесия внешней и внутренней полусферических поверхностей. На внешнюю (радиусом R) действуют сила внешнего давления $F_1 = p_0\pi R^2$ (покажите это самостоятельно), направленная вниз, сила по-

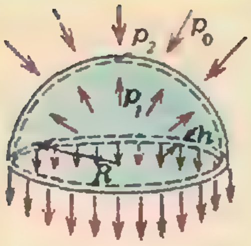


Рис. 4.

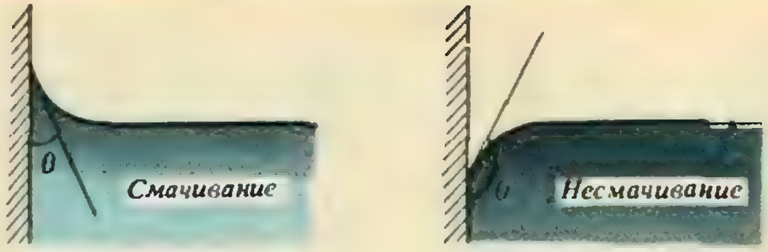


Рис. 5.

верхностного натяжения $F_2=\sigma\cdot 2\pi R$, направленная вниз, и противодействующая им направленная вверх сила давления сжатой жидкости (изогнутой жидкой пленки) $F_3=p_2\pi R^2$. Равновесие пленки означает, что

$$F_1+F_2-F_3=0,$$

т. е.

$$p_0\pi R^2+2\pi R\sigma=p_2\pi R^2,$$

откуда получаем искомое давление в толще пленки:

$$p_2=p_0+\frac{2\sigma}{R}.$$

На внутреннюю поверхность действуют сила давления жидкой пленки, направленная вниз и равная $F_4=p_2\pi(R-h)^2$, сила поверхностного натяжения $F_5=\sigma\cdot 2\pi(R-h)$, направленная вниз, и направленная вверх сила давления воздуха внутри пузыря $F_6=p_1\pi(R-h)^2$. Условие равновесия внутренней поверхности дает, что

$$F_4+F_5-F_6=0,$$

откуда находим давление воздуха внутри пузыря:

$$p_1=p_2+\frac{2\sigma}{R-h},$$

или

$$p_1=p_0+2\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R-h}\right).$$

Капиллярные явления

Рассмотрим теперь, как будет себя *вести поверхность жидкости* вблизи стенок сосуда, в который она налита.

Очевидно, что с учетом стенок сосуда в общее выражение для энергии системы жидкость — пар — стенки сосуда добавятся еще два слагаемых. *Это энергия взаимодействия молекул* жидкости с молекулами стенок (при данной температуре она тем больше, чем больше поверхность соприкосновения жидкости и сосуда) и энергия взаимодействия молекул пара и стенок. Равновесное положение поверхности жидкости и ее пара вблизи стенок сосуда установится таким, чтобы общая потенциальная энергия системы приняла минимальное значение. В большинстве случаев это приводит к тому, что поверхность жидкости вблизи стенок искривляется.

Так, если взаимодействие молекул жидкости и стенок сосуда оказывается наибольшим по сравнению с другими молекулярными взаимодействиями — жидкость смачивает сосуд,— граница раздела жидкости с паром вблизи стенок «ползет» вверх, образуя некоторый угол θ с вертикалью (рис. 5). Угол θ называется краевым углом. При фиксированной температуре он будет всегда одним и тем же для заданной жидкости и материала стенок. Чем сильнее взаимодействие молекул жидкости с молекулами стенок сосуда, по сравнению с взаимодействием молекул самой жидкости, тем меньше угол θ. В пределе, когда θ→0, говорят, что жидкость полностью смачивает материал стенок сосуда. Наоборот, когда притяжение молекул жидкости друг к другу превалирует над притяжением молекул жидкости и стенок сосуда, имеем случай несмачивающей жидкости. При этом угол θ — тупой. В пределе, когда θ→π, говорят о полном несмачивании, и граница жидкости вблизи стенок сосуда ведет себя так, как будто жидкость отталкивается от сосуда.

Проиллюстрируем сказанное следующей задачей.

Задача 3. *В тонкой горизонтально расположенной цилиндрической трубке находится капля: а) смачивающей; б) несмачивающей жидкости. Что произойдет с каплей, если* *трубку (с одного конца) нагреть?*

Поскольку коэффициент поверхностного натяжения зависит от температуры (уменьшается с ее ростом), при нагревании одного конца трубки, например левого, силы поверхностного натяжения справа начнут доминировать, и капля поползет — направо, если жидкость смачивает, и влево, если не смачивает материал трубки.

Кстати, ответьте самостоятельно на такой вопрос. Для того чтобы водоотталкивающая мазь лучше впитывалась в лыжные ботинки, как их нужно нагревать: снаружи или изнутри?

Рассмотрим теперь стандартную экзаменационную задачу прошлых лет.

Задача 4. *Чему равна высота поднятия жидкости между двумя вертикальными параллельными стеклянными пластинами, расстояние между которыми d (рис. 6)? Коэффициент поверхностного натяжения σ, плотность жидкости ρ, смачивание полное.*

Пусть ширина пластины L, тогда по периметру верхней границы жидкости вдоль стеклянных пластин действует сила поверхностного натяжения $F_н=2\sigma L$ (коэффициент «2» появляется из-за того, что пластин две), направленная вертикально вверх, поскольку смачивание полное. Эта сила удерживает жидкость между пластинами, а значит, она равна силе тяжести этой жидкости:

$$F_н=\rho gLdh$$

(Ldh — объем жидкости, поднявшейся между пластинами). Используя полученное ранее выражение для $F_н$, окончательно находим высоту поднятия жидкости:

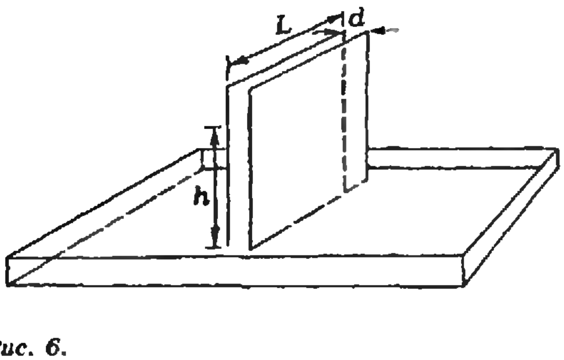


Рис. 6.

$$h=\frac{2\sigma}{\rho gd}.$$

Как видно из решения этой задачи, высота поднятия жидкости тем больше, чем меньше зазор между пластинами. Наиболее ярко этот эффект проявляется в тонких трубках — капиллярах (капиллярные явления, капиллярность). Для высоты поднятия жидкости в капилляре справедлива формула

$$h=\frac{4\sigma}{\rho d},$$

где d — диаметр капилляра (постарайтесь самостоятельно вывести эту формулу).

Капиллярные явления встречаются очень часто: благодаря капиллярности фитиль обеспечивает горение керосиновой лампы, перьевые ручки, которые теперь почти полностью вытеснены шариковыми, позволяют писать на листе бумаги, приложенном даже к вертикальной стене, и т. п. Кстати, подумайте над таким вопросом. В невесомости обычная шариковая ручка отказывает, а перьевая — ?

Посмотрим теперь на предыдущую задачу с другой стороны. Поднятие жидкости между пластинами означает, что давление непосредственно под вогнутой поверхностью жидкости меньше, чем давление под ее горизонтальной поверхностью (где оно равно атмосферному). Эта разность давлений Δp и уравновешивает давление столба жидкости, заключенного между стеклянными пластинками:

$$\Delta p=\rho gh,$$

или, подставляя найденное выражение для h,

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{d}.$$

Теперь нетрудно решить последнюю задачу.

Задача 5. *Между двумя горизонтальными квадратными стеклянными пластинками находится прослойка воды толщиной $d=0{,}3$ мм. Какую силу необходимо приложить к пластинкам перпендикулярно поверхности, чтобы их разорвать? Сторона пластинки $a=10$ см, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=7{,}3\cdot 10^{-2}$ Н/м, смачивание полное.*

Давление в жидкости между пластинами на величину $\Delta p = 2\sigma/d$ меньше атмосферного. Это означает, что пластинки прижаты друг к другу силой $F = \Delta p S$, где $S = a^2$ — площадь пластинки. Чтобы оторвать одну пластинку от другой, именно эту силу и необходимо скомпенсировать. В результате, подставляя численные данные, находим силу отрыва:

$$F = \frac{2\sigma}{d}a^2 = 4{,}8\ \text{Н}.$$

Однако, как оказывается, ничего не стоит разъединить пластинки, опустив их в воду. Можно также облегчить задачу, сдвигая их друг относительно друга.

Для самоконтроля предлагаем вам решить следующие задачи.

Упражнения

1. Какую относительную ошибку допускают при измерении атмосферного давления по высоте ртутного столбика, если внутренний диаметр барометрической трубки $d = 5$ мм, а коэффициент поверхностного натяжения ртути $\sigma = 0{,}48$ Н/м? Занижает или завышает показания такой барометр?

2. Капиллярная трубка погружена в воду таким образом, что длина непогруженной части составляет $l = 0{,}2$ м. Вода поднялась в трубке на высоту $l/2 = 0{,}1$ м. В этом положении верхний конец трубки зажимают пальцем и трубка погружается в воду до тех пор, пока уровень воды в трубке не сравняется с уровнем воды в сосуде. Найдите длину выступающей из воды части трубки в этом положении. Внешнее атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па.

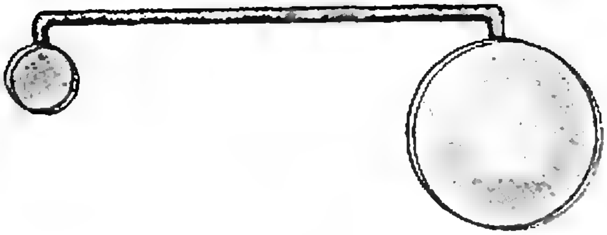


Рис. 7.

3. Два мыльных пузыря разных размеров соединены трубкой (рис. 7). Какой из них будет сдуваться?

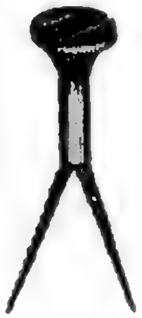
4. Брезентовая палатка хорошо защищает от дождя, но если во время дождя к потолку палатки прикоснуться рукой, потолок начинает «протекать»? Почему?

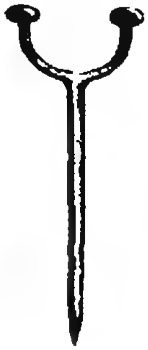
5. Куда будет двигаться капля смачивающей жидкости в горизонтально расположенном коническом капилляре?

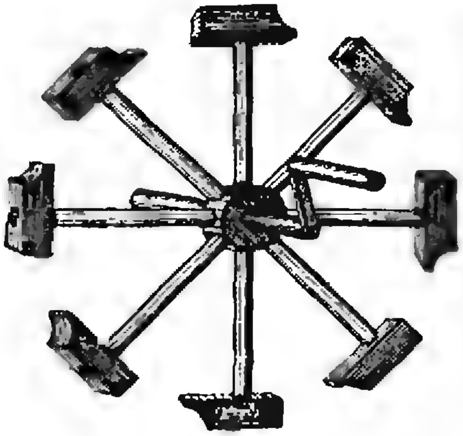
6. На мыльном пузыре радиусом R «сидит» пузырь радиусом r. Какой радиус кривизны имеет пленка, их разделяющая?

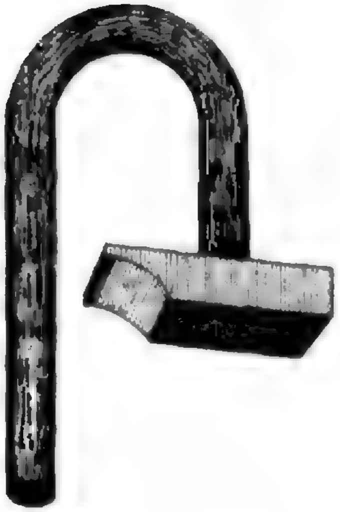
„Квант" улыбается

Технические новинки









Шуруп с двумя концами. Чтобы скрепить две доски, достаточно одного такого шурупа. Прочность соединения гарантируется.

Двухголовый гвоздь. Весьма полезен любителям поделок, страдающим косоглазием.

Полимолоток. Быстровращающийся восьмиглавый молоток обеспечивает значительную экономию времени.

Изогнутый молоток. Его специальная форма позволяет легко добираться до самых труднодоступных гвоздей.

Из «Каталога несуществующих объектов»

Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(факультеты математико-механический, физический, прикладной математики — процессов управления)

1. Сумма цифр некоторого трехзначного числа равна 11. Если из числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, вычесть 594, то получится искомое число. Найдите это трехзначное число, если известно, что сумма трех попарных произведений цифр этого числа равна 31.

2. Решите неравенство $x-\sqrt{1-x}\leqslant 0$.

3.1. *(математико-механический факультет)* Числа x, y, a таковы, что

$$\begin{cases} x+y=a-1, \\ x^2+y^2=5a^2-3a+0{,}5. \end{cases}$$

При каком a произведение xy принимает наибольшее значение?

3.2 *(физический факультет)* Решите уравнение

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\\+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=4.$$

3.3. *(факультет прикладной математики — процессов управления)* Решите уравнение

$$8\cos x=\frac{1}{\cos x}+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}.$$

4. Найдите площадь квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами a и b (сторона квадрата лежит на гипотенузе, а две вершины — на катетах треугольника).

5. Все четыре грани треугольной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, длина боковых сторон которых равна $\sqrt{3}$. Найдите длину оснований этих треугольников, если известно, что объем пирамиды равен $\frac{2}{3}$.

Вариант 2
(биолого-почвенный факультет)

1. Два лыжника стартовали один за другим с интервалом в 2 мин. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 1 км от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретился с первым лыжником. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого лыжника. Найдите скорость первого лыжника.

2. Решите уравнение

$$\log_3(3^x-8)=2-x.$$

3.1. *(отделение почвоведения)* Решите уравнение

$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2.$$

3.2 При каких a уравнение $\cos\left(\sqrt{a-x^2}\right)=1$ имеет ровно 8 решений?

4. В окружность радиуса r вписана равнобедренная трапеция с острым углом α при основании и высотой h. Найдите площадь трапеции.

5. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух граней, проведенными из одной и той же вершины, равен α. Найдите сторону основания призмы.

Вариант 3
(географический и геологический факультеты)

1. Два мотоциклиста, выехав одновременно из пункта A, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый мотоциклист, обогнав второго, встречает его на обратном пути на расстоянии 13 км от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второго мотоциклиста, проехав $\frac{1}{7}$ расстояния от A до B. Найдите расстояние от A до B.

2.1. *(географический факультет).* Решите уравнение

$$\frac{\log_3\left(\frac{3}{x}\right)}{\log_x 2}-\log_3\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}.$$

2.2. *(геологический факультет)* Решите уравнение

$$\sqrt{1+4x-x^2}=x-1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 7x-\sin x+2\cos^2 2x=1.$$

4. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что радиус вписанной окружности равен 2, а гипотенуза — 13.

5.1. *(географический факультет)* Угол между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен 60°, боковое ребро равно a. Через середину одного из боковых ребер перпендикулярно к нему проведена плоскость. Найдите площадь сечения.

5.2. *(геологический факультет)* Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+1}{5}}(x^2-6x+9)\geqslant 0.$$

Вариант 4
(химический факультет)

1. Из колбы, в которой имеется 80 г 10-процентного раствора поваренной соли, отливают некоторую часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится втрое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на 2 %. Какое количество раствора отлили из колбы в пробирку?

2. Решите уравнение $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

3. Решите уравнение

$$\sin x=\sqrt{\sin^2 3x-\sin^2 2x}.$$

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CD и AE. Найдите длину высоты AE, если известно, что $AD=BC=4$, $AB=6$.

5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды, зная, что плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен r.

Вариант 5

(факультеты психологии и экономический)

1. Из пункта A в пункт B выехал грузовой автомобиль. Через 1 ч из пункта A в пункт B выехал легковой автомобиль, который прибыл в пункт B одновременно с грузовым автомобилем. Если бы грузовой и легковой автомобили одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени провел в пути от A до B грузовой автомобиль?

2.1. *(отделение политэкономии)*
Решите уравнение $x=1+\sqrt{7-x}$.

2.2. Решите уравнение

$$\sqrt{7x+1}-\sqrt{3x-18}=\sqrt{2x+7}.$$

3.1. *(экономический факультет)*
Решите неравенство

$$x^{2\lg x}\geqslant 10x.$$

3.2. *(факультет психологии)*
Решите уравнение

$$2\sin x+2\cos x+1=\sin 2x+4(\sin^3 x+\cos^3 x).$$

4. Около прямоугольного треугольника описана окружность. Найдите катеты этого треугольника, если известно, что расстояния от концов гипотенузы до прямой, касающейся окружности в вершине прямоугольного треугольника, равны a и b.

5.1. *(факультет психологии и отделение экономической кибернетики)*
Центр сферы совпадает с центром основания кругового конуса, а ее радиус равен радиусу основания конуса. Найдите радиус окружности, по которой сфера пересекает поверхность конуса, если известны высота конуса H и угол его осевого сечения α.

5.2. *(отделение политэкономии)*
Изобразите на плоскости множество точек $M(x, y)$, для которых $2|x-y-2|\leqslant 3-x^2-y^2$.

Вариант 6

(отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 час. Найдите скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от A.

2. Решите уравнение

$$\log_{1+x}(2x^3+2x^2-3x+1)=3.$$

3. Найдите все решения неравенства $\sqrt{\frac{1}{2}-\cos 2x}>\sin x-\cos x$, удовлетворяющие условию $0\leqslant x\leqslant\pi$.

4. Вне квадрата $ABCD$ дана точка O. Найдите площадь квадрата, если известно, что $OA=OB=5$, $DO=\sqrt{13}$.

5. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Найдите двугранный угол при боковом ребре.

Публикацию подготовил *А. С. Меркурьев*

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Вычислите без таблиц

$$\sin 6^\circ-\sin 42^\circ-\sin 66^\circ+\sin 78^\circ.$$

2. Решите уравнение

а) $(x^2+x+1)(2x^2+2x-3)=-3(1-x-x^2)$;

б) $(\sin x-\cos x)(1+\operatorname{tg}^2 x)=4\sin x(1-\operatorname{tg}^2 x)$.

3. Решите неравенство:

$$4^{\log_4(4x-5)-\log_4(x+1)}\geqslant 0{,}25^{\log_4 27-2}.$$

4. Найдите экстремумы функции

$$f(x)=x-\cos 2x.$$

5. Докажите, что если медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол треугольника на три равные части, то треугольник — прямоугольный.

6. Докажите, что квадрат биссектрисы угла треугольника равен разности между произведением боковых сторон и произведением отрезков основания.

7. На основаниях AB и CP вне трапеции $ABCP$ построены квадраты. Докажите, что прямая, соединяющая их центры, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

8. Основание пирамиды — прямоугольная трапеция, у которой бо́льшая из боковых сторон равна 12, а меньший угол 30°. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Площадь боковой поверхности равна 90. Найдите объем пирамиды.

9. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между диагональю куба и не пересекающей ее диагональю грани.

Физический, индустриально-педагогический, химический факультеты

10. Укажите знак числа $\log_{0,3}\left(\frac{10}{7}(\log_2 5-1)\right)$.

11. Зная, что $\lg 64=k$, найдите $\lg\sqrt[3]{25}$.

12. При каких значениях a выполняется равенство

$$\frac{a+5}{a-5}\sqrt{a^2-10a+25}=-5-a?$$

13. Докажите тождество

$$2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)+1=0.$$

14. Решите уравнение

а) $||1-|x||-2|=1$;

б) $\log^2_{\frac{1}{2}}(4x)+\log_2\left(\frac{x^2}{8}\right)=8$.

15. Решите неравенство

а) $\log_{\frac{2}{5}}(7x+8)-\log_{\frac{2}{5}}(x^2+5x)<0$;

б) $(a^2-3a+4)\log_{\frac{1}{2}} a\leqslant 0$.

16. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{x+8}}{\log_{0,3}\left(x^2+\frac{3}{2}x\right)}.$$

17. Постройте график функции

а) $y=(2-x^2)\dfrac{3x+5}{|3x+5|}$;

б) $y=(0,6^{\log_{\frac{3}{5}}(8-3x)}$

в) $y=\sqrt{(4-3x)^2}-7$.

18. Даны два круга, которые касаются внешним образом. Радиусы кругов — 3 и 6. Найдите расстояние от точки касания до общей внешней касательной.

19. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите высоту трапеции, если ее основания равны 4 и 6.

20. Найдите высоту пирамиды, если ее основанием служит прямоугольник, одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а длины других ребер равны 7, 8 и 4.

21. Основанием прямой призмы служит ромб. Диагонали призмы — 8 и 5, высота призмы равны 2. Найдите площадь основания.

22. Ребро куба равно 2. Через диагональ куба проведена плоскость, параллельная диагонали основания, не имеющей с диагональю куба общих точек. Найдите площадь полученного сечения.

Публикацию подготовил *Т. Ф. Кириченко*

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты физико-механический и радиофизический)

1. Решите уравнение

$$\frac{13}{14(6^x+2)}+\frac{31}{36(5\cdot 6^{x-1}-1)}-\frac{32}{21(2\cdot 6^x-3)}=0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 25x+9y^2=-37,\\ 5(x+2)^{1/2}y=2. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$10\sin^2 x+3\cos^2 x+3\sin 2x=2.$$

4. Решите неравенство

$$63+8\left(\log_{1/3}\frac{x}{27}\right)(\log_{1/3}(27x))+21\log_3 x>0.$$

5. В правильной шестиугольной пирамиде заданы угол α между соседними боковыми гранями и объем V шара, вписанного в пирамиду. Найдите высоту пирамиды.

Вариант 2

(факультеты технической кибернетики и экономики и управления производством)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 35\log_4^2 x+36\log_3^2 y=99,\\ 7\log_{1/4} x-6\log_{1/3} y=1. \end{cases}$$

2. Известно, что $\cos 2x=\frac{4}{5}$. Докажите, что $\operatorname{ctg}^2 3x$ является рациональным числом и найдите это число.

3. Решите неравенство

$$|4x^2+35x+38|>|12x^2+33x+32|.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{27-36\cos^2 2x}{36\cos^2 2x+4\cos 6x-27}-\frac{2}{9\cos 2x-6}=0.$$

5. В правильной пятиугольной пирамиде задан двугранный угол φ при боковом ребре. Найдите плоский угол при вершине боковой грани.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Пуля ударяет со скоростью $v=400$ м/с в центр шара, подвешенного на нити длиной $l=4$ м, и упруго отскакивает от него. Определите косинус угла, на который отклоняется нить, если масса пули $m=20$ г и масса шара $M=5$ кг.

2. Найдите ускорение цилиндра, скользящего по желобу. Желоб имеет вид двухгранного угла, угол раствора которого 2α, ребро наклонено к горизонту под углом β, а плоскости образуют с горизонтом одинаковые углы. Коэффициент трения между цилиндром и поверхностью желоба μ.

3. По оси X (в ее положительном направлении) движется некоторое тело с постоянной скоростью $v=5$ м/с. Потенциальная энергия тела меняется вдоль оси по закону $W=(-10^{-2}x)$ Дж. Найдите мощность, развиваемую силами сопротивления, препятствующими движению.

4. В запаянной с одного конца стеклянной трубке, длина которой $l=70$ см, находится столбик воздуха, запертый сверху столбиком ртути высотой $h=20$ см, доходящим до верхнего края трубки. Трубку осторожно переворачивают, причем часть ртути выливается. Какова высота столбика ртути, который остается в трубке, если атмосферное давление $p_0=750$ мм рт. ст.? При какой длине трубки столбик ртути той же высоты выльется из трубки полностью?

5. Некоторая масса молекулярного водорода занимает объем $V_1=1$ м³ при температуре $T_1=250$ К и давлении $p_1=2$ атм. Какое давление будет иметь та же масса водорода при $T_2=5000$ К в объеме $V_2=10$ м³, если при столь высокой температуре молекулы водорода полностью диссоциируют на атомы?

6. Один моль одноатомного идеального газа сначала нагревают, затем охлаждают так, что замкнутый цикл *1—2—3—1* на p, V-диаграмме состоит из отрезков прямых *1—2* и *3—1*, параллельных осям p и V соответственно, и изотермы *2—3*. Найдите количество теплоты, от-

данное газом в процессе охлаждения. Давление и объем газа в состоянии 1 равны p_1 и V_1, давление газа в состоянии 2 равно p_2.

7. Три одинаковые заряженные частицы, каждая массой $m=2$ г и зарядом $q=10^{-8}$ Кл, поместили в вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=10$ см. Затем частицы одновременно освободили, после чего они стали симметрично разлетаться под действием кулоновских сил отталкивания. Найдите максимальное значение скорости частиц.

8. Электрон без начальной скорости прошел разность потенциалов $U_0=10$ кВ и влетел в пространство между пластинами плоского конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U=100$ В, по прямой, параллельной пластинам. Расстояние между пластинами $d=2$ см, длина пластин $l=20$ см. Определите расстояние на экране, отстоящем от конденсатора на $L=0,5$ м, на которое сместится электрон.

9. При изменении тока в катушке индуктивности на величину $\Delta I=1$А за время $\Delta t=0,6$ с в ней индуцируется ЭДС $\mathscr{E}=0,2$ мВ. Какую длину будет иметь радиоволна, излучаемая генератором, колебательный контур которого состоит из этой катушки и конденсатора емкостью $C=14,1$ нФ?

10. На горизонтальном дне водоема глубиной $h=1,2$ м лежит плоское зеркало. На каком расстоянии от места вхождения луча в воду этот луч снова выйдет на поверхность воды после отражения от зеркала? Угол падения луча $\alpha=30^\circ$, показатель преломления воды $n=1,33$.

Публикацию подготовили *Ю. Н. Кузьмин, Ю. Д. Максимов, В. Н. Романов, И. Б. Русанов*

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция

$$f(x)=7-x^2-x^4.$$

а) Решите уравнение $f(x)=1$.

б) Найдите наибольшее значение функции f.

в) Решите неравенство $f(x)\geqslant f(\sqrt{x})$

г) Сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от значений параметра a?

2. В треугольнике ABC угол A равен α, $AB=AC=1$. Пусть S — площадь треугольника ABC,

$$g(\alpha)=\frac{AB^2+BC^2+CA^2}{S}.$$

а) Докажите, что $g(\alpha)=4(2-\cos\alpha)/\sin\alpha$.

б) Решите уравнение $g(\alpha)=4\sqrt{3}$.

в) Найдите наименьшее значение функции g.

3. Обозначим через $h(a)$ наибольшее значение многочлена второй степени $x^2-2(a^2-3a+2)x$ на промежутке $[-1,1]$.

а) Докажите, что $h(a)=1+2|a-1||a-2|$.

б) Решите уравнение $h(a)=3/2$.

в) Постройте график функции $h=h(a)$.

Вариант 2

1. Дана система уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x}-y=a,\\ \sqrt{x}\cdot y=1-a.\end{cases}$$

а) Решите систему при $a=2$.

б) При каких значениях a система имеет единственное решение?

в) При каких значениях a система имеет решение (x, y) такое, что $x\geqslant y^2$?

2. В треугольник ABC вписана окружность радиусом 1. Известно, что угол C равен $\pi/3$, угол B равен α. Через $S(\alpha)$ обозначим площадь треугольника, вершинами которого являются точки касания вписанной окружности.

а) Докажите, что

$$S(\alpha)=\frac{3}{4}\sin\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

б) Найдите область значений функции S.

в) Постройте график функции S.

3. Дана функция

$$f(x)=3-\frac{2}{1+\cos x}-\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

а) Найдите точное значение $f(x)$, если известно, что

$$\operatorname{tg} x=\frac{3}{4},\ \pi<x<2\pi.$$

б) Докажите, что $f(x)=2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}$ при $0\leqslant x<\pi$.

в) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$ на промежутке $[0, 2\pi[$.

г) При каких a уравнение $f(x)=a$ имеет по крайней мере одно решение на промежутке $[0, 2\pi[$?

Физика

Задачи письменного экзамена

1. Мяч массой $m=100$ г отпустили на высоте $h=2,0$ м над полом. Чему равно количество теплоты, выделившееся при первом ударе мяча о пол, если время между первым и вторым ударами мяча о пол $\Delta t=1,2$ с? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

2. Гиря массой $m=1$ кг подвешена на нити, разрывающейся при силе натяжения $F=24,5$ Н. В натянутом состоянии нить с гирей из вертикального положения переведена в горизонтальное и отпущена. Уцелеет ли нить при прохождении гирей положения равновесия?

3. В баллоне был некоторый газ. При выпускании из баллона части газа температура газа уменьшилась в n раз, а давление уменьшилось в k раз. Какая часть газа выпущена?

4. Под каким давлением находится в баллоне кислород, если емкость баллона $V=5$ л, а средняя кинетическая энергия поступательного движения всех молекул кислорода $E=6$ кДж?

5. Определите работу расширения газа, первоначально занимающего объем $V=10$ л,

при изобарическом нагревании от $t_1=17\ ^\circ C$ до $t_2=104\ ^\circ C$. Давление газа $p=100$ кПа.

6. В плоский конденсатор с размерами пластин $a\times b$ вдвигают параллельно стороне a с постоянной скоростью v диэлектрик толщиной d, равной расстоянию между пластинами конденсатора. При этом конденсатор подключен к полюсам батареи, ЭДС которой $\mathcal{E}$. Определите силу тока, возникающего в цепи. Диэлектрическая проницаемость диэлектрика ε.

7. Два заряженных шарика массой $m=5$ г каждый, подвешенные на нерастяжимых нитях длиной $l=1$ м в воздухе, отталкиваясь друг от друга, разошлись на $d=10$ см. Заряды шариков равны. Найдите величину заряда каждого шарика. Размеры шариков малы по сравнению с расстоянием между ними.

8. К батарее подключается резистор сопротивлением R, на котором рассеивается мощность P. При подключении параллельно этому резистору такого же резистора мощность, выделяемая в нагрузке, не изменилась. Определите внутреннее сопротивление батареи.

9. На дифракционную решетку, имеющую период $d=6$ мкм, нормально падает монохроматическая волна. Определите длину волны, если угол между дифракционными максимумами второго и третьего порядков равен $\alpha=3^\circ$. Углы отклонения считать малыми.

10. Найдите скорость фотоэлектронов, вылетевших из цинка при освещении его ультрафиолетовыми лучами длиной волны $\lambda=0{,}3$ мкм, если работа выхода электрона из цинка $A=4$ эВ.

Публикацию подготовили
Ю. В. Богачев, В. А. Егоров,
П. П. Каргаев, Г. Д. Лапин, Б. А. Лифшиц

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{x-2}+\sqrt{x-1}=1.$$

2. Постройте график функции $y=\sin(x+\pi)+1$. Напишите уравнение касательной к графику в точке с абсциссой $\pi/4$.

3. Второй член убывающей арифметической прогрессии равен 10. Если первый член прогрессии увеличить на 2, второй оставить без изменений, а третий увеличить на 3, то полученные три числа будут последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите сумму первых четырех членов арифметической прогрессии.

4. Решите уравнение

$$\sin 2x=\sin x\,(\sin x+\cos x).$$

5. В треугольнике ABC проведены две высоты BM и CN, причем $AM:CM=2:3$. Найдите отношение площадей треугольников BMN и ABC, если острый угол BAC равен α.

6. Решите неравенство

$$\log_x\frac{12-4x}{4-x}\leqslant 1.$$

7. Найдите все такие действительные a, при которых множество значений x, удовлетворяющих неравенству

$$x^2(x-1)-a\,|x|\,(x+2)\leqslant 0,$$

является промежутком числовой оси.

8. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с острым углом, равным α. Боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы величиной β. Найдите объем пирамиды, если длина бокового ребра равна b.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{5-x^2}=x-1.$$

2. Найдите $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=a$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

3. Решите уравнение

$$(\log_2 x-3)\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}\,.$$

4. Найдите область определения функции

$$f(x)=\log_x(7+8x-12x^2).$$

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x+y=1,\\ 3^x+3^y=4.\end{cases}$$

6. Длины меньшей диагонали ромба, стороны и большей диагонали являются последовательными членами геометрической прогрессии. Найдите величины углов ромба.

7. Известно, что график функции $y=f(x)+2g(x)$ представляет собой прямую AB, проходящую через точки $A(-1;3)$ и $B(1;2)$, а график функции $y=3f(x)-g(x)$ является прямой, симметричной прямой AB относительно оси ординат. Найдите функции $f(x)$ и $g(x)$ и постройте их графики.

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$, высота которой в два раза больше стороны основания, на боковых ребрах SB и SC взяты точки M и N так, что MN параллельна BC. Через прямую MN проходят плоскости α и β. Плоскость α перпендикулярна плоскости грани SBC и содержит точку A, плоскость β проходит через середину бокового ребра SA. Найдите отношение площадей сечений пирамиды плоскостями α и β.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Работа перемещения заряда в электрическом поле.

2. Тонкий обруч радиусом R раскрутили вокруг его оси до угловой скорости ω_0 и положили на горизонтальный стол. Через какое время обруч остановится, если коэффициент трения между столом и обручем равен μ? Сколько оборотов сделает обруч?

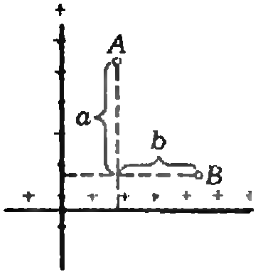


Рис. 1.

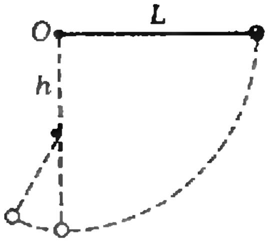


Рис. 2.

3. Для нагревания $m=1$ кг газа на $\Delta T=1$К при постоянном давлении требуется количество теплоты $Q_1=912$ Дж, а для нагревания при постоянном объеме — $Q_2=649$ Дж. Какой это газ?

4. Найдите разность потенциалов между точками A и B электростатического поля, создаваемого двумя бесконечными равномерно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью заряда $\sigma_1=2\cdot10^{-7}$ Кл/м^2 и $\sigma_2=4{,}2\cdot10^{-7}$ Кл/м^2, если $a=7$ см, $b=5$ см (рис. 1).

5. Найдите частоту излучения, вырывающего с поверхности металла электроны, которые полностью тормозятся задерживающим напряжением $U_з=3$ В. Фотоэффект у этого металла начинается при частоте излучения $\nu_{\min}=6\cdot10^{14}$Гц. Чему равна работа выхода электрона из этого металла?

Вариант 2

1. Адиабатный процесс.

2. На нити длиной $L=2h$, закрепленной в точке O, подвешен шарик массой m. На расстоянии h от точки O вбит гвоздь. Нить отклонена от положения равновесия на угол $\alpha=90°$ и отпущена (рис. 2). На какую максимальную высоту поднимется шарик после прохождения положения равновесия?

3. Кислород массой $m=8$ г при температуре $t=27$ °С занимает объем $V=200$ л. Определите, каким станет давление кислорода в этом же объеме, если газ превратить в плазму при температуре $T'=10^6$ К, когда все атомы кислорода полностью ионизированы. Сравните с первоначальным давлением.

4. Аккумулятор, внутренним сопротивлением которого можно пренебречь, поочередно замыкали на два равных резистора. Зная, что в первом случае ток $I_1=3$ А, а во втором $I_2=6$ А, найдите ток, текущий через аккумулятор, при замыкании его на эти резисторы, соединенные последовательно.

5. В среде распространяется свет, имеющий длину волны $\lambda=3\cdot10^{-7}$ м и энергию кванта $E=4{,}4\cdot10^{-19}$ Дж. Определите абсолютный показатель преломления среды.

Публикацию подготовили
А. С. Бортаковский, Г. Г. Спирин

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(-1)$, $f'(3)$, если

$$f'(x)=\frac{x^2\sqrt{3}(x^2+\sqrt{3})-2x^2(2-x^2)-6-4\sqrt{3}}{(x^2+\sqrt{3})\sqrt[3]{15\sqrt{3}+26}}-16^{\log_4\sqrt[4]{x^4-4x^2+4}}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_4(3\cdot2^{x+2}-8)=x+1.$$

3. Первая труба заполняет бассейн на 4 ч дольше, а вторая — на 9 ч дольше, чем обе при совместной работе. За сколько часов наполняет бассейн каждый из труб?

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{10-18\cos x}=6\cos x-2,$$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{\operatorname{tg}x-\sqrt{3}}$.

5. Вычислите объем правильной треугольной пирамиды высотой h, зная, что отношение боковой поверхности пирамиды к площади основания равно k.

6. Сформулируйте определение вектора. Сформулируйте теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам (без доказательства).

Вариант 2

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'\left(\frac{1}{2}\right)$, $f'(2)$, если

$$f(x)=\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x}-\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right)^2+9^{\log_3\sqrt{x^4+1}}.$$

2. Решите уравнение

$$x^2+(2\sqrt{2})^{\log_8(1+x^2-2x)}=1.$$

3. Из пункта A в пункт B в 12 часов вышел пешеход, одновременно навстречу ему выехал велосипедист. По дороге велосипед сломался и простоял 15 мин. Встреча произошла в 13 ч 30 мин. Если бы велосипед не останавливался, встреча произошла бы на 10 мин раньше. Считая скорости пешехода и велосипедиста во время движения постоянными, определите время прибытия пешехода в пункт B и велосипедиста в пункт A.

4. Найдите корни уравнения

$$\sqrt{13-18\operatorname{tg}x}=6\operatorname{tg}x-3,$$

принадлежащие области определения функции $y=\sqrt{13\sin x-2\sqrt{13}}$.

5. В прямой круговой конус, боковая поверхность которого в k раз больше площади основания, вписан шар радиусом R. Найдите объем конуса.

6. Сформулируйте определение параллельности прямой и плоскости. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости (без доказательства).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

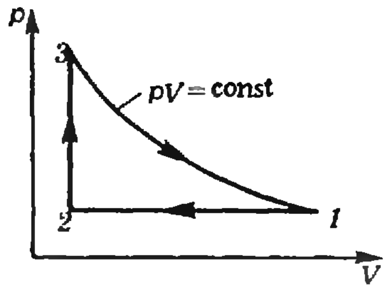
1. Электрический ток. Сила тока. Электрическая цепь. Электрическое удельное сопротивление. Закон Ома для участка электрической цепи. Параллельное и последовательное соединение проводников.

2. При включении электрической лампы величина тока в первый момент отличается от величины тока, который установится после того, как лампа начинает светиться. Как объяснить это явление?

3. Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты $h=960$ м. Выстрел произведен вертикально вверх. Какова начальная скорость пули? Средняя скорость звука в воздухе $v=330$ м/с.

4. Льдина постоянной толщины плавает, выступая над уровнем воды на $h=3$ см. Найдите массу льдины, если площадь ее основания $S=250$ см^2. Плотность льда $\rho_1=0{,}9\cdot10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_в=1{,}0\cdot10^3$ кг/м^3.

5. Электрон движется со скоростью v в однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ в плоскости, перпендикулярной линиям магнитной индукции. Определите радиус траектории электрона. Отношение заряда электрона к его массе e/m известно.



Вариант 2

1. Электромагнитные волны и скорость их распространения. Свойства электромагнитных волн. Энергия электромагнитной волны. Изобретение радио А. С. Поповым.

2. Можно ли натянуть канат массой m так, чтобы он не провисал?

3. На рисунке дан график изменения состояния идеального газа в координатах p, V. Представьте этот процесс на графиках в координатах p, T и V, T. Укажите, в каком из процессов газ отдает теплоту, а в каком получает.

4. Камень массой $m=0{,}5$ кг бросили с высоты $h=30$ м с начальной скоростью $v_0=25$ м/с. Перед ударом о землю скорость камня $v=30$ м/с. Определите работу сил сопротивления воздуха при движении камня.

5. Два источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1=4$ В и $\mathscr{E}_2=6$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=0{,}1$ Ом и $r_2=0{,}4$ Ом соединены последовательно. При каком сопротивлении внешней цепи разность потенциалов между зажимами одного из источников будет равной нулю?

Публикацию подготовили *А. А. Болотов, А. Т. Комов, В. А. Старшинов, М. Г. Тимошин*

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения. При поступлении на физический факультет МГУ удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899 Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по приведенному ниже образцу.

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания не возвращаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается обратно. Учащие-

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816 г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

ся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 10 класс — задачи 4—7.

1. **«Рекорд».** Может ли спортсмен на водных лыжах двигаться быстрее катера-буксировщика?

2. **«Вавилонская башня».** Определите наибольшую высоту бетонной башни, которая может разрушиться под действием собственной тяжести, если допустимое давление на бетон равно 5 МПа.

3. **«Градусник».** Почему измерение температуры медицинским термометром продолжается долго, а «стряхнуть» термометр можно практически мгновенно?

4. **«Дождь».** На улице идет вертикальный дождь. Скорость капель u. По асфальту со скоростью v скользит мяч. Во сколько раз на движущийся мяч попадает больше капель (за секунду), чем на такой же неподвижный? Изменится ли ответ, если мяч не круглый?

5. **«Ванна».** Определите форму поверхности жидкости в ванне, соскальзывающей без трения с наклонной плоскости.

6. **«Ящик».** По деревянным сходням, образующим угол α с горизонтом, втаскивают за веревку ящик. Коэффициент трения ящика о сходни μ. Под каким углом β к горизонту следует направить веревку, чтобы втаскивать ящик с наименьшим усилием?

7. **«Атом».** Вокруг протона по круговой орбите вращаются четыре электрона. В любой момент времени электроны образуют квадрат со стороной a, протон находится в центре этого квадрата. Определите угловую скорость движения электронов по орбите.

Омскому НОУ — 20 лет

Немного романтичное, отчасти ироничное, но в целом правдивое повествование о том, как омское научно-профориентационное общество учащихся «Поиск» дошло до своего двадцатилетия.

Прошлое вспоминают по разным причинам. Иногда потому, что сил уже не осталось, идей новых нет, вот и приходится рассуждать перед молодежью: «Да, были люди в наше время». К Омскому научно-профориентационному обществу учащихся «Поиск» это, кажется, не относится. Зачем же вспоминать его историю? Дело в том, что оно одно из старейших в стране. Его успехи и неудачи, проблемы и находки могут оказаться поучительными для тех, кто моложе.

Сегодня деятельность этого общества охватывает несколько тысяч школьников и учащихся ПТУ города и области. А начиналось все с малого.

Младенчество

Что было, когда ничего не было? Кое-что было. В отдельных школах немногие энтузиасты хорошо вели кружки и только зарождающиеся факультативы. Проходили районные и областные олимпиады, ежегодно несколько десятков старшеклассников становились учащимися ЗМШ при ведущих университетах страны. Все было так, как и в других местах.

Но Омск — миллионный город, один из крупных вузовских центров. Поэтому вопросы работы с абитуриентами всегда были в нем актуальными. Мало ведь того, чтобы старшеклассники хорошо подготовились к вступительным экзаменам. Надо чтобы потом, при первых трудностях, они не опустили руки, не запричитали: «И зачем я только сюда пошел, глупый был!»

Гарантий от этого никто и ничто дать не может. Зато есть давно испытанное средство для улучшения дел: надо, чтобы уже в десятом (а лучше — в девятом, восьмом) классе школьник приобщался к вузовской жизни, ее ценностям и традициям, чтобы он не только читал буклеты и справочники для поступающих, но и показывал себя — «Вот что я умею». Такой работой школьников нужно управлять, поэтому в 1968 году в Омске родилось НОУ — научное общество учащихся.

Структурно в общество вошли уже существующие и нарождающиеся лектории, кружки при вузах, детские технические и юннатские станции, дома пионеров, другие внешкольные учреждения. И вот тогда-то учредителями была сделана типичная для младенчества ошибка: НОУ имело свои подразделения где угодно, кроме самих школ.

Пятилетний период младенчества дал несколько кружков и лекториев по математике и программированию в Политехническом и Педагогическом институтах, вечернюю школу «Юный железнодорожник» в ОмИИТе. Тогда же родилась традиция ежегодных апрельских конференций НОУ, на математических секциях выступали обычно 8—10 учащихся с реферативными работами.

По-прежнему кое-что происходило в школах, но к НОУ это отношения не имело. Новый период начался с 1974 года. Именно тогда в Омске открылся университет, а ведь одна из главных задач этих уважаемых учреждений, неважно, сколько им лет — научный поиск, воспитание творческих талантов. К НОУ все это имеет прямое отношение.

Детство

Пора буйной фантазии, наивных вопросов, скоропалительных решений, ускоренного вырастания из любых одежек — вот что такое детство. А еще в детстве, увидев у соседа яркую игрушку, тянутся: «Хочу такую же!» В этот период омское НОУ активно придумывало «свое» и заимствовало «чужое».

Математический факультет ОмГУ строился выпускниками аспирантур Новосибирского университета. Почти все они — из первых «фымышат», «игрушки» Академгородка знакомы им не понаслышке. Конечно, хотелось бы иметь свою школу-интернат, летние сборы и многое из того, что впервые создавалось в Золотой Долине. Но все оказалось не так просто. Роль ФМШ взяла на себя вечерняя школа, собиравшаяся в первые годы по четвергам, а сейчас — несколько раз в неделю. Лекции, практические занятия, а потом чаепития с песнями, когда гитара то и дело переходит от кандидата наук к первокурснику, а от него — к старшекласснику, и снова по кругу. ВМШ — не просто школа, это еще и клуб — такая у нас сложилась традиция.

Летний лагерь НОУ тоже создавался математиками. Было немало сложностей (впрочем, и сейчас их хватает). В первые годы математические отряды входили в Лагерь школьного комсомольского актива. Было необычно, но интересно и полезно обоим направлениям. Потом образовался отдельный лагерь «Ломоносовец» на 200 человек с секциями краеведов, медиков, астрономов, химиков и т. д.

Взрослели «ноушата», становились студентами МГУ и МФТИ, ОмГУ и ОмПИ. У многих возникла мысль: «С нами в школьные годы занимались, мы должны вернуть этот долг». По инициативе студентов с 1978 года стали проводиться физико-математические олимпиады «ОмПИ+МФТИ» (в дальнейшем «ОмГУ+МГУ+МФТИ»), в том же году прошли первые командные олимпиады старшеклассников, еще через год — командные олимпиады ПТУ, конкурсы математических проектов. Обо всем этом не раз писалось в «Кванте» (см. 1978, № 11; 1979, № 12; 1980, № 8; 1981, № 12; 1983, № 8, 11).

Когда к руководству занятиями школьников подключились студенты, одной математической секции стало «не хватать». По 90—100 сообщений делали ежегодно старшеклассники и учащиеся ПТУ на секциях «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Математика в физике, химии и технике», «Математика в гуманитарных науках», «Вычислительная математика и программирование». Конечно, часть таких сообщений — рефераты (прочел, разобрался, решил несколько упражнений, оформил доклад), но немало и творческих разработок.

В 1983 году отпраздновали свое пятнадцатилетие. Было торжественно и грустно: детство кончалось, начиналась юность с ее смятениями, сомнениями, поисками смысла жизни. И делами, конечно.

Юность

Кружки, олимпиады, конкурсы, конференции — дело, конечно, хорошее. Но мы чувствовали, что есть в Омске своеобразие, отличающее омское НОУ от подобных в Москве и Новосибирске, Челябинске и Красноярске, Ленинграде и Кишиневе. Обсуждение проекта школьной реформы заставило задуматься: в том ли направлении мы идем?

Первый вопрос, возникающий во всех НОУ: вширь или вглубь? Ведь в 99 % случаев мы занимаемся самообманом, говоря о «школьной науке», «малых академиях» и т. п. Очень редко старшеклассники в состоянии сказать свое слово в математике или ее приложениях. Есть, конечно, в разговорах о «школьной науке» элемент игры, но название обязывает. Если мы называем общество научным, то формы его работы следует нацелить именно на качество. А для этого надо в десятки раз уменьшить количество наших акций, сделать общество содружеством немногих «перспективных». А остальные? Они ведь тоже получают пользу, и немалую. Учатся работать с популярной литературой, узнают о применении математики в различных профессиях, раздумывают о том, кем быть. Если и без того ограниченные силы кураторов общество сосредоточит на лучших учащихся, что останется другим? В общем, та же проблема, что и в спорте — готовить надо олимпийских чемпионов, но и запускать массовую физкультуру тоже нельзя.

В чем же главная задача нашего общества? Мы считаем — в профессиональной ориентации, в первую очередь — на профессии, требующие высшего образования. В частности, роль математических секций — ознакомление школьника с широким спектром математических профессий (научный работник, прикладник, программист, преподаватель математики и информатики), а также показ возможностей применения математики в различных областях.

Когда мы определили эту свою задачу, возникло критическое отношение к сложившимся формам и приемам работы. Достаточно ли у нас именно профориентационных мероприятий? Все ли профессии мы пропагандируем? Обеспечиваем ли необходимое качество такой работы?

А вслед за вопросами начали появляться и конкретные ответы. Профориентацию надо начинать раньше. Поэтому, например, заочная математическая школа ОмГУ работает сегодня не только со старшеклассниками, но и с учащимися 6—8 классов. В ее заданиях наряду с привычными упражнениями появились нетипичные: изучить дополнительный материал и написать реферат, разработать и провести кружковое занятие, написать и реализовать на подручном вычислительном средстве программу. Отлажена методика проведения командных олимпиад 4—7 классов, разрабатывается тематика кружков, задания для поисковой работы.

Как правило, начинается новинка с изучения в «лаборатории» — Студенческом научно-педагогическом обществе математического факультета ОмГУ (кстати, лауреате премии Омского комсомола). Десятки курсовых и дипломных работ посвящены таким разработкам. Все то, что «получилось», передается в городские школы и ПТУ. Внедряют новинки и выпускники факультета, и студенты, и просто те, кому стало интересно. Примеры? Дипломная работа В. А. Лещинской посвящалась кружку по геометрии, на котором, в частности, юноши и девушки... вышивают. Есть в математике понятие огибающей, именно оно легло в основу построения математических фигур с помощью нитки и иголки. Сегодня такие узоры вы сможете увидеть и у студентов, и у школьников. Или кружок «Математика + музыка + язык» — эту тему разработала, будучи студенткой, Т. А. Ширшова, сейчас она уже работает учителем в одной из омских школ. Несколько десятков студенческих работ легли в основу экспозиции зала занимательной математики и информатики городского Дворца пионеров. Сегодня в нем можно увидеть любопытные демонстрационные комплексы, познакомиться с историей развития вычислительной техники «от абака до компьютера», поработать на древних, не очень древних и самых современных приборах, прослушать лекции.

Перестроена и система творческих отчетов. Они начинаются в школах, в январе — феврале проходят районные конференции общества, а лучшие работы школьников и учащихся ПТУ заслушиваются на заключительном городском туре — традиционной апрельской конференции.

Увеличилось число выступлений учащихся, сейчас их ежегодно от 200 до 300, увеличилось количество секций на конференции (появились «Педагогика математики», «Занимательная математика»), больше стало и кураторов общества, плодотворно работающих с учащимися. Доктора наук Г. П. Кукин и А. Н. Гришков, кандидаты наук Е. И. Федорова, Г. Ш Фридман, заслуженные учителя школы РСФСР В. К. Веприк и Л. Ф. Горбунов, преподаватели программирования УПК Г. Е. Купчик и М. Д. Пиастро, молодые педагоги Г. А. Гутова, М. Ю. Бурова, О. Ю. Давиденко, Е. Ю. Давиденко и многие другие вносят свой вклад в работу общества.

«Количество переходит в качество» — этот закон стал заметен и в нашем деле. Участники кружка юных программистов занимали первые места на конкурсах в республике, в стране, на международных школах в Новосибирске. Или вот маленькая деталь: идет семинар по современным проблемам алгебры, которым руководит доктор физико-математических наук А. Н. Гришков, в аудитории — доценты омских вузов, аспиранты, студенты и... школьники.

Обо всех новинках не расскажешь. Закончим повествование одной из них: профориентационной олимпиадой. Мы хотим, чтобы школьник продемонстрировал и высокий уровень подготовки к вступительным экзаменам, и умение что-то сделать в выбранной им математической профессии. Профориентационная олимпиада состоит из двух частей. Первые 30 очков можно набрать на решении задач из билета вступительных экзаменов. Здесь оценивается умение не только решить задачи, но и качественно оформить решение. Еще 30 очков можно набрать, решив нестандартные задачи на одну из предлагаемых тем. Можно попробовать свои силы в традиционных олимпиадных задачах, но есть задания и для будущих педагогов, и для любителей программирования. Такая олимпиада проводится в Омске ежегодно, постоянно совершенствуется.

Омское научно-профориентационное общество «Поиск» вступило в пору юности. А это — период любознательности и активного проявления сил. Пишите, приезжайте, приглашайте в гости. Нам есть чем обменяться со своими единомышленниками.

Факультативные задания профориентационной математической олимпиады

Педагогика математики

Вася, получив данные о поступающих на математический факультет ОмГУ в 1987 году, обработал их, вычислив шансы на поступление в зависимости от участия в профориентационных мероприятиях (число поступивших он делил на число сдававших из той же группы). Вот что у него получилось:

Вид деятельности	Всего	Зачисл.	Шансы (%)
Занятия в ЗМШ	21	16	76,2
Выступления с докладами на конференциях НПОУ «Поиск»	17	13	76,5
Призовые места в олимпиадах района	30	23	76,7
Занятия в Четверговой математической школе	14	12	85,7
Занятия в Клубе будущего педагога	8	7	87,5
Участвовали хотя бы в одном виде	68	50	73,5
Не участвовали в этой деятельности	77	19	24,7

Вася очень удивился: ясно ведь, что шансы участвовавшего «хотя бы в одном» из видов деятельности должны быть по крайней мере не ниже, чем в самом «ненадежном» из видов. А здесь все наоборот!

Ваша задача:

— изучить данный феномен и понять его причины;

— построить простую модель, объясняющую случившееся;

— изложить математическое объяснение модели.

Теоретическая математика

1. Найти все целочисленные решения уравнения $3 \cdot 2^x + 1 = y^2$.

2. На клетчатой бумаге отмечен прямоугольник 2×6. Можно ли раскрасить узлы прямоугольника в два цвета так, чтобы никакие четыре точки одного цвета не являлись вершинами прямоугольника со сторонами — линиями сетки?

3. Найти все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы несколь-

ких последовательных натуральных чисел.

4. В клетках шахматной доски произвольным образом расставлены числа 1, 2, 3,...,64. Доказать, что найдутся по крайней мере три квадрата 2×2, сумма чисел в каждом из которых больше 100.

5. Доказать, что если a, b, c — стороны произвольного треугольника, то $a^2+b^2+c^2<2(ab+ac+bc)$.

6. Сколько существует параллелепипедов, все грани которых — одинаковые ромбы с острым углом α? Найти отношение наибольшего из объемов таких параллелепипедов к наименьшему.

Информатика

1. Разработать алгоритм и написать (на любом языке программирования) программу, выбирающую из произвольной последовательности целых чисел сначала все положительные числа в порядке возрастания, затем все отрицательные числа в порядке убывания.

2. Разработать обучающе-контролирующую программу по теме «Закон Кулона». Реализовать ее на любом языке программирования.

3. Автомат по продаже газированной воды с встроенным в него микропроцессором должен работать следующим образом:

В отверстие монетоприемника опускаются одна или несколько монет общим достоинством от 1 до 6 коп. После этого нажимается одна из трех кнопок: «Без сиропа — 1 коп.», «С сиропом — 3 коп.», «С двойным сиропом — 5 коп.».

Автомат определяет сумму поступившей мелочи, если ее достаточно, то распределяет монеты по соответствующим бункерам (для 1, 2, 3 и 5-копеечных монет), наполняет стакан водой, выдает сдачу и возвращается в исходное состояние; если денег недостаточно, то автомат их возвращает.

Описать алгоритм работы микропроцессора, встроенного в автомат. Написать (на любом языке программирования) программу, реализующую этот алгоритм.

В. Н. Сергеев

Геометрия «счастливых» билетов

В статье В. Г. Болтянского «Программы перебора» («Квант», № 1) рассматривается задача определения числа «счастливых» билетов, т. е. шестизначных чисел, у которых сумма первых трех цифр равна сумме остальных. Эта задача сводится к подсчету количества трехзначных чисел с заданной суммой цифр S. Из приведенного в статье описания алгоритма следует, что первые две цифры числа K и L должны удовлетворять следующим неравенствам:

$$0\leqslant K\leqslant 9,\qquad 0\leqslant L\leqslant 9,$$
$$K+L\leqslant S,\qquad K+L\geqslant S-9.$$

Заметим, что вместо последнего неравенства в программе В. Г. Болтянского (см. с. 7) содержится ошибочное; строка 70 должна иметь следующий вид:

```
70 IF K+L>S—10 THEN
Q=Q+1
```

Отметим на координатной плоскости OKL точки с координатами (K, L), удовлетворяющие выписанным выше условиям. Если $S\leqslant 9$, то соответствующие точки образуют треугольник (рис. 1). Если $S>9$ (но S не больше 17) — шестиугольник (рис. 2). Рассматривая число «допустимых» точек $Q(S)$ в порядке возрастания S, получим, что при $S\leqslant 9$

$$Q(S)=Q(S-1)+S+1.$$

Если же $S>9$, то из общего числа 100 точек квадрата следует вычесть количество точек в левом нижнем ($Q(S-10)$) и правом верхнем ($Q(17-S)$) треугольниках

$$Q(S)=100-Q(S-10)-Q(17-S).$$

Поскольку $Q(0)=1$, можно последовательно определить $Q(1)$, $Q(2)$, ..., $Q(9)$ и выписать их в таблицу. Используя полученные элементы, вычислим $Q(S)$ для S от 10 до 13 и заполним таблицу до конца.

S	0	1	2	3	4	5	6	7	9	9	10	11	12	13
$Q(S)$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	63	69	73	75

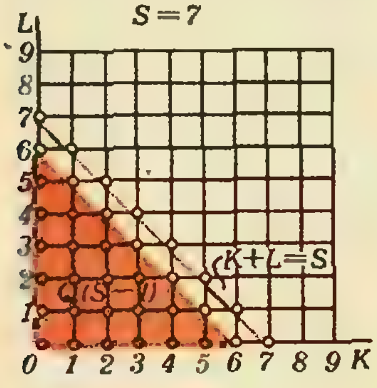


Рис. 1.

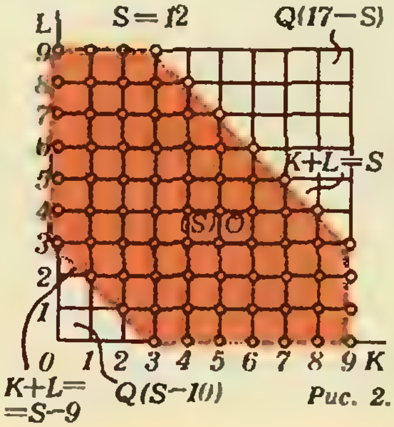


Рис. 2.

Теперь, следуя алгоритму В. Г. Болтянского, возведем каждое $Q(S)$ в квадрат, просуммируем эти значения и удвоим результат. Не забудем вычесть 1 — билета с номером 000 000 не существует,— и мы получим результат: число счастливых билетов равно 55 251. Простые геометрически соображения настолько сократили перебор, что мы обошлись без ЭВМ!

Г. Н. Гуртман

Ответы, указания, решения

сеевская теория графов

Нужная 2-раскраска полного графа с 7-ю вершинами показана на рисунке 1.

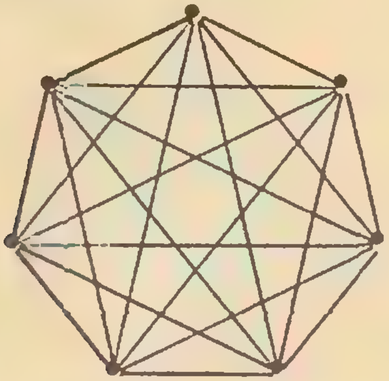


Рис. 1.

ранные школьные задачи

1. $x_1=x_2=\ldots=x_{100}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. **Р е ш е н и е.** Если $x_1=\ldots=x_{100}$, то все уравнения системы превращаются в одно и то же уравнение $x_1^2+x_1-1=0$, решая которое мы получаем $x_1=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Покажем, что других решений нет. Преобразуем уравнения к виду $x_1=\dfrac{1}{1+x_2}$, $x_2=\dfrac{1}{1+x_3}$, ..., $x_{99}=\dfrac{1}{1+x_{100}}$, $x_{100}=\dfrac{1}{1+x_1}$. Подставим выражение для x_{100} в выражение для x_{99}, выражение для x_{99} — в выражение для x_{98} и т. д. Получим

$$x_1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1+x_1}}}.$$

Преобразуя многоэтажную дробь в правой части равенства *) к обычной форме, мы приводим равенство к виду

$$x_1=\frac{ax_1+b}{cx_1+d}, \text{**)}$$

что равносильно квадратному уравнению. Значит, для x_1 имеется не более 2-х возможных значений, но 2 значения мы уже знаем: $\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Значит, x_1 обязательно равно одному из этих чисел. *Зная* x_1, *мы находим (пользуясь* вышеприведенными формулами) x_{100}, x_{99}, ..., x_2, и при этом получается $x_1=x_2=\ldots=x_{99}=x_{100}$.

2. $683^3=318\,611\,987$. На самом деле верно, что для любого натурального числа $a=\overline{a_1\ldots a_n}$, не делящегося на 2 и на 5, найдется точный куб, оканчивающийся на $\overline{a_1\ldots a_n}$. При $n=1$ это можно прямо проверить: $a=1$, 3, 7 или 9, и $1^3=1$, $7^3=343$, $3^3=27$, $9^3=729$. *Далее воспользуемся* индукцией по n. Пусть существует число, куб которого оканчивается на $\overline{a_2\ldots a_n}$; именно, пусть m^3 оканчивается на $\overline{b_1a_2\ldots a_n}$. Пусть, далее, c — такая цифра, что $b_1+c=a_1$ или $b_1+c=10+a_1$. Подберем такое число k, что $3km^2$ оканчивается на c (это можно сделать, потому что m, а значит, и m^2, а значит, и $3m^2$, оканчивается на 1, 3, 7, 9). Тогда

$$\begin{aligned}(m+k\cdot10^{n-1})^3&=m^3+3km^2\cdot10^{n-1}+\\&+3k^2m\cdot10^{2(n-1)}+k^3\cdot10^{3(n-1)}=\\&=\overline{\ldots b_1a_2\ldots a_n}+\overline{\ldots c0\ldots0}+\overline{\ldots00\ldots0}+\\&+\overline{\ldots00\ldots0}=\overline{\ldots a_1a_2\ldots a_n}.\end{aligned}$$

3. $\{1, 1, 1\}$, $\{1, 1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$ (с точностью до порядка). **Р е ш е н и е.** Пусть x_1, x_2, x_3 — данные числа, и пусть $x_1\leqslant x_2\leqslant x_3$. Тогда $x_1+x_2\leqslant 2x_3$, откуда либо $x_1+x_2=x_3$, либо $x_1+x_2=2x_3$. Последнее возможно только при $x_1=x_2=x_3$, а тогда (ввиду условия взаимной простоты) $x_1=x_2=x_3=1$. Пусть $x_1+x_2=x_3$. Тогда $x_1+x_3=2x_1+x_2$ делится на x_2; значит, $2x_1$ делится на x_2. Но $2x_1\leqslant 2x_2$, так что либо $x_1=x_2$, либо $2x_1=x_2$. В первом случае $x_3=2x_1$ и (ввиду условия взаимной простоты) $\{x_1, x_2, x_3\}=\{1, 1, 2\}$; во втором случае $x_3=3x_1$ и $\{x_1, x_2, x_3\}=\{1, 2, 3\}$.

4. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$, $\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{z}<\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$. **Р е ш е н и е.** Если треугольник с высотами x, y, z существует и S — его площадь, то стороны этого треугольника равны $\dfrac{2S}{x}$, $\dfrac{2S}{y}$, $\dfrac{2S}{z}$. Записывая неравенства для сторон треугольника и сокращая их на $2S$, мы получаем вышеуказанные условия для x, y, z. Обратно, если эти условия выполнены, то существует треугольник со сторонами $\dfrac{1}{x}$, $\dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{z}$. Высоты этого треугольника равны $2sx$, $2sy$, $2sz$, где s — его площадь. Производя гомотетию с коэффициентом $(2s)^{-1}$, мы получим треугольник с высотами x, y, z.

5. Не могло. **Д о к а з а т е л ь с т в о.** На рисунке 2 показано одно из возможных расположений траектории $ABCA$ мяча (другие расположения либо явно невозможны, либо аналогичны этому). Обозначим углы ABP и BCP через α и β. Тогда некоторые другие углы будут тоже равны α или β (см. рисунок), в частности, будет $\angle CAA'=\alpha$ и $\angle BAQ=\beta$. Так как $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, получаем, что лучи AB и AC совпадают — противоречие.

6. $\left\{\pm\alpha+\dfrac{\pi}{4}+2m\pi,\ \pm\alpha+\dfrac{\pi}{4}+2n\pi\right\}$, $m, n\in\mathbb{Z}$. **У к а з а н и е.** Составляя сумму квадратов данных уравнений, получим $\cos(x-y)=0$. Значит, $x-y=\dfrac{\pi}{2}+l\pi$, $l\in\mathbb{Z}$. Подставив $x=y+\dfrac{\pi}{2}+l\pi$

---

*) Такие дроби называются *цепными* или *непрерывными*. О них можно прочесть в «Кванте» (1983, № 5, с. 18).

**) На самом деле $a=f_{99}$, $b=c=f_{100}$, $d=f_{101}$, где f_n — *числа Фибоначчи* (см., например, книгу Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М.: «Наука», 1978 — Серия «Популярные лекции по математике» или «Квант», 1988, № 3).

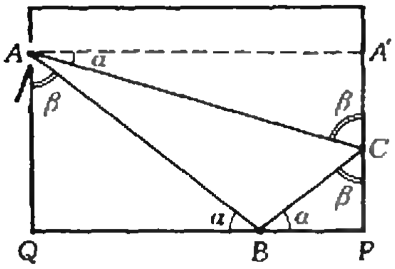


Рис. 2.

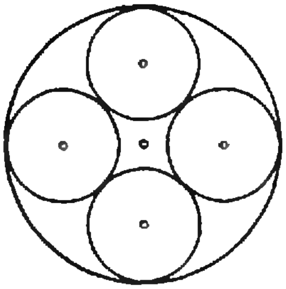


Рис. 3.

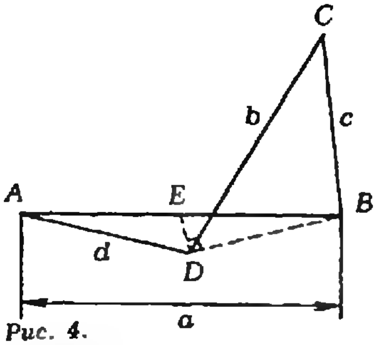


Рис. 4.

в одно из уравнений, найдем y; после этого посмотрим, какие из найденных x и y удовлетворяют системе.

7. Нельзя. Например, уравнение $x^2-20x+100=0$ имеет единственное решение $x=10$, а уравнение $x^2-20{,}2x+99=0$ имеет решения $x=10{,}1\pm\sqrt{3{,}01}$, большее из которых 11,83... отличается от 10 на 18,3...% абсолютной величины. (Покажите, что еще бо́льшим отклонение быть не может.)

8. $1+\sqrt{2}$. Указание. Расположение четырех неперекрывающихся кругов радиусом 1 в круге радиусом $1+\sqrt{2}$ показано на рисунке 3. Если O_1, O_2, O_3, O_4 — центры неперекрывающихся кругов радиусом 1, расположенных в круге радиусом R, то среди 12 углов $O_iO_jO_k$ хотя бы один будет прямым или тупым. В этом случае $O_iO_k\geqslant 2\sqrt{2}$, и $2R\geqslant 1+O_iO_k+1\geqslant 2+2\sqrt{2}$.

9. Наибольшее из чисел a, b, c, d должно быть меньше суммы трех других, и не все числа a, b, c, d должны быть одинаковы. Доказательство. Пусть, для определенности, $a\geqslant b\geqslant c\geqslant d$. Наши условия принимают вид $a<b+c+d$, $a>d$. Если не выполнено первое условие, то вообще не существует замкнутой ломаной со сторонами a, b, c, d; если все четыре числа одинаковы, то ломаная будет ромбом и не будет иметь самопересечения. Остается показать, что если наши условия выполнены, то замкнутая самопересекающаяся ломаная со сторонами a, b, c, d существует. Вот ее построение (рис. 4). Первое из наших неравенств показывает, что $b+c>a-d$. Возьмем отрезок AB длиной a и из его конца A проведем отрезок AD длиной d. Проведем, далее, отрезок $DE\perp DB$, у которого точка E лежит на отрезке AB. Угол BAD можно сделать настолько малым, что сумма $DE+EB$, близкая к $a-d$, будет тоже меньше $b+c$. Тем более будет $DB<b+c$. Значит, на DB можно построить треугольник DCB с боковыми сторонами b и c; мы построим его, как показано на рисунке 4. Получится замкнутая ломаная $ABCD$ с нужными длинами сторон, и легко понять, что она обладает самопересечением: так как $b>c$, то угол CDB острый; значит, при отсутствии самопересечения точка C должна попасть в треугольник DEB, что привело бы к невозможному неравенству $b+c=DC+CB\leqslant DE+EB<b+c$.

10. См. рис. 5.

11. {48 261 724 457, 1}; {137, 5}. Решение. Обозначим правую часть нашего уравнения через N. Прямая проверка показывает, что N не делится на 2, 3, 5, 7 (и, значит, ни на какое число, не большее 10) и имеет при делении на 9 остаток 5 (сумма его цифр равна 50). При данном y остаток от деления числа x^y на 9 зависит только от остатка от деления числа x на 9. Составим таблицу остатков от деления x^y на 9 (x_9 — остаток от деления x на 9).

y \ x_9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
2	0	1	4	0	7	7	0	4	1
3	0	1	8	0	1	8	0	1	8
4	0	1	7	0	4	4	0	7	1
5	0	1	5	0	7	2	0	4	8
6	0	1	1	0	1	1	0	1	1

Дальше 0-й, 3-й и 6-й столбцы будут состоять из нулей, а остальные столбцы будут периодичны с периодом 6. Остаток 5 от деления на 9 число x^y может иметь, если x имеет остаток 2 от деления на 9 и $y=5, 11, \ldots, 6k+5, \ldots$ или если x имеет остаток 5 от деления на 9 и $y=1, 7, 13, \ldots, 6k+1, \ldots$

Обратимся к нашему уравнению. Одно решение очевидно: $x=N$, $y=1$. Пусть $y>1$. Тогда $y=5, 7, 11, 13, \ldots$ Но $N<10^{11}$, поэтому если $y\geqslant 11$, то $x<10$, что противоречит отсутствию у N делителей, меньших 10. Значит, остаются возможности $y=5$ и $y=7$.

Пусть $y=7$. Имеем: $40^7=4^7\cdot 10^7=16\,384\times\times 10^7>N$, $30^7=3^7\cdot 10^7=2187\cdot 10^7<N$, т. е. $30<x<40$. Но x должно быть нечетным и иметь остаток 5 от деления на 9; таких x в указанном интервале нет. Пусть $y=5$. Имеем: $160^5=16^5\cdot 10^5=2^{20}\cdot 10^5=1024^2\cdot 10^5>10^{11}>N$, $100^5=10^{10}<N$, $100<x<160$. Число x должно быть нечетным и иметь остаток 2 от деления на 9. Таких x в указанном интервале четыре: 101, 119, 137, 155. Но 119 делится на 7, 165 делится на 5 — они не годятся. Не годится и

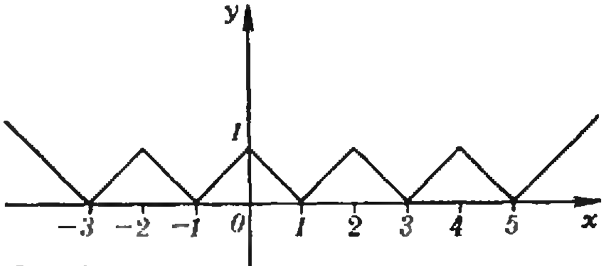


Рис. 5.

101: если x оканчивается на 1, то x^y оканчивается на 1 при любом y. Остается возможность $x=137$. Проверка показывает, что действительно $137^5=48\ 261\ 724\ 457$.

12. $x \geqslant -\frac{1}{4}$. Доказательство. Чтобы $f_{n+1}(x)$ было определено, нужно, чтобы было определено $f_n(x)$ и чтобы было $x+f_n(x) \geqslant 0$. Предположим сначала, что $x \geqslant -\frac{1}{4}$. Если $f_n(x) > \frac{1}{2}$, то $f_{n+1}(x) = \sqrt{x+f_n(x)} > \sqrt{-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$, т. е. и $f_{n+1}(x) > \frac{1}{2}$. Так как $f_0(x)=1>\frac{1}{2}$, то в силу доказанного $f_1(x)>\frac{1}{2}$, $f_2(x)>\frac{1}{2}$, $f_3(x)>\frac{1}{2}$, ..., т. е. $f_n(x)>\frac{1}{2}$ и $x+f_n(x)>-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}>0$ при любом n; таким образом, при $x \geqslant -\frac{1}{4}$ все $f_n(x)$ определены. Пусть теперь $x<-\frac{1}{4}$. Положим $x+\frac{1}{4}=-a$; тогда $a>0$. Очевидно, при любом $y \geqslant 0$ справедливо неравенство $\sqrt{y} \leqslant y+\frac{1}{4}$ (действительно, $y-\sqrt{y}+\frac{1}{4}=\left(\sqrt{y}-\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$). Значит, если $f_{n+1}(x)$ определено, то $f_{n+1}(x)=\sqrt{x+f_n(x)} \leqslant x+f_n(x)+\frac{1}{4}=f_n(x)-a$, и, значит, $f_{n+1}(x) \leqslant f_0(x)-(n+1)a=1-(n+1)a$, из чего видно, что при достаточно большом n число $f_{n+1}(x)$, если оно определено, должно быть отрицательно, что невозможно.

13. Предположим, что наш многогранник имеет не меньше 5 граней. Пусть S_1, S_2 — две грани, имеющие общее ребро, и пусть A — внутренняя точка этого ребра. Пусть, далее, S_3 — еще одна грань; она имеет общее ребро по крайней мере с тремя гранями, значит, по крайней мере с одной гранью, отличной от S_1 и S_2. Обозначим эту последнюю грань через S_4 и обозначим через B внутреннюю точку общего ребра граней S_3 и S_4. По предположению имеется по крайней мере еще одна грань, S_5; возьмем на ней внутреннюю точку C. Плоскость, проходящая через точки A, B, C, пересекает все грани S_1, ..., S_5, и, значит, в сечении будет по крайней мере пятиугольник. Противоречие. Значит, число граней не больше 4 и наш многогранник — тетраэдр.

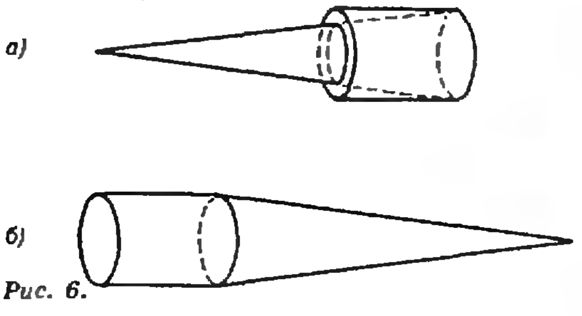


Рис. 6.

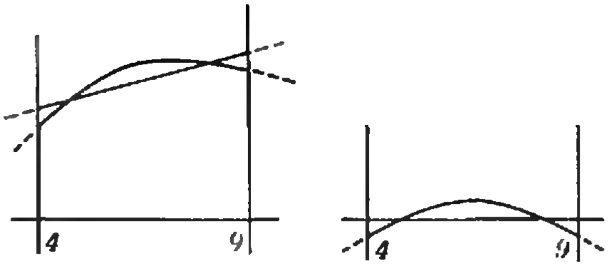


Рис. 7. а) б)

14. 19/27 или 0. Решение. Если R — радиус основания цилиндра и конуса, h и H — их высоты, то $1=\pi R^2h=\frac{1}{3}\pi R^2H$, откуда $h=\frac{1}{3}H$. Возможны два расположения наших цилиндра и конуса (рис. 6). При расположении, как на рисунке 6, *а*, общей частью будет усеченный конус, объем которого равен $\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}R\right)^2\left(\frac{2}{3}H\right)=\frac{1}{3}\pi R^2H-\frac{8}{27}\cdot\frac{1}{3}\pi R^2H=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$; при расположении как на рисунке 6, *б* объем общей части равен 0.

15. $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{49}{40}$; формула $\sqrt{x} \approx \frac{1}{5}x+\frac{49}{40}$ при $4 \leqslant x \leqslant 9$ допускает погрешность не больше $\frac{1}{40}$. Решение. Нарисуем графики функций $y=\sqrt{x}$, $y=ax+b$ и $y=\sqrt{x}-ax-b$ (рис. 7). Производная функции $y=\sqrt{x}-ax-b$ равна $\frac{1}{2\sqrt{x}}-a$ и обращается в 0 в единственной точке $x=\frac{1}{4a^2}$. Функция может достигать экстремума в точке $\frac{1}{4a^2}$ и в концах отрезка. Значения в этих трех точках равны $-4a-b+2$, $\frac{1}{4a}-b$, $-9a-b+3$. Наибольшая погрешность равна максимуму абсолютных величин трех этих чисел. Эта погрешность будет минимальной, если все три абсолютных величины одинаковы (докажите!); при этом среднее число будет положительно, а крайние числа — отрицательны (см. рис. 7). Итак,

$$4a+b-2=\frac{1}{4a}-b=9a+b-3,$$

откуда $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{49}{40}$; при этом максимальная погрешность равна $4a+b-2=\frac{4}{5}+\frac{49}{40}-2=\frac{1}{40}$. Пример: $\sqrt{5} \approx \frac{1}{5}\cdot 5+\frac{49}{40}=2{,}225$; на самом же деле $\sqrt{5}=2{,}236$...

[illegible]венства и графики

1. $[3-\sqrt{10};\ 1) \cup (5;\ 3+\sqrt{10}]$.
2. $(5;\ 6)$.
3. $\left(\frac{6}{5};\ \frac{4}{3}\right]$.

4. $(-1; 5)$.
5. $(-\infty; -9] \cup (3; \infty)$.
6. $\left[-\frac{1}{2}; 1\right]$.
7. $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$.
8. $\left[-\frac{9}{5}; -\frac{16}{9}\right)$.
9. $\left[-1; \frac{5}{4}\right)$.
10. $(-\infty; 3]$.

[redacted]ерхностное натяжение апиллярные явления

1. Примерно 0,4 %; показания занижены.
2. $h=\frac{l}{2(1+\rho gl/(2p_0))}=9{,}9$ см.
3. Будет сдуваться меньший пузырь.
4. В месте прикосновения образуется большая капля, которая уже не удерживается силами поверхностного натяжения.
5. В сторону сужения.
6. $r_x=\frac{rR}{R-r}$.

[redacted]нградский государственный ерситет им. А. А. Жданова

Вариант 1

1. 137. **Указание.** Если $\overline{abc}$ — искомое число (a, b, c — цифры), то $100a+10b+c+594=100c+10b+a$, т. е. $c-a=6$, откуда либо $c=9$, $a=3$, либо $c=8$, $a=2$, либо $c=7$, $a=1$. Первые два случая невозможны.
2. $(-\infty; (\sqrt{5}-1)/2]$.
3.1. $a=0$. **Указание.** Максимум $xy=(-8a^2+2a+1)/4$ достигается при таком a, для которого система имеет решения.
3.2. $\{-1/4\}$. **Указание.** Выполним замену $y=\log_{3x+2}(2x+3)$.
3.3. $x_1=\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$, $x_2=\frac{\pi}{3}+l\pi$ $(k, l\in \mathbf{Z})$. **Указание.** Из данного уравнения следует, что $8\cos^2 x\sin x=\sin x+\sqrt{3}\cos x$, откуда $\sin 3x=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin x=\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$.
4. $a^2b^2(a^2+b^2)/(a^2+b^2+ab)^2$. **Указание.** Пусть x — сторона квадрата. Тогда $x=\frac{ch}{c+h}$, где c — гипотенуза, h — высота, опущенная на гипотенузу.
5. 2. **Указание.** Длины четырех из шести ребер пирамиды равны $\sqrt{3}$. Пусть оставшиеся два противоположных ребра имеют длину a. Выразив через a объем пирамиды, получим уравнение, из которого найдем a.

Вариант 2

1. 12 км/ч.
2. $\{2\}$.
3.1. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$ $(k\in \mathbf{Z})$.
3.2. $a\in(36\pi^2; 64\pi^2)$. **Указание.** Восемь решений получаются по формуле $x=\pm\sqrt{a-4k^2\pi^2}$ при $k=0, 1, 2, 3$.
4. $h\sqrt{4r^2\sin^2\alpha-h^2}$. **Указание.** Средняя линия равнобедренной трапеции равна большему из отрезков, на которые высота трапеции делит ее большее основание.
5. $2(V\sin\alpha/2)^{1/3}(3-12\sin^2\alpha/2)^{-1/6}$. **Указание.** Если x — сторона основания, h — высота призмы, то $h=\sqrt{\frac{x^2}{4\sin^2\alpha/2}-x^2}$.

Вариант 3

1. 182 км. **Указание.** Пусть u и v — скорости соответственно первого и второго мотоциклов, а S — расстояние от A до B. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{S+13}{u}=\dfrac{S-13}{v}, \\ \dfrac{2S+\frac{S}{7}}{u}=\dfrac{S+\frac{6S}{7}}{v}, \end{cases}$$

откуда $u/v=15/13$, $S=182$.
2.1. $\{\sqrt{3}/8\}$. 2.2. $\{3\}$.
3. $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=(-1)^{l+1}\frac{\pi}{18}+\frac{l\pi}{3}$ $(k, l\in \mathbf{Z})$.
4. $\frac{1}{2}\arcsin\frac{120}{169}$; $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{120}{169}$. **Указание.** Пусть a, b — катеты, c — гипотенуза, r — радиус вписанной окружности. Тогда $2r=a+b-c$, откуда $\sin\alpha+\cos\alpha=17/13$, где α — острый угол треугольника.
5.1. $a^2\sqrt{3}/6$. **Указание.** Секущая плоскость проходит через вершину основания пирамиды, а сечение — четырехугольник с перпендикулярными диагоналями.
5.2. $[2; 3)\cup(3; 4)\cup(4; \infty)$.

Вариант 4

1. 20 г.
2. $\{-1; 2\}$.
3. $x_1=k\pi$, $x_2=\frac{\pi}{6}(12l+1)$, $x_3=\frac{\pi}{6}(12m+5)$, $x_4=\frac{\pi}{2}(4n+1)$ $(m, n, k, l\in \mathbf{Z})$. **Указание.** Уравнение равносильно системе $\sin^2 x=\sin^2 3x-\sin^2 2x$, $\sin x\geqslant 0$.
4. $3\sqrt{3}$. **Указание.** $AE\cdot BC=CD\cdot AB$, $CD=2\sqrt{3}$.
5. $\frac{2}{3}r^3\sin^2\alpha\sqrt{3\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\alpha}$. **Указание.** Сторона основания пирамиды равна $2r\sin\alpha$, боковое ребро равно $2r\cos\frac{\alpha}{2}$.

Вариант 5

1. 3 ч.
2.1. $\{3\}$.
2.2. 9.
3.1. $(0; 1/\sqrt{10}]\cup[10; \infty)$. **Указание.** Прологарифмируйте и выполните замену $y=\lg x$.
3.2. $x_1=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+(-1)^l\times\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}+l\pi$ $(k, l\in \mathbf{Z})$. **Указание.** Выполните замену $y=\sin x+\cos x$ (при этом $\sin 2x=y^2-1$).
4. $\sqrt{a(a+b)}$, $\sqrt{b(a+b)}$. **Указание.** Пусть ABC данный треугольник, O — середина гипо-

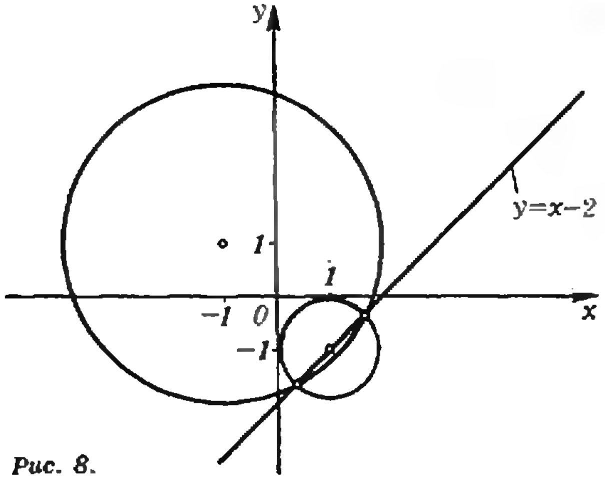


Рис. 8.

тенузы AB. Отрезок OC перпендикулярен прямой из условия задачи, а катеты AC и BC — диагонали двух прямоугольных трапеций.

5.1. $H\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Указание. Осевое сечение конуса — равнобедренный треугольник высоты H с углом при вершине α, на основании этого треугольника как на диаметре построена окружность радиусом $r=H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Длина хорды, высекаемой из этой окружности углом при вершине, равна $r\cos\alpha$.

5.2. См. рис. 8. Указание. При $y\geqslant x-2$ получаем неравенство $(x-1)^2+(y+1)^2\leqslant 1$, при $y\leqslant x-2$ — неравенство $(x+1)^2+(y-1)^2\leqslant 9$.

Вариант 6

1. 14 км/ч, 2 км/ч.

2. $\{3\}$.

3. $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{8}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\cos 2x\leqslant\frac{1}{2},\\ \sin x<\cos x,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}-\cos 2x>(\sin x-\cos x)^2,\\ \sin x\geqslant\cos x,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases}$$

4. 2. Указание. Введем систему координат так, чтобы ось Oy пошла по стороне AB, а ось OX по стороне AD. Пусть $(x, a/2)$ — координаты точки O, где a — сторона квадрата. Найдем a из системы

$$\begin{cases}x^2+\frac{a^2}{4}=25,\\ (x-a)^2+\frac{a^2}{4}=13,\\ x>a.\end{cases}$$

5. $\arccos(-\cos^2\alpha)$. Указание. Пусть h — высота боковой грани, опущенная из вершины основания, l — боковое ребро, φ — искомый угол, 1 — сторона основания. Тогда $h^2(1-\cos\varphi)=1$, $hl=1/\cos\alpha$, $l^2=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)$.

[redacted]инградский государственный огический институт им. А. И. Герцена

1. $-1/2$.

2. а) $\{-2; -1; 0; 1\}$. Указание. Выполните замену $y=x^2+x+1$; б) $x=\frac{\pi}{4}(4k+1)$, $k\in Z$.

3. $[8; \infty)$.

4. $y_{\min}=-\frac{\pi}{12}-\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi k$, $y_{\max}=\frac{7\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\pi n$, $k, n\in Z$.

5. Указание. Пусть BD и BE — высота и медиана, делящие угол B треугольника на равные части. Треугольники ABE и BEC — равнобедренные.

6. Решение. Пусть E — точка пересечения биссектрисы BD угла B с описанной окружностью. Так как $\triangle ABE\backsim\triangle BDC$, имеем $AB\cdot BC=BD\cdot BE$ (1). Из подобия $\triangle ADE\backsim\triangle BDC$, имеем $AD\cdot DC=BD\cdot DE$ (2). Вычитая из (1) равенство (2), получаем требуемое.

7. Указание. Пусть O_1 и O_2 — центры квадратов, O — точки пересечения диагоналей трапеции. Точка O_1 получается из O_2 гомотетий с центром O и коэффициентом, равным отношению соответствующих оснований трапеции.

8. 72. Указание. В трапецию можно вписать окружность.

9. $a\sqrt{6}/6$. Указание. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра OK, где O — центр грани $ABCD$ куба, а K — точка на диагонали B_1D.

10. Минус. 11. $(6-k)/9$. 12. $a<5$. 14. а) $\{-4; -2; 0; 2; 4\}$; б) $\varnothing$. 15. а) $(0; 4)$; б) $(0; 1]\cup[4; +\infty)$. 16. $[-8; -2)\cup(-2; -3/2)\cup(0; 1/2)\cup(1/2; \infty)$.

17. а) $y=x^2-2$ при $x<-5/3$, $y=2-x^2$ при $x>-5/3$; б) $y=8-3x$ при $x<8/3$; в) $y=|3x-4|-7$.

18. 4. 19. 5. 20. 1. 21. $3\sqrt{35}$. 22. $4\sqrt{6}$.

[redacted]инградский политехнический итут им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. $\{\log_6 2; -1\}$.

2. $\left\{\left(-\frac{41}{25}; \frac{2}{3}\right); \left(-\frac{46}{25}; 1\right)\right\}$.

3. $\left\{k\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{4};\ n\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right\}$; $k, n\in Z$.

4. $\left(0; \frac{1}{27}\right)\cup(\sqrt[8]{27}; +\infty)$.

5. $\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{-1-2\cos\alpha}}\right)$. Указание. Пусть r — радиус вписанного шара, a — сторона основания, d — высота боковой грани, l — апофема пирамиды, h — ее высота. Тогда $h=r\left(1+\frac{2l}{a\sqrt{3}}\right)$, $la=d\sqrt{l^2+\frac{a^2}{4}}$, $a\sqrt{3}=2d\sin\alpha/2$.

Вариант 2

1. $\{(4; 3\sqrt[4]{3}); (4^{-7/6}; 3^{-43/36})\}$.

2. 81/169.

3. $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 1\right)$. **Указание.** Возведя обе части неравенства в квадрат, получаем эквивалентное неравенство. Переносим все члены в левую часть. Разность квадратов раскладываем на множители.

4. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{36}{89} + \pi k$, $k \in Z$. **Указание.** Применяя формулу для косинуса тройного аргумента, знаменатель первого слагаемого в левой части уравнения разложим на множители. После сокращения общего множителя в числителе и знаменателе уравнение сведется к линейному относительно $\cos 2x$.

5. $2\arccos\frac{\cos\frac{\pi}{5}}{\sin\frac{\varphi}{2}}$. **Указание.** Пусть γ — искомый угол, a — сторона основания, d — высота боковой грани, проведенная из вершины основания, l — боковое ребро. Тогда $a\cos\frac{\pi}{5} = d\sin\frac{\varphi}{2}$, $d = l\sin\gamma$, $a = 2l\sin\frac{\gamma}{2}$.

Физика

1. $\cos\alpha = 1 - 2\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 \frac{v^2}{gl} = 0{,}87$.

2. $a = g(\sin\beta - \mu\cos\beta/\sin\alpha)$.

3. $N = 5 \cdot 10^{-2}$ Вт. **Указание.** Воспользуйтесь соотношением, связывающим изменение потенциальной энергии взаимодействия с силой этого взаимодействия: $F = -\Delta W/\Delta x$.

4. $$x = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{p_0}{\rho g} + l\right) - \sqrt{\left(\frac{p_0}{\rho g} + l\right)^2 - 4h\left(\frac{p_0}{\rho g} + h - l\right)}\right) = 3{,}5 \text{ см},$$
$$l_0 = \frac{p_0}{\rho g} + h = 95 \text{ см},$$
где $\rho = 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м^3 — плотность ртути.

5. $p_2 = 2p_1V_1T_2/(V_2T_1) = 8 \cdot 10^5$ Па $= 8$ атм.

6. $Q = {}^5/_2 V_1(p_2 - p_1)$.

7. $v_{max} = q/\sqrt{2\pi\varepsilon_0 ma} = 9{,}5 \cdot 10^{-2}$ м/с, где $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная.

8. $x = \frac{1}{4}\frac{U}{U_0}\frac{l}{d}(2L + l) = 3 \cdot 10^{-2}$ м $= 3$ см.

9. $\lambda = 2\pi c\sqrt{\frac{\mathscr{E}C}{\Delta I/\Delta t}} = 2{,}45 \cdot 10^3$ м.

10. $l = 2h\sin\alpha/\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha} = 0{,}97$ м.

[redacted]инградский электротехнический татут им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) $\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$.

б) 7. **Указание.** Функция $f(t) = 7 - t - t^2$ при $t \geqslant 0$ убывает.

в) $0 \leqslant x \leqslant 1$.

г) 2 решения при $a < 7$, 1 решение при $a = 7$; нет решений при $a > 7$. **Указание.** Уравнение $7 - t - t^2 = a$ в области $t \geqslant 0$ не имеет решений, если $a > 7$, и имеет одно (положительное) решение, если $a < 7$.

2. а) **Указание.** $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AC \times AB\cos\alpha$. б) $\alpha = \frac{\pi}{3}$. **Указание.** В области определения функции g уравнение $g(\alpha) = 4\sqrt{3}$ равносильно уравнению $\sin(\alpha + \pi/6) = 1$. в) $4\sqrt{3}$. **Указание.** Производная $g'(\alpha) = 4\frac{1 - 2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ положительна при $\pi > \alpha > \frac{\pi}{3}$ и отрицательна при $\frac{\pi}{3} > \alpha > 0$.

3. а) **Указание.** Пусть $b = 2(a^2 - 3a + 2)$; $p(x) = x^2 - bx$. Тогда $h(a) = p(-1)$ при $b > 0$; $h(a) = p(1)$ при $b < 0$.

б) $a_1 = \frac{3}{2}$; $a_2 = \frac{3 + \sqrt{2}}{2}$; $a_3 = \frac{3 - \sqrt{2}}{2}$.

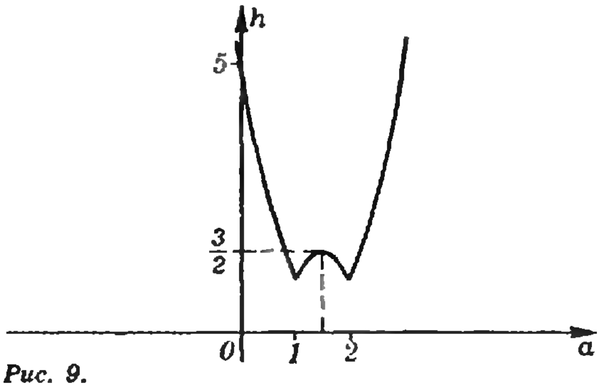


Рис. 9.

в) См. рис. 9.

Вариант 2

1. а) $\{(1; -1)\}$.

б) При $a = 2$ или при $a < 1$.

в) При $a \geqslant 0$. **Указание.** Исключение из системы параметра a приводит к соотношению $(\sqrt{x} - 1)(y + 1) = 0$.

2. а) **Указание.** Радиусы, проведенные в точки касания P, Q, R разбивают треугольник PQR на три равнобедренных треугольника с углами при вершинах $\pi - \alpha$, $\frac{2\pi}{3}$, $\alpha + \frac{\pi}{3}$.

б) $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

в) Часть синусоиды
$$s = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\alpha + \pi/6),$$
отвечающая области допустимых значений $0 < \alpha < 2\pi/3$.

3. а) -10.

б) Для любых допустимых x

$$f(x)=3-\frac{2}{2\cos^2\frac{x}{2}}-\sqrt{\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}}=$$
$$=3-\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)-\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|.$$

в) $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$. Указание. Из неравенства $2-t^2-|t|\geqslant 0$, $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, получаем $|t|\leqslant 1$.

г) При $a\leqslant 2$. Указание. При $t\geqslant 0$ функция $g(t)=2-t^2-|t|$ задается выражением $2-t^2-t$, монотонно убывает с ростом t и принимает все возможные значения из промежутка $(-\infty, 2)$. Кроме того, $g(t)=g(-t)$.

Физика

1. $Q=mg(h-g(\Delta t)^2/8)=0{,}2$ Дж.
2. Нить разорвется, так как $F_н=3mg=29{,}4$ Н$>F=24{,}5$ Н.
3. $\alpha=1-n/k$.
4. $p=\frac{2}{3}\frac{E}{V}=0{,}8\cdot 10^6$ Па.
5. $A=pV(T_2/T_1-1)=300$ Дж.
6. $I=\frac{\mathscr{E} vb\varepsilon_0(\varepsilon-1)}{d}$.
7. $q=\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mgd^3/\sqrt{4l^2-d^2}}\approx 5{,}2\cdot 10^{-8}$ Кл (здесь $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).
8. $r=R/\sqrt{2}$.
9. $\lambda\approx d\alpha\approx 3{,}14\cdot 10^{-7}$ м (здесь $\alpha=3^\circ=\pi/60$ рад).
10. $v=\sqrt{\frac{2}{m}\left(\frac{hc}{\lambda}-A\right)}=2{,}2\cdot 10^5$ м/с (здесь $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона, $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света, $A=4$ эВ$=6{,}4\cdot 10^{-19}$ Дж — работа выхода электрона).

[illegible]ковский авиационный институт [illegible] Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. $\{2\}$.
2. $y=1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.
3. 24.
4. $x_1=\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k, n\in Z$.
5. $\left|\frac{2}{5}-\cos^2\alpha\right|$. Указание. Треугольник AMN подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия $\cos\alpha$, а площадь треугольника AMB составляет 2/5 площади треугольника ABC.
6. $(0;\ 1)\cup[2;\ 3)\cup[6;\ \infty)$.
7. $[0;\ 5+2\sqrt{6}\,]$. Указание. Точки $x=0$ и $x=-2$ удовлетворяют неравенству при любых a. Поэтому множество решений неравенства $|x|(x-1)\leqslant a(x+2)$ (*) должно содержать интервал $(-2;\ 0)$. При $a<0$ уравнение $-x(x-1)=a(x+2)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $(-2; 0)$, и поэтому такие a не удовлетворяют условию. При $5+2\sqrt{6}>a\geqslant 0$ уравнение $|x|(x-1)=a(x+2)$ имеет единственный корень x_0, больший 1, и не имеет отрицательных корней, так что неравенство (*) справедливо при всех $x\leqslant x_0$. При $a=5+2\sqrt{6}$ неравенство (*) также справедливо при таких x. Если же $a>5+2\sqrt{6}$, то уравнение $-x(x-1)=a(x+2)$ имеет два отрицательных корня x_1 и x_2 $(x_1<x_2)$, и множество решений неравенства является объединением промежутков $(-\infty,\ x_1)\cup(x_2;\ x_0)$.
8. $(b^3\sin 3\alpha\cos^2\beta\sin\beta)$ 3. Указание. Основанием высоты SD пирамиды является середина гипотенузы треугольника ABC.

Вариант 2

1. $\{2\}$.
2. $-\sqrt{(1+a)/(1-a)}$.
3. $x_1=4$ и $x_2=\pi k$, $k\in Z$.
4. $(0;\ 1)\cup(1;\ 7/6)$.
5. $\{(0;\ 1);\ (1;\ 0)\}$.
6. 30°, 150°.
7. $f(x)=\frac{1}{14}x+\frac{15}{14}$; $g(x)=-\frac{2}{7}x+\frac{5}{7}$. Указание. Функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют системе
$$\begin{cases} f(x)+2g(x)=-0{,}5x+2{,}5,\\ 3f(x)-g(x)=0{,}5x+2{,}5.\end{cases}$$
8. $\sqrt{\frac{211}{147}}$. Указание. Пусть L точка пересечения апофемы SD пирамиды с отрезком MN, а K — середина SA. Отношение площадей равно отношению отрезков KL и AL. Отрезок KL следует с помощью теоремы косинусов выразить через AL и AK, а $\cos\angle KAL$ найти из треугольника ASL.

Физика

Вариант 1

2. $t=\omega_0 R/(\mu g)$; $N=\omega_0^2 R/(4\pi\mu g)$.
3. $M=mR\Delta T/(Q_1-Q_2)=0{,}033$ кг/моль (что близко к молярной массе кислорода $M_к=0{,}032$ кг/моль).
4. $\varphi_A-\varphi_B=(\sigma_2 a-\sigma_1 b)/(2\varepsilon_0)=1100$ В.
5. $\nu=\nu_{\min}+eU_з/h=1{,}32\cdot 10^{15}$ Гц; $A_{вых}=h\nu_{\min}=4\cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 2{,}5$ эВ.

Вариант 2

2. $H_{\max}=50\ h/27$. Указание. После прохождения положения равновесия до того момента, как натяжение нити станет равным нулю, шарик движется по окружности радиусом h, а затем — по параболе (как тело, брошенное под углом к горизонту).
3. $p'=2(1+z)\,mRT'/(MV)\approx 1{,}9\cdot 10^8$ Па (при полной ионизации кислорода концентрация электронов в плазме больше концентрации ядер в $z=8$ раз); $p'/p=2(1+z)T'/T\approx 6\cdot 10^4$.
4. $I=I_1I_2/(I_1+I_2)=2$ А.
5. $n=ch/(E\lambda)=1{,}5$.

[illegible]ковский [illegible]гетический институт

Математика

Вариант 1

1. $f'(-1)=-4$, $f'(3)=0$. 2. $\{0;\ 1\}$.

3. 10 ч, 15 ч. 4. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. $h^3\sqrt{3}/(k^2-1)$.

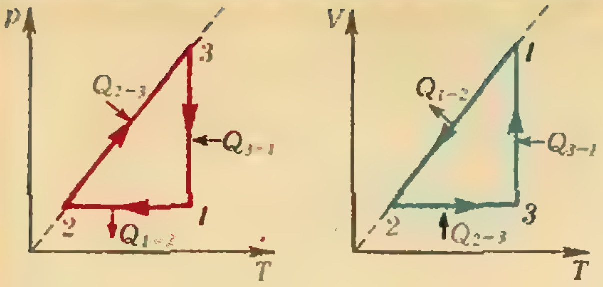


Рис. 10.

Вариант 2

1. $f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}$, $f'(2)=32$. **2.** $\{0\}$. **3.** В 16 ч и в 14 ч 15 мин.

4. $x=\arcsin\frac{2}{\sqrt{13}}+2\pi n$, $n\in Z$.

5. $\pi R^3(k+1)^2/3(k-1)$.

Физика

Вариант 1

2. Непосредственно после включения спираль лампы еще не нагрелась и поэтому ее сопротивление меньше, чем в нагретом состоянии.
3. $v_0=v+(gh)/(2v)=344{,}3$ м/с.
4. $m=\rho_1\rho_2hS/(\rho_2-\rho_1)=6{,}75$ кг.
5. Электрон движется по окружности радиусом $R=vm/(Be)$.

Вариант 2

2. Нет, нельзя.
3. См. рис. 10.
4. $A=m((v^2-v_0^2)-2gh)/2=-81{,}3$ Дж.
5. $R=(\mathscr{E}_1r_1-\mathscr{E}_2r_2)/\mathscr{E}_2=0{,}16$ Ом.

ант» для младших школьников
«Квант» № 3)

1. Сначала, посадив в лодку козла, перевозим по очереди собаку, а затем капусту. Возвращаемся с козлом и, высадив его, берем двух волков; высадив их, возвращаемся с собакой. Последним рейсом перевозим собаку и козла.
2. Задача основана на том, что прибавление к группе чисел их среднего арифметического дает группу чисел с тем же средним арифметическим. Ответ: последний стрелок выбил 70 очков.
3. $285\times39=11\,115$.
4. Вспотевший спортсмен теряет много тепла при испарении, что может привести к простуде, если не укрыться.

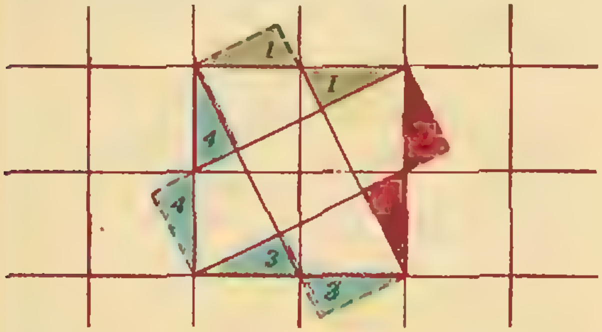


Рис. 11.

5. См. рис. 11. Пять квадратиков равны по площади четырем большим квадратам, $5x=400$ см², $x=80$ см².

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов,
Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин,
Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев,
В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев,
С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин,
Е. Д. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов,
Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
Н. С. Кузьмина, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 15.02.88. Подписано к печати 25.03.88.
Т-09540. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,30. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 8,28
Тираж 196 374 экз. Цена 40 коп. Заказ 340.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

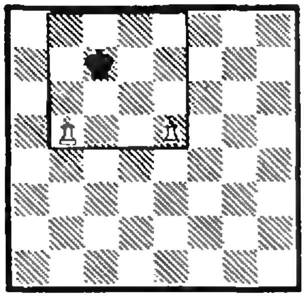
Шахматная страничка

БЛУЖДАЮЩИЙ КВАДРАТ

В шахматном окончании алгоритм игры часто носит геометрический характер. Мы не раз упоминали правило квадрата и метод треугольника. Познакомимся теперь с правилом блуждающего квадрата.

Речь идет о позициях, в которых король борется с двумя изолированными проходными пешками противника, расположенными на одной горизонтали. Построим квадрат, в углах которого стоят эти пешки, причем они движутся внутрь квадрата. (При продвижении пешек квадрат меняет свое положение, поэтому и называется блуждающим.)

Правило блуждающего квадрата заключается в следующем. *Если он касается края доски или выходит за ее пределы, то король не может помешать самостоятельному продвижению пешек в ферзи.*



Здесь квадрат коснулся края доски, белые выигрывают независимо от очереди хода и расположения их короля: 1...Крb6 2. e6 Крc7 3. e7 Крd7 4. b6 и т. д.

А как обстоит дело, если блуждающий квадрат еще не достиг края доски? В этом случае самостоятельно пешки пройти не могут, все зависит от длины стороны квадрата. Если она равна трем (пешки a5, c5, король b7), то пешки поддерживают друг друга, но для короля безопасны (1...Крc6 2. a6 Крc7 и король перемещается с c7 на c6 и обратно). Если же сторона квадрата — четыре, то пешки гибнут. Если, например, белые пешки стоят на c4 и f4, а черный король — на d6, то король забирает обе пешки независимо от очереди хода: 1...Крc5 2. f5 Крd6! 3. f6 Крe6 4. c5 Кр:f6 5. c6 Крe6, и король успевает в квадрат оставшейся пешки.

При стороне блуждающего квадрата, равной пяти, ситуация та же, что и при стороне три — пешки держат сами себя, но пройти в ферзи не могут.

Остальные случаи совсем просты: блуждающих квадратов со стороной 6 (не касающихся края доски) всего три (пешки a2, f2; b2, g2; c2, h2). За счет двойного первого хода одна из пешек проходит в ферзи. Квадраты со стороной 7 или 8 достигают края доски, и пешки тоже берут верх.

Разумеется, в тех случаях, когда король не пускает пешки, но не может их взять, все зависит от возможностей другого короля. Рассмотрим теперь несколько примеров из коллекции мастера С. Веселовского.

Штольц — Нимцович
(Берлин, 1928 г.)

Белые: Крd2, п. п. a4, b5, g3; черные: Крe5, п. п. d4, f5 g4. 1...f4! 2. gf+Крd6! Черные пешки образуют блуждающий квадрат, касающийся первой горизонтали, и, значит, самостоятельно проходят в ферзи. Любопытно, что после 3. f5 и белые пешки образуют блуждающий квадрат, причем даже выходящий за пределы доски, однако они уступают неприятельским пешкам в скорости движения, поэтому черные берут верх.

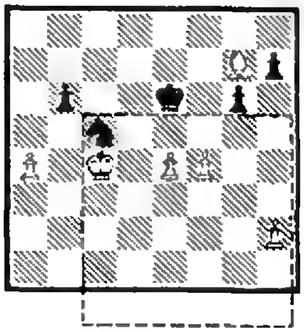
Вохл — Соломон
(Австралия, 1986 г.)

Белые: Крf2, п. п. d4, f3, g3, h4; черные: Крe7, п. п. e5, f5, f7, h5. Напрашивается 1. de, однако после 1...Крe6 2. f4 Крd5 3. Крe3 Крc4 белые не могут выиграть, несмотря на лишнюю пешку. Другое дело, если белые жертвуют пешку: 1. d5! e4 2. g4! Черные сдались, после 2...fg 3. fg hg 4. h5 белые строят необходимый квадрат на пешках d5 и h5. Занятен и другой вариант: 1...Крd6 2. g4 fg 3. fg Кр:d5 4. gh Крe6 5. h6 Крf6 6. h5, черные гибнут из-за цугцванга.

Штальберг — Тартаковер
(Париж, 1934 г.)

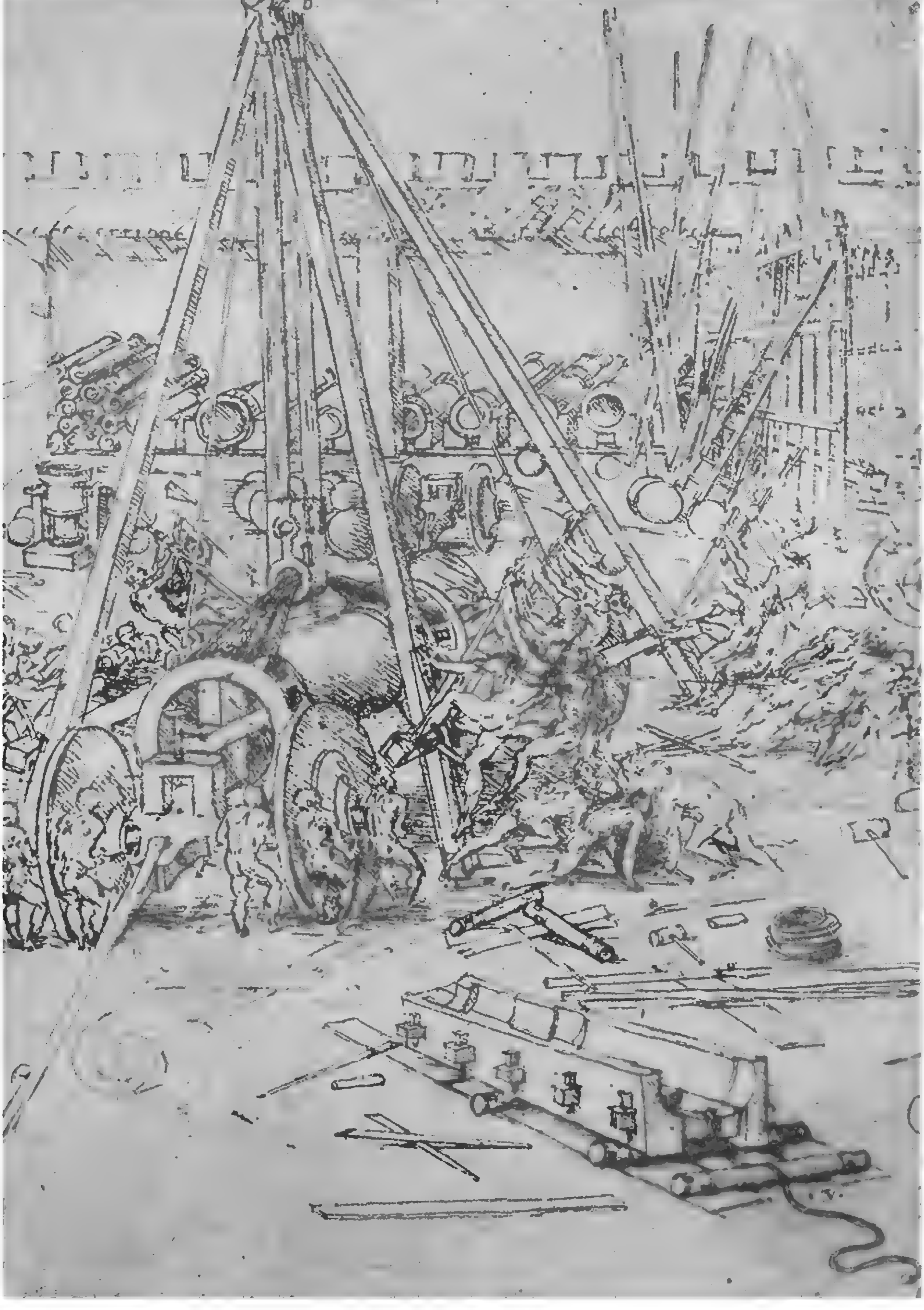
Белые: Крe2, п. п. c4, d4, g6, h2; черные: Крe6, п. п. a7, b7, d5, g7. Белые только что сыграли 1. c4 и в случае 1...Крf6 2. cd Кр:g6 могли спокойно сдаваться. Однако Тартаковер решил прихватить пешку, обнаружив пробелы в знании шахматной геометрии. 1...dc? 2. h4!, и белые построили блуждающий квадрат 5×5, касающийся края доски (наличие пешек «g» не имеет значения): 2...a5 3. h5 a4 4. h6 gh 5. d5+Крf6 6. d6 a3 7. d7 Крe7 8. g7 с выигрышем.

Карпов — Соколов
(Линарес, 1987 г.)



Удивительно, но в данном случае построение блуждающего квадрата могло сыграть важную роль в суперфинальном матче претендентов. В партии последовало 1...К:e4? 2. Крb5 Кc5 3. Сf8, и белые легко выиграли. Между тем в распоряжении Соколова был следующий вариант: 1...К:a4 2. Сd4 Крd6 3. Крb5 Кc5 4. С:c5+ bc 5. h3 (5. h4 h6 6. Крc4 Крc6 7. e5 h5— ничья) и теперь 5...g5! с ничьей (6.fg Крe5), поскольку 6. f5? вообще ведет к проигрышу белых: 6...h5, и у черных блуждающий квадрат со стороной 6 (показан пунктиром).

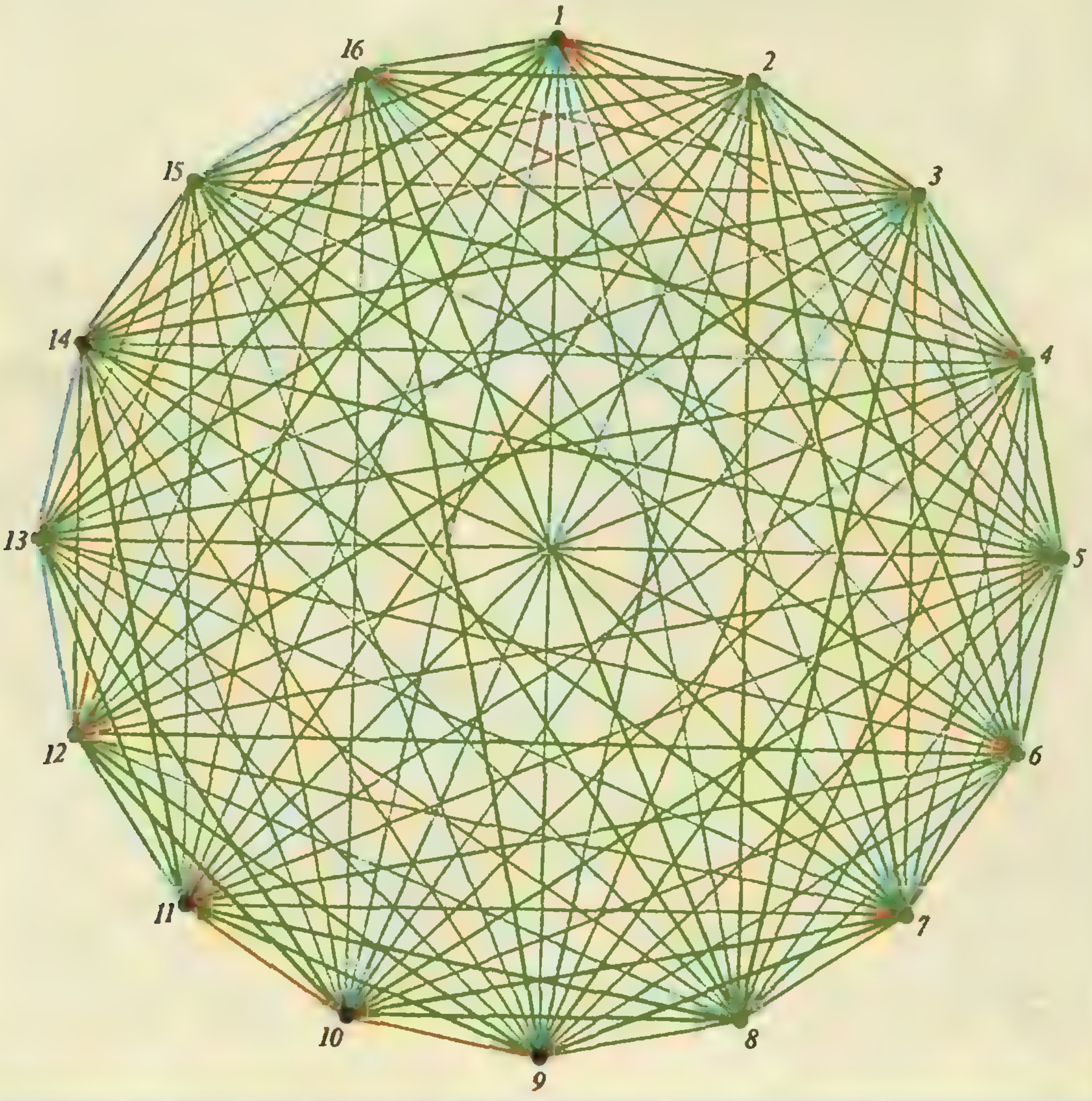
Е. Я. Гик



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь показана трехцветная раскраска полного графа K_{16}, т. е. графа с 16 вершинами, все пары вершин которого соединены ребрами. Эта раскраска замечательна тем, что в ней нет ни одного одноцветного треугольника, в то время как любая (трехцветная) раскраска полного графа с бóльшим числом вершин (например, K_{23}) обязательно содержит такой треугольник. Полный граф с наименьшим числом вершин, в котором при раскраске обязательно встречается запрещенная одноцветная конфигурация (в данном случае — треугольники), называется «графом Рамсея» (для данного набора запрещенных конфигураций). Так, граф K_{17} — соответствующий граф Рамсея. Разумеется, для другого числа цветов и других наборов конфигураций возникают свои графы Рамсея; о них можно прочитать в статье М. Гарднера в этом номере. С каждым графом Рамсея (с n вершинами) связаны головоломка и игра. Головоломка состоит в том, чтобы раскрасить полный граф K_{n-1}, не создав при этом ни одной запрещенной конфигурации. (Так, приведенный здесь рисунок — решение этой головоломки для $n=17$). Игра же проводится на графе Рамсея (скажем, на K_{17}) двумя игроками, которые поочередно раскрашивают ребра графа (здесь — в три цвета), избегая запретных конфигураций (здесь — одноцветных треугольников); проигрывает тот, кто вынужден создать такую конфигурацию. Ничьих не бывает (почему?).



НОМЕР
5

Квант

Основан в 1970 году

1988

5

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Беседа с академиком В. П. Масловым
6 *Н. П. Долбилин.* Жесткость выпуклых многогранников
16 *А. Л. Стасенко.* Коридор входа
26 *А. С. Штейнберг.* Рождение сплава

Задачник «Кванта»

29 Задачи М1101 — М1105, Ф1113 — Ф1117
30 Problems M1101 — M1105, P1113 — P1117
34 Решения задач М1081 — М1085, Ф1093 — Ф1096

Калейдоскоп «Кванта»

32 Циклоида

«Квант» для младших школьников

40 Задачи
41 *С. А. Тихомирова.* Архимедова сила в литературных произведениях

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

45 Закон сохранения энергии
47 Правило Ленца
49 О швартовке, трении и формуле Эйлера

Искусство программирования

51 *А. Г. Щеголев.* Рисует школьная ЭВМ

54 **Варианты вступительных экзаменов**

62 **Ответы, указания, решения**

Смесь *(16—23, 28, 44)*

Наша обложка

1,4 *Многогранник-флексор, предложенный Клауссом Штеффеном.*

2 *Картина французского художника Ж. Сера (1859—1891) «Гавань Гонфлера» — хорошая иллюстрация к заметке «О швартовке, трении и формуле Эйлера», которую вы можете прочитать в этом номере журнала.*

3 *Шахматная страничка.*

© Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

Выдающийся советский ученый Виктор Павлович Маслов — один из крупнейших специалистов по математической физике, лауреат Государственной (1978) и Ленинской (1986) премий. Он известен как своими глубокими теоретическими работами, так и умением доводить до исчерпывающего решения трудные конкретные прикладные задачи. Математически осмыслив метод квантования Бора — Зоммерфельда, В. П. Маслов создал свой знаменитый «канонический оператор», дающий ключ к решению большого числа разнообразных физических и математических задач.

В предлагаемой читателю беседе Виктор Павлович рассказывает о своем пути в науку.

БЕСЕДА С АКАДЕМИКОМ В. П. МАСЛОВЫМ

— Виктор Павлович, когда и как у вас возник интерес к физике и математике? Что повлияло в большей степени — школа, кружки, семья?

— В кружках я не участвовал, в школе ни математикой, ни физикой особенно не увлекался. Наоборот, был довольно слаб в этих предметах, особенно по физике. А это было такое время, когда физикой увлекались многие мои друзья, тогда была мода на физику. Может быть именно мое отставание по физике сыграло некоторую роль: я решил, что у меня не хватает образования, что мне надо пойти на физический факультет, чтобы его восполнить.

— В олимпиадах вы, наверное, не участвовали?

— Один раз я участвовал в олимпиаде по математике. Я пошел более или менее случайно, просто мои друзья пошли туда. Был это второй тур, я решил только одну задачу, после чего ушел. Получил за это грамоту.

— Окончив школу, вы пошли учиться на физический факультет МГУ. Были ли у вас другие варианты выбора жизненного пути?

— Да, я вообще больше увлекался гуманитарными науками. Но мой отчим, известный историк, профессор Борис Федорович Поршнев, сильно меня отговаривал от гуманитарного пути. Собственно говоря, он и уговорил меня идти на физический факультет.

— Кого вы считаете своими учителями? Кто из ваших коллег оказал на вас наибольшее влияние?

— Мой учитель — Сергей Васильевич Фомин. Он работал в пятидесятых годах на кафедре математики физического факультета МГУ. На втором курсе я стал интересоваться некоторыми чисто математическими задачами, в частности алгебраическими. Я обратился тогда к известному алгебраисту Игорю Ростиславовичу Шафаревичу. Некоторое время я занимался с ним, решил даже перейти на мехмат. Но когда я захотел это сделать, профессор Анатолий Алексеевич Власов, у которого я был на кафедре, меня не отпустил. Чтобы проверить, действительно ли я математик, он поставил мне одну математическую задачу. Я ее довольно быстро решил. Но Власов моего доказательства никак не хотел понять, поскольку оно было не прямое, как он, видимо, хотел, а косвенное. Потом мне все-таки удалось его убедить, он согласился меня отпустить. Но тут со мной стал заниматься Сергей Васильевич Фомин. Он меня и отговорил от перехода на мехмат. Тогда я перешел к нему на кафедру математики физического факультета.

— Какие трудности встретились у вас на пути становления ученого?

— Я почувствовал очень большие трудности из-за недостаточного математического образования. Я мало знал специальную литературу. После окончания физического факультета мне пришлось довольно долго привыкать к математическому языку. Поэтому я не сразу был воспринят математиками как математик, а скорее как физик, поскольку язык у меня был для них несколько необычный. Поначалу ряд моих вполне математических работ переписывались математиками, иногда даже без ссылок. Среди математиков установилось мнение, что мои работы не строгие. Пришлось преодолевать эту точку зрения. Это мне удалось, как ни странно, когда я доказал свою компетентность в совершенно других областях математики, а не в тех, которыми я в основном в это время занимался.

— Создается такое впечатление, что вы все время шли по линии наибольшего сопротивления: пошли на физический факультет, потому что физика вам давалась хуже всего, а потом стали заниматься математикой, потому что вам не хватило математического языка. Это что — черта характера?

— Нет, по-видимому, я математикой увлекся на физическом факультете потому, что у меня просто были большие склонности к математике. Как я говорил, это увлечение произошло на втором курсе. Дальше, правда, я стал увлекаться и квантовой механикой, квантовой физикой. Пожалуй, можно сказать, что вообще-то я шел по линии своих увлечений, по линии наименьшего сопротивления в своей жизни. А на физический факультет я, может быть, действительно попал из упрямства: у меня в школьном аттестате была даже тройка по физике.

— Ваши первые работы (впрочем, и многие из нынешних) относятся к фундаментальным исследованиям и интересуют в первую очередь математиков-теоретиков. С другой стороны, вы известнейший математик-прикладник. Как вы соотносите «чистую» математику с физикой и прикладными вопросами?

— Я думаю — удачно сложилось, что я пошел на физический факультет. У меня есть склонность к обобщениям, к математическим и общим постановкам. Мои занятия физикой дали мне источник математических задач; это в целом положительно повлияло на мою работу. В студенческие и аспирантские годы я поставил перед собой ряд проблем, связанных с теоретической физикой. До сих пор не все проблемы мне удалось решить. Я думаю, что такой путь поиска математических задач на границе с теоретической физикой — хороший. С другой стороны, это позволяет оценивать окончательные результаты с точки зрения их приложений к физике или к каким-либо другим прикладным областям. В алгебре, и особенно в теории чисел, есть критерии, по которым обычно оценивается работа. Например, давно ли поставлена задача, кто ее решал и не решил, спортивный элемент, что ли. Если удается такую задачу решить — значит, имеется серьезное продвижение. А вот в математике, связанной с приложениями, таким критерием, в известной степени, является именно приложение, широта возможных приложений. Здесь должна быть определенная интуиция, нужно чувствовать, какие именно задачи, решаемые данным математиком, могут быть полезными. Ну и в этом сильно помогают знания физики и физических проблем. Приведу пример такого математика, как Людвиг Дмитриевич Фаддеев. Он тоже окончил физический факультет. Задачи, которыми он начинал заниматься чуть ли не первым, потом получали широкий резонанс благодаря его и не только его работам. Фаддееву часто удается поймать животрепещущие проблемы одним из первых. Это такие проблемы, как уравнение Кортевега-Дефриза*) или, скажем, обратная задача теории рассеивания. Фаддеев как-то чувствует, какие именно проблемы в дальнейшем будут развиваться. И это связано, в большой степени, с его физическим образованием.

---

*) Дифференциальное уравнение, описывающее волны на неглубоких водоемах, решения которого (так называемые солитоны) обладают очень неожиданными математическими свойствами.

— Недавно, в качестве эксперта-математика, вы участвовали в создании проекта захоронения аварийного блока Чернобыльской АЭС. Что вы можете рассказать об этом?

— По-видимому, в человеке есть какие-то такие скрытые возможности, которые пока наука еще не в состоянии объяснить. Фокусник гипнотизирует человека, и тот на пальцах рук и ног устойчиво висит между двумя стульями. Это показывает совершенно необычайные потенциальные возможности, заложенные в человеке. Меня всегда поражало, насколько велик во время войны оказался потенциал нашего народа и наших ученых. Несмотря на огромные потери, страна после войны оказалась более сильной, чем до нее. Видимо, и здесь есть момент массового гипноза: колоссальное напряжение усилило народ.

Такая же ситуация была у нас, когда мы работали над проблемой Чернобыльской АЭС после взрыва. Это была настолько напряженная и продуктивная работа, что я до сих пор считаю, — такую работу можно проделать за два, три года, но никак не за те два месяца, за которые мы ее выполнили. Притом не только мы — математики, но и все, кто этим занимался, все приехавшие ученые других специальностей были охвачены этим массовым подъемом. Откуда только брались силы — работа шла неимоверно быстро. Никаких бюрократических преград, на преодоление которых в повседневной жизни уходят основные силы ученого. Когда мы продумывали и предлагали какой-либо опыт, я утром, скажем, обращался к организаторам, и в тот же день эксперимент проводился на Чернобыльской АЭС. Мы, конечно, прекрасно знали, как дорого обходится каждый эксперимент, сколько рентген-часов на человека приходится при той или иной проверке. Это создавало необычайное напряжение. Другой пример — мой товарищ по работе В. П. Мясников звонил мне в три часа ночи сообщить, что «дыра» в доказательстве, которую я обнаружил, заделывается — вариант «держится». Или еще мои молодые сотрудники задерживались у меня вечерами после последнего автобуса, оставались ночевать. Когда ребята настолько уставали, что уже вообще не могли больше работать, то уходили в отпуск (это было время отпусков, и я всех их задержал), их заменяли другие. Никогда в своей жизни я не испытывал такого сильного напряжения. Когда решались серьезные вопросы, связанные с саркофагом, и надо было принимать ответственное решение, каждый представлял себе насколько важными могут быть последствия неправильного выбора. Сроки поджимали, ведь саркофаг создавался молниеносно, наше математическое моделирование иногда не успевало. А когда учит и заставляет переделывать природа, это горький и дорогостоящий опыт. Поэтому работа была совершенно необычная, напряженная и интенсивная. А в конечном счете были получены не только расчеты, касающиеся этой станции непосредственно.— хотя мы проводили расчеты только для нее. Но тем не менее в результате математического моделирования получились описания неожиданных для механики эффектов, иногда противоречащих предположениям наших коллег-физиков.

— В прикладных задачах, подобных моделированию поведения сложной системы (типа вышедшей из повиновения АЭС), используется компьютерный эксперимент. Применяли ли вы этот прием?

— Компьютерный эксперимент на самом деле надо было бы применять до того, как это печальное событие произошло. Как говорится, русский человек задним умом крепок — такой компьютерный эксперимент сейчас и был проведен; он прямо показал, что взрыв должен был произойти. После того как взрыв произошел, компьютерный эксперимент, показывающий какой-то один из возможных вариантов поведения реактора, уже на самом деле оказался бы не достаточным, потому, что мы должны были просмотреть все варианты. Ведь наша цель — дать определенные рекомендации. Например, наши расчеты показали, что не обязательно было подводить бетонную плиту (подушку) под саркофаг. Огромные деньги были затрачены, в начале казалось — самая большая опасность в том, что реактор прожжет бетонный пол и грунт под станцией. И вот проделали огромные работы, сделали эту гигантскую бетонную подушку. Но по нашим расчетам — которые, увы, запоздали — оказалось, что и так реактор не прожжет пол при получающихся температурных сгустках. Вы понимаете, сколько вариантов нужно было учесть. А вдруг все-таки возникнет такая ситуация, что прожжет. У нас получилось, что в общем положении, как говорят математики, с точностью до меры нуль, не прожжет.

Для нас станция была черным ящиком, что и как там разломалось было видно только на вертолетных съемках — что закидано, как легли мешки с песком. А что там происходило внутри, нам не было ясно, мы могли выбрать нужную модель только по тем экспериментам, что мы сами ставили. В конце концов мы выбрали модель правильно. Но если говорить о компьютерном эксперименте, то «проиграть» на ЭВМ все возможные варианты здесь было немыслимо. Поэтому теория и расчет должны были сыграть решающую роль.

— Что можно рассказать неспециалистам о ваших научных исследованиях?

— Я могу лишь перечислить области, которые в данный момент меня больше всего интересуют. Это проблемы турбулентности в гидродинамике и в плазме — с одной стороны, задачи теории управления — с другой. Правда, одновременно я сейчас занимаюсь и проблемой больших уклонений в теории вероятностей. Словом, разными совсем вопросами, к сожалению, далекими друг от друга. Хотя, возможно, есть какие-то идейные связи между ними.

— Что вам сейчас больше всего мешает в работе?

— Мне, как наверное и многим, мешают мелкие заботы и хлопоты, отвлекающие от основной работы. Масса всяких мелких дел, и не только моих собственных, но и моих близких друзей. Все они накапливаются и очень сильно мешают. Очень много в нашей жизни совсем не нужной мелкой и нелепой возни. Преодоление бюрократических препонов, потери времени на очереди. Американцы говорят, что время — деньги. Должен признаться, что я трачу основную часть зарплаты на то, чтобы сохранить свое время от подобных потерь по мелочам. Но все равно масса времени пропадает даром, например, на разные бюрократические препоны — с ними уже ничего не поделаешь — ведь взятки давать запрещено. Потеря времени для ученого тяжела потому, что это — потеря эффективности работы, уменьшение КПД.

— Каковы ваши вненаучные увлечения? Хобби? Спорт? Музыка? Чтение?

— Когда-то в студенческие годы я очень увлекался живописью, скульптурой. Не в том смысле, что я сам писал или лепил, но слыл знатоком, не пропускал ни одной выставки, частные коллекции знал хорошо. Сейчас это меня не занимает в такой степени, как раньше. Но тем не менее и сейчас я для себя делаю какие-то открытия в этой области. Недавно, например, я в Марселе совершенно по новому увидел такого замечательного художника, как Монтичелли. Увидел стороны его творчества, которые я раньше не знал, и это произвело на меня сильное впечатление.

Что касается спорта, я очень увлекался академической греблей и до сих пор не мыслю себе отдыха без лодки. Выступал в студенческие и аспирантские годы в соревнованиях, выигрывал. Выступал и на народных лодках, здесь тоже были у меня определенные достижения, на байдарках прогулочных выигрывал — не очень серьезные — соревнования, но, в основном, занимался и продолжаю любить академическую греблю.

— Какие качества вы хотели бы видеть у своих учеников?

— Я бы хотел видеть такие качества, которых мне не достает самому. Тогда, вместе с учениками, я бы смог восполнить эти пробелы.

— А более конкретно?

— Я не хочу выдавать своих недостатков.

(Окончание см. на с. 14)

ЖЕСТКОСТЬ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

Кандидат физико-математических наук
Н. П. ДОЛБИЛИН

Каждый, кто клеил или просто держал в руках картонную модель многогранника, замечал ее жесткость и, возможно, задумывался над этим. Интуиция скорее всего подсказывала, что жесткость модели не случайна, что обусловлена она какими-то пусть запутанными и неясными, но очевидно существующими связями между гранями многогранника. Вопрос о жесткости многогранника — это старый геометрический вопрос и, как оказалось, очень не простой. Прояснился он лишь в наше время, но первый важный шаг в его решении был сделан 175 лет тому назад двадцатитрехлетним математиком Огюстеном Луи Коши, питомцем знаменитой парижской Политехнической школы.

Выпускника Политехнической школы 1807 года Огюстена Луи Коши «по его блестящим достижениям во всех областях математики можно поставить почти рядом с Гауссом». Французского математика «почти рядом» с Карлом Фридрихом Гауссом поставил немецкий математик Феликс Клейн. Это придает высокой оценке творчества Коши особое значение, если учесть, что взаимоотношения между французскими и немецкими математиками, как правило, развивались в атмосфере острой конкуренции, а признание заслуг соперников никогда не отличалось щедростью.

Результаты Коши, принесшие автору славу величайшего математика, относятся в основном к математическому анализу и алгебре, к математической физике и механике. В огромном научном наследии Коши, занимающем 25 внушительных томов (всего у Коши, по данным его биографа, 789 работ), его исследования по геометрии могли бы остаться незамеченными, если бы не его работа «О многоугольниках и многогранниках», опубликованная в «Журнале Политехнической школы» в 1813 году.

Теорема Коши о единственности

Эта работа Коши — а о ней наш рассказ — связана с таким естественным вопросом: в какой мере грани многогранника и порядок их примыкания друг к другу определяют форму многогранника? Поясним этот вопрос на примере. Рассмотрим два многогранника: башню с четырехскатной крышей на кубическом основании и башню, составленную из тех же граней, но с продавленной крышей (рис. 1, 2). Ясно, что эти многогранники не равны, хотя составлены из попарно равных граней, примыкающих друг к

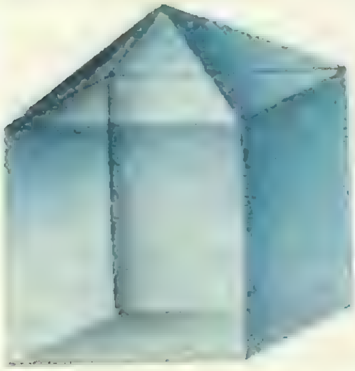


Рис. 1.

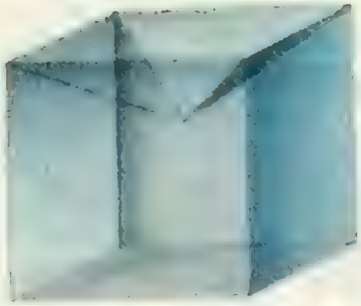


Рис. 2.

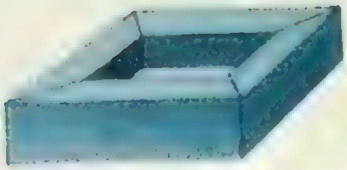


Рис. 3.

другу в одном и том же порядке.

Коши доказал, что подобная ситуация невозможна, если речь идет о двух выпуклых многогранниках.

Теорема Коши. *Два выпуклых многогранника с попарно равными гранями, составленными в одном и том же порядке, равны.*

Для доказательства этой теоремы (оно намечено ниже) юный Коши предложил новый метод, который, по словам академика А. Д. Александрова, «представляет собой одно из прекраснейших рассуждений, какие только знает геометрия». Впоследствии это действительно прекрасное рассуждение стало в теории многогранников одним из стандартных методов доказательства других, аналогичных, теорем единственности.

Гипотеза Эйлера

Вопрос — однозначно ли задается форма многогранной поверхности своими гранями, или поверхность может как-то меняться, несмотря на неизменность своих граней,— интересовал математиков задолго до Коши.

Над вопросом единственности размышлял и великий Эйлер. В 1766 году он высказал гипотезу: «Замкнутая пространственная фигура не допускает изменений, пока не рвется». «Замкнутой пространственной фигурой» у Эйлера считалось то, что сейчас принято называть замкнутой поверхностью. Тем самым предположение Эйлера относилось не только к многогранным поверхностям. Но по отношению к многогранникам уверенность в справедливости этой гипотезы была наиболее основательной. Эта уверенность покоилась на многовековом опыте обращения с многогранниками и по своей силе достигала верования в аксиому.

Простые многогранники

Вопрос о неизменности многогранной поверхности оказался твердым орешком, но прежде, чем в нем разобраться, необходимо уточнить некоторые понятия. Условимся здесь под *многогранником* понимать не тело, ограниченное многоугольниками, как это делается в школе, а поверхность, составленную из этих многоугольников; при этом мы будем предполагать, что наш многогранник склеен из конечного числа конечных многоугольников так, что к каждой стороне любой ее грани приклеена одна и только одна грань*). Многогранник с таким условием называют замкнутым. Условие замкнутости — это естественное условие. Любой из многогранников, изучаемый в школьном курсе — призмы, пирамиды, платоновы тела — замкнутый. Обычный фанерный ящик для посылок, но без крышки, нельзя считать замкнутым многогранником. Но стоит прибить к нему крышку, как получается замкнутый многогранник.

Мы будем также предполагать, что наш многогранник является, как говорят математики, топологической сферой. *Топологическая сфера* — это такая поверхность, которая отличается от обычной «круглой» сферы настолько, насколько изогнувшаяся покрышка спущенного мяча отличается от накачанного. Другими словами, мы предполагаем, что наш многогранник, будь он сделан из резины, можно было бы растянуть без разрывов и склеек в обычную круглую сферу. Условимся называть такой многогранник *простым*. Все выпуклые, в том числе и «школьные», многогранники — простые, так же, как оба многогранника на рисунках 1, 2. На рисунке 3 приведен пример не простого, а *торообразного* многогранника.

Многогранник может быть столь сильно «закручен», что иногда трудно разобраться, простой он или нет. Тем более замечательно, что о многограннике можно сказать, простой он или нет, даже не взглянув на него. Представим, что кто-то сообщил нам число всех вершин В, число всех ребер Р и число всех граней Г неизвестного нам многогранника X. Тогда, подсчитав число $\varphi(X)$, называемое *эйлеровой характеристикой* многогранника X, по формуле

---

*) Дать строгое математическое определение многогранника, охватывающее и невыпуклые многогранники, не так просто, и мы здесь этого делать не будем.

$$\varphi(X) = \text{В} - \text{Р} + \text{Г},$$

можно уверенно сказать, будет ли многогранник X простым. *Многогранник будет простым тогда и только тогда, когда его эйлерова характеристика равна 2.* Для многогранников, не являющихся простыми, эйлерова характеристика не превосходит нуля. В частности, для торообразных многогранников (см. рис. 3) эйлерова характеристика равна нулю.

Изгибаемость многогранников

Представим теперь, что из картонных многоугольников с помощью клейкой ленты мы склеили многогранник (разумеется, конечный, замкнутый, простой). Ясно, что из-за гибкой в каждом ребре связи любые две соседние грани могли бы поворачиваться друг относительно друга вокруг общего ребра, подобно страничкам книги, могли бы... если бы они не были связаны с остальными гранями.

Когда же грани склеены в многогранник, то возникает вопрос: можно ли непрерывно изменять, деформировать многогранник так, чтобы при деформации все его грани оставались неизменными, а изменялись лишь двугранные углы? Если для данного многогранника такая деформация возможна, то многогранник назовем *изгибаемым*, а если нет — *неизгибаемым*.

Таким образом, изгибание многогранника, если оно вообще возможно, связано с изменением двугранных углов. И, хотя каждая пара соседних по ребру граней сама по себе свободна в выборе своего двугранного угла, кажется весьма вероятным, что в обществе других граней эта свобода утрачивается. Возможно, что такого рода «правдоподобные рассуждения» послужили Эйлеру опорой для гипотезы о том, что замкнутые многогранники неизгибаемы.

Вопрос об изгибаемости простых многогранников был решен только спустя два века после Эйлера. Уже в наше время, всего лишь десять лет назад, выяснилось, что относительно многогранников Эйлер в своем предположении был прав... и не прав. Прав потому, что, как было установлено в 1975 году, *«почти все» простые многогранники неизгибаемы.* Однако «почти все» — это еще не все многогранники, а их в некотором смысле «подавляющее большинство». Два года спустя, в 1977 году, американский геометр Р. Коннели построил первые примеры изгибаемых многогранников и тем самым опроверг гипотезу Эйлера (см. «Квант», 1978, № 9, с. 14, а также первую и четвертую страницы обложки настоящего номера).

Не исключено, что открытие изгибаемых многогранников кому-то покажется не очень удивительным, особенно если он вспомнит о мехах музыкальных инструментов, например, баяна. Но эта ассоциация здесь не уместна. Дело в том, что меха баяна «работают» благодаря эластичности и сминанию материала, из которого они изготовлены. Если бы меха были собраны из твердых пластин, соединенных между собой маленькими дверными петлями, то сыграть на инструменте не удалось бы. Такие меха, как нетрудно понять, нельзя было бы ни сжать, ни растянуть.

Впрочем, изгибаемый многогранник тоже непригоден для мехов, хотя и по другой причине. Дело в том, что известная на сегодня коллекция изгибаемых многогранников обладает несколько неожиданным свойством: *заключенный в многограннике объем при изгибании остается постоянным,* т. е. многогранник «не дышит». Возникла гипотеза, что это всегда так — этот объем не изменяется при изгибании многогранника.

Заметим далее, что вследствие теоремы Коши *изгибаемый многогранник не может быть выпуклым.*

Действительно, изгибаемость данного многогранника означает, что существуют другие многогранники, склеенные из тех же граней в том же порядке, но не равные данному из-за чуть-чуть других двугранных углов. При этом, если исходный многогранник был выпуклым, то и другой со слегка лишь отличающимися углами, тоже должен быть выпуклым. А это противоречит теореме Коши, согласно которой два таких выпуклых многогранника должны стать равны.

Лемма Коши о выпуклых многоугольниках

Для доказательства теоремы Коши полезно внимательно посмотреть, как обстоят дела с многоугольниками. Совсем не случайно в названии работы Коши, посвященной теореме о многогранниках, присутствует слово «многоугольник». Представим плоский многоугольник, составленный из стержней с шарнирными соединениями в их концах. В случае треугольника длины стержней задают углы между ними (третий признак равенства треугольников), и конструкция является жесткой. С практическим применением этого очевидного геометрического факта мы сталкиваемся на каждом шагу: в стержневых конструкциях, которые подвергаются значительным нагрузкам (фермы мостов, стрелы подъемных кранов, перекрытия сооружений и т. п.), для обеспечения жесткости присутствуют треугольные элементы.

В случае же многоугольника с бóльшим числом сторон длины сторон не определяют его углов, а следовательно, не задают и сам многоугольник. Тем не менее, Коши обратил внимание на один факт, оказавшийся существенным при доказательстве его теоремы.

Пусть $A=A_1A_2...A_n$ и $B=B_1B_2...B_n$ — выпуклые n-угольники, причем $A_1A_2=B_1B_2$, ..., $A_{n-1}A_n=B_{n-1}B_n$, $A_nA_1=B_nB_1$. Сопоставим каждой вершине A_i первого многоугольника знак «+» или «—» в зависимости от того $\angle A_i>\angle B_i$ или $\angle A_i<\angle B_i$. Если $\angle A_i=\angle B_i$, то вершина A_i остается неотмеченной. Прежде чем перейти к лемме Коши, заметим, что отмеченных вершин у неравных многоугольников не меньше четырех, иначе (как легко доказать) многоугольники A и B равны и неотмеченных вершин нет вовсе.

Лемма 1. *Пусть у двух выпуклых многоугольников соответственные стороны попарно равны, а среди соответственных углов имеются попарно неравные. Тогда при обходе вершин многоугольников разности соответственных углов меняют знак не менее четырех раз.*

Огюстен Луи Коши (1789—1857).

Понятно, что число перемен знака при обходе вершин многоугольника должно быть четно и не равно нулю. Следовательно, для доказательства леммы нужно показать, что число перемен знака не равно двум. Изложим идею доказательства.

Предположим, что число перемен знака равно двум. Тогда многоугольник A разбивается на две ломаные: у одной ломаной $A_iA_{i+1}...A_j$ есть вершины, отмеченные знаком «+», и ни одна из вершин не отмечена минусом; у другой ломаной — $A_jA_{j+1}...A_i$, наоборот, есть вершины, отмеченные знаком «—», и ни одна из вершин не отмечена знаком «+» (рис. 4).

Поэтому ломаную $A_iA_{i+1}\cdots A_j$ можно получить из соответствующей ломаной $B_iB_{i+1}...B_j$ многоугольника B, увеличивая углы последней. Кажется совершенно очевидным, что в результате такой деформации ломаной, замыкающая ее хорда должна увеличиваться, т. е. $A_iA_j>B_iB_j$. (Строгое доказательство этого факта не-

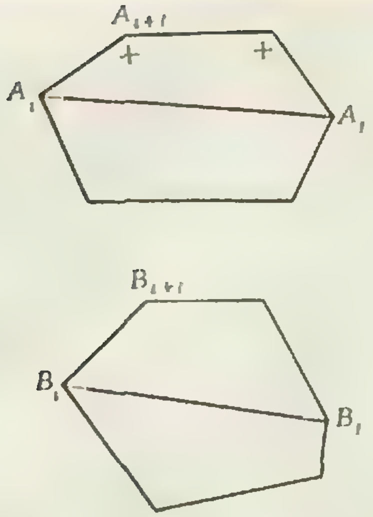


Рис. 4.

сколько утомительно, и мы его опускаем.)

С другой стороны, вторая ломаная $A_jA_{j+1}...A_i$ многоугольника **A** получается из соответствующей ломаной $B_jB_{j+1}...B_i$ многоугольника **B** в результате уменьшения углов. При этом замыкающая хорда должна уменьшаться. Значит, с другой стороны, $A_iA_j < B_iB_j$. Два противоречащих друг другу неравенства показывают, что предположение о наличии ровно двух перемен знака неверно. Следовательно, перемен знака не меньше четырех, что и требовалось доказать.

Лемма 1, о которой только что шла речь, потребуется для доказательства теоремы Коши, но в другом варианте — для случая выпуклых многоугольников на сфере. Формулируется и доказывается она так же, как выше: нужно только уточнить соответствующие понятия.

Определение *сферического многоугольника* совершенно аналогично определению плоского многоугольника. При этом надо иметь в виду, что, во-первых, *сторона* сферического многоугольника — это дуга большой окружности и *длина* стороны — это длина дуги. Во-вторых, *угол* сферического многоугольника — это угол между касательными, проведенными к дугам-сторонам в точке их пересечения, т. е. в вершине многоугольника. Очевидно, что угол между сторонами равен линейному углу двугранного угла, образованного плоскостями соответствующих больших окружностей (рис. 5). В-третьих, *выпуклый* сферический многоугольник — это такой многоугольник, который лежит на сфере по одну сторону от каждой большой окружности, содержащей сторону-дугу нашего многоугольника.

Основная лемма Коши

Предположим, что два многогранника, удовлетворяющие условию теоремы Коши, не равны. Тогда среди соответствующих двугранных углов должны быть попарно неравные. Отметим ребро одного из наших многогранников знаком «+» или знаком «—» в зависимости от того, двугранный угол при этом ребре больше, или меньше соответствующего двугранного угла другого многогранника. Разумеется, не все ребра обязаны быть отмечены, поскольку среди соответствующих двугранных углов могут быть и попарно равные углы.

Выберем какую-нибудь вершину *O* многогранника, к которой подходят отмеченные тем или иным знаком ребра, и опишем из нее, как из центра,

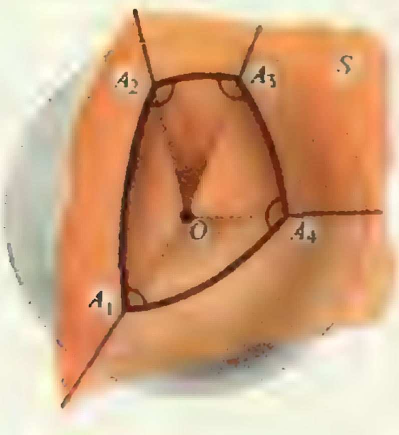


Рис. 5.

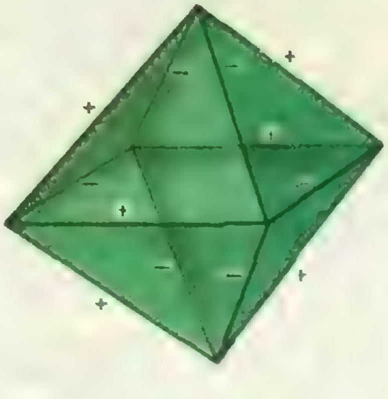


Рис. 6.

сферу S. При этом радиус возьмем настолько маленьким, чтобы сфера S, пересекая ребра и грани многогранника, подходящие к вершине-центру O, не задевала никаких других ребер и граней многогранника. Ясно, что грани многогранника, образующие многогранный угол с вершиной O, вырезают на сфере S выпуклый (сферический) многоугольник M, углы которого равны двугранным углам многогранника. Если провести таким же радиусом сферу S' в соответствующей вершине O' другого многогранника, *то на ней вырезается многоугольник* M', стороны которого попарно равны соответствующим сторонам многоугольника M. Равенство сторон вытекает из условия теоремы Коши: в соответствующих вершинах многогранников должны сходиться попарно равные грани.

Вот здесь и наступает время леммы 1. Мы предположили, что теорема Коши о единственности неверна; это значит, что хотя бы одно ребро окажется отмеченным знаком «+» или «—», и, в соответствии с леммой 1, если к какой-нибудь вершине подходят отмеченные ребра, то число перемен знака у ребер при обходе вокруг этой вершины не меньше 4.

От этого несложного замечания до доказательства теоремы, казалось бы, еще далеко. Но здесь Коши находит неожиданный остроумный ход, после которого доказательство становится делом техники. Оказывается, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть на замкнутом выпуклом многограннике некоторые ребра отмечены знаком + или —. Выделим все те вершины многогранника, к которым подходит хотя бы одно отмеченное ребро. Тогда среди выделенных вершин всегда найдется такая вершина, при обходе вокруг которой встретится менее четырех перемен знака.*

Например, на рисунке 6 приведена расстановка знаков на ребрах октаэдра, при которой имеются две вершины с числом перемен знака, равным двум.

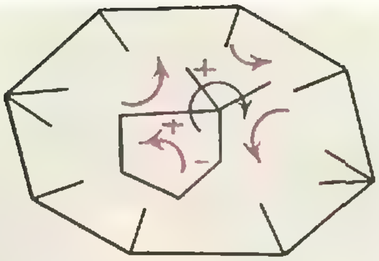


Рис. 7.

Идея доказательства основной леммы хорошо видна при рассмотрении частной ситуации, а именно, когда знаками отмечены все ребра. Итак, предположим, что все ребра отмечены тем или иным знаком. Обозначим, *как и ранее*, через В число вершин, через Р число ребер, через Г число граней многогранника, а через N общее число перемен знака при обходах вокруг всех вершин. Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что

$$N < 4В.$$

Мы вслед за Коши докажем более сильное неравенство:

$$N \leqslant 4В - 8.$$

Легко видеть, что число N перемен знака при обходах вокруг всех вершин равно общему числу перемен знака при обходах вокруг всех граней. Это следует из того, что каждая пара соседних ребер при обходе вокруг вершины является одновременно парой соседних ребер и при обходе вокруг соответствующей грани и наоборот (рис. 7).

Обозначим через $Г_n$ число n-угольных граней многогранника, $n \geqslant 3$. Тогда

$$Г = Г_3 + Г_4 + Г_5 + Г_6 + \dots \qquad (1)$$

Ясно, что при обходе n-угольника число перемен знака не больше n, а если n — нечетно, то не больше, чем $n-1$. Поэтому

$$N \leqslant 2Г_3 + 4Г_4 + 4Г_5 + 6Г_6 + 6Г_7 + \dots \qquad (2)$$

Так как каждое ребро принадлежит двум граням, то

$$2Р = 3Г_3 + 4Г_4 + 5Г_5 + 6Г_6 + \dots \qquad (3)$$

Перепишем формулу Эйлера в виде

$$4В - 8 = 4Р - 4Г. \qquad (4)$$

Подставим в (4) соотношения (3) и (1):

$$4В - 8 = 2(3Г_3 + 5Г_5 + \dots) - 2(2Г_3 + 2Г_4 + 2Г_5 + \dots) = 2Г_3 + 4Г_4 + 6Г_5 \dots \qquad (5)$$

В соотношении (5) коэффициент при $Г_n$ равен $2(n-2)$ и, следовательно,

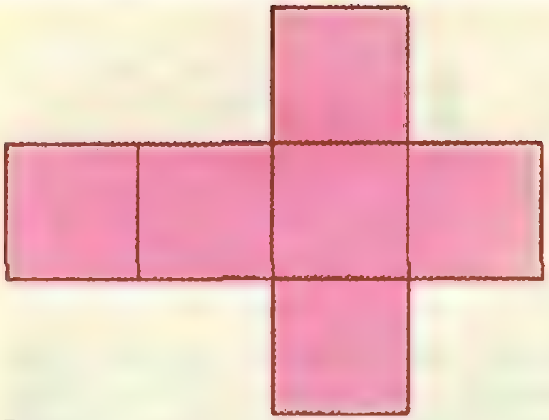


Рис. 8.

если $n \geqslant 3$, он не меньше ближайшего к n снизу числа, которое как раз и есть коэффициент при Γ_n в правой части неравенства (2). Поэтому из (2) и (5) следует требуемое неравенство $N \leqslant 4\text{В}-8$.

Доказательство леммы 2 в общем виде, когда, вообще говоря, не все ребра отмечены знаком, усложняется дополнительными техническими деталями, которые мы опускаем.

Заметим, что условие выпуклости многогранника при доказательстве леммы 2 не используется: она верна для произвольных простых замкнутых многогранников. Выпуклость многогранника в теореме Коши существенна лишь для применения леммы 1.

Подведем итог. Если бы теорема Коши была неверна, то по лемме 1 на ребрах должна была бы возникнуть расстановка знаков, которая по лемме 2 невозможна. Доказательство теоремы Коши, точнее, изложение основной идеи этого доказательства, завершено.

Теорема Александрова о достаточности

Когда работа Коши увидела свет, научные интересы ее автора были уже далеки от этой области. В дальнейшем глубокие результаты по теории многогранников были получены представителями геометрической школы академика А. Д. Александрова. В 1939 году А. Д. Александров доказал теорему об условиях, при которых из данной развертки можно склеить выпуклый многогранник.

Посмотрим на рисунок 8, на котором нетрудно узнать хорошо известную развертку куба. Гораздо труднее увидеть, что развертка, представленная на рисунке 9, *а*, также является разверткой куба — одинаково отмеченные на рисунке вершины задают отождествление вершин и пар склеиваемых сторон (рис. 9, *б*). Обратим внимание на то, что многоугольники развертки не обязательно совпадают с гранями получающегося из него многогранника. Грань многогранника при этом может составляться из одного или нескольких кусков разных многоугольников развертки. Заметим также, что не всякая вершина многоугольника развертки обязана быть вершиной многогранника, она может быть «спрятана» внутри ребра или внутри грани многогранника.

Возьмем произвольную развертку, т. е. возьмем несколько вырезанных из бумаги выпуклых многоугольников и укажем, какую сторону каждого из них будем склеивать с какой стороной другого многоугольника. Склеиваемые стороны, разумеется, должны

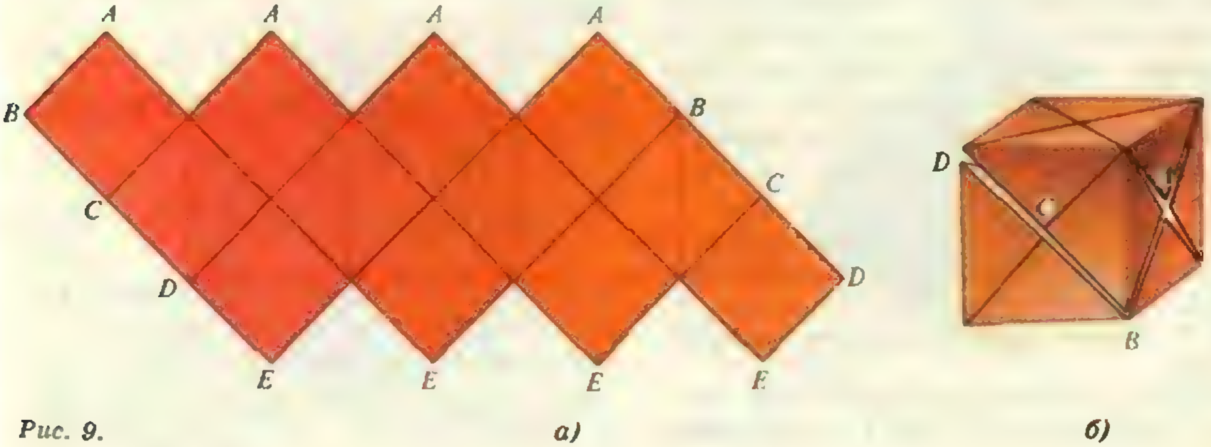


Рис. 9. *а)* *б)*

быть одинаковой длины. Будем склеивать многоугольники в соответствии с указаниями о порядке склеивания (при этом разрешается сгибать многоугольники развертки). Возникает вопрос: из каких разверток можно таким образом получить выпуклый многогранник? Для этого необходимо выполнение двух условий:

(I) для развертки имеет место формула Эйлера ($В-Р+Г=2$);

(II) сумма плоских углов, сходящихся при склеивании в одной вершине, не превышает 360°.

Смысл теоремы Александрова поражает своей простотой: *условия (I) и (II) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы из многоугольников развертки можно было склеить выпуклый многогранник* (возможно, дополнительно сгибая многоугольники развертки).

Развивая идеи, лежащие в основе этой теоремы, А. Д. Александров построил внутреннюю геометрию выпуклых поверхностей — одну из важнейших теорий в современной геометрии.

Вернемся к развертке на рисунке 9,*а*. Даже не глядя на рисунок 9,*б*, проверив для нее выполнимость условий Александрова, можно утверждать, что из этой развертки склеивается некоторый выпуклый многогранник. Сколько разных выпуклых многогранников можно склеить из одной развертки? Из-за того, что грани многогранника не фиксированы, теорема Коши на этот вопрос ответа не дает. А. Д. Александров доказывает теорему, которая, с одной стороны, усиливает теорему Коши, с другой,— прекрасно дополняет его собственную теорему о достаточности: *если из развертки можно склеить выпуклый многогранник, то только один.*

Более того, из этой развертки нельзя получить вообще никакой другой выпуклой поверхности, не только многогранной, но и кривой. Это усиление теоремы Александрова было получено в 1941 году его молодым учеником С. П. Оловянишниковым[*].

А. Д. Александров.

Что касается наиболее полного обобщения теоремы Коши на случай произвольных, а не только многогранных поверхностей, то этот вопрос долгое время оставался нерешенным. Пусть произвольная замкнутая выпуклая поверхность выполнена из тонкого, гибкого, но нерастяжимого материала. Можно ли, сохраняя выпуклость, получить из нее поверхность другой геометрической формы? Если исходная поверхность — выпуклый многогранник, то нельзя — это случай теоремы Коши — Александрова — Оловянишникова о единственности.

Окончательное обобщение теоремы Коши на случай произвольных поверхностей было получено в 1949 году также представителем школы Александрова, советским геометром, академиком А. В. Погореловым. А. В. Погорелов доказал, что *любая замкнутая выпуклая поверхность неизгибаема с*

---

[*] Сергей Оловянишников — победитель первой математической олимпиады (1934 г.). Тридцатые годы наложили свой отпечаток на нелёгкую судьбу талантливого юноши. В 1941 году ему удалось закончить Ленинградский университет и поступить в аспирантуру к А. Д. Александрову. Но вскоре он ушел на фронт, осенью 1941 года был ранен. В госпитале он и написал работу об обобщении теоремы Коши. Вернувшись на фронт, С. П. Оловянишников погиб в декабре 1941 года на «Невском пятачке» — известном кровопролитными боями плацдарме.

условием сохранения ее выпуклости. Теорема Погорелова о единственности, как и теорема Александрова о достаточности, принадлежит к числу выдающихся достижений в области геометрии.

В геометрии есть немало интересных нерешенных задач, которые ждут своих будущих исследователей. Некоторые из проблем формулируются совсем элементарно, взять хотя бы упоминавшуюся нами гипотезу о сохранении объема при изгибании невыпуклых многогранников. Если думать в этом направлении, то полезно было бы начать с попытки построить новые, еще неизвестные примеры изгибаемых многогранников. Не исключено, что среди вновь открытых могут оказаться многогранники, опровергающие эту гипотезу.

Заметим, что все результаты, о которых здесь говорилось, были получены математиками в возрасте до тридцати лет. Математика двигается вперед усилиями молодых. Как сказал один известный математик, новые идеи рождаются в головах молодых геометров, но старые при этом полезны в роли «повивальной бабки».

Интервью с академиком В. П. Масловым

(Начало см. на с. 2)

— Виктор Павлович, что вы можете посоветовать нашим читателям, начинающим изучать физику и математику?

— Увлечься какой-нибудь одной проблемой и подробно и скрупулезно ее изучать и разбирать. И потом постепенно, решая задачи, с ней связанные, все более и более широко охватывать смежные вопросы и таким образом, «по спирали», получать образование. Очень хорошо бывает и когда, скажем, одну проблему изучаешь, а затем начинаешь работать совсем в другой области. Так, известный математик Феликс Александрович Березин считал, что нужно обязательно выбрать две области, совсем далекие друг от друга, и их обе изучать, быть в курсе литературы по ним; увлекаясь двумя задачами, как бы с двух сторон охватывать математику.

Мне кажется, что на самом деле современная математики и физика — это просто одна и та же наука. Вовсе не много-много разных наук, как часто думают, а — с достаточно глубокой физико-математической точки зрения — просто одна и та же наука. На самом деле следует знать в математике и физике все. Но знать все, конечно, невозможно. С другой стороны, каждая настоящая задача в известном смысле содержит в себе современную физику и математику целиком, если, конечно, эта глубокая и интересная задача. Это можно сравнить с искусством. Искусство развивается не разрозненно, а в некотором смысле глобально. Музыка, допустим, танцы и живопись, поэзия развиваются параллельно. Совершенно новые современные тенденции одновременно проявляются в каждом из этих видов искусства. Так было, например, с футуризмом в поэзии, живописи, музыке. Поэтому поэты Маяковский и Хлебников, художник Бурлюк, композитор Прокофьев так быстро поняли друг друга. Это была одна линия развития искусства на данном этапе. Так же и во всей науке, в частности, и в особенности в математике и физике. Недаром такой математик, как Сергей Петрович Новиков, который занимался топологией, потом стал совершенно свободно заниматься теоретической физикой на самом высоком современном уровне. Это не случайно.

Поэтому, мне кажется, нужно заниматься какой-то современной областью физики или математики, понять ее достаточно глубоко, и тогда только почувствовать дух физики и математики сегодняшнего дня.

КОРИДОР ВХОДА

Доктор технических наук
А. Л. СТАСЕНКО

> *— Ураа!! — кричали жители Гавра, наполняя собою все гаврские набережные... Черная масса ... шлепнулась в залив ... На середине залива барахтались три человека.*
> *— Мы пятьдесят семь дней ничего не ели! — пробормотал худой, как голодный художник, мистер Лунд и рассказал, в чем дело.*
> А. П. Чехов. Летающие острова

А дело в том, что вернуться на Землю ничуть не проще, чем взлететь в космос. В самом деле, сколько нужно затратить энергии, чтобы поднять некоторую тяжесть (ну, например, себя) на высоту h? Всякий грамотный школьник скажет: mgh. И если спрыгнуть с высоты h, то эта (потенциальная) энергия перейдет в кинетическую, а затем превратится в тепло. Но кому от нее польза, — особенно если h равно, скажем, высоте десятиэтажного дома. Ведь желательно приземляться мягко, почти с нулевой скоростью, а это значит, что нужно всю кинетическую энергию, в которую превращается потенциальная энергия, куда-то девать, — например, расходовать на трение о веревку, спущенную с десятого этажа.

Точно так же летательный аппарат при посадке на Луну или на планеты, почти лишенные атмосферы (Меркурий, Марс), должен будет гасить скорость и соответствующую кинетическую энергию при помощи силы тяги ракетных двигателей, направленной в противоположную сторону.

Однако эти рассуждения верны, если иметь в виду стандартную рекомендацию школьных задач: «сопротивлением атмосферы пренебречь». Но ведь парашют, планер, самолет с выключенными двигателями (ставший планером) как раз и приземляются, не затрачивая энергии. Их скорость гасится аэродинамической силой — силой, действующей со стороны воздуха. А можно ли использовать атмосферу Земли для планирующего «бесплатного» приземления из космоса? Этот вопрос не столь тривиален, как, может быть, кажется, если вспомнить печальную судьбу большинства метеоритов, которые так и не добираются до поверхности Земли, а если добираются, то в жалком виде. А нам хотелось бы приземляться «целиком», не затратив ни своей массы, ни своей энергии.

Так можно ли?

Чтобы ответить на этот вопрос, составим План. Когда автор этой статьи учился в школе, то для полного раскрытия образа, например, Татьяны Лариной или даже Бабы Яги непременно требовался План. Вот и сейчас мы будем действовать по плану: сперва вкратце вспомним, как устроена атмосфера, как зависит сила, с которой воздух действует на движущееся в нем тело, — аэродинамическая сила — от плотности атмосферы и скорости тела, как нагревается и охлаждается это тело при движении в атмосфере, и, наконец, перейдем к Заключению.

Плотность атмосферы

Итак, прежде всего речь пойдет об атмосфере Земли. Правда, нечего и надеяться рассказать все, что можно, об атмосфере Земли — обо всех ее ветрах, грозах, тайфунах, облаках — этого не сделать даже в очень толстой книге. Но можно сделать то, что́ делают физики каждый раз, когда все очень сложно (а сложно почти всегда), — можно построить модель атмосферы. Хорошая модель должна описывать самые характерные черты объекта или явления, которые мы намереваемся использовать далее для работы. А что самое характерное для нас в атмосфере? Ну, например, ее плотность — ведь мы собираемся в атмосфере двигаться, причем быстро, а интуитивно ясно, что сила сопротивления движению должна зависеть от плотности окружающей среды (ведь в ванне с водой руку двигать труднее, чем в воздухе при той же скорости).

Понятно, что с высотой плотность атмосферы должна уменьшаться. Зависимость плотности атмосферы Земли от высоты над уровнем моря приближенно можно выразить так называемой барометрической формулой Больцмана

$$\rho \approx \rho_0\, e^{-\frac{h}{h^*}}, \qquad (1)$$

пригодной до $h \approx 80 \div 100$ км. В этой формуле $\rho_0 = 1{,}3$ кг/м^3 — значение плотности на уровне моря, а стоящая в знаменателе показателя степени величина $h^* = 7{,}16$ км называется масштабным коэффициентом плотности. Понятно, что на высоте h^* плотность атмосферы в $e = 2{,}72$ раза меньше, чем на уровне моря.

Аэродинамическая сила

На тело, движущееся в воздухе, действует сила. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, горизонтально выставить ладонь в окно движущегося автобуса или вагона поезда (разумеется, осторожно!). При поворотах ладони вокруг горизонтальной оси сила со стороны воздуха будет действовать на кисть то вверх, когда ветер ударяет в ладонь, то вниз, когда в ее тыльную сторону. В первом случае угол атаки α (между плоскостью ладони и вектором скорости $\vec{v}$ набегающего потока) считается положительным, во втором — отрицательным (рисунок 1).

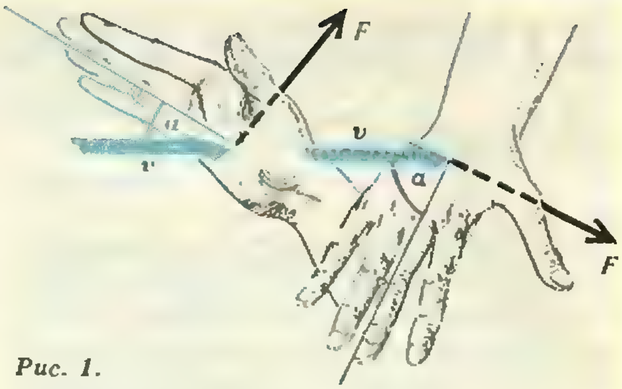
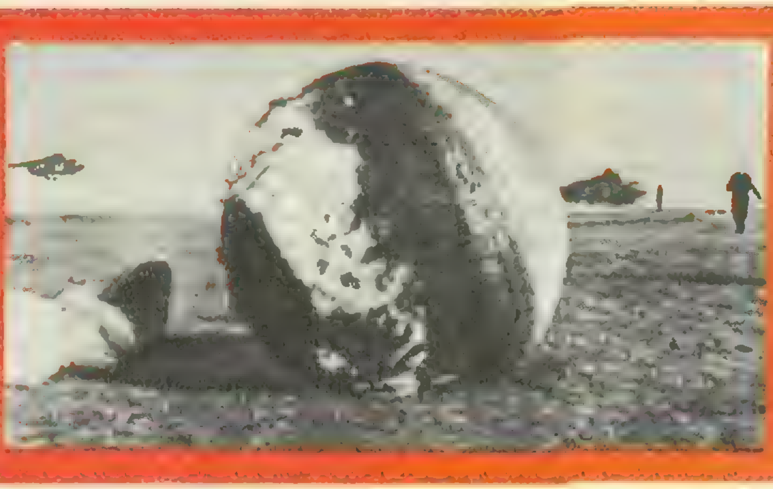


Рис. 1.

От чего эта сила зависит?

Используем для ответа на этот вопрос теорию размерностей. Сначала выпишем те характеристики процесса, от которых, как мы ожидаем, должна бы зависеть упомянутая сила.

Ну, разумеется, она зависит от скорости v (совсем разные силы действуют на вытянутую руку, когда едешь, скажем, на эскалаторе метро и когда высунешь руку из окна мчащегося автомобиля). Далее, если, например, провести ладонью в воздухе и в воде, то (при одинаковой скорости движения) во втором случае сопротивление больше, чем в первом. Значит, важно еще, в какой среде происходит движение, — сила должна зависеть от плотности среды ρ. А еще от чего? Конечно, от размера движущегося тела: попробуйте при одинаковых скоростях взмахнуть в воздухе ладонью без веера и с веером — сразу станет ясно, что веером махать труднее. Итак, аэродинамическая сила зависит еще и от характерного размера тела L.



О форме будущего «Востока» спорили долго. Предлагались конус, полусфера, цилиндр и, наконец,— сфера, шар. С. П. Королеву он сразу понравился. Для него легко рассчитываются аэродинамические характеристики, у него хорошая устойчивость, наименьшие суммарные тепловые потоки при торможении в атмосфере Земли. На участке приземления скорость спускаемого аппарата (СА) гасилась парашютной системой.

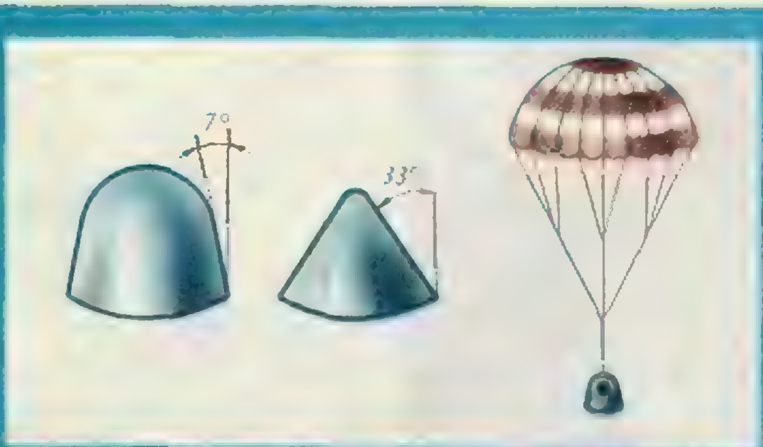
Перечислим эти величины вместе с их размерностями:

$$[v]=\frac{\text{м}}{\text{с}},\ [\rho]=\frac{\text{кг}}{\text{м}^3},\ [L]=\text{м}.$$

Как из них составить комбинацию, имеющую размерность силы, т. е. ньютон: $[F]=\text{Н}=\text{кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$? Сразу видно, что размерность кг входит из наших трех параметров только в ρ, а секунда — только в размерность скорости, причем там она в знаменателе в первой степени, а нам надо во второй. Следовательно, уж точно сила будет пропорциональна произведению ρv^2. Но размерность этой величины есть $\text{кг}/(\text{с}^2\cdot\text{м})$, а нам необходимо, чтобы метр стоял в числителе, — стало быть, нужно умножить еще на квадрат размера $[L]^2$ (а L^2 имеет размерность площади). Итак, единственная комбинация параметров v, ρ, L, имеющая размерность силы, есть ρv^2L^2, так что $F\sim\rho v^2L^2$. Про коэффициенты пропорциональности (безразмерные!) теория размерностей нам ничего сказать не может.

«Но позвольте! — воскликнет вдумчивый читатель. — Ведь, по крайней мере, сила сопротивления может зависеть еще и от вязкости воздуха, а мы про вязкость совсем забыли?!» Это так. Более того, в некоторых случаях именно вязкость определяет силу сопротивления: например, на дробинку, опускающуюся на дно банки с медом, действует так называемая сила Стокса, пропорциональная не площади, а радиусу шарика и не второй, а первой степени скорости. В этом примере течение меда вокруг шарика настолько *медленное*, что даже называется ползущим. Но это движение в густом, вязком меде мало похоже на обтекание сжимаемым воздухом большого летательного аппарата, движущегося со сверхзвуковой скоростью. (*Такое влияние размера тела на характер движения (масштабный эффект) бывает и в других случаях*: например, стальную иглу можно заставить плавать на поверхности воды в ванне, а стальной лом, очень похожий на большую иглу, — едва ли, — можете попробовать сами. В случае иглы существенна поддерживающая сила поверхностного натяжения, пропорциональная первой степени размера, а в случае лома превалирует сила тяжести, пропорциональная кубу размера, и эту силу уже *не могут «перебороть»* ни поверхностное натяжение, ни архимедова сила.)

Разложим суммарную аэродинамическую силу $\vec{F}$, действующую на обтекаемое тело со стороны воздуха, на две составляющие: F_y — перпендикулярную к вектору скорости v, и F_x — направленную вдоль этого вектора (рисунок 2). Первая из них — F_y — называется подъемной силой, вторая — силой сопротивления. Очевидно, что обе эти компоненты имеют одну и ту же размерность — Н; значит, и $F_y\sim\rho v^2L^2$, и $F_x\sim\rho v^2L^2$. В формулах для F_y и F_x должны стоять какие-то коэффициенты (безразмерные), зависящие, по крайней мере, от угла атаки (ведь если крыло или ладонь поставить пер-



Для СА космического корабля (КК) «Союз» была выбрана форма типа «фара» с аэродинамическим качеством $K=0{,}3$ ($K=F_y/F_x$, где F_y и F_x — подъемная сила и сила сопротивления). У СА КК «Аполлон» угол полураствора был больше и $K=0{,}45$. Оба СА были рассчитаны на вход в атмосферу как с первой, так и со второй космической скоростью с обеспечением управляемого спуска.

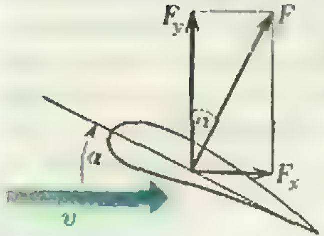


Рис. 2.

пендикулярно скорости v, то сопротивление будет, а подъемной силы — никакой). Один из этих коэффициентов (в случае подъемной силы) назовем коэффициентом подъемной силы C_y, а другой (в случае сопротивления) — коэффициентом сопротивления C_x.

Теперь напишем:

$$F_y = C_y \rho v^2 L^2, \quad F_x = C_x \rho v^2 L^2. \qquad (2)$$

Мы сказали, что C_y и C_x (назовем их аэродинамическими коэффициентами) зависят от угла атаки. А откуда взять эти зависимости? В некоторых случаях их можно рассчитать. Например, такой расчет можно провести для случая, когда аппарат летит очень высоко, там, где молекул уже мало и они вблизи аппарата друг с другом не сталкиваются, а сталкиваются только с ним, с аппаратом; это очень упрощает рассмотрение.

Давайте рассматривать движение в системе отсчета, связанной с аппаратом, который движется в атмосфере со скоростью $\vec{u}$. В этой системе аппарат покоится, а молекулы воздуха налетают на него. Мы будем считать,

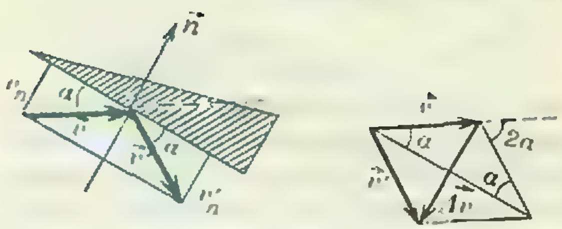


Рис. 3.

что u много больше тепловых скоростей молекул; тогда можно пренебречь хаотическим тепловым движением молекул и считать, что все они налетают на аппарат со скоростью $\vec{v} = -\vec{u}$.

Рассмотрим прежде всего удар одной-единственной молекулы о твердую поверхность аппарата, наклоненную по отношению к вектору скорости на угол α (угол атаки). В предположении абсолютно упругого удара после столкновения модуль скорости v не изменится, а вектор $\vec{v}$ повернется на угол 2α (рисунок 3). Нетрудно найти изменение скорости молекулы в результате удара (см. рисунок 3):

$$\Delta v = 2v_n = 2v \sin \alpha.$$

А изменение импульса этой молекулы, если ее масса m, равно

$$\Delta p_m = 2mv \sin \alpha.$$

Согласно закону сохранения импульса и третьему закону Ньютона, такой же по абсолютной величине импульс получит тело, о которое ударилась эта молекула. А сколько молекул ударя-

Крылатые КК (типа «Спейс Шаттл») обеспечивают аэродинамическое качество 1.2—3 при гиперзвуковых скоростях и 3—5— при дозвуковых. Запас скорости при возвращении с орбиты позволяет «Шаттлу» за счет торможения и маневрирования осуществить безмоторную посадку на заданный аэродром. При спуске в атмосфере отдельные участки корпуса нагреваются до температуры более 1200 °С.

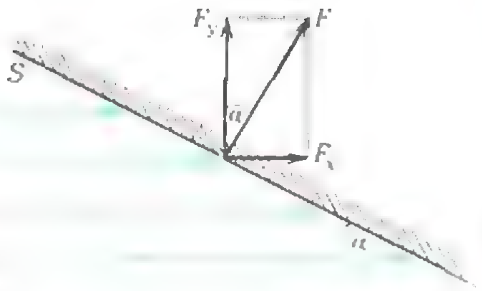


Рис. 4.

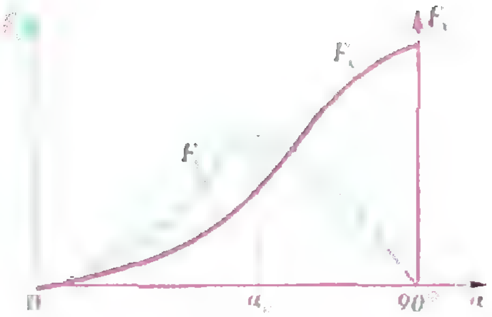


Рис. 5.

ется о поверхность S в единицу времени? Очевидно, что за единицу времени с площадкой S (см. рисунок 4) столкнутся все молекулы, находящиеся на расстоянии v от нее, т. е. молекулы из объема $Sv \sin \alpha$. И если концентрация молекул n, то за единицу времени о площадку S ударятся $N = nSv \sin \alpha$ молекул.

Значит, полный импульс, получаемый телом за единицу времени, направлен по нормали $\vec{n}$ к поверхности S и численно равен

$$\Delta p_m \cdot N = 2mv \sin \alpha \cdot nSv \sin \alpha = 2\rho v^2 S \sin^2 \alpha$$

(так как $nm = \rho$). Но ведь изменение импульса за единицу времени — это действующая сила. Значит, мы получили выражение для аэродинамической силы:

$$F = 2\rho v^2 S \sin^2 \alpha.$$

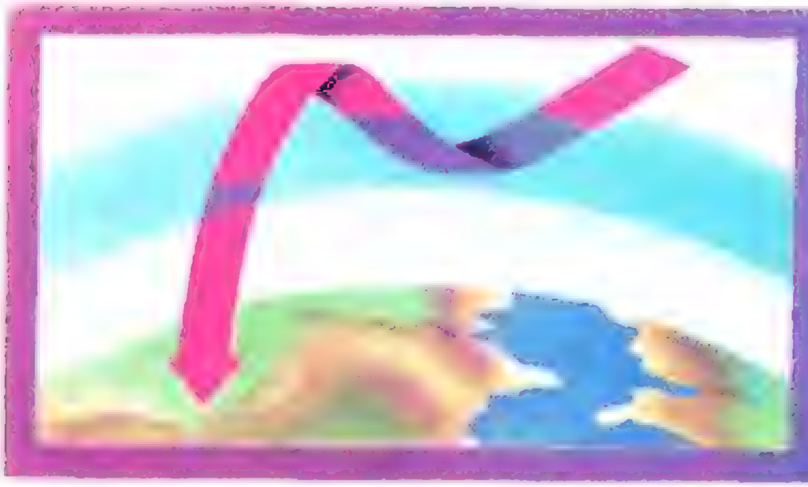
Разложив $\vec{F}$ на две составляющие, получим подъемную силу и силу сопротивления:

$$F_y = F \cos \alpha = 2\rho v^2 S \sin^2 \alpha \cos \alpha, \qquad (3)$$
$$F_x = F \sin \alpha = 2\rho v^2 S \sin^3 \alpha.$$

Зависимости F_y и F_x от угла атаки α изображены на рисунке 5. Видно, что подъемная сила при некотором угле атаки α_0 достигает наибольшего значения. Его можно найти, построив функцию $F_y(\alpha)$ точка за точкой (при помощи тригонометрических таблиц) или (для тех, кто умеет находить экстремум функции) приравняв нулю первую производную. И тем, и другим способом получим $\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{2}$. Учитывая известные соотношения $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$, $\sin \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 \alpha}}$ и подставляя найденное значение $\operatorname{tg} \alpha_0 = \sqrt{2}$, найдем максимальное значение подъемной силы:

$$F_{y\,\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \rho v^2 S = 0{,}77 \rho v^2 S.$$

А в тех случаях, когда аэродинамические коэффициенты рассчитать трудно, надо изучить их зависимость от угла атаки экспериментально — для этого в мире и построены сотни аэродинамических труб. Но и в этом случае теория размерностей уже сэко-



СА КК «Зонд-5» и «Зонд-6» первыми, после облета Луны, вошли в атмосферу Земли со второй космической скоростью. СА «Зонда-6», совершив «нырок», вышел из атмосферы с частично погашенной скоростью. Затем он вновь вошел в атмосферу и произвел управляемый спуск на территорию СССР. СА «Зонда-5» осуществил баллистический спуск и приводнился в акватории Индийского океана.

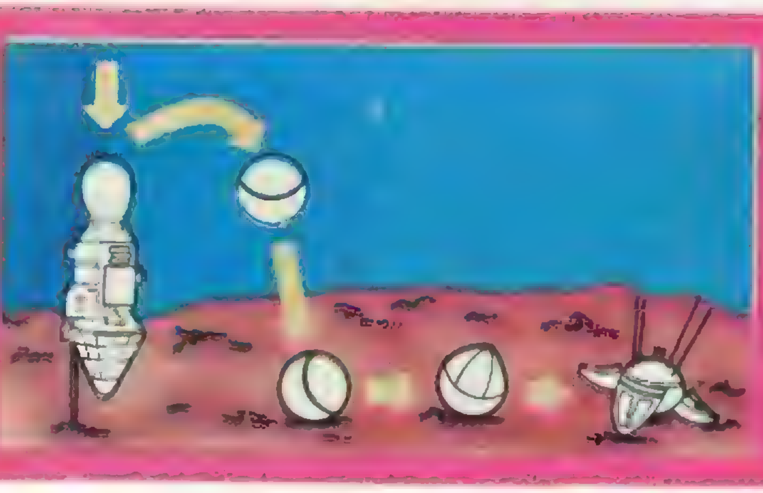
номила нам много усилий: не надо устанавливать, что сила пропорциональна плотности среды, площади поверхности аппарата, квадрату скорости движения.

Скачок уплотнения

Заметим, что мы в нашем рассмотрении представляли аппарат фактически как пластинку площади S, наклоненную под углом α к потоку молекул, а скорости молекул считали одинаковыми по модулю и направлению — аппарат двигался намного быстрее теплового движения самих молекул. То, что происходило на тыльной подветренной стороне пластинки, нас не интересовало: молекулы туда не попадали, так что это пространство можно было бы заполнить, например, телом клина с тем же углом α при вершине. Пусть теперь этот клин опускается в плотные слои атмосферы и движется все медленнее, но все еще быстрее средней тепловой скорости молекул и, следовательно, быстрее звука. (Ведь ясно, что такой организованный процесс, как звуковое возмущение, не может распространяться быстрее самих молекул, движущихся с тепловой скоростью.) Чтобы как можно сильнее тормозиться, давайте плоскость клина начнем наклонять на все больший угол по отношению к потоку (ведь сила сопротивления $F_x \sim \sin^3 \alpha$). Тогда молекулы будут отскакивать от наветренной полуплоскости под все более прямым углом, и перед поверхностью клина начнет образовываться сжатый слой. Когда плоскость расположится перпендикулярно потоку, молекулы, налетающие на клин вдали от его края, не будут успевать соскользнуть с него, начнется настоящая толчея; и набегающие молекулы (они ничего не знают о препятствии — ведь скорость больше скорости звука) с размаху будут врезаться в эту толщу молекул. У плоскости S возникнет сжатый слой, отделенный от невозмущенного газа так называемым прямым скачком уплотнения (рисунок 6). В этом скачке резко (на то он и скачок) падает скорость потока — от сверхзвуковой до медленной дозвуковой.

А что творится с температурой? Давайте сделаем оценку ее величины. Пусть тело движется очень быстро, ну, например, его скорость v (точнее, $u = v$) в двадцать раз больше скорости звука c. Иными словами, отношение скорости потока v к скорости звука c равно $M = 20$ (это отношение называется числом Маха), а каждая молекула в набегающем невозмущенном потоке обладает кинетической энергией, приблизительно равной $\frac{mv^2}{2} = \frac{mc^2}{2} M^2$. Внутри сжатого слоя молекулы почти неподвижны относительно тела; значит, их кинетическая энергия почти целиком перешла в тепловую, и для оценки температуры T_1 в сжатом слое можно положить приближенно (для двухатомных молекул воздуха)

$$\frac{mc^2}{2} M^2 \approx \frac{5}{2} kT_1,$$



Первая мягкая посадка на Луну была совершена космическим аппаратом (КА) «Луна-9». На высоте около 75 км был включен тормозной двигатель, и КА начал снижение. Вблизи поверхности от тормозного отсека отделился сферический полезный груз. Коснувшись грунта и перекатившись, как самый обычный мяч, груз замер. После этого на его верхней полусфере раскрылись 4 лепестка антенн.

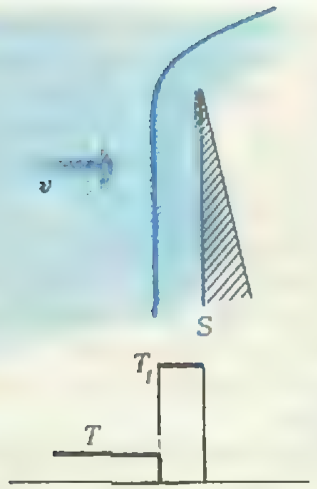


Рис. 6.

откуда

$$T_1 \approx \frac{mc^2M^2}{5k} = \frac{mN_A c^2M^2}{5R} = \frac{\mu_в c^2M^2}{5R}.$$

Принимая для воздуха молярную массу $\mu_в = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль, $c \approx 300$ м/с, получим:

$$T_1 \approx \frac{29\cdot10^{-3}\cdot(300)^2\cdot(20)^2}{5\cdot8{,}31}\ \text{К} \approx 25\,000\ \text{К}.$$

Это что же получилось: в сжатом слое перед плоскостью, движущейся *со скоростью 20 c, температура оказывается* больше чем на поверхности Солнца! Это значит, что молекулы воздуха «развалятся» (диссоциируют) на отдельные атомы. А что еще? Сравним кинетическую энергию молекулы с энергией ионизации. В таблицах можно посмотреть, что энергия ионизации (в расчете на молекулу), например, для азота (основного компонента атмосферы) равна $\varphi = 2{,}5\cdot10^{-18}$ Дж. Оценим теперь в джоулях кинетическую энергию налетающей молекулы азота:

$$E = \frac{m_{N_2}c^2}{2}M^2 = \frac{1}{2}\cdot4{,}7\cdot10^{-26}\cdot(300)^2\times(20)^2\ \text{Дж} \approx 0{,}85\cdot10^{-18}\ \text{Дж}.$$

Видно, что E и φ сравнимы по порядку величины, — значит, можно ожидать *и появления свободных электронов и ионов.*

Конечно, на диссоциацию и ионизацию уйдет часть первоначальной кинетической энергии молекул, так что температура в сжатом слое станет несколько меньше, чем мы получили в нашей грубой оценке, но все равно она будет порядка тысяч градусов.

И хотя мы провели рассуждения об образовании сжатого слоя на примере плоскости, которую мы постепенно развернули поперек сверхзвукового потока, все это верно и для любого тела, у которого можно провести касательную плоскость, перпендикулярную потоку. Такие тела называются в аэродинамике затупленными. Но *существования такой плоскости еще* мало: чтобы скачок уплотнения был похож на тот, который мы уже изучили, надо еще, чтобы радиус кривизны тела вблизи этой касательной плоскости был достаточно большим — больше, чем толщина сжатого слоя; тогда этот скачок на некотором протяжении (поперек потока) будет похож на прямой. В качестве примера на рисунке 7 изображен шар, обтекаемый сверхзвуковым потоком. Видно, что в окрестности передней точки

КА «Луна-16» доставил на Землю грунт с поверхности Луны. Для этого КА совершил ряд динамических операций, в т. ч. выход на орбиту искусственного спутника Луны, сход с орбиты, мягкую посадку на поверхность Луны и старт с Луны к Земле. Возвращаемый аппарат «Луны-16» стал первым аппаратом, осуществившим две мягкие посадки — на Луну и на Землю.

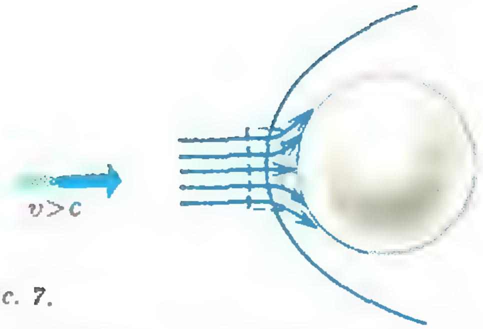


Рис. 7.

шара (точке торможения) и слой, и скачок действительно почти плоские — это место обведено пунктирным прямоугольником. Такие тела называются уж совсем обидно — тупыми. (В этом смысле, с точки зрения сверхзвуковой аэродинамики, любой человек, даже очень остроумный, является тупым телом.)

Итак, перед каждым затупленным телом в сверхзвуковом потоке образуется сжатый и сильно нагретый слой газа.

Коридор входа, или Заключение

В начале статьи мы рассуждали о том, что если у планеты нет атмосферы или она есть, но очень разреженная, то для мягкой посадки, требующей торможения, придется затратить энергии почти столько же, сколько для выхода из ее поля тяготения. Но если есть атмосфера достаточной плотности, то можно сэкономить эту энергию (а значит, и связанную с ней массу первоначально запасенного топлива), используя для торможения силу сопротивления F_x, а для поддержания в атмосфере — подъемную силу F_y. А что значит «достаточная плотность» атмосферы? И только ли плотность атмосферы должна войти в наши рассуждения? А размер планеты, ее масса (от которых зависит ускорение силы тяжести на поверхности), толщина атмосферы, ее состав? А характеристики самого аппарата?

Вот об этом сейчас мы и собираемся поговорить.

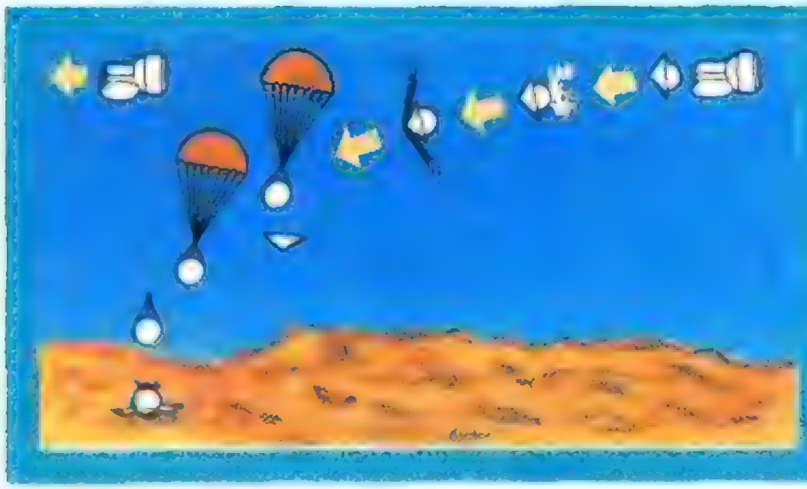
Итак, пусть аппарат массой M, имеющий площадь крыла S, движется со скоростью v в атмосфере Земли на высоте h, где плотность атмосферы равна ρ. Подъемная сила будет равна $F_y = C_y \rho v^2 S$. Облетая планету, аппарат движется по искривленной траектории. Пусть для простоты эта траектория близка к окружности радиусом $R+h$ (R — радиус Земли); тогда центростремительное ускорение аппарата будет равно $v^2/(R+h)$. Это ускорение определяется силой тяжести и подъемной силой F_y:

$$Mg - F_y = \frac{Mv^2}{R+h}.$$

Учитывая, что «толщина» атмосферы мала по сравнению с радиусом Земли, перепишем последнее уравнение в виде

$$C_y \rho v^2 S \approx M\left(g - \frac{v^2}{R}\right).$$

Отсюда прежде всего следует, что там, где уже почти нет атмосферы, т. е. плотность и, следовательно, подъ-



Автоматическая межпланетная станция (АМС) «Марс-3» совершила первую мягкую посадку на Марс. Отделившись от орбитального аппарата, СА вошел в разреженную атмосферу Марса (давление у поверхности — менее 0,01 атм). По мере спуска аппарата раскрылся, а затем отделился тормозной парашют, отстрелился тепловой экран, отработал основной парашют. Остаточную скорость погасил тормозной двигатель.

емная сила равны нулю, равна нулю и правая часть выражения. Тогда для скорости получается значение $v_{\rm I}=\sqrt{Rg}=7{,}8$ км/с — первая космическая скорость. А что происходит по мере снижения аппарата? Скорость аппарата будет уменьшаться под действием силы сопротивления F_x. Но по мере снижения быстро растет плотность атмосферы (см. формулу (1)). И, несмотря на падение скорости, подъемная сила F_y возрастает. И эту подъемную силу можно использовать, чтобы задержать «падение» аппарата. При этом летательный аппарат становится фактически планером, и действующая на него сила тяжести может быть уравновешена подъемной силой:

$$Mg=C_y\rho v^2S.$$

Чтобы использовать эту возможность крылатого аппарата, лететь надо на таких высотах, где плотность атмосферы не меньше, чем $\rho_{\min}\approx\frac{Mg/S}{C_yv^2}$ (числитель этой дроби — сила тяжести, приходящаяся на единицу площади крыла, — называется *нагрузкой на крыло, поэтому мы его выделили*). А при помощи формулы (1) можно определить и ту предельную высоту, не ниже которой можно держаться «на крыле» при данной скорости полета v:

$$\frac{Mg/S}{C_yv^2}\approx\rho_0e^{-\frac{h_{\max}}{h^*}} \Rightarrow \frac{h_{\max}}{h^*}\approx\ln\frac{\rho_0C_yv^2}{Mg/S},$$

откуда

$$h_{\max}(v)\approx h^*\ln\frac{\rho_0C_yv^2}{Mg/S}.$$

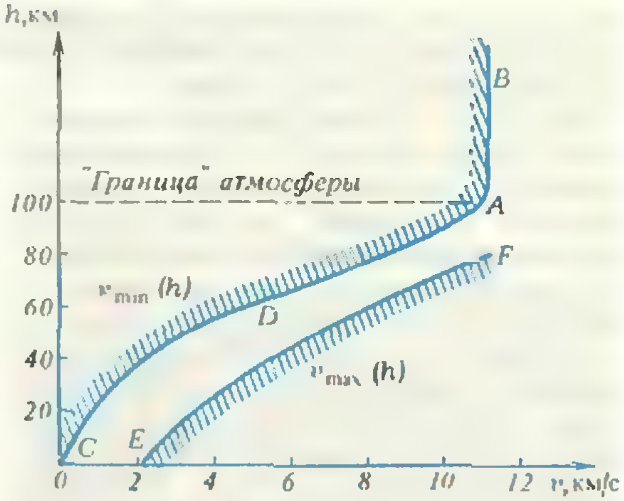


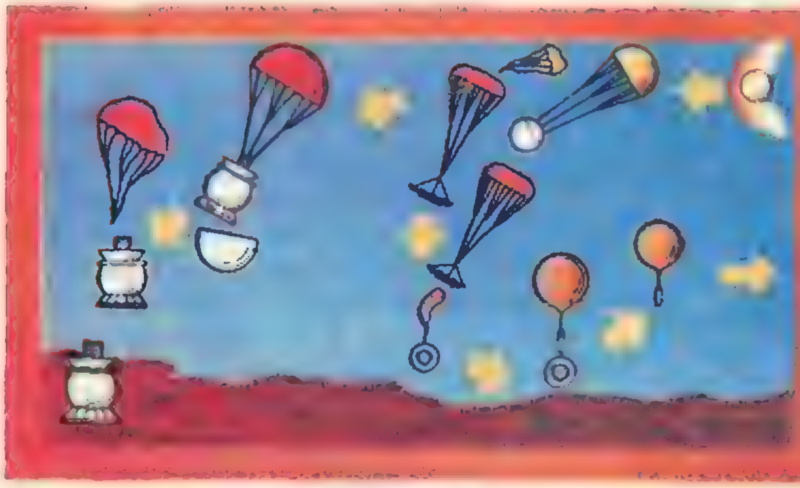
Рис. 8.

Другими словами, если мы хотим, чтобы на заданной высоте h аппарат «не проваливался», надо, чтобы его скорость была не меньше, чем

$$v_{\min}(h)\approx\sqrt{\frac{Mg/S}{C_y\rho_0}e^{\frac{h}{h^*}}}.$$

На рисунке 8 показана кривая *BADC*, соответствующая случаю входа в атмосферу Земли летательного аппарата, имевшего первоначально вторую космическую скорость $v_{\rm II}=11{,}2$ км/с. Участок *CD* в нижних слоях атмосферы и описывается только что приведенной формулой.

Итак, мы получили кривую, выше которой аппарат не может поддерживаться атмосферой: при любой заданной скорости (меньше первой космической) подъемной силы будет не хватать, если мы заберемся на бóльшую



Впервые мягкую посадку на Венеру осуществила АМС «Венера-7». Через 15 лет на поверхность планеты опустились СА АМС «Вега-1» и «Вега-2». Одновременно с этим исследования проводились специальными аэростатами, плавашими в атмосфере планеты (давление и температура у поверхности Венеры соответственно около 100 атм и 750 К).

высоту, чем указывает эта кривая. Поэтому «запрещенная» область значений заштрихована сверху.

Ну, так давайте лететь быстрее? Стоп! Ведь мы знаем, что при больших скоростях на затупленных кромках нашего аппарата «сядет» скачок уплотнения, за которым воздух (и даже не воздух, а смесь осколков его молекул) разогреется так сильно, что аппарат может сгореть. Это сложнейшая проблема входа в атмосферу — тепловой барьер. Как отводить это тепло? Можно использовать все: теплопроводность самого аппарата, которая позволяет теплу стекать «от носа в хвост», возможность его оплавления (и, значит, изменения формы, что делает аппарат еще «тупее»), тепловое излучение «раскаленных добела» частей аппарата и др.

Обсуждать эту проблему в целом мы здесь не будем, а для оценки допустимой скорости возьмем «самый худший» случай, когда все тепло, приносимое на аппарат воздухом, отводится с его поверхности только излучением.

Есть такой закон — закон Стефана — Больцмана, — согласно которому мощность, уносимая излучением с каждого квадратного метра площади, пропорциональна четвертой степени температуры: $q=\sigma T^4 \frac{\text{Дж}}{\text{м}^2\cdot\text{с}}$. Коэффициент пропорциональности σ называется постоянной Стефана — Больцмана; его можно выписать из справочника по физике: $\sigma=5{,}67\cdot10^{-8}$ Дж/(м$^2\cdot$ с$\cdot$ К^4). Это очень резкая зависимость: стóит температуру увеличить, например, втрое, как излучаемая энергия увеличится в $3^4=81$ раз — почти в сто раз! Согласно этому закону получается, что для эффективного охлаждения излучением нужно «раскалиться добела».

Итак, оценим наибольшую скорость, с которой может двигаться аппарат, еще не плавясь. Масса воздуха, налетающего за единицу времени на единицу площади поверхности аппарата, равна ρv. Приносимая этим воздухом энергия $\rho v\frac{v^2}{2}$. Почти вся эта энергия переходит в тепло. И все это тепло, по предположению, уходит от аппарата за счет излучения, которое в единицу времени уносит с единицы площади энергию σT^4. Итак, потребуем, чтобы температура поверхности не превышала температуры плавления $T_{\text{пл}}$. Тогда будем иметь

$$\frac{v^2}{2}\rho v\leqslant\sigma T_{\text{пл}}^4.$$

Таким образом, скорость аппарата не может быть больше определенного для каждой высоты значения $v_{\max}$:

$$v\leqslant v_{\max}(h)=\left[\frac{2\sigma T_{\text{пл}}^4}{\rho(h)}\right]^{1/3}.$$

График зависимости $v_{\max}(h)$ на рисунке 8 — это кривая EF.

Итак, если мы хотим использовать «несущие и тормозящие» свойства атмосферы, т. е. садиться на планету на крылатом аппарате, не расходуя топливо на торможение, то в плоскости координат высота — скорость наша «траектория» не может проходить выше кривой $CDAB$ (крылья не будут держать аппарат) и ниже кривой EF (сгорим!). Обе эти кривые построены для условий посадки на Землю. Видно, что с увеличением скорости расстояние между этими кривыми — ширина «коридора входа» — достигает минимального значения (значит, особенно на этой высоте нужно не ошибиться!), но, к счастью, эти кривые нигде не касаются и не пересекаются! Мудрая Природа предусмотрела возможность для разумных существ возвращаться на Землю на крылатых аппаратах.

РОЖДЕНИЕ СПЛАВА

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

> *Явлений раздвинь грань,*
> *Земную разрушь клеть*
> *И яростный гимн грянь,*
> *Бунтующих тайн медь.*
>
> О. Э. Мандельштам

Сегодня медь, такую привычную, трудно представить в роли металла «бунтующих тайн». Хотя «за плечами» у нее славная история. Медь первой из металлов попала на службу к человеку. Но из-за ее мягкости орудия наших далеких предков быстро тупились. На смену меди пришли более твердые и прочные бронзы — сплавы меди с оловом, мышьяком и другими элементами. А чистая медь надолго отступила в тень.

Новая волна интереса к древнему металлу была связана с его высокой электропроводностью. По этому показателю медь немного уступает только серебру, но не стоит забывать о его цене. Поэтому множество проводящих ток деталей изготовляется именно из меди. Но часто одной высокой электропроводности недостаточно...

Из какого металла следует изготовлять электрические контакты? Ясно, что они должны хорошо проводить ток, но, кроме того, желательно обеспечить их эрозионную стойкость. Слово «эрозия», может быть, не всем знакомо, но смысл его прост: так называется разрушение поверхности детали. Если материал недостаточно прочен, то в результате бесконечных замыканий и размыканий контакты потеряют свою форму и выйдут из строя.

То же самое сочетание высоких прочностных свойств (причем в широком диапазоне рабочих температур) и проводимости требуется для сварочных электродов, высокотемпературных проводников и т. д.

Можно ли обработать медь таким образом, чтобы ее удельное сопротивление почти не увеличилось, а прочность существенно возросла?

Что такое прочность?

Под действием внешних сил материалы могут изменять свою форму — деформироваться. Но происходить это может по-разному. Если растянуть резинку и отпустить, она вновь сократится. Это — пример упругой деформации. А вот пластилин, наоборот, совершенно «себя не помнит» и послушно принимает в руках любые очертания. Такая деформация называется пластической.

Металлы ведут себя под действием нагрузки скорее как пластилин, чем как резина. Хотя деформировать их, конечно, намного труднее. Обычно вплоть до температуры плавления металлы имеют кристаллическое строение. Схематически разрез кристалла показан на рисунке 1. Там же показано, как под действием внешних сил две части кристалла могут сдвинуться друг относительно друга. Если нагрузку потом снять, кристалл так и останется в деформированном состоянии.

Медь мягкий металл потому, что в ней пластическая деформация происходит сравнительно легко. Но пред-

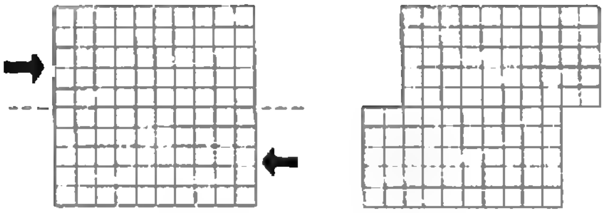


Рис. 1. Кристалл меди легко деформируется приложенными к нему внешними усилиями.

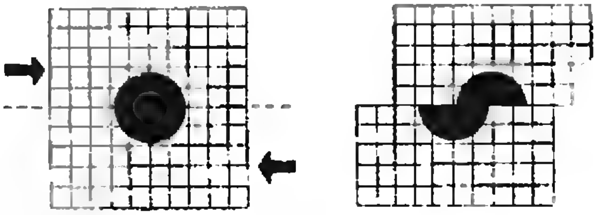


Рис. 2. Теперь линия среза пересекает твердую частицу. Кристалл упрочняется.

ставьте себе, что в плоскости возможного сдвига нам удалось поместить частицу какого-либо другого, более твердого материала, как это изображено на рисунке 2. Тогда для осуществления пластической деформации придется приложить намного бо́льшие усилия. Это подсказывает нам способ упрочнения: надо ввести в кристаллы меди твердые инородные частицы. Рецепт далеко не нов, и возможно в детстве вы пользовались сходным приемом, упрочняя крепости из песка закопанными в стены камнями.

Эксперименты показывают, что для существенного упрочнения вполне достаточно 1—3 % объема занять упрочняющими частицами. Подавляющую часть объема сплава (97—99 %) будет занимать медь, и поэтому упрочнение не должно слишком серьезно сказаться на электропроводности — электроны могут по-прежнему перемещаться в меди. (Точно так же, как редкие острова — не помеха океанским путешествиям.)

Какие частицы порекомендовать в качестве упрочняющих? Решений много, но мы остановимся на оксидах. Их твердость хорошо известна. Кроме того, они плавятся при высоких температурах и в широком диапазоне температур сохраняют упрочняющие свойства. Но самое главное, что существует хороший способ ввести оксиды в «тело» меди.

Как же это сделать?

Решение совсем не очевидно. Наверное, не стоит даже объяснять, что «загонять» частицы оксида в медь механическим путем — весьма сложная и малопривлекательная задача. Значительно более соблазнительным кажется путь, когда частицы оксида образуются непосредственно внутри меди. Такой процесс носит название внутреннего окисления.

Вероятно, все представляют себе обычное окисление металлов. На всякий случай напомним, что это — химическая реакция, при которой атомы металла соединяются с атомами кислорода. Многие, наверное, замечали, что на старых медных или бронзовых изделиях в результате такой реакции образуется патина — пленка окисла зеленоватого или коричневатого цвета. Ну а самым известным случаем окисления, без сомнения, является горение вещества.

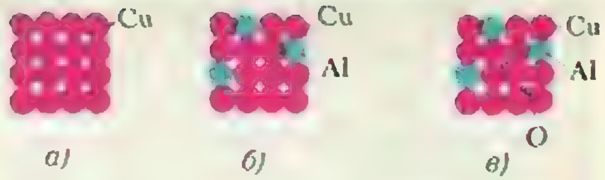


Рис. 3. В сплаве замещения атомы алюминия занимают позиции атомов меди.

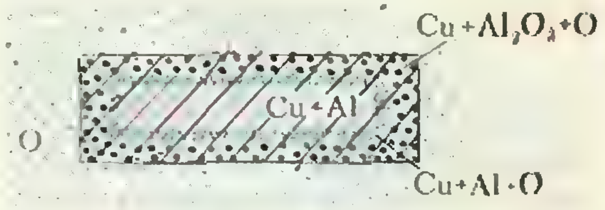


Рис. 4. Кислород диффундирует в медно-алюминиевый сплав.

Однако внутреннее окисление — более тонкая процедура. Прежде чем ее описывать, необходимо разобраться в некоторых вопросах строения сплавов.

Чистая медь представляет собой правильную кристаллическую структуру, т. е. ее атомы занимают друг по отношению к другу строго определенные позиции (рисунок 3, *а*). А какова структура сплава меди, например, с алюминием? Та же самая кристаллическая решетка, одни узлы которой заняты атомами меди, а другие — алюминия. Примерно как на рисунке 3, *б*. Это — так называемый сплав замещения. Атомы алюминия просто замещают в кристаллической решетке атомы меди.

Добавим теперь к этому сплаву еще и кислород. Где будет его место? Радиус атома кислорода сравнительно невелик (здесь просим поверить на слово), и ему очень удобно занять позицию в междоузлии — т. е. не в узлах кристаллической решетки, а между ними, как показано на рисунке 3, *в*. Это — уже пример сплава внедрения. Атомы кислорода внедряются между атомами металла.

Сплав меди с алюминием изготовить легко. Для этого надо взять оба компонента в нужной пропорции, вместе их расплавить, перемешать жидкость и дать ей остыть и закристаллизоваться.

Получится примерно то, что изображено на рисунке 3, *б*. Как теперь добавить кислород?

Поместим медно-алюминиевый сплав в газовую *атмосферу, содержащую* кислород. Хотя бы просто в воздушную среду. Диффундируя, молекулы газа будут заполнять пространство между атомами металлов.

Ну хорошо. Сплав меди с алюминием и кислородом мы приготовить сможем. А что дальше? Здесь пора раскрыть идею нашего плана. Алюминий имеет, как говорят химики, большее сродство к кислороду, чем медь. Иначе говоря, он легче окисляется. Значит, можно попытаться создать условия, когда алюминий бы окислялся, а медь — нет. Тогда частицы оксида алюминия образовывались бы внутри меди, и наша цель была бы достигнута. Кстати говоря, совершенно необязательно брать для этих целей именно алюминий. Можно остановить выбор на любом другом металле с бо́льшим сродством к кислороду, чем медь. Подходят титан, гафний, цирконий, никель, олово и т. д.

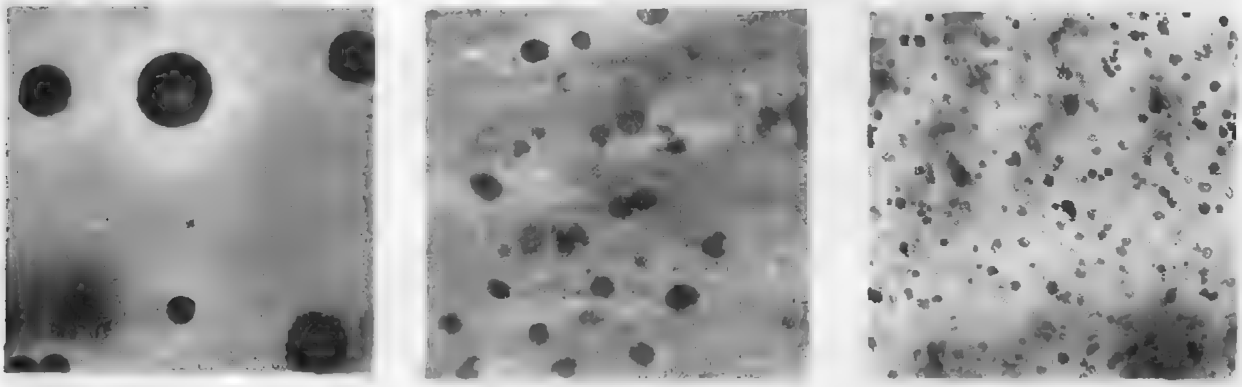
Вы, скорее всего, видели, как даже в сухую погоду гаснет костер у неумелого туриста. Если дрова беспорядочно навалены в кучу, доступ кислорода к горящему веществу затруднен, и реакция может прекратиться. Это не означает, что внутри плохо сложенного костра вообще нет кислорода. Конечно, он проникает туда через многочисленные щели. Но его может оказаться недостаточно.

Мы подходим к очень важному выводу. Химическая реакция — явление «пороговое». Для ее протекания *необходимо создать некоторую минимальную* (выше «порога») концентрацию реагирующих веществ. Иначе реакция не пойдет.

С проявлением этого принципа мы сталкиваемся каждый день. Тщательный химический анализ показывает, что вокруг нас и в нас самих присутствуют почти все элементы периодической таблицы. К счастью, их концентрации, как правило, ниже «пороговых», и они между собой не реагируют. А иначе нашу жизнь было бы трудно *себе вообразить*...

Вернемся к металлам. Реакция окисления алюминия идет легче, чем реакция окисления меди, потому, что для нее ниже «порог» кислородной концентрации. Значит можно подобрать такую концентрацию кислорода в газовой атмосфере, что алюминий еще будет окисляться, а медь — уже нет.

Теперь, наконец, рассмотрим процесс внутреннего окисления в целом. Исходный образец представляет собой сплав замещения алюминия в меди, в котором доля алюминия не превы-



Эти фотографии сделаны с помощью электронного микроскопа. Так выглядят образцы сплавов на основе меди после внутреннего окисления. Упрочняющие частицы — SiO_2, *диаметр частиц* $d \approx 1000$ Å *(фото а, увеличение 100 000) и* Al_2O_3, $d \approx 150$ Å *(фото б, увеличение 200 000) и* $d \approx 50$ Å *(фото в, увеличение 200 000). Чем мельче частицы, тем прочнее материал.*

шает, как правило, процента. Этот образец помещается в камеру, где поддерживается специально подобранная концентрация кислорода, при которой окисляться может только алюминий. Атомы кислорода начинают диффундировать в образец. У его края образуется сплав из трех элементов — меди, алюминия и кислорода. Начало процесса схематически представлено на рисунке 4.

В зоне тройного сплава происходит реакция окисления алюминия. При этом атомы алюминия и кислорода покидают кристаллическую решетку меди и «организуют» свою самостоятельную фазу — оксид Al_2O_3. Междоузлия медной решетки освобождаются, и в них извне поступают свежие порции кислорода. А вот запас алюминия на краю образца вскоре истощится. Вся внешняя зона окажется упрочненной оксидом, и процесс окисления пойдет дальше — в глубь образца, куда с поверхности будет непрерывно «подкачиваться» кислород. Когда зона реакции пройдет через весь образец, процесс закончится: весь алюминий окажется полностью переведенным в окисел*).

Оксид внутри меди образуется в виде очень мелких частиц размером порядка сотен ангстрем ($1\,\text{Å} = 10^{-8}$ см). Они хорошо видны в электронный микроскоп.

К этому следует еще добавить, что весь процесс имеет смысл проводить при повышенных температурах. Как известно, температура является мерой средней кинетической энергии молекул или атомов. С повышением температуры кислород приобретает бо́льшую подвижность, и весь процесс значительно ускоряется во времени.

Вместо заключения

Вооружимся теперь цифрами: эксперимент показывает, что электропроводность внутренне окисленного материала составляет 80—90 % электропроводности чистой меди, зато срок службы изделий увеличивается в десятки раз. И в «старой, доброй» меди — еще немало «бунтующих тайн»!

Сплав, о котором мы рассказали, прошел долгий путь от исследования физических основ процесса и создания его математических моделей до промышленного выпуска. Сейчас создается аналогичный материал на основе платины. Но он будет значительно прочнее, чем чистая платина. Его внедрение позволит сэкономить немало драгоценного металла.

Снаружи внутренне окисленная медь ничем не отличается от чистой меди, а внутренне окисленная платина — от чистой платины. И смотря на гладкую немую поверхность металла, мы порой не подозреваем, какие он хранит секреты, как сложен был его «жизненный путь», сколько людей приложили руку к тому, чтобы он существовал и верно нес свою службу.

---

*) Точнее говоря, алюминия останется очень мало, его концентрация станет ниже «пороговой».

Вниманию наших читателей!

Магазин «Академкнига» г. Кишинева высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Васильев Н. Б., Гутенмахер В. Л., Раббот Ж. М., Тоом А. Л. *Заочные математические олимпиады.* — 1986.— 30 к.

Климишин И. А. *Астрономия наших дней.* — Издание 3-е, переработанное и дополненное. — 1986.— 2 р. 30 к.

Майер В. В. *Полное отражение света в простых опытах.* — 1986. — 25 к.

Сикорук Л. Л., Шпольский М. Р. *Любительская астрофотография.* — (Библиотека любителя астрономии). — 1986. — 30 к.

Силин А. А. *Трение и мы.* — (Библиотечка «Квант»).— 1987. — 35 к.

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.* — (Библиотечка «Квант»). — 1986. — 35 к.

Шарыгин И. Ф. *Задачи по геометрии. Планиметрия.* — Издание 2-е, переработанное и дополненное. — (Библиотечка «Квант»). — 1986. — 45 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 227012 Кишинев, пр. Ленина, 148, магазин «Академкнига».

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 августа 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1101» или «Ф1113». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи

М1101—М1105, Ф1113—Ф1117

М1101. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что $AD=BC=EC$ и треугольник ADE равнобедренный. Каким может быть угол при вершине A?

В. Кириак (Румыния)

М1102. Докажите, что существуют n различных натуральных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа, если а) $n=3$, б) $n=4$, в) n — любое натуральное число, большее 2.

Л. Д. Курляндчик

М1103. а) На бесконечной плоскости, разбитой на квадратные клетки, некоторое — быть может бесконечное — количество прямоугольников размером 1×2 закрашены в черный цвет так, что никакие два черных прямоугольника не имеют общих точек (даже вершин). Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно замостить этими прямоугольниками.

б)* Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько прямоугольников размером $m\times n$, не имеющих общих точек. Докажите, что если mn четно, то оставшуюся часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2, а если mn — нечетно, то это не всегда возможно.

М. Хованов, ученик 10 класса

М1104. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и BCD перпендикулярны, $\angle BAC=90°$. Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, можно составить прямоугольный треугольник.

В. Н. Дубровский

М1105. После нескольких прямолинейных разрезов поверхность выпуклого многогранника развернули на плоскость. Получился многоугольник, для которого известно, какие точки его границы «склеиваются», т. е. отвечают одной и той же точке на поверхности многогранника. Каким был исходный многогранник, если при разрезании получился

а) прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$,

б) равнобедренный треугольник с углом 120°, причем в обоих случаях склеиваются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины.

Н. П. Долбилин, М. И. Штогрин

Ф1113. Шар радиусом R может свободно вращаться на закрепленной горизонтально оси OO'. Под шаром, прижимаясь к нему, движется шероховатая жесткая лента, изогнутая в виде полуцилиндра радиусом R (рис. 1). Скорость ленты v направлена горизонтально и перпендикулярно оси OO'. Чему равна установившаяся скорость вращения шара?

Л. Г. Маркович

Задачник „Кванта"

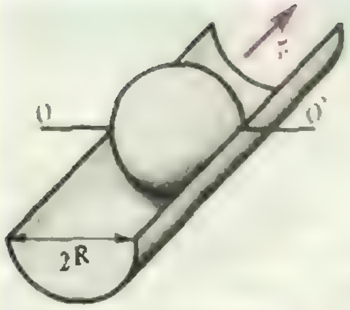


Рис. 1.

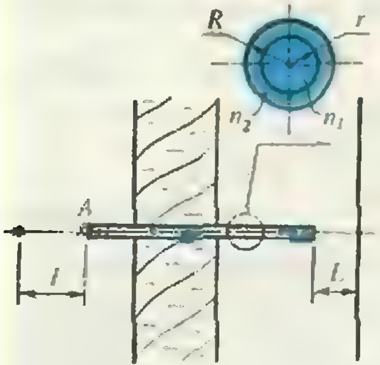


Рис. 2.

Ф1114. Каскадер падает с высоты $H = 50$ м. К нему пристегнут резиновый шнур, второй конец которого закреплен в месте старта. Длина и жесткость шнура подобраны так, что у земли скорость гасится до нуля. После того как затухли колебания, каскадер повис на высоте $h = 10$ м над землей. Какова была максимальная скорость каскадера во время падения? Сопротивление воздуха не учитывать.

Д. В. Павлов

Ф1115. Замкнутый сосуд, заполненный газом, разделен на две части непроницаемым горизонтальным поршнем; масса сосуда m, масса поршня M. Вначале сосуд покоится на подставке. Затем подставку толчком выбивают из-под сосуда. С каким ускорением начнет двигаться сосуд? Трением между стенками сосуда и поршнем пренебречь.

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1116. В две одинаковые химические пипетки набирают до одного и того же уровня воду: в одну — холодную, в другую — горячую. Пипетки опорожняют и считают при этом капли. Из какой пипетки упадет больше капель?

А. И. Буздин

Ф1117. Свет от точечного источника A выводится сквозь непрозрачную стенку с помощью световода — тонкой прозрачной палочки с радиусом сечения R (рис. 2); внутренняя часть палочки с радиусом $r (R - r \ll r)$ сделана из материала с показателем преломления n_1, а внешняя оболочка — из материала с показателем преломления n_2 $(n_2 < n_1)$. Определите диаметр светового пятна на экране, расположенном на расстоянии L от правого торца световода. Источник света находится вблизи центра левого торца световода.
Как изменится размер пятна, если источник удалить вдоль оси световода на расстояние l от торца?

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Problems

M1101—M1105, P1113—P1117

M1101. There are points D and E on the equal sides AB and AC (respectively) of the isoceles triangle ABC such that $AD = BC = EC$ and the triangle ADE is isoceles. What can be said about $\angle A$?

V. Chiriac (Rumania)

M1102. Prove that there exist n distinct natural numbers whose sum of cubes is the cube of a natural number, if a) $n = 3$, b) $n = 4$, c) n is any natural number greater than 2.

L. D. Kurlyandchik

M1103. In the infinite plane, divided into equal little squares, there is a certain quantity (perhaps infinite) of black 1×2 rectangles without common sides or vertices.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions

of problem from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please sent it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

Prove that the rest of the plane can be filled up by 1×2 rectangles.

b)* Suppose a certain number of $m\times n$ rectangles in the squared plane (without common sides or vertices) are painted black. Prove that if mn is even, the remaining white part of the plane may be filled by $1\times\times 2$ rectangles, while this is not always possible if mn is odd.

M. Khovanov, 10th form pupil

M1104. The faces ABC and BCD of the tetrahedron $ABCD$ are perpendicular and $\angle BAC=90°$. Prove that a right triangle may be constructed using segments whose lengths are equal to the products of the tetrahedron's opposite edges.

V. N. Dubrovski

M1105. After several rectilinear cuts along the surface of a convex polyhedron, the surface is spread out on the plane and a polygon is obtained. It is known what points of the polygon's boundary are glued together, i. e. correspond to the same point on the polyhedron's surface. Describe the initial polyhedron, if the polygon obtained by cutting and spreading out is

a) a rectangle with sides 1 and $\sqrt{3}$,

b) an isoceles triangle with an angle of 120°, if in both cases the points glued together are pairs of points on the same side symmertic with respect to its midpoint.

N. P. Dolbilin, M. I. Shtogrin

P1113. A ball of radius R can rotate freely about a fixed horizontal axis OO'. A rough rigid ribbon bent in the form of a half cylinder of radius R, pressed against the ball from below, moves with velocity v directed horizontally and perpendicularly to the axis OO'(figure Рис. 1). What is the established velocity of the ball's rotation?

L. G. Markovich

P1114. A stunt man falls from the height $H=50m$. He is tied to a rubber rope whose other end is fixed at the jump-off point. The length and rigidity of the rope are chosen so that the speed at ground level is zero. After the oscillations cease, the stunt man hangs at the height $h=10$m above the ground. What was the stunt man's maximal downward velocity? Air resistance is negligible.

D. V. Pavlov

P1115. A closed receptacle, filled with gas, is separated into two parts by an inpenetrable horizontal piston; the receptacle's mass is m, that of the piston is M. Initially the receptacle stands on a support, which is then knocked out from under it. What will the acceleration of the receptacle be? There is no friction between the receptacle's walls and the piston.

S. F. Kim, A. I. Latynin

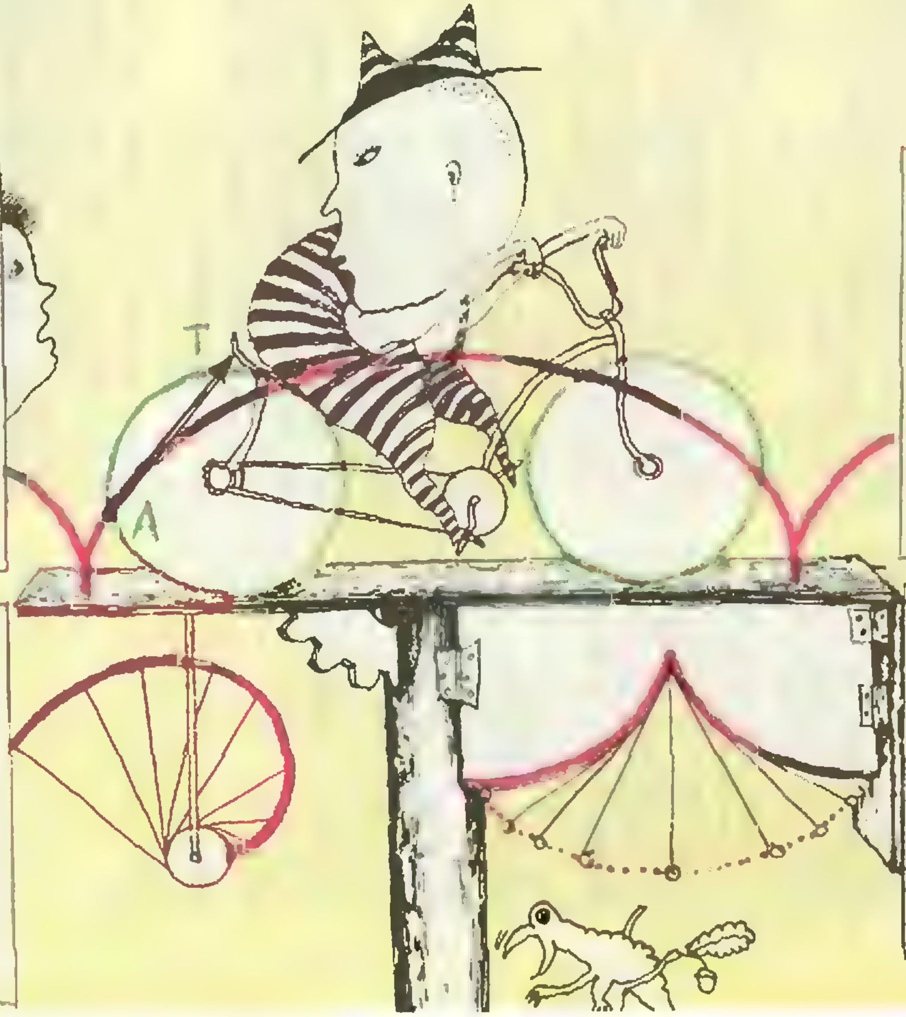
P1116. Two identical pipettes are filled with water to the same level: hot water in one, cold in the other.

(Продолжение см. на с. 34)

Замечательные линии и точки. Циклоида

Циклоида — это кривая, которую можно определить как траекторию точки, лежащей на границе круга, катящегося без скольжения по прямой. Эту же траекторию описывает и лампочка, которую умельцы-мальчишки прикрепляют к ободу велосипедного колеса. Название «циклоида» принадлежит Галилею.

Галилей экспериментально установил, что площадь под одной аркой циклоиды в три раза больше площади производящего ее круга. Он вырезал циклоиду и соответствующий круг из металлической пластинки и сравнил их массы. Ученик Галилея Торричелли определил площадь циклоиды, используя кинематические соображения.



Касательная в точке *A* циклоиды проходит через верхнюю точку *T* соответствующей производящей окружности. Именно по этой касательной, а не по касательной к окружности, летит с колеса капля воды на спину велосипедиста, если колесо не закрыто крылом.

Подвесим маятник в острие перевернутой циклоиды, сделаем длину нити равной половине длины арки циклоиды и разрешим нити наматываться на циклоидальные «щеки». Тогда маятник будет двигаться по циклоиде, а период колебания не будет зависеть от величины начального отклонения (т. е. это «идеальный маятник»).

Уравнение циклоиды удобно записывать через a — угол поворота окружности, выраженный в радианах,

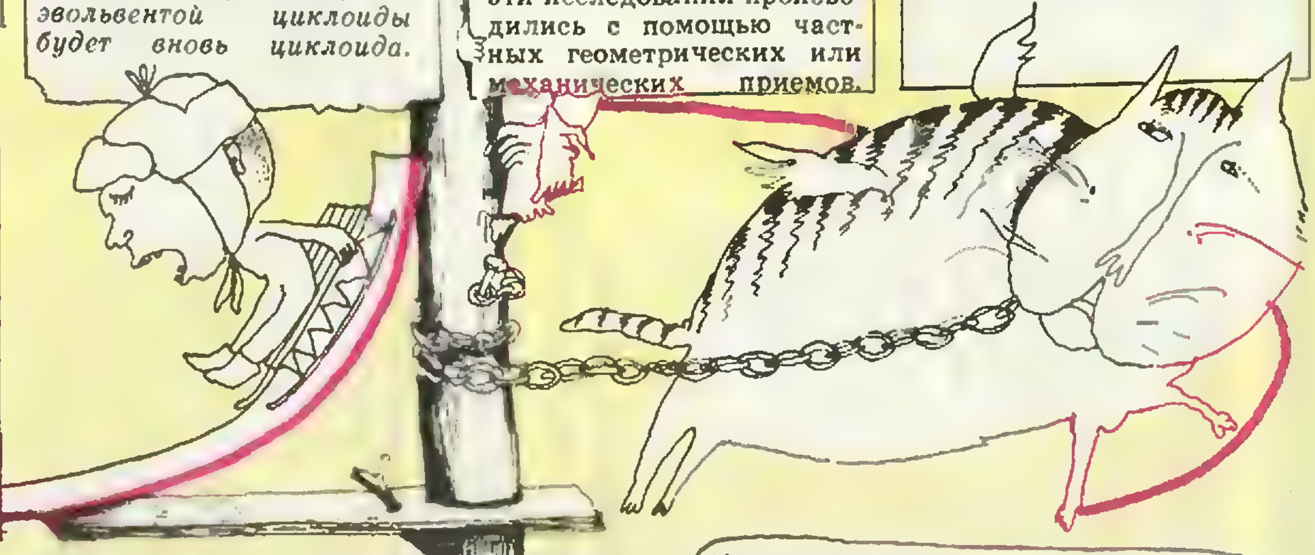
$$x = ra - r\sin a,$$
$$y = r - r\cos a.$$

Заметим, что a также равняется пути, пройденному производящей окружностью по прямой.

Если на выпуклую плоскую кривую намотать нитку, закрепить кривую на плоскости и сматывать нитку, все время оставляя ее в натяжении, то конец нитки будет описывать кривую, которая называется эвольвентой данной кривой. Теперь ясно, что *эвольвентой циклоиды будет вновь циклоида.*

Оригинальное доказательство теоремы Галилея дали в 1634 году Роберваль и независимо от него Декарт и Ферма. В 1658 году английский математик Рен установил, что длина дуги арки циклоиды равна четырем диаметрам производящего круга. Все эти исследования производились с помощью частных геометрических или механических приемов.

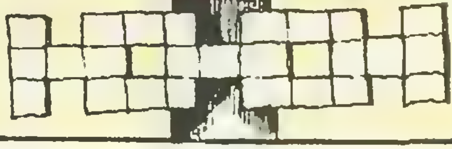
Одной из замечательных кривых является эвольвента окружности. По ней ходил бы пушкинский кот ученый, если бы он был привязан «златою цепью» к круглому стволу дуба, и цепь была бы натянута.



Если с горки, построенной в форме перевернутой циклоиды, спускаться на санках, то время, необходимое для достижения нижней точки горки, не зависит от того, с какого места начинать спуск. Кроме того, спуск по циклоидальной горке из одной точки в другую занимает меньшее время, чем по горкам, имеющим другую форму.

П	+	О	×	Д
+	+	+	−	×
У	+	М	−	А
−	+	−	−	+
Й	+	Т	+	Е

Какие цифры нужно подставить вместо букв слова ПОДУМАЙТЕ (используя каждую цифру только один раз), чтобы результат арифметических действий в каждой строке, в каждом столбце (сверху вниз) и по обеим диагоналям (слева направо) квадрата равнялся 10?



Запишите в клетки фигуры, изображенной на рисунке, цифры так, чтобы во всех вертикальных и горизонтальных полосках из трех клеточек стояли различные трехзначные числа, являющиеся полными квадратами.

The water is dripped out of the pipettes and the drops counted. Which pipetie will yield the most drops?

A. I. Buzdin

P1117. Light from a point source A is carried through a non-transparent wall by means of a light conductor: a thin transparent stick with circular section of radius R (figure Рис.); the inner part of the stick of radius $r(R-r\ll r)$ is made of a material of refraction index n_1, the outer envelope — of material with refraction index n_2 ($n_2<n_1$). Determine the diameter of the light spot obtained on a screen placed at the distance L from the right end of the light conductor. The source A is placed next to its left end, near the latter's middle. How will the size of the spot change, if the source is moved away from the conductor along its axis to the distance l?

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

Решения задач

М1081—1085, Ф1093—1097

М1081. *Докажите, что предпоследняя цифра числа 3^n при любом натуральном $n>2$ четна.*

Будем считать, что у однозначного числа «предпоследняя цифра» равна 0.

Если число N кончается цифрами ab, то, очевидно, две последние цифры числа $3N$ совпадают с двумя последними цифрами числа $3(10a+b)=30a+3b$. Поэтому при четном a предпоследние цифры чисел $3N$ и $3b$ будут одной и той же четности. Выпишем несколько первых степеней 3:

$$3^1=3,\ 3^2=9,\ 3^3=27,\ 3^4=81.$$

Их последние цифры — 3, 9, 7, 1; дальше они будут периодически повторяться. Предпоследние цифры чисел $3\cdot 3=9, 3\cdot 9=27, 3\cdot 7=21, 3\cdot 1=3$ — четные, следовательно, если утверждение задачи справедливо для 3^n, то оно справедливо и для 3^{n+1}. А так как оно верно для $3^3=27$, по индукции заключаем, что оно верно и для всех натуральных $n>2$.

В. И. Плачко

М1082. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Докажите, что равенство*

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)$$

выполнено тогда и только тогда, когда либо диагонали AC и BD перпендикулярны, либо одна из них делится точкой O пополам.

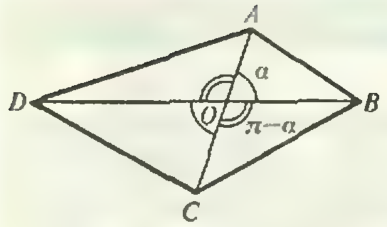
Запишем теорему косинусов для треугольников AOB, BOC, COD и DOA, полагая $\angle AOB=\alpha$ (и тем самым $\angle BOC=\pi-\alpha$; см. рисунок):

$$AB^2=AO^2+BO^2-2AO\cdot BO\cos\alpha,$$
$$BC^2=BO^2+CO^2+2BO\cdot CO\cos\alpha,$$
$$CD^2=CO^2+DO^2-2CO\cdot DO\cos\alpha,$$
$$DA^2\neq DO^2+AO^2+2DO\cdot AO\cos\alpha.$$

Сложим эти равенства и перенесем квадраты отрезков диагоналей в левую часть:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2-2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)=$$
$$=2\cos\alpha(-AO\cdot BO+BO\cdot CO-CO\cdot DO+DO\cdot AO)=$$
$$=2\cos\alpha(BO-DO)(CO-AO).$$

Равенство из условия равносильно тому, что последнее



полученное выражение равно нулю, поэтому или $\cos\alpha=0$, и следовательно, диагонали AC и BD перпендикулярны, или $BO=DO$, или $CO=AO$, т. е. одна из диагоналей делится точкой O пополам.

А. П. Савин

М1083. *Наибольшее из неотрицательных чисел $a_1, a_2, \cdots, a_n$ равно a.*

а) Докажите неравенство

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

б) Когда в нем достигается равенство?

а), б) Положим $(a_1+a_2+\ldots+a_n)/n=m$, тогда

$$\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}-m^2\leqslant am-m^2=\frac{a^2}{4}-\left(\frac{a}{2}-m\right)^2\leqslant\frac{a^2}{4},$$

поскольку $a_i^2\leqslant a\cdot a_i$ ($i=1, 2,\ldots, n$). Тем самым доказано неравенство а).

Равенство в нем достигается тогда и только тогда, когда, во-первых, $a_i^2=a\cdot a_i$, т. е. при каждом i либо $a_i=0$, либо $a_i=a$, и, во-вторых, $m=a/2$. А это возможно только в двух случаях: 1) все a_i равны 0; 2) n четно и $n/2$ чисел a_i равны 0, а остальные $n/2$ равны a ($a>0$).

Таким же способом можно доказать следующее — более общее — неравенство: $p_1a_1^\alpha+p_2a_2^\alpha+\ldots+p_na_n^\alpha\leqslant$ $\leqslant(p_1a_1+\ldots+p_na_n)^\alpha+(\alpha-1)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}a^\alpha$ при $p_i\geqslant0$ ($i=1,\ldots,n$), $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$, $\alpha>1$, $0\leqslant a_i\leqslant a$.

Л. Г. Ханин

М1084. *Две окружности на плоскости пересекаются в точках A и B. Докажите, что можно выбрать такую точку C, что любая окружность с хордой AC будет пересекать данные окружности (второй раз) в точках, одинаково удаленных от C.*

Обозначим через O_1 и O_2 центры данных окружностей. Достроим треугольник O_1BO_2 до параллелограмма (рис. 1) и докажем, что его четвертая вершина C ($\overrightarrow{O_1C}=\overrightarrow{BO_2}$) и есть искомая точка.

Пусть O — центр произвольной окружности, проходящей через A и C, M и N — точки ее пересечения с окружностями O_1 и O_2. Равенство $CM=CN$ равносильно равенству дуг CM и CN окружности O, которое, в свою очередь, равносильно тому, что прямая AC образует равные углы с прямыми AM и AN (т. е. либо $\angle CAM=\angle CAN$ — рисунок 1, либо $\angle CAM+\angle CAN=180°$ — рисунок 2). Общая хорда AM окружностей O и O_1 перпендикулярна их линии центров OO_1; аналогично, хорда AN перпендику-

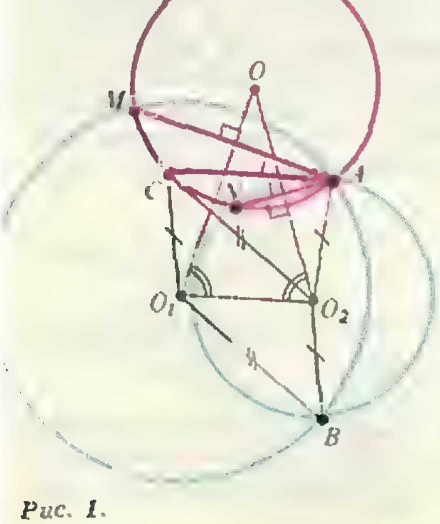


Рис. 1.

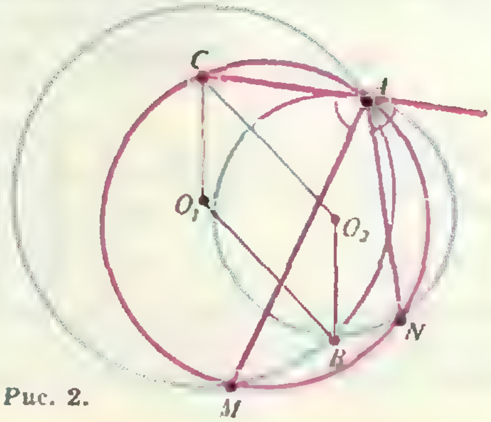


Рис. 2.

лярна OO_2. Поэтому достаточно доказать, что прямая AC образует равные углы с OO_1 и OO_2. Заметим, что ACO_1O_2 — равнобочная трапеция (так как $O_1C=O_2B=O_2A$, $O_2C=O_1B=O_1A$, т. е. $\triangle O_1O_2C=\triangle O_2O_1A$). Следовательно, прямая AC параллельна O_1O_2. Остается заметить, что $\angle OO_1O_2=\angle OO_2O_1$, ибо точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC ($OA=OC$), а значит, — и к отрезку O_1O_2.

В. Ю. Протасов

М1085*. *Несколько попарно скрещивающихся прямых, расположенных в пространстве, проектируются на горизонтальную плоскость. Их проекции изображены так, чтобы в точках пересечения было видно, какая точка расположена выше, а какая ниже. Может ли получиться проекция, изображенная на рисунке 1а, б, в?*

а) Ответ: нет. Допустим, что требуемое расположение (рис. 1, *а*) существует. Ясно, что прямую *1* можно опустить в вертикальной плоскости, не задевая прямую *3*, так, чтобы она пересекла прямые *2* и *4*, затем аналогично опустить прямую *3* так, чтобы она пересекла прямые *1* и *4* и, наконец, повернуть прямую *2* в вертикальной плоскости вокруг точки ее пересечения с прямой *1* так, чтобы она пересекла прямую *3*. При этом прямая *2* по-прежнему будет проходить под прямой *4* (рис. 2). Но в то же время прямые *2* и *4* должны пересекаться, так как каждая из них пересекает прямые *1* и *3*, и следовательно, все четыре прямые должны лежать в одной плоскости. Противоречие.

б) Ответ: нет. Снова допустим, что рассматриваемая конфигурация возможна. Обозначим прямые через a, b, c, l_1, l_2 и l_3 (см. рис. 1, *б*). Передвигая их в вертикальных плоскостях, как в пункте а), мы можем добиться, чтобы каждая из прямых a, b, c пересекала каждую из прямых l_1, l_2, а l_3 пересекалась с a и b (рис. 3). Пусть A_1, A_2, …, C_2 — точки пересечения прямых a и l_1, a и l_2, …, c и l_2; теми же буквами обозначаются и изображения этих точек на нашей картинке. Спроектируем всю конфигурацию на вертикальную плоскость λ, содержащую прямую l_3, вдоль прямой c (рис. 4). Прямая c при этом проектируется в точку C. Докажем, что эта точка лежит на прямой l_3 — это бы означало, что c и l_3 пересекаются, и противоречило предположению. Вертикальные плоскости, содержащие прямые a, b и c, параллельны (так как $a\parallel b\parallel c$ на рисунках 1, *б* и 3), поэтому и проекции a и b вдоль c параллельны. Кроме того, на рисунке 3 $A_1A_2:A_2A_3=B_1B_2:B_2B_3$, следовательно, это верно и для самой конфигурации, а значит, и для рисунка 4 (при параллельной проекции отношения длин параллельных отрезков сохраняются). Отсюда очевидно следует, что на рисунке 4 прямая A_3B_3 проходит через точку C, что и требовалось доказать.

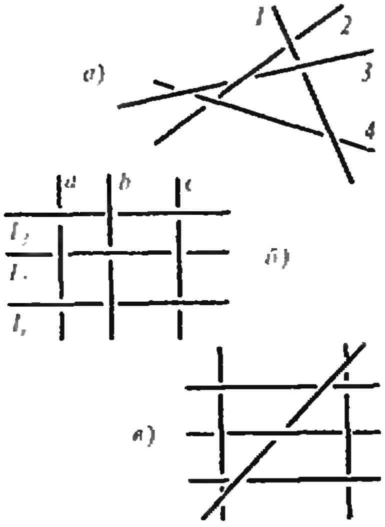


Рис. 1.

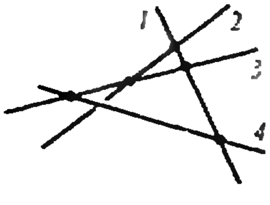


Рис. 2.

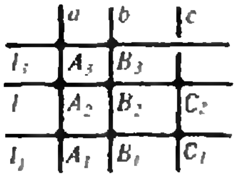


Рис. 3.

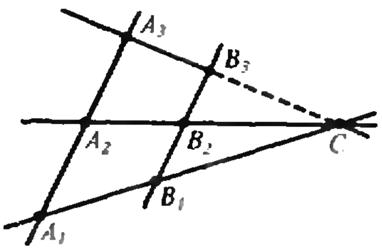


Рис. 4.

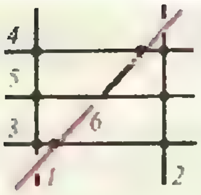


Рис. 5.

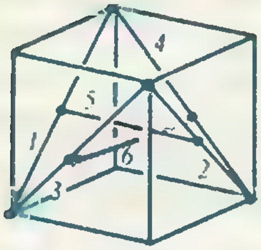


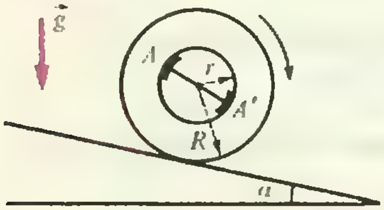
Рис. 6.

в) Ответ: да. Если мы сумеем построить конфигурацию, проекция которой показана на рисунке 5, то, чуть-чуть приподняв (параллельным переносом) прямую 6, опустив прямую 5, а за ней — прямые 1 и 2, получим рисунок 1, *в*. Возьмем в качестве прямых 1, 2, 3 и 4 диагонали боковых граней куба (рис. 6), прямую 5 проведем через середины диагоналей 1 и 2, а прямую 6 проведем через точки на диагоналях 3 и 4, расположенные чуть ниже их середин. Проекция этих прямых на основание куба дает рисунок 5.

Предлагаем читателям придумать по возможности более общие условия существования конфигураций скрещивающихся прямых, заданных их проекциями. Это интересная, но, видимо, довольно трудная задача на исследование.

С. Л. Табачников

Ф1093. *Автомобиль массой $m=1200$ кг, тормозя при выключенной передаче, катится вниз с постоянной скоростью по наклонному участку шоссе с углом наклона $\alpha\left(\sin\alpha=\frac{1}{14}\right)$. Каждое из четырех колес автомобиля имеет внешний радиус R и жестко скреплено с тормозным барабаном радиусом $r=\frac{5}{12}R$, к которому прижимаются с одинаковой силой N тормозные колодки A и A' (см. рисунок). Найти N, если коэффициент трения скольжения между барабаном и колодками $k=0{,}4$. Проскальзывание между шинами и шоссе отсутствует.*



Если бы на колеса автомобиля не действовали тормозные колодки, то при отсутствии проскальзывания между шинами и шоссе автомобиль спускался бы по склону ускоренно. При этом на пути S он «набирал» бы кинетическую энергию ΔK, и согласно закону сохранения энергии

$$\Delta K=mgS\sin\alpha,$$

где $mgS\sin\alpha$ — изменение потенциальной энергии.

По условию задачи скорость автомобиля не меняется. Это означает, что работа A сил трения (между тормозными барабанами и колодками) на пути S как раз равна $mgS\sin\alpha$. Найдем работу A.

Если автомобиль прошел путь S, то каждая колодка прошла по поверхности барабана путь $S_1=Sr/R$, и сила трения между каждой колодкой и барабаном совершила работу

$$A_1=kNS_1=kNS\frac{r}{R}.$$

Суммарная работа сил трения —

$$A=8A_1=8kNS\frac{r}{R}$$

(на каждом из четырех колес по две колодки).

Таким образом, по закону сохранения энергии

$$8kNS\frac{r}{R}=mgS\sin\alpha.$$

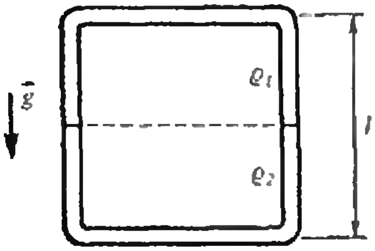
Отсюда находим N:

$$N=\frac{mgR\sin\alpha}{8kr}=630\text{ Н}.$$

В. И. Чивилёв

Ф1094. *Узкая трубка постоянного сечения образует квадрат со стороной l,*

Начав двигаться, жидкость будет стремиться занять положение, в котором потенциальная энергия системы Π будет наименьшей. Значение Π будет минимальным, *закрепленный в вертикальной плоскости. Трубка заполнена равными объемами двух не проникающих друг в друга жидкостей с плотностями ϱ_1 и ϱ_2 (см. рисунок). Вначале более плотная жидкость заполняла верхнюю часть трубки. В некоторый момент жидкости пришли в движение. Найти их максимальную скорость. Трения нет. Ускорение свободного падения равно g.*



когда более плотная жидкость окажется в нижней половине трубки, а менее плотная — в верхней (устойчивое положение равновесия). Согласно закону сохранения энергии именно в этот момент кинетическая энергия жидкости $K=(m_1+m_2)v^2/2$ (а значит и ее скорость) будет максимальной, и $K=\Delta\Pi$ ($\Delta\Pi$ — изменение потенциальной энергии системы). Найдем $\Delta\Pi$.

Центр тяжести жидкости, занимающей половину (верхнюю или нижнюю) трубки, находится на расстоянии $y=l/8$ от ближайшей горизонтальной стороны. Смещение центра тяжести каждой жидкости при переходе в положение устойчивого равновесия равно

$$\Delta y=l-2y=l-2\frac{l}{8}=\frac{3}{4}l.$$

Следовательно, изменение потенциальной энергии всей системы —

$$\Delta\Pi=(m_1-m_2)g\cdot\frac{3}{4}l=\frac{3}{2}(\varrho_1-\varrho_2)gSl^2$$

(S — площадь сечения трубки).

Максимальное значение кинетической энергии —

$$K_{\max}=(m_1+m_2)\frac{v^2_{\max}}{2}=(\varrho_1+\varrho_2)Slv^2_{\max}.$$

Таким образом, из закона сохранения энергии —

$$(\varrho_1+\varrho_2)Slv^2_{\max}=\frac{3}{2}(\varrho_1-\varrho_2)gSl^2$$

— находим $v_{\max}$:

$$v_{\max}=\sqrt{\frac{3}{2}gl\frac{\varrho_1-\varrho_2}{\varrho_1+\varrho_2}}.$$

Г. В. Меледин

Ф1095. *Рассеянный велосипедист не заметил, как случайно наехал на вертикальную стенку. Оценить, при какой минимальной скорости шина при ударе деформируется до металлического обода. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить числовой результат.*

При ударе колеса велосипеда о вертикальную стенку происходит сжатие газа в камере. При этом совершается работа

$$A\sim p\cdot\Delta V,$$

где p — избыточное давление воздуха в камере, ΔV — изменение объема камеры. На совершение этой работы пойдет кинетическая энергия велосипедиста, так что

$$p\cdot\Delta V\sim\frac{mu^2}{2}.$$

Отсюда для скорости велосипедиста получаем

$$u\sim\sqrt{\frac{2p\cdot\Delta V}{m}}.$$

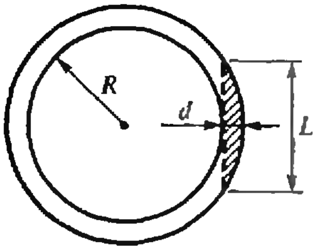
Избыточное давление в камере можно оценить из соотношения

$$p\cdot 2S\sim mg,$$

где S — площадь соприкосновения каждого колеса с дорогой. Следовательно,

$$u\sim\sqrt{\frac{g\cdot\Delta V}{S}}.$$

Объем ΔV, как видно из рисунка, можно оценить как



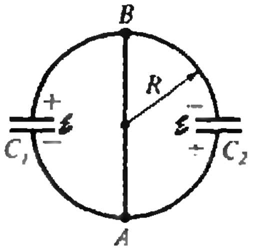
$$\Delta V \sim \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{L}{2}, \text{ где } \frac{L}{2} = \sqrt{2dR - d^2} \approx \sqrt{2dR}.$$

Сделаем численную оценку: при $d \sim 4$ см, $S \sim 3 \cdot 10$ см^2, $R \sim 40$ см получаем

$$u \sim 4 \text{ км/ч}.$$

Г. В. Федотович

Ф1096. *Проволочное кольцо радиусом R имеет проводящую перемычку, расположенную вдоль диаметра. В левую и правую полуокружности включены конденсаторы C_1 и C_2 (см. рисунок). Кольцо помещено в нарастающее линейно со временем магнитное поле с индукцией $B(t) = B_0 t/T$, перпендикулярное его плоскости. В некоторый момент времени перемычку убирают и затем прекращают изменять поле. Найти заряды, установившиеся на конденсаторах.*



Кольцо с проводящей перемычкой можно представить как два контура — AC_1B и BC_2A — площадью $\pi R^2/2$ каждый. Магнитный поток, пронизывающий каждый контур, меняется со временем как

$$\Phi(t) = \frac{\pi R^2}{2} B_0 \frac{t}{T}.$$

При этом в каждом контуре поддерживается ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\pi R^2 B_0}{2T}. \qquad (1)$$

Такова разность потенциалов между пластинами каждого конденсатора (см. рисунок). Следовательно, заряды на пластинах конденсаторов при изменении магнитного поля будут постоянны и равны, соответственно,

$$Q_1 = \mathcal{E} C_1, \quad Q_2 = -\mathcal{E} C_2.$$

После того как уберут перемычку и прекратят изменять поле, заряды Q_1 и Q_2 будут перераспределяться между C_1 и C_2 до тех пор, пока разность потенциалов между соединенными пластинами конденсаторов не станет равной нулю, т. е. пока напряжения на конденсаторах не сравняются. Установившиеся заряды на пластинах будут определяться условиями

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}, \qquad (2)$$

$$Q_1' + Q_2' = Q_1 + Q_2 \qquad (3)$$

(последнее равенство следует из закона сохранения заряда). Решая совместно (2) и (3), используя выражение (1) для $\mathcal{E}$, находим Q_1' и Q_2':

$$Q_1' = \mathcal{E} C_1 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pi R^2 B_0 C_1}{2T} \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2},$$

$$Q_2' = \mathcal{E} C_2 \frac{C_1 - C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\pi R^2 B_0 C_2}{2T} \frac{C_2 - C_1}{C_1 + C_2}.$$

Г. В. Федотович

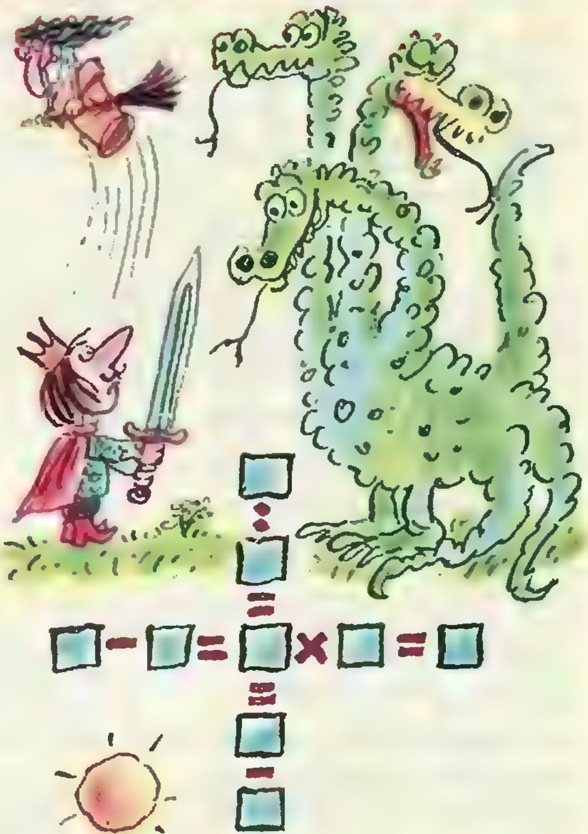
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и трехxвостым. «Вот тебе меч-кладенец,— говорит ему баба-яга.— Одним ударом ты можешь срубить Змею либо одну голову, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста. Запомни: срубишь голову — новая вырастет, срубишь хвост — два новых вырастут, срубишь два хвоста — голова вырастет, срубишь две головы — ничего не вырастет». За сколько ударов Иван-царевич может срубить Змею все головы и хвосты?

2. Вася сложил пятизначное число, все цифры которого были не меньше 5, с другим пятизначным числом, полученным из первого некоторой перестановкой цифр. В результате он получил число 146 245. Правильно ли Вася сложил числа?

3. В квадратики головоломки, изображенной на рисунке, проставьте все цифры от 1 до 9 включительно так, чтобы выполнялись указанные равенства (читать равенства следует слева направо и сверху вниз).



4. Все поля шахматной доски покрыли 32-мя костяшками домино. При этом каждая костяшка покрыла в точности два поля. Некоторые из этих костяшек расположились горизонтально, некоторые — вертикально. Подсчитали количества вертикальных и горизонтальных костяшек — оба эти числа оказались четными. Верно ли, что при любом покрытии шахматной доски 32-мя костяшками домино получится четное число вертикально расположенных и четное число горизонтально расположенных костяшек?

5. Три окружности попарно касаются друг друга. Может ли площадь криволинейного треугольника, ограниченного меньшими дугами этих окружностей, быть больше площади одного из трех кругов, ограниченных данными окружностями?

Эти задачи нам предложили: *В. Н. Русанов, С. Г. Губа, Л. П. Мочалов, В. В. Произволов, Г. А. Гальперин.*

АРХИМЕДОВА СИЛА В ЛИТЕРАТУРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ

Кандидат педагогических наук
С. А. ТИХОМИРОВА

Физика нас окружает повсюду — дома, на улице, в поле, в лесу, у реки. Писатели, удивительно метко подмечая все происходящее вокруг, дают яркие, красочные описания разнообразных природных явлений. Читая книгу, внимательно следя за сюжетом, мы иногда пропускаем эти описания, считая их не достаточно интересными. Между тем, они представляют весьма ценный и полезный материал не только для «лириков», но и для «физиков». Они учат нас быть внимательными, учат наблюдать, замечать, видеть проявления физики в окружающей жизни.

Мы предлагаем вам с такой физической точки зрения посмотреть на некоторые страницы литературных произведений. Начнем с отрывка из повести А. П. Чехова «Степь»:

«Егорушка... разбежался и полетел с полуторасаженной вышины. Описав в воздухе дугу, он упал в воду, глубоко погрузился, но дна не достал; какая-то сила, холодная и приятная на ощупь, подхватила и понесла его обратно наверх».

Ясно, что речь здесь идет о силе Архимеда, «холодной и приятной на ощупь». Давайте попытаемся дать объяснения различным проявлениям архимедовой силы, встречающимся на страницах художественной литературы. Прочитайте их и постарайтесь ответить на поставленные вопросы.

Отрывок из рассказа Б. В. Житкова «Под водой». Лейтенант, командовавший подводной лодкой, при входе в порт легкомысленно принял решение поднырнуть под пароход, стоявший по курсу лодки. «...Но в это время сразу же ход лодки замедлился. Все пошатнулись вперед. Лейтенант вздрогнул. Минер вопросительно на него взглянул.

— Сели на мель? Так ведь? — спросил он лейтенанта.

Рули были поставлены на подъем, винт работал, приборы показывали, что лодка на той же глубине. Лейтенант вспомнил, что тут в порту глинистое, липкое дно, понял, что лодка своим брюхом влипла в эту вязкую жижу...»

Почему лодка не могла всплыть? Всегда ли на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила?

К. Г. Паустовский, эпизод из повести «Кара-Бугаз». «...Наш кок отпросился искупаться, но залив его не принял. Он высоко выкидывал его ноги, и при всем тщании кок погрузиться в воду не смог. Это повеселило команду и улучшило несколько ее дурное расположение. Кок к вечеру покрылся язвами и утверждал, что вода залива являет собой разбавленную царскую водку, иначе — серную кислоту.»

Почему кок не смог искупаться в заливе Кара-Бугаз?

Л. Н. Толстой, строки из рассказа «Лед, пар и вода». «...В холодной воде легче плавать, чем в теплой. А в горячей воде и дерево тонет.»

Почему в горячей воде дерево может утонуть?

Теперь вычислим архимедову силу. Для постановки задачи воспользуемся отрывком из очерка В. А. Солоухина «Трава», где дается описание растения «виктория круциана».

«...На воде лежали яркие свежей сочной зеленой яркостью листья, размером с обыкновенный круглый обеденный стол... каждый лист был около двух метров в диаметре. Каждый лист имел по краю строго перпендикулярный заборчик высотой сантиметров около семи...»

Сотрудница Ботанического сада поясняет: «...лист выдерживает семьдесят килограммов, даже больше... Но только если груз распределять ровно по всей поверхности, например, насыпать ровным слоем песку. Или положить вот такой фанерный круг, а на него уж и груз. Если же ходить по листу ногами, то, сами понимаете, он будет проминаться, прогибаться, колыхаться, зачерпнет воды и скорее всего порвется. Прочный-то он прочный, и плавучесть у него великолепная, но все же это ткань живого листа, а не какая-нибудь деревяшка».

Оцените, при какой нагрузке лист погрузится в воду на глубину, равную половине высоты заборчика, которым он «обнесен» по краю. И подумайте: почему лист выдерживает бо́льшую нагрузку, если она распределена равномерно?

Еще одна задача. Читаем «Детские годы Багрова-внука» С. Т. Аксакова. На реке Белой начался ледоход. Мальчик «жадно следил глазами, как шла между неподвижных берегов огромная полоса синего, темного, а иногда и желтого льда... какая-то несчастная черная корова бегала по ней (льдине — *С. Т.*), как безумная».

Оцените, каковы минимальные размеры льдины, на которой могла плыть корова. Прикиньте сами, чему равна масса коровы и толщина льда.

А теперь — о том, как можно «управлять» выталкивающей силой.

В отрывке из романа В. Д. Иванова «Русь изначальная» рассказывается, как воин-разведчик Ратибор собирается перейти на другой берег реки. Для этого он взял длинную толстую тростинку, «чтоб дышать под водой. Ноздри и уши пловец заткнул желтым

Какое преимущество имеют жабы
Почему как не слону?..
При каком минимальном объеме
Для чего Ратибор взял...?
Почему

воском... Придерживая тростинку за конец губами, он скрылся под водой и обеими руками поднял камень величиной с коровью голову. Обвязав груз тонкой веревкой, Ратибор устроил петлю для руки».

Для чего Ратибор взял тяжелый камень в руки?

Природа предусмотрела различные приспособления, позволяющие животным жить в воде, плавать. А «сообразительные» животные для облегчения плавания используют различные предметы. Читаем строки из художественных произведений.

Почему воздушный шар?
Как бы минимальные размеры?..
дка не тонет?
АРХИ
МЕДА

Н. А. Некрасов, «Дедушка Мазай и зайцы»:

«Мимо бревно суковатое плыло,
Сидя, и стоя, и лежа пластом,
Зайцев с десяток спасалось на нем.

«Взял бы я вас — да потопите лодку!»
Жаль их, однако, да жаль и находку —
Я зацепился багром за сучок
И за собою бревно поволок...»

Оцените, при каком минимальном объеме бревна зайцы могли на нем плыть. Прикиньте сами, чему равна масса зайца.

К. Г. Паустовский, «Мещерская сторона»:

«На берегах этих рек в глубоких норах живут водяные крысы. Есть крысы, совершенно седые от старости. Если тихо следить за норой, то можно увидеть, как крыса ловит рыбу... Чтобы легче было плавать, водяные крысы отгрызают длинный стебель куги и плавают, держа его в зубах... Он прекрасно держит на воде даже не такую тяжесть, как крыса».

Почему стебель куги обладает хорошей плавучестью?

Сила Архимеда действует на тела и в жидкостях, и в газах. Для перемещения в воде люди используют подводные лодки, батискафы, различные суда. Освоение атмосферы началось с полетов на воздушных шарах.

Приведем отрывок из «Рассказа аэронавта» Л. Н. Толстого. «...Я посмотрел на барометр. Теперь я уже был на пять верст над землею и почувствовал, что мне воздуха мало, и я часто стал дышать. Я потянул за веревку, чтобы выпустить газ и спускаться, но ослабел ли я, или сломалось что-нибудь,— клапан не открывался... «Если я не остановлю шар,— подумал я,— то он лопнет, и я пропал»... Я изо всех сил ухватился за веревку и потянул. Слава богу, клапан открылся...»

Почему воздушный шар, поднявшись высоко, может лопнуть?

В середине прошлого века был совершен первый полет на управляемом аэростате — дирижабле. В начале нашего века дирижабли нашли широкое применение. Потом о них как-то забыли, а в наши дни вспомнили снова. Их предполагают использовать при освоении труднодоступных земель, как транспортное средство.

Наш экскурс по страницам художественной литературы закончим строками из романа А. Н. Толстого «Гиперболоид инженера Гарина»: «...огромный дирижабль висел над поляной, пришвартованный носом к причальной мачте. Мачта гнулась и трещала. Сигарообразное тело раскачивалось, и снизу казалось, что в воздухе повисло днище железной баржи...»

Какое преимущество имеют дирижабли перед другими воздушными транспортными средствами?

Зачем нужна математика?

Сейчас на этот вопрос ответить несложно. Математика служит основой естественных и технических наук, без нее ныне не мыслима ни одна современная технология. Кроме того, математика активно внедряется в экономику, социологию и даже историю. А как представляли себе ответ на этот вопрос в «старое доброе время», ну, скажем, лет семьсот назад? Давайте полистаем научные трактаты тех времен. Пожалуй, самым знаменитым ученым тринадцатого века был Роджер Бэкон. Он родился в 1214 году близ Ильчестера, в графстве Сомерсет, и происходил из старинного дворянского рода. Бэкон обучался сначала в Оксфорде, потом в Париже, изучил все науки своего времени, а кроме того знал греческий, латинский, арабский и древнееврейский языки. Занимаясь экспериментальными науками, Бэкон заложил основы ряда отраслей нового естествознания. Его удивительные опыты привели к тому, что он был обвинен в сношениях с дьяволом. Дважды его сажали в тюрьму, причем в последний раз, в 1278 году, он был заключен на десять лет. Умер Бэкон в 1292 году. Главное сочинение Роджера Бэкона называется «Opus majus» («Главный труд»). Почти половина его посвящена математике. Некоторое представление об основных аргументах Роджера Бэкона можно составить по многословному, в обычаях тех времен, оглавлению его сочинения.

Часть I. О четырех причинах человеческого невежества: авторитете, обычае, общественном мнении и гордости мнимым знанием.

Часть II. Об источнике совершенной мудрости в Св. Писании.

Часть III. О пользе грамматики.

Часть IV. О пользе математики:

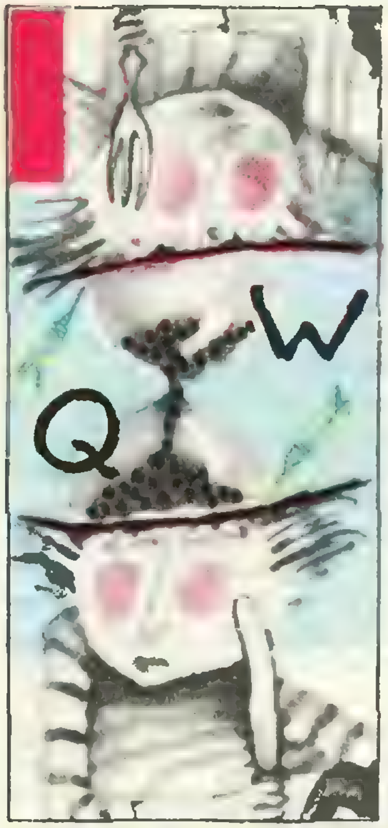
1) Необходимость математики в человеческих вещах.

2) Необходимость математики в божественных вещах: *a*) этим изучением занимались святые люди; *b*) география; *c*) хронология; *d*) циклы; *e*) золотое сечение; *f*) естественные явления, такие, как радуга; *g*) арифметика; *h*) музыка.

3) Необходимость математики в церковных вещах: *a*) удостоверение веры; *b*) исправление календаря.
4) Необходимость математики в государстве: *a*) о климатах; *b*) гидрография; *c*) география; *d*) астрология.

Часть V. О перспективе:
1) Органы зрения.
2) Зрение по прямым линиям.
3) Зрение, отраженное и преломленное.
4) О распространении впечатлений света, теплоты и пр.

Часть VI. Об экспериментальной науке.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10:

Публикуемая ниже заметка «Закон сохранения энергии» предназначена восьмиклассникам, заметка «Правило Ленца» — девятиклассникам, «О швартовке, трении и формуле Эйлера» — десятиклассникам.

Закон сохранения энергии

Законы сохранения в физике, да и в природе вообще, играют совершенно особую роль, являясь как бы всеобщим законодательством для всех природных явлений. Причем законодательством абсолютным: все, что согласуется с ним (т. е. с законами сохранения), может происходить, а может и нет, но зато уж что не согласуется — то совершенно запрещено.

Физику часто называют точной наукой. Это не совсем так. Физика точна лишь в том смысле, что она точно знает, насколько именно приближенны ее законы. Так, даже такой фундаментальный закон природы, как закон всемирного тяготения, имеет вполне определенные границы применимости. На очень малых расстояниях он не учитывает квантовости явлений, а на очень больших — того факта, что расстояние между двумя взаимодействующими массами нельзя преодолеть мгновенно.

Единственным исключением в этом смысле являются законы сохранения — они совершенно универсальны и на современном уровне знаний абсолютно точны. Например, закон сохранения энергии можно считать настолько надежно установленным экспериментальным фактом, что дальнейшая его проверка (опять же на сегодняшнем уровне знаний), по-видимому, просто лишена смысла.

Возникает естественный и чрезвычайно важный вопрос: в чем причина такой уникальности законов сохранения? Оказывается, все дело в том, что законы сохранения являются следствием некоторых изначальных свойств окружающего нас мира, а именно — его симметрии. В частности, закон сохранения энергии связан с почти очевидным свойством времени (как эта связь ни выглядит неожиданной) — с его однородностью. Пояснить само свойство довольно просто, что же касается вывода из него закона сохранения энергии, то тут вам придется поверить на слово.

Кажется вполне очевидным, что любой эксперимент, иллюстрирующий какое-то физическое явление, будь он выполнен вчера, сегодня или через тысячу лет, должен дать одинаковый результат (если только он одинаково поставлен). Или, говоря иначе, физические законы со временем не меняются. Физики это формулируют так: время обладает свойством однородности. Именно из этого почти очевидного свойства («почти», потому что при более внимательном размышлении может возникнуть много вопросов, да и вообще мы довольно смутно представляем себе, что такое время) и вытекает тот факт, что в замкнутой системе полная энергия остается постоянной. А это и есть закон сохранения энергии.

До сих пор время от времени появляются сообщения о том, что где-то кто-то наблюдал отклонения от закона сохранения энергии. Разумеется, ни один физический закон не гарантирован от того, что в каком-то эксперименте мы можем выйти из области применимости этого закона. Но когда речь идет о законе сохранения энергии, надо совершенно четко понимать, что утверждение о нарушении этого закона эквивалентно утверждению о нарушении однородности времени. (Сюжет, явно упущенный фантастами, пишущими о так называемой машине времени. Ведь создание такой машины одновременно означает и отмену закона сохранения энергии. А уж тогда возможны любые чудеса, начиная с вечного двигателя и кончая бессмертием.)

По всей видимости, именно из-за глубокой связи энергии со временем энергия играет совершенно уникальную, можно сказать, магическую роль. Помните Архимеда: «Дайте мне точку опоры...»? Так вот, энергия и является той точкой опоры, с помощью которой хотя бы в принципе, решаются практически все физические задачи. Однако из всех законов сохранения закон сохранения энергии является, пожалуй, наиболее сложным. Это связано, главным образом, с тем, что энергия существует в различных формах: механическая (кинетическая и потенциальная), внутренняя (которую иногда называют тепловой), электрическая и т. п. А со времен Эйнштейна, сформулировавшего принцип эквивалентности энергии и массы, стало ясно, что при превращениях энергии надо учитывать и возможные изменения массы. Вот почему часто довольно трудно проследить за переходом энергии из одной формы в другую и уже совсем невозможно записать закон сохранения энергии в общем виде. Тем не менее, для механической энергии макроскопической системы это сделать сравнительно легко. Только не в виде закона сохранения, а в виде закона изменения механической энергии.

Итак, рассмотрим какую-нибудь систему (это может быть одно тело или несколько взаимодействующих тел). В частном случае система может быть замкнутой, но это необязательно, т. е. в принципе на нее могут действовать внешние силы. При этом в системе вполне могут протекать какие-то внутренние процессы, приводящие к переходам механической энергии в какие-либо другие виды или наоборот. Но одно существенное предположение мы все же сделаем — будем считать, что извне тепло в систему не поступает.

Обозначим механическую энергию системы через W, а все остальные виды энергии, кроме механической, будем обозначать Q, по аналогии с тепловой, и обобщенно называть количеством теплоты. Из закона сохранения энергии очевидно, что изменение механической энергии системы равно произведенной работе (A) за вычетом выделившегося количества теп-

лоты: $W_{\text{кон}} - W_{\text{нач}} = A - Q$.
Строго говоря, величины A и Q могут быть как положительными, так и отрицательными:

$A > 0$, если внешние тела совершают работу над системой, и $A < 0$, если система сама совершает работу над внешними телами;

$Q > 0$, если механическая энергия переходит в какие-либо другие формы, и $Q < 0$, если переход происходит из немеханической формы энергии в механическую.

Приведенное уравнение оказывается исключительно эффективным при решении самых разнообразных физических задач.

Е. Е. Городецкий

Правило Ленца

В физике часто встречается ситуация, когда внешнее воздействие на какой-либо объект приводит к появлению противодействия этому воздействию. Приведем конкретные примеры.

Заключим газ в теплоизолированный цилиндр, закрытый легким поршнем, который может в нем свободно перемещаться. В равновесии поршень займет такое положение, при котором давление газа в цилиндре равно внешнему давлению. Смещая поршень, уменьшим объем газа в цилиндре. Давление газа при этом возрастет, и это будет служить препятствием для дальнейшего смещения поршня. При увеличении же объема газа давление в цилиндре упадет, и опять появятся силы, препятствующие перемещению поршня.

Поставим чайник с водой на огонь. В результате повышения температуры дна чайника в системе чайник — вода возникнут такие процессы теплопередачи, которые стремятся уменьшить эффект увеличения температуры — от чайника к воде будет передаваться тепло.

Внесем проводник в электростатическое поле. Под действием поля заряды проводника перераспределятся таким образом, чтобы уничтожить причину, вызвавшую их перераспределение, т. е. поле внутри проводника.

Будем выдвигать постоянный магнит из проводящего кольца. В кольце появится индукционный ток, и оно станет притягиваться к магниту, стремясь уничтожить причину (удаление магнита от кольца), приведшую к возникновению тока.

Все эти примеры наводят на мысль, что внешнее воздействие, выводящее систему из состояния устойчивого равновесия, стимулирует в системе процессы, стремящиеся ослабить результат этого воздействия. Так формулируется принцип, установленный французским ученым Ле Шателье в 1884 году и уточненный немецким физиком Брауном в 1887 году. Этот принцип позволяет предвидеть, в каком направлении будут протекать процессы в системе, выведенной из равновесия. Он широко используется в физике и химии.

Исторически принцип Ле Шателье — Брауна был сформулирован как обобщение правила Ленца, которое гласит: индукционный ток, возникающий в результате электромагнитной индукции, всегда направлен так, чтобы пытаться препятствовать причине, его вызвавшей. Это правило сформулировал русский физик Ленц в 1833 году. Суть правила Ленца проиллюстрируем на нескольких примерах.

Пример 1. *Южный полюс постоянного магнита удаляется от проводящего кольца (рис. 1). Определите направление индукционного тока в кольце. Куда направлена сила, действующая на кольцо?*

Для ответа на первый вопрос удобно за причину, вызывающую ЭДС индукции в кольце, взять уменьшение магнитного потока через кольцо. Согласно правилу Ленца, собственное магнитное поле, созданное индукционным током, должно препятствовать этому уменьшению. Поэтому магнитные линии собственного поля идут через кольцо в том же направлении, что и магнитные линии поля постоянного магнита, т. е. влево. По правилу буравчика индукционный ток в коль-

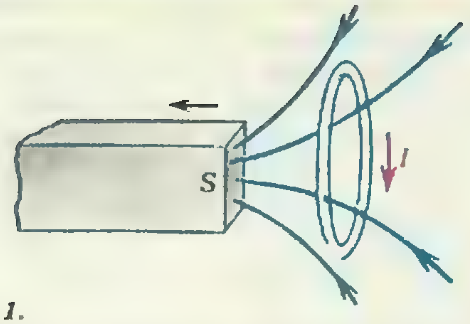


Рис. 1.

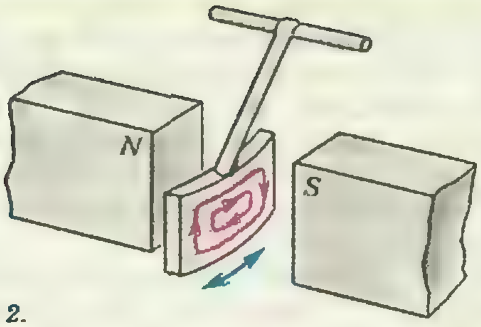


Рис. 2.

це направлен по часовой стрелке, если смотреть на кольцо справа.

Для ответа на второй вопрос причиной, вызывающей ЭДС индукции, удобно считать увеличение расстояния между магнитом и кольцом. Тогда, в соответствии с правилом Ленца, появится противодействие этой причине, т. е. между кольцом и магнитом возникнет сила притяжения, действующая на кольцо влево.

Пример 2. *Южный полюс магнита удаляется от проводящего кольца с разрезом. Что можно сказать об индукционном токе в кольце и силе, действующей на кольцо, в этом случае?*

Прежде чем ответить на эти вопросы, заметим, что в приведенной выше формулировке правила Ленца говорится о том, что индукционный ток всегда направлен так, чтобы пытаться препятствовать причине своего появления, и не говорится о том, что это препятствие (противодействие) обязательно проявится. Противодействие причине, вызывающей ЭДС индукции, проявляется и может быть обнаружено только в том случае, когда есть возможность для протекания индукционного тока. Эта возможность реализуется, например, если цепь, в которой возникает ЭДС индукции, замкнута. И чем меньше сопротивление этой цепи, тем больший ток пойдет по ней и тем сильнее проявится противодействие причине, его вызвавшей.

Ясно, что в кольце с разрезом ЭДС индукции тока создать не может и никакая сила на кольцо действовать не будет.

Пример 3. *Рассмотрим опыт, эффектно демонстрирующий правило Ленца (рис. 2). Подвесим между полюсами электромагнита маятник, нижняя часть которого представляет толстую медную пластинку, и выведем его из положения равновесия. Что будет происходить с маятником дальше?*

При движении такого маятника в медной пластинке появятся замкнутые индукционные токи (красные линии на рисунке 2), направление которых будет меняться. Согласно правилу Ленца, взаимодействие этих токов с внешним магнитным полем должно препятствовать причине, вызывающей токи, т. е. движению маятника. Таким образом, колебания маятника будут затухать, подобно колебаниям в очень вязкой жидкости.

Замкнутые индукционные токи, возникающие в сплошных проводящих телах, движущихся в магнитных полях или помещенных в изменяющиеся магнитные поля, называются вихревыми токами, или токами Фуко — по имени открывшего их французского ученого. В зависимости от условий вихревые токи могут быть как вредными, так и полезными.

Токи Фуко в сердечниках трансформаторов и вращающихся частях электрических генераторов и двигателей вызывают бесполезное нагревание и приводят к потерям энергии. Для ослабления вихревых токов такие детали изготовляют из тонких листов стали, разделенных тончайшими слоями диэлектрика так, чтобы изолирующие прослойки пересекали возможные линии протекания вихревых токов.

Примером полезного использования токов Фуко служит индукционная печь для плавки металла или быстрого приготовления пищи. Принцип действия индукционной печи состоит в том, что проводящее тело (металл или пища) помещается внутрь катушки, по которой пропускается переменный ток высокой частоты. Возникающее внутри катушки переменное магнитное поле вызывает появление токов Фуко в проводящем теле и его разогрев.

В. И. Чивилёв

О швартовке, трении и формуле Эйлера

Наверное, всем хорошо известно, что при швартовке судна с него бросают на пристань канат (шварто́в) с петлей на конце, которую надевают на причальную тумбу. Затем, когда судно подходит совсем близко к пристани, матрос быстро наматывает другой конец каната «восьмеркой» на специальную опору на палубе — кнехт (чугунная парная тумба). Таким способом удается надежно удерживать громадное судно рядом с причалом. В чем же здесь дело? В необычайной силе матроса?

По-видимому, многие, в том числе и прославленный писатель-фантаст Жюль Верн, склонны именно к такому заключению. Обратимся, вслед за Перельманом*), к эпизоду из книги Жюля Верна «Матиас Шандор», где описывается подвиг силача-атлета Матифу. Этот герой при спуске на воду судна «Трабоколо» предотвратил его столкновение с маленькой прогулочной яхтой, что грозило яхте гибелью.

«...«Трабоколо» быстро скользило вниз по наклону. Белый дымок, появившийся вследствие трения, закрутился перед его носом, тогда как корма погрузилась уже в воду бухты (судно спускалось на воду кормой вперед — *А. Б.*).

Вдруг появляется человек, схватывает швартов, висящий у передней части «Трабоколо», и старается удержать его, пригнувшись к земле. В одно мгновение он наматывает швартов на вбитую в землю металлическую трубу и, рискуя быть раздавленным, держит с нечеловеческой силой в руках канат в продолжение 10 секунд.»

Жюль Верн правильно отметил роль, которую играет трение во время скольжения корабля,— нагрев его корпуса и возникновение из-за этого дыма. Однако он недооценил роль трения (и переоценил, тем самым, роль Матифу) при описании подвига атлета.

Давайте попробуем разобраться, какая сила нужна, чтобы удержать канат, уже намотанный на опору — трубу или кнехт.

Вначале трением пренебрежем и рассмотрим неподвижный участок каната, изогнутый опорой на малый угол $\Delta\alpha$ (см. рисунок). Пусть канат натянут силой T и со стороны опоры на рассматриваемый участок каната действует сила реакции N. Найдем ее из условия равновесия каната: сумма всех сил, действующих на участок каната, равна нулю. Отсюда

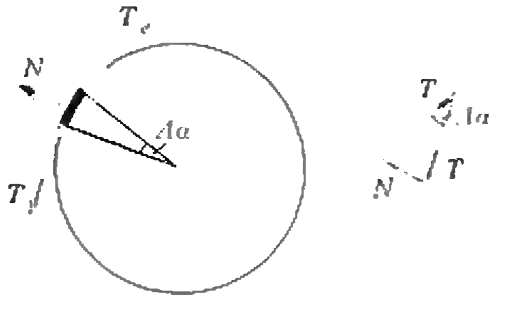
$$N = T\Delta\alpha$$

(здесь мы учли, что для малых углов $\sin\Delta\alpha = \Delta\alpha$).

При наличии трения канат может быть неподвижным и в том случае, когда силы натяжения слева и справа от рассматриваемого участка немного отличаются друг от друга. Проскальзывание каната начнется тогда, когда разность этих сил достигнет максимальной величины силы трения покоя:

$$\Delta T = F_{\text{тр}} = \mu N = \mu T\Delta\alpha,$$

где μ — коэффициент трения между канатом и опорой. Из последнего равенства следует, что скорость измене-



---

*) Я. И. Перельман. «Занимательная физика».— М.: Наука, 1986. Книга 2, с. 35.

ния силы натяжения каната с ростом угла охвата пропорциональна величине силы натяжения:

$$\Delta T/\Delta\alpha \sim T, \text{ или } \Delta T/\Delta\alpha = -\mu T.$$

Знак минус здесь означает, что при увеличении угла охвата натяжение каната уменьшается.

В физике часто встречаются ситуации, когда скорость изменения какой-либо величины пропорциональна самой этой величине. Напомним, например, явление естественного радиоактивного распада («Физика 10», § 92): уменьшение числа нераспавшихся радиоактивных ядер в единицу времени пропорционально их же числу. Другим примером может служить разряд заряженного конденсатора через резистор: уменьшение заряда на конденсаторе пропорционально току через резистор, который, в свою очередь, пропорционален заряду конденсатора. Во всех этих случаях происходит очень быстрое изменение соответствующей величины. Действительно, если, например, скорость изменения скорости (ускорение) движения тела постоянна, то величина скорости линейно растет со временем. Если же ускорение пропорционально скорости, то оно все время увеличивается и скорость растет намного быстрее — по так называемому экспоненциальному закону.

Такая же зависимость получается и в нашем случае для изменения силы натяжения каната. (Подчеркнем еще раз, что речь идет о минимально возможной разности сил натяжения каната — когда вот-вот начнется его скольжение по опоре.) Впервые этот вопрос был рассмотрен великим математиком, механиком, физиком и астрономом Леонардом Эйлером (1707—1783). Он показал, что натяжение каната T в зависимости от угла охвата опоры канатом (угол навития) α изменяется по закону

$$T = T_0 e^{-\mu\alpha},$$

где $e = 2{,}72...$ — основание натурального логарифма, T_0 — начальное натяжение каната (еще не навитого на опору).

Угол α (измеряемый в радианах) связан с числом оборотов n каната вокруг кнехта простым соотношением: $\alpha = 2\pi n$. Тогда, если при одном обороте натяжение каната уменьшается в k раз, т. е.

$$\frac{T_0}{T_1} = e^{2\mu\pi} = k,$$

после n оборотов натяжение ослабевает в k^n раз:

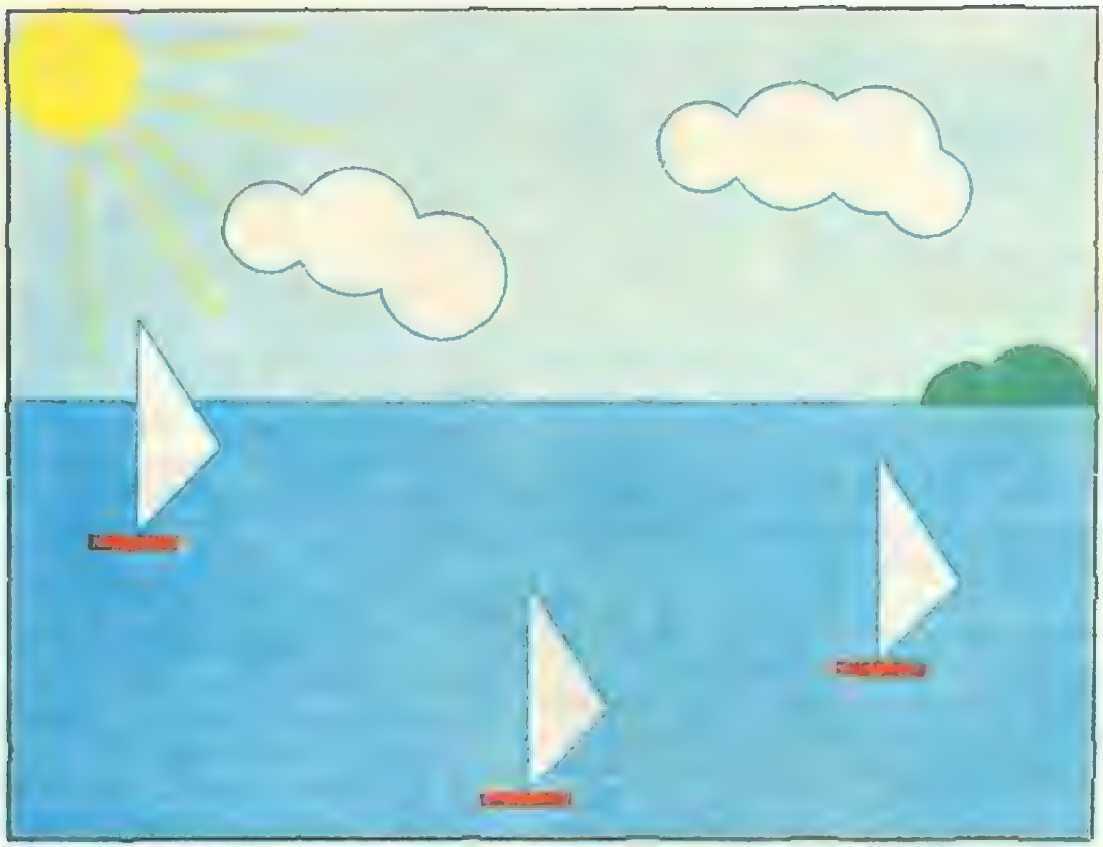
$$\frac{T_0}{T_n} = \frac{T_0}{T_1}\frac{T_1}{T_2}...\frac{T_{n-1}}{T_n} = k^n = e^{2\pi\mu n}.$$

При коэффициенте трения $\mu = 0{,}3$, например, один оборот каната вокруг кнехта уменьшает силу его натяжения почти в 7 раз, а если сделать два оборота — натяжение ослабевает примерно в 40 раз! С ростом числа оборотов натяжение каната (благодаря трению) становится все меньше и меньше и постепенно сходит на нет.

Возвращаясь к герою Жюля Верна Матифу, мы теперь можем сказать, что, намотав канат на железную трубу, он сильно облегчил себе задачу. Я. И. Перельман, используя содержащиеся в романе данные о «Трабоколо» и сделав соответствующие расчеты, обнаружил, что если силач Матифу успел обернуть канат вокруг трубы три раза, то на его месте мог бы быть и ребенок. Точно так же и при швартовке судов от матросов не требуется большой силы — нужно лишь проявить внимательность и ловкость и вовремя успеть быстро намотать канат на кнехт.

Заметим, что с рассмотренным явлением каждый из вас сталкивается практически ежедневно, что-нибудь завязывая — будь то шнурки, шарф или веревка. Ведь любой узел по существу представляет собой веревку, навитую на «опору» (ту же самую веревку).

А. И. Буздин



Искусство программирования

Рисует школьная ЭВМ

А. Г. ЩЕГОЛЕВ

Со школьной ЭВМ, снабженной дисплеем, можно общаться в диалоговом режиме по заранее предусмотренному сценарию (см., например, статьи В. А. Каймина в «Кванте», 1986, № 10, 11). При этом ЭВМ и ее пользователь обмениваются фрагментами текстов и числовыми данными. Между тем, большинство школьных микроЭВМ позволяют не только «печатать», но и «рисовать» на экране, т. е. обладают *графическими* возможностями.

Для того чтобы на экране появилось изображение, мы должны указать исполнителю (школьной ЭВМ), где и что необходимо нарисовать. Поэтому прежде всего необходимо договориться о *системе координат*.

Принятая в микроЭВМ координатная система *отличается от известной* вам по школьному курсу математики. Начало координат (точка O) помещается в левом верхнем углу, а оси абсцисс и ординат направлены так, как показано на рисунке 1. Поле экрана представляет собой множество точек, каждая из которых может иметь определенный цвет, а координаты любой точки — целые числа x, y в пределах (для экрана ЭВМ «Ямаха») $0 \leqslant x \leqslant 255$, $0 \leqslant y \leqslant 191$.

Так же, как дом складывают из кирпичей, любое сложное изображение мы будем «строить» из простейших элементов. Для этого дополним знакомый вам школьный алгоритмический язык следующими графическими командами:

1) *точка* (x, y), *цв* — изобразить точку цвета *цв* с координатами (x, y);

2) *отрезок от* ($x1$, $y1$) *до* ($x2$, $y2$),

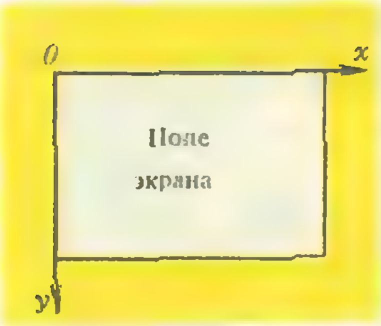


Рис. 1.

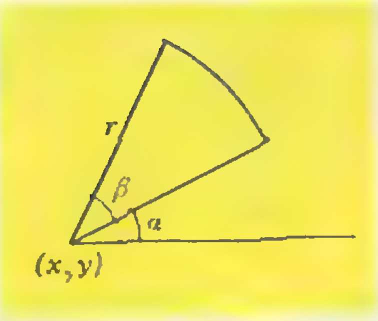


Рис. 2.

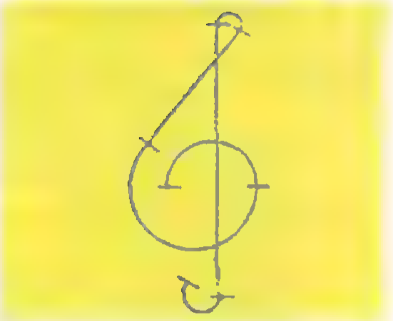


Рис. 3.

цв — начертить отрезок, соединяющий точки с координатами ($x1$, $y1$) и ($x2$, $y2$) цвета *цв*;

3) *окружн*(x, y), r, *цв* — нарисовать окружность радиусом r с центром в точке (x, y) цвета *цв*;

4) *дуга* (x, y), r, *от* α *до* β, *цв* — нарисовать дугу окружности (x, y), r, *цв* от угла α до угла β (рис. 2);

5) *закрасить* (x, y), *цв* — закрасить цветом *цв* точку (x, y) вместе с окрестностью в пределах заключающей эту точку замкнутой линии того же цвета (в качестве части этой линии может использоваться граница экрана); если же такого контура нет, закрасится весь экран.

Оказывается, перечисленных команд вполне достаточно, чтобы изображать довольно замысловатые фигуры. Например, изображение скрипичного ключа можно представить как совокупность отрезков и дуг разного радиуса, плавно переходящих друг в друга (рис. 3).

Для облегчения построения часто повторяющихся элементов введем еще две команды:

6) *рамка от* ($x1$, $y1$) *до* ($x2$, $y2$), *цв* — изобразить прямоугольную рамку со сторонами, параллельными сторонам экрана, цветом *цв*; прямоугольник задается координатами двух диагональных вершин ($x1$, $y1$), ($x2$, $y2$) (рис. 4);

7) *рамка-закраш от* ($x1$, $y1$) *до* ($x2$, $y2$), *цв* — закрасить рамку 6) и ее внутреннюю область цветом *цв*.

Алгоритмы, написанные с использованием графических команд, могут быть переведены на любой язык программирования, имеющий соответствующие средства. Вот как выглядит запись операторов 1) — 7) на языке MSX-BASIC, принятом на ЭВМ «Ямаха».

```
1) N  PSET(X, Y),C          (точка)
2) N  LINE(X1,Y1)—
   (X2,Y2),C                (отрезок)
3) N  CIRCLE(X,  Y),
   R,C                      (окружность)
4) N  CIRCLE(X,  Y),
   R,C,A,B                  (дуга; углы A и B —
                            в радианах)
5) N  PAINT(X,Y),C          (закраска)
6) N LINE(X1,Y1)—
   (X2,Y2),C,B              (рамка)
7) N LINE(X1,Y1)—
   (X2,Y2),C,BF             (закрашенная рамка).
```

Синим здесь выделены изменяющиеся элементы, в качестве которых могут использоваться числа (константы), а также имена переменных. N — номер (нумерация операторов в Бейсике обязательна), C — целое число от 1 до 15, обозначающее цвет, которым нужно закрасить данный объект:

1 — черный,
2 — средне-зеленый,
3 — светло-серый
4 — темно-голубой,
5 — светло-голубой,
6 — темно-красный,
7 — голубой,
8 — средне-красный,
9 — светло-красный,
10 — темно-желтый,
11 — светло-желтый,
12 — темно-зеленый,
13 — розовый,
14 — серый,
15 — белый.

Например, оператор Бейсика 20 PSET(50, 100), 6 приведет к появлению на экране темно-красной точки с координатами $x=50$, $y=100$.

Кроме того, перевод ЭВМ в графический режим будет осуществляться по команде <u>графика</u>, что на Бейсике будет записано как SCREEN 2.

Займемся теперь изображением картинки, помещенной в начале статьи. *Сценарий* в этом случае — это рисунок, выполненный на бумаге. Вообще же графический сценарий представляет собой последовательность рисунков (сцен) и описание логики их чере-

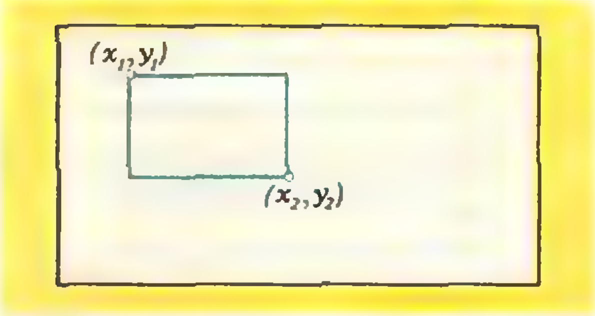


Рис. 4.

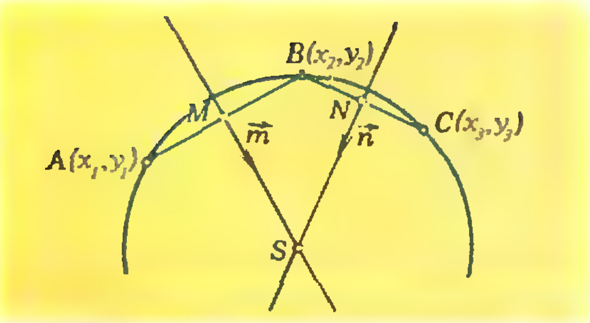


Рис. 5.

дования. Мы же ограничимся пока изображением единственной и неподвижной картинки-«сцены» (нечто вроде «немой сцены» в «Ревизоре» Н. В. Гоголя).

Заметим, что критерием правильности графической программы служит соответствие полученного на экране рисунка сценарию. Любое расхождение (даже если рисунок получился более интересным) — ошибка! Поэтому не жалейте времени на составление сценария, прежде чем приступить к алгоритму.

Итак, приведем алгоритм для рисования цветной картинки со с. 51 (алгоритм и программа составлены ученицей Осташевской с. ш. Л. Чаусовой в летней компьютерной школе МИЭМ).

```
алг синее море
 нач
  графика
    небо
    солнце
    облако1
    облако2
    море
    яхта1
    яхта2
    яхта3
    деревья
 кон
алг облако1
 нач
  окруж (60, 50), 10, 15
  закрасить (61, 51), 15
  окружн (80, 50), 15, 15
  закрасить (81, 51), 15
  окружн (100, 60), 13, 15
  закрасить (101, 61), 15
кон
алг море
 нач
  рамка-закраш от (0,90) до (250, 190), 4
 кон

алг яхта1
 нач
  отрезок от (30, 120) до (30, 70), 15
  отрезок от (30, 120) до (50, 100), 15
  отрезок от (50, 100) до (30, 70), 15
  закрасить (40, 100), 15
  отрезок от (20, 120) до (40, 120), 6
  кон

алг яхта3
 нач
  отрезок от (200, 150) до (200, 100), 15
  отрезок от (200, 150) до (220, 130), 15
  отрезок от (220, 130) до (200, 100), 15
  закрасить (210, 120), 15
  отрезок от (190, 150) до (210, 150), 5
  кон

алг небо
 нач
  рамка-закраш от (0, 0) до (250, 90), 5
  кон

алг солнце
 нач
  окружн (15, 15), 15, 10
  закрасить (16, 16), 10
  отрезок от (15, 15) до (40, 0), 10
  отрезок от (15, 15) до (100, 20), 10
  отрезок от (15, 15) до (50, 40), 10
  отрезок от (15, 15) до (0, 30), 10
  отрезок от (15, 15) до (20, 70), 10
 кон

алг облако2
 нач
  окружн (150, 30), 10, 15
  закрасить (151, 31), 15
  окружн (170, 30), 15, 15
  закрасить (171, 31), 15
  окружн (190, 30), 15
  закрасить (191, 31), 15
  окружн (200, 40), 15
  закрасить (201, 41), 15
 кон

алг яхта2
 нач
  отрезок от (120, 180) до (120, 120), 15
  отрезок от (120, 180) до (140, 160), 15
  отрезок от (140, 160) до (120, 120), 15
  закрасить (130, 160), 15
  отрезок от (110, 180) до (130, 180), 6
 кон
 алг деревья
```

```
нач
окружн (220, 90), 10, 2
закрасить (221, 91), 2
окружн (235, 90), 2
закрасить (236, 91), 2
рамка закраш от (210, 90) до (250, 110), 2
кон
```

Обратите внимание, что основной алгоритм «синее море» представляет собой план изображения. За рисование же отдельных объектов «отвечает» соответствующий вспомогательный алгоритм. На языке Бейсик обращение к вспомогательному алгоритму (подпрограмме) осуществляет оператор

N GOSUB номер-начала,

где номер-начала — номер оператора, с которого начинается подпрограмма. В качестве же оператора конца вспомогательного алгоритма (кон) используется оператор Бейсика N RETURN (в основной программе для этого используется оператор N END).

Задачи

1. Переведите алгоритм «синее море» на язык MSX BASIC
2. Выберите несложный рисунок и постройте алгоритм и программу, изображающие его на экране ЭВМ

Вы заметили, что самой непроизводительной (и самой скучной) работой при построении графических алгоритмов является подбор координат для задания местоположения простейших элементов. Для создания изображений обычно используют специальную программу — *графический редактор* — которая позволяет рисовать на экране, управляя «графическим карандашом» с помощью клавиатуры. Графический редактор «переводит» изображение в операторы Бейсика, и полученный текст программы используется для воспроизведения этого изображения.

Варианты вступительных экзаменов

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$3^{x^2-x+2}=27.$$

2. Решите неравенство
$$|x^2-2x-7|\leqslant 1.$$

3. Решите уравнение
$$\sin^2 x-\sin^2 2x+\sin^2 3x=\frac{1}{2}.$$

4. На графике функции $y=x^2-4x+2$ найдите точки, касательные в которых проходят через точку K (4, 1).

5. Медианы, проведенные из вершин острых углов прямоугольного треугольника, равны 3 и 2. Найдите площадь треугольника.

Вариант 2

1. Решите неравенство
$$x^2+2x+5\leqslant x+8.$$

2. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}x^2-y^2=3,\\ x^2+xy+y^2=7.\end{cases}$$

3. Решите уравнение
$$2\sin 11x+\cos 3x+\sqrt{3}\sin 3x=0.$$

4. Определите промежутки монотонности функции
$$y=\frac{(x-2)(x-4)}{x+1}.$$

5. Высота прямоугольного треугольника делит его на треугольники с периметрами p_1 и p_2. Найдите периметр исходного треугольника.

Вариант 3

1. Решите систему уравнений
$$\begin{cases}2x+5y=14,\\ 3x-2y=2.\end{cases}$$

2. Решите уравнение
$$x^{2\lg^2 x-1{,}5\lg x}=\sqrt{10}.$$

3. Третий член арифметической прогрессии в три раза больше второ-

го, а сумма всех членов прогрессии в 40 раз больше третьего члена. Найдите число членов прогрессии.

4. Решите уравнение $f'(x)=g(x)$, где $f(x)=\cos 2x$, $g(x)=\sin^2 2x-3$.

5. Высота и медиана, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Найдите углы треугольника.

Физика

Задачи устного экзамена

1. При свободном падении тела массой $m=0{,}2$ кг с высоты $h=36$ м время падения оказалось равным $t=3$ с. Вычислите по этим данным силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной.

2. Из одной и той же точки вертикально вверх с интервалом $\tau=2$ с выбрасывают два одинаковых шарика со скоростью $v_0=30$ м/с каждый. Через некоторое время шарики сталкиваются (соударение упругое). Сколько времени каждый шарик будет находиться в полете?

3. Шарик ударяется о плоскость под углом $\alpha=45°$ к ее нормали. Коэффициент трения о плоскость $\mu=0{,}6$. Определите, под каким углом он отразится. Считать, что нормальная составляющая скорости при ударе сохраняется.

4. Уравнение гармонических колебаний имеет вид $x=x_m \sin \omega t$. Известно, что при фазе $\varphi_1=\pi/6$ смещение $x_1=2$ см. Определите амплитуду колебаний и смещение при фазе $\varphi_2=3\pi/4$.

5. В какую сумму обойдется приготовление $m=1$ кг льда в домашнем холодильнике, если считать, что он работает по идеальному циклу? Комнатная температура $t_1=23$ °С, температура фреона $t_2=-10$ °С, 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 коп. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}36\cdot10^5$ Дж/кг.

6. Скорость самолета при посадке $v=360$ км/ч. Определите разность потенциалов, возникающую между концами крыльев самолета, если вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли равна $B=50$ мкТл, а размах крыльев самолета $l=20$ м.

7. Неоновая лампа горит, когда напряжение на ее электродах не менее определенного значения U^*. Определите время, в течение которого горит лампа в каждый полупериод, если она включена в сеть, действующее значение напряжения в которой равно U^*. Напряжение меняется с частотой $\nu=50$ Гц.

8. Отражающая поверхность зеркала составляет с плоскостью стола угол $\alpha=135°$. По направлению к зеркалу по столу катится шар со скоростью $v=3$ м/с. В каком направлении и с какой скоростью движется изображение шара?

9. На дне бассейна, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек смотрит вертикально вниз с бортика бассейна и видит отражение своего лица. На каком расстоянии от поверхности воды оно находится? Глубина бассейна $H=2$ м, расстояние от лица человека до поверхности $h=2$ м, показатель преломления воды $n=4/3$.

10. При распаде π-мезона на два фотона зарегистрированы фотоны, летящие под углами $\alpha=30°$ и $\beta=60°$ к направлению движения мезона. Определите скорость распавшегося мезона. Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с.

Публикацию подготовили *М. Р. Ведерников, М. Р. Либерзон, А. А. Симонов*

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Из пункта A кольцевой трассы длиной 24 км выехал велосипедист, а через 20 минут в том же направлении выехал мотоциклист. Через 10 минут после выхода он нагнал велосипедиста, а еще через 30 минут нагнал его вторично. Определите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

2. Решите уравнение

$$2\cos x+\sin x=1+\sin 2x.$$

3. Решите уравнение

$$81^x-16^x=\frac{5}{6}\cdot 36^x.$$

4. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение

$$(p-1)\cdot 4^x-4\cdot 2^x+(p+2)=0$$

имеет хотя бы одно решение.

5. Правильная треугольная пирамида со стороной основания a вписана в сферу, при этом центр сферы делит высоту пирамиды в отношении $\sqrt{5}:1$, считая от вершины. Верхнее основание правильной четырехугольной призмы лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины ее нижнего основания принадлежат сфере. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим? Найдите это значение объема.

Вариант 2

1. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой сумма первых четырех членов равна 40, а сумма членов начиная с четвертого и до седьмого включительно равна 1080.

2. Решите уравнение

$$\cos 2x+\cos 4x+\cos 6x=0.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{1-\log_3(x^2+3)}{1-\log_3(x+3)}=2.$$

4. Решите неравенство

$$2\cdot 4^{\sqrt{x}}-5\cdot 2^{\sqrt{x}}+2<0.$$

5. Высота H правильной четырехугольной пирамиды равна стороне основания. Нижнее основание правильной четырехугольной призмы принадлежит основанию пирамиды, а вершины верхнего основания лежат на медианах боковых граней пирамиды, проведенных из вершин основания к боковым ребрам пирамиды. Какой должна быть высота призмы, чтобы длина ее диагонали была наименьшей? Найдите это значение длины диагонали.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Мяч, брошенный со скоростью $v_0=10$ м/с под углом $\alpha=45°$ к горизонту, ударяется о вертикальную стенку, находящуюся на расстоянии $s=3$ м от места бросания. Определите модуль и направление скорости мяча после удара. Удар считать абсолютно упругим, а углы падения и отражения — равными.

2. Тело массой $m=1$ кг брошено под углом к горизонту. За время полета его импульс изменился на $\Delta P=10$ кг · м/с. Определите наибольшую высоту подъема тела.

3. По длинному стержню массой M, подвешенному на пружине с коэффициентом жесткости k, скользит вниз шайба массой m с ускорением a (рис. 1). Определите энергию деформации пружины. Массой пружины пренебречь.

4. Некоторое количество водорода находится в закрытом сосуде при температуре T_1 и давлении $p_1=400$ Па. Газ нагрели до температуры T_2, при которой молекулы водорода практически полностью распались на атомы. При этом давление газа стало $p_2=40$ кПа. Определите, во сколько раз возросла средняя квадратичная скорость частиц газа.

5. Электрическое поле образовано внешним однородным электростатиче-

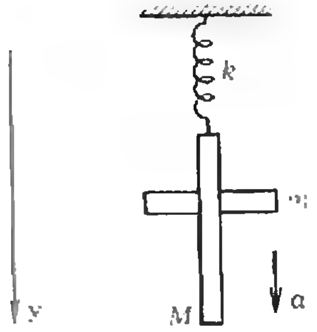


Рис. 1.

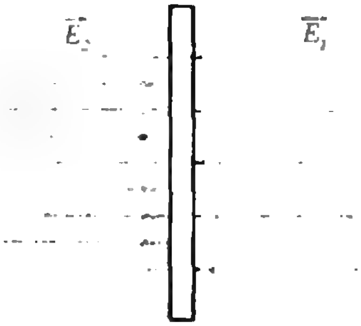


Рис. 2.

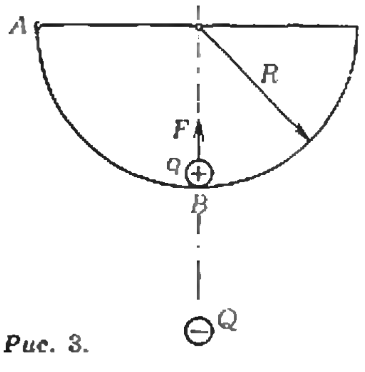


Рис. 3.

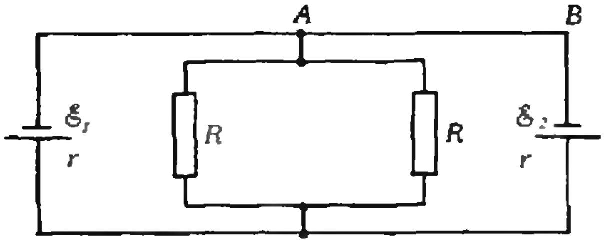


Рис. 4.

ским полем и полем заряженной металлической пластины, которое вблизи пластины тоже можно считать однородным. Напряженность результирующего электрического поля справа от пластины $E_1=3\cdot10^4$ В/м, а слева $E_2=5\cdot10^4$ В/м (рис. 2). Определите заряд пластины, если сила, действующая на пластину со стороны внешнего электрического поля, $F=0{,}7$ Н.

6. Шарик массой $m=2$ г, имеющий положительный заряд q, начинает скользить без начальной скорости из точки A по сферической поверхности радиусом $R=10$ см (рис. 3). Потенциальная энергия взаимодействия заряда q и неподвижного отрицательного заряда Q в начальный момент $W_A=-2\cdot10^{-3}$ Дж. Определите потенциальную энергию взаимодействия зарядов, когда заряд q находится в точке B, если в этом случае результирующая сил реакции со стороны сферической поверхности и кулоновского взаимодействия, приложенная к шарику, $F=0{,}1$ Н. Трением между шариком и сферической поверхностью пренебречь.

7. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления $r=0{,}5$ Ом, подключены к резисторам, каждый из которых имеет сопротивление R (рис. 4). ЭДС источников тока равны $\mathscr{E}_1=12$ В и $\mathscr{E}_2=6$ В. Определите величину сопротивления R, при которой ток в цепи $ABCD$ не течет.

8. Радиус орбиты электрона в модели атома Бора $r=5{,}3$ нм. Какую работу надо совершить, чтобы ионизировать этот атом?

9. При взаимодействии ядер алюминия ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ с X-частицами образуются ядра изотопа магния ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg}$ и ${}_1Y$-частицы. При взаимодействии же ${}_1Y$-частиц с ядрами алюминия ${}^{27}_{13}\mathrm{Al}$ образуются ядра изотопа магния ${}^{24}_{12}\mathrm{Mg}$ и Z-частицы. Какие широко известные частицы X, Y и Z участвуют в этих ядерных реакциях?

10. При термоядерной реакции слияния дейтерия ${}^2_1\mathrm{H}$ и трития ${}^3_1\mathrm{H}$ образуется нейтрон и неизвестная частица, при этом выделяется энергия $E_0=17{,}6$ МэВ. Определите неизвестную частицу и полную энергию, которая выделится, если прореагирует $m=1$ г дейтерия.

Публикацию подготовили *Л. П. Паршев, Ю. А. Струков*

Московский станкоинструментальный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$1+\lg(1+2x+x^2)-\lg(x^2+6)=$$
$$=2\lg(x+1).$$

2. Решите уравнение $x^2+px+21=0$, зная, что сумма квадратов его корней равна 58.

3. Поезд должен был пройти 840 км за определенное время. На половине пути поезд был задержан у семафора на $\frac{1}{2}$ часа и для того, чтобы прибыть к месту назначения в срок, увеличил скорость на 2 км/ч. Сколько времени поезд находился в пути?

4. Решите уравнение

$$\sin3x-\sin x\cos2x=0.$$

5. В основании прямой призмы лежит треугольник. Два его угла соответственно равны α и β, а площадь равна S. Прямая, соединяющая вершину верхнего основания с центром круга, описанного около нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол, равный φ. Найдите объем призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$5^{1+\log_4 x}+5^{-\log_4 x-1}=\frac{26}{5}.$$

2. Найдите целые значения k, при которых уравнение

$$(k-12)x^2+2(k-12)x+2=0$$

не имеет корней.

3. Катер отошел от причала одновременно с плотом и прошел вниз по реке 40/3 км. Не делая остановки, он развернулся и пошел вверх по реке. Пройдя 28/3 км, он встретился с плотом. Какова собственная скорость катера, если скорость течения реки 4 км/ч?

4. Решите уравнение

$$\cos 2x+\sin^2 x+\sin x=0{,}25.$$

5. Определите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На горизонтальной поверхности покоится тело, к которому приложена сила $\vec{F}$ (рис. 1). При каких значениях угла α тело будет оставаться в покое независимо от величины силы? Коэффициент трения $\mu=0{,}15$.

2. Спутник называется синхронным, если при движении по круговой экваториальной орбите он остается над одной и той же точкой поверхности Земли. Найдите радиус орбиты такого спутника.

3. Пуля массой m попадает в центр лежащего на краю стола шара массой M и застревает в нем. Определите скорость шара в момент удара о пол, если пуля летела в горизонтальном направлении со скоростью v_0 и высота стола H. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. В кристалле поваренной соли NaCl атомы (ионы) Na и Cl образуют кубическую решетку (рис. 2). Определите среднее расстояние между центрами соседних ионов. Плотность поваренной соли $\rho=2{,}2\cdot10^3$ кг/м^3, молярная масса натрия $M_{Na}=23$ г/моль, хлора — $M_{Cl}=35{,}5$ г/моль.

5. В откачанный сосуд объемом $V=40$ л впрыснули $m=80$ г воды.

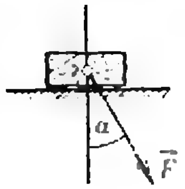


Рис. 1.

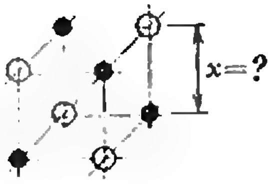


Рис. 2.

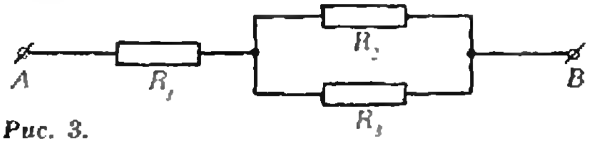


Рис. 3.

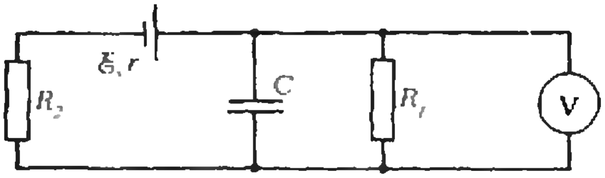


Рис. 4.

Какое давление установится в сосуде, если его нагреть до температуры $T=373$ К?

6. В цилиндрическом сосуде под легкоподвижным поршнем находятся $\nu=1{,}5$ моля идеального одноатомного газа при температуре $t=27$ °C. Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы его объем увеличился в 3 раза?

7. При пропускании постоянного тока по участку AB (рис. 3) на резисторе сопротивлением R_2 выделяется тепловая мощность P_2. Какая тепловая мощность выделяется на каждом из резисторов сопротивлениями R_1 и R_3?

8. Конденсатор включен в цепь так, как показано на рисунке 4. Найдите заряд на конденсаторе и определите показание вольтметра, считая его идеальным.

9. Проволочный виток площадью S и сопротивлением R находится во внешнем однородном магнитном поле с индукцией B, изменяющейся со временем по закону $B=B_0\sin\omega t$ (B_0 и ω известны). Определите максимальное значение тока и тепловую мощность, выделяемую в витке. Линии индукции поля перпендикулярны плоскости витка.

10. Луч света, падая на поверхность воды, испытывает преломление и частично отражается. Определите угол падения луча, если отраженный

и преломленный лучи перпендикулярны друг другу. Коэффициент преломления воды $n=1{,}33$.

Публикацию подготовили *Л. Н. Дагаева, Д. В. Подлесный*

Московский институт электронной техники

Физика

Задачи письменного экзамена

1. Пуля летящая горизонтально, попадает в шар, подвешенный на легком жестком стержне, и застревает в нем. Масса пули $m=5$ г, масса шара $M=0{,}5$ кг. Скорость пули $v=500$ м/с. При какой предельной длине стержня (расстоянии от точки подвеса до центра шара) шар от удара пули поднимется до верхней точки окружности?

2. Чему равна работа по подъему цепи, взятой за один конец и лежащей на плоскости, на высоту, при которой нижний конец отстоит от плоскости на расстояние, равное длине цепи? Длина цепи $l=2$ м, масса $m=5$ кг.

3. Некоторую массу m идеального газа с молярной массой М нагревают под поршнем так, что температура изменяется пропорционально квадрату давления от первоначального значения T_1 до T_2. Определите работу, совершенную газом.

4. Определите плотность смеси, содержащей $m_1=4$ г водорода и $m_2=32$ г кислорода при температуре $t=7$ °С и общем давлении $p=10^5$ Па.

5. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, причем первый электрон вначале покоится, а второй имеет скорость v_0, направленную к первому. Определите наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.

6. Какое количество теплоты выделится в цепи при переключении ключа K из положения *1* в положение *2* (рис. 1)?

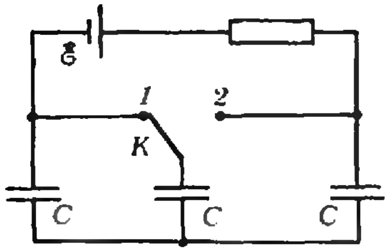


Рис. 1.

7. На резисторе во внешней цепи аккумулятора выделяется тепловая мощность $P=10$ Вт. Когда к концам этого резистора присоединили точно такой же второй аккумулятор, выделяемая мощность стала в два раза больше. Какой будет выделяемая мощность, если к аккумуляторам одноименными полюсами присоединить третий такой же аккумулятор?

8. Вольтамперная характеристика некоторого нелинейного элемента такова, что до напряжения $U_0=100$ В ток через элемент отсутствует, а затем линейно растет с ростом напряжения (рис. 2). При подключении элемента к батарее с внутренним сопротивлением $r=2{,}5$ кОм через элемент течет ток $I_1=2$ мА, а при подключении его к той же батарее через резистор сопротивлением $R=25$ кОм течет ток $I_2=1$ мА. Определите ЭДС батареи.

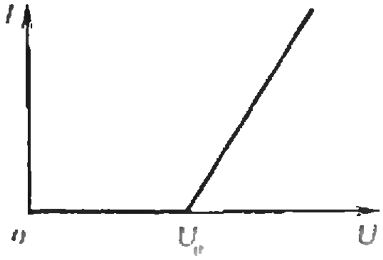


Рис. 2.

9. От источника света на плоское зеркало падает расходящийся под углом α пучок лучей. Определите угол между лучами после их отражения от зеркала.

10. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см и плоского зеркала, находящегося на расстоянии $l=15$ см от линзы. Определите положение изображения, даваемого этой системой, если предмет находится на расстоянии $d=15$ см перед линзой.

Публикацию подготовили *А. Т. Берестов, Г. М. Гусаков*

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Пешеход переходил дорогу со скоростью $v=4,2$ км/ч по прямой, составляющей угол $\alpha=30^\circ$ с направлением дороги, в течение одной минуты. Определите ширину дороги.

2. Человек массой $M=60$ кг, стоя на коньках, бросает перед собой горизонтально груз массой $m=2$ кг со скоростью $v=3$ м/с, а сам откатывается назад. Через сколько секунд после броска человек остановится, если коэффициент трения коньков о лед $\mu=0,01$? Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2.

3. Во сколько раз период обращения спутника, движущегося на расстоянии $h_1=21\,600$ км от поверхности Земли, больше периода обращения спутника, движущегося на расстоянии $h_2=600$ км от ее поверхности? Радиус Земли принять равным $R=6400$ км.

4. Два шара диаметром $d=60$ см каждый скреплены в точке касания их поверхностей. На каком расстоянии от точки касания находится центр тяжести системы, если масса одного шара в 3 раза больше массы другого?

5. Абсолютную температуру газа, находящегося в цилиндре под поршнем, увеличили в 3 раза. Для того чтобы поршень остался в прежнем положении, на него пришлось положить груз массой $m=10$ кг. Площадь поршня $S=0,001$ м^2. Ускорение силы тяжести $g=10$ м/с^2. Найдите начальное давление газа.

6. Какое давление производят пары ртути в баллоне ртутной лампы объемом $V=3\cdot10^{-5}$ м^3 при $T=300$ К, если в ней содержится $N=10^{18}$ молекул ртути? Постоянная Больцмана $k=1,38\cdot10^{-23}$ Дж/К.

7. Напряженность электрического поля плоского воздушного конденсатора емкостью $C=4$ мкФ равна $E=1000$ В/м. Расстояние между обкладками конденсатора $d=1$ мм. Определите энергию электрического поля конденсатора.

8. Вольтметр со шкалой, рассчитанной на $U=100$ В, имеет внутреннее сопротивление $r=10$ кОм. Какую наибольшую разность потенциалов можно измерить этим прибором, если присоединить к нему последовательно добавочное сопротивление $R=90$ кОм?

9. В однородном магнитном поле находится плоский виток площадью $S=10$ см^2, расположенный перпендикулярно линиям поля. Какой величины ток потечет по витку, если индукция поля будет убывать с постоянной скоростью $\Delta B/\Delta t=0,01$ Тл/с? Сопротивление витка $R=1$ Ом.

10. Монохроматический свет падает перпендикулярно плоскости прозрачной дифракционной решетки. Под каким углом будет наблюдаться первый главный максимум зеленой линии спектра ртутной лампы (с длиной волны $\lambda=546$ нм), если период дифракционной решетки $d=10,92\times10^{-7}$ м?

Вариант 2

1. На сколько метров путь, пройденный свободно падающим телом за десятую секунду, больше пути, пройденного телом в предыдущую секунду? Начальная скорость тела равна нулю. Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2.

2. Два одинаковых шара массой $m=4$ кг каждый сталкиваются и начинают двигаться вместе. Какое количество теплоты выделилось при ударе шаров, если один из них имел до удара скорость $v=5$ м/с, а второй был неподвижен?

3. Камень массой $m=0,5$ кг, привязанный к веревке длиной $l=50$ см, вращается в вертикальной плоскости. Натяжение веревки в нижней точке окружности $T=45$ Н. На какую высоту, отсчитываемую от нижней точки окружности, поднимется камень, если веревку перерезать в тот момент, когда скорость камня направлена вертикально вверх? Ускорение силы тяжести принять равным $g=10$ м/с^2.

4. На сколько плотность некоторого тела больше плотности воды, если это тело в воде весит в 9 раз меньше, чем в воздухе? Плотность воды $\rho_в=1000$ кг/м^3.

5. В баллоне содержится $m=2$ кг газа при $T_1=270$ К. Какое количество газа (в граммах) нужно удалить из баллона, чтобы при температуре $T_2=300$ К давление осталось прежним?

6. Газ, совершающий цикл Карно в идеальной тепловой машине, 70 % количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику; температура нагревателя $T_1=430$ К. Определите температуру холодильника.

7. Во сколько раз увеличится емкость плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены вертикально, если конденсатор погрузить до половины в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=5$?

8. Сколько элементов тока нужно соединить параллельно в батарею, чтобы при подключении к ней резистора сопротивлением $R=49$ Ом получить в цепи ток $I=2$ А? ЭДС каждого элемента $\mathscr{E}=100$ В, внутреннее сопротивление $r=2$ Ом.

9. Электрон движется по окружности в однородном магнитном поле индукцией $B=0{,}02$ Тл, имея импульс $P=6{,}4\cdot10^{-23}$ кг·м/с. Найдите радиус этой окружности. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

10. Сколько процентов от скорости света в вакууме должна составлять скорость протона, движущегося в ускорителе, чтобы увеличение его массы составило 25 %?

Публикацию подготовил *Д. Д. Ходкевич*

Ответы, указания, решения

сковский авиационный нологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант 1

1. $\left\{\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\ \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2. $[-2;\ 1-\sqrt{7}]\cup[1+\sqrt{7};\ 4]$.

3. $x_1=\frac{\pi}{8}(2n+1)$, $x_2=\frac{\pi}{6}(6k\pm1)$, $n,\ k\in Z$.

4. $(5;\ 7)$, $(3;\ -1)$.

5. $8\sqrt{14}/15$.

Вариант 2

1. $[-(1+\sqrt{13})/2;\ (-1+\sqrt{13})/2]$.

2. $\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1);\ (4/\sqrt{3};\ -5/\sqrt{3});\ (-4\sqrt{3};\ 5\sqrt{3})\}$.

3. $x_1=\frac{\pi}{84}(12n-1)$, $x_2=\frac{\pi}{48}(12m+7)$, $m,\ n\in Z$.

4. Промежутки возрастания $(-\infty;\ -1-\sqrt{15})$ и $(-1+\sqrt{15};\ +\infty)$, промежутки убывания $(-1-\sqrt{15};\ -1)$ и $(-1;\ -1+\sqrt{15})$.

5. $\sqrt{p_1^2+p_2^2}$. **Указание.** Высота разбивает прямоугольный треугольник на два подобных треугольника, площади которых относятся к площади данного как квадраты периметров.

Вариант 3

1. $\{(2;\ 2)\}$. 2. $\{1/10;\ 10\}$. 3. $n=12$. 4. $x=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $n\in Z$. 5. $\pi/2$, $\pi/6$, $\pi/3$. **Указание.** Пусть ABC — данный треугольник, BD — медиана, BE — высота, $\angle ABD=\angle DBE=\angle EBC=\alpha$. Тогда $\operatorname{tg}2\alpha=AE/BE=3DE/BE=3\operatorname{tg}\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=1/\sqrt{3}$.

Физика

1. $F_c=m(g-2h/t^2)=0{,}4$ Н.

2. $t_1=2\left(\frac{v_0}{g}+\frac{\tau}{2}\right)=8$ с; $t_2=2\left(\frac{v_0}{g}-\frac{\tau}{2}\right)=4$ с.

3. $\beta=0$ (горизонтальная составляющая скорости после удара равна нулю).

4. $x_m=x_1/\sin\varphi_1=4$ см; $x_2=x_1\sin\varphi_2/\sin\varphi_1=2{,}8$ см.

5. Холодильник потребит электроэнергию $W=m(ct_1+\lambda)(T_1/T_2-1)$, это обойдется в сумму 0,6 коп.

6. $U=Blv=0{,}1$ В.

7. $\Delta t=1/(4\nu)=5\cdot10^{-4}$ с.

8. Изображение движется вертикально вверх со скоростью $v=3$ м/с.

9. $l=h+2H/n=5$ м.

10. $v=c\sin(\alpha+\beta)/(\sin\alpha+\sin\beta)=2{,}2\cdot10^8$ м/с.

ковское высшее техническое ище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 24 км/ч, 72 км/ч.

2. $x_1=\frac{\pi}{2}(4k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(6n\pm1)$, $k, n\in Z$.

3. $\{1/2\}$. 4. $p\in(-2;\,2]$. **Указание.** Данное уравнение имеет корни, если уравнение $(p-1)y^2-4z+(p+2)=0$ имеет хотя бы один положительный корень, т. е. при $p=1$, а также при p удовлетворяющих одному из условий:

$$\text{а) } \frac{p+2}{p-1}<0; \quad \text{б) } \begin{cases} \dfrac{p+2}{p-1}>0, \\ p>1, D\geqslant 0. \end{cases}$$

5. $a/3\sqrt{3}$; $10a^3/81\sqrt{3}$. **Указание.** Пусть h — высота призмы. Тогда ее объем $V(h)=2\left(\frac{a^2h}{3}-\frac{a}{\sqrt{3}}h^2-h^3\right)$. Функция $V(h)$ достигает максимума при $h=a/3\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. 1; 3.

2. $x_1=\frac{\pi}{8}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3l\pm1)$, $k, l\in Z$.

3. $\{3\}$.

4. $[0;\,1)$.

5. $H/11$; $H\sqrt{6}/11$. **Указание.** Если d — диагональ призмы, а h — ее высота, то $d^2=h^2+(H-h)^2+(3h-H)^2$.

Физика

1. $v=v_0\sqrt{\cos^2\alpha+\left(\sin\alpha-\frac{gs}{v_0^2\cos\alpha}\right)^2}\approx 7{,}6$ м/с; $\beta=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{gs}{v_0^2\cos^2\alpha}\right)\approx 22^\circ$.

2. $h=\Delta P^2/(8m^2g)=1{,}28$ м.

3. $W=(Mg+m(g-a))^2/(2k)$.

4. $v_2/v_1=\sqrt{p_2/p_1}=10$.

5. $q=-2F/(E_2-E_1)=-7\cdot10^{-5}$ Кл.

6. $W_B=W_A+0{,}5(3mg-F)R=-4\cdot10^{-3}$ Дж.

7. $R=2\mathscr{E}_2r/(\mathscr{E}_1-\mathscr{E}_2)=1$ Ом.

8. $A=e^2/(8\pi\varepsilon_0 r)=21{,}8\cdot10^{-19}$ Дж $=13{,}6$ эВ (здесь $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл — заряд электрона, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).

9. Это нейтрон ${}^1_0n$, протон ${}^1_1p$ и альфа-частица ${}^4_2\alpha$.

10. Неизвестная частица — это ядро атома гелия ${}^4_2\mathrm{He}$; полная энергия $E=E_0(m/\mathrm{M})N_\mathrm{A}\approx 8{,}5\cdot10^{11}$ Дж (здесь $\mathrm{M}=2\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса дейтерия, $N_\mathrm{A}=6\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

[redacted]ковский станкоинструментальный итут

Математика

Вариант 1

1. $\{2\}$. 2. $[-7;\,-3]$ и $[3;\,7]$. 3. 21 ч.

4. $x_1=\pi m/2$, $x_2=\pi(2k+1)/2$, $m, k\in Z$.

5. $S\sqrt{S}\operatorname{tg}\varphi\,(2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta))^{-1/2}$. **Указание.** Если R — радиус окружности, описанной около основания, а H — высота призмы, то $H=R\operatorname{tg}\varphi$, а $S=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin(\alpha+\beta)$.

Вариант 2

1. $\{1/16;\,1\}$. 2. $k=13$. 3. $68/3$ км/ч.

4. $x=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$, $n\in Z$.

5. $l\sin\alpha\sqrt{2}/(\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha)$.

Физика

1. $\alpha\leqslant\operatorname{arctg}\mu\approx 0{,}15$ рад $\approx 9^\circ$.

2. $R=\sqrt[3]{g\left(\frac{R_З T_З}{2\pi}\right)^2}=42\,400$ км, где $R_З=6400$ км — радиус Земли, $T_З=24$ ч — период ее вращения вокруг собственной оси.

3. $v=\sqrt{\left(\frac{mv_0}{m+M}\right)^2+2gH}$.

4. $x=\sqrt[3]{\frac{\mathrm{M}_{\mathrm{Na}}+\mathrm{M}_{\mathrm{Cl}}}{2\rho N_\mathrm{A}}}=2.8\cdot10^{-10}$ м.

5. $p=10^5$ Па (в сосуде находится смесь воды и ее насыщенных паров).

6. $Q=5\nu RT=18{,}7$ кДж.

7. $P_1=P_2R_1(R_2+R_3)^2/(R_2R_3^2)$; $P_3=P_2R_2/R_3$.

8. $q=C\mathscr{E}R_1/(R_1+R_2+r)$; $U_\mathrm{V}=\mathscr{E}R_1/(R_1+R_2+r)$.

9. $I_m=B_0\omega S/R$; $P=(B_0\omega S)^2/(2R)$.

10. $\alpha=\operatorname{arctg}n=53^\circ$.

[redacted]ковский институт тронной техники

1. $l=\frac{m^2v^2}{4g(m+M)^2}=0{,}62$ м.

2. $A=3mgl/2=150$ Дж.

3. $A=mR(T_2-T_1)/(2\mathrm{M})$.

4. $\rho=\frac{(m_1+m_2)p}{(m_1/\mathrm{M}_1+m_2/\mathrm{M}_2)RT}\approx 0{,}51$ кг/м^3.

5. $r_{\min}=e^2/(\pi\varepsilon_0 m v_0^2)$.

6. $Q=C\mathscr{E}^2/3$.

7. $P'=P(1+\sqrt{2})^2/(1+\sqrt{2}/3)^2\approx 27$ Вт.

8. $\mathscr{E}=U_0+I_1I_2R/(I_1-I_2)=150$ В.

9. $\gamma=\alpha$.

10. Изображение находится на расстоянии 60 см перед линзой.

[redacted]ковский институт нефти за им. И. М. Губкина

Вариант 1

1. $d=v\sin\alpha\cdot t=35$ м.

2. $t=mv/(\mu Mg)=1$ с.

3. $T_1/T_2=\sqrt{(R+h_1)^3/(R+h_2)^3}=8$.

4. $x=d/4=0{,}15$ м.

5. $p=mg/(2S)=50$ кПа.

6. $p=NkT/V=138$ Па.

7. $W=C(Ed)^2/2=2\cdot10^{-6}$ Дж.

8. $U'=U(r+R)/r=1000$ В.

9. $I=(\Delta B/\Delta t)S/R=10^{-5}$ А.

10. $\varphi=\arcsin(\lambda/d)=30^\circ$.

Вариант 2

1. $\Delta l=gt^2(10^2-2\cdot9^2+8^2)/2=10$ м.

2. $Q=mv^2/4=25$ Дж.

3. $H=\frac{l}{2}\left(\frac{T}{mg}-1\right)=2$ м.

4. $\Delta\rho=\rho_в/8=125$ кг/м^3.

5. $\Delta m=m(1-T_1/T_2)=200$ г.

6. $T_2=0{,}7\,T_1=301$ К.

7. $C_2/C_1=(1+\varepsilon)/2=3$.

8. $n=Ir/(\mathscr{E}-IR)=2$.

9. $R=P/(eB)=2\cdot10^{-2}$ м $=2$ см.

10. $\alpha=60\,\%$.

[illegible]нт» для младших школьников
[illegible] «Квант» № 4)

1. Цифры, отличной от 3, быть не может, так как $2^n \cdot 5^n = 10^n$, т. е. произведение $2^n \cdot 5^n$ начинается со 100. Проще всего проверить все возможные цифры: 1, 2, ..., 9.

2. $264^2 = 69696$.

3. Если обозначить число обезьян через x, а количество собранных каждой из них орехов через y, то получится, что обезьяны собрали xy орехов. Каждая обезьяна бросила по $(x-1)$ орехов; всего же было брошено $x(x-1)$ орехов. Таким образом, они принесли $xy - x(x-1)$ орехов, и мы получаем уравнение $x(y-x+1)=33$. Отсюда следует, что x — делитель числа 33. Так как $x \neq 1$ и $x \neq 33$, то $x=3$ или $x=11$. В первом случае $y-x+1=11$ и $y=13$, во втором случае $y-x+1=3$ и y тоже равно 13.

4. В описанной ситуации «восточные» оконные стекла в домах ориентированы примерно параллельно друг другу. Поэтому они могут фактически рассматриваться как части одного большого зеркала. В таком зеркале по мере восхода солнца мы видим светило все выше и выше, т. е. «светящиеся» окна должны перемещаться вверх по склону горы. Кроме того, как нетрудно заметить, в северном полушарии они немного смещаются на юг, а если город находится в южном полушарии — на север. На экваторе в дни весеннего и осеннего равноденствий бокового смещения нет.

5. Перегнем наш четырехугольник по сторонам прямоугольника так, чтобы «выступающие» уголки четырехугольника оказались внутри прямоугольника.

Поскольку у прямоугольника углы — прямые, оба отрезка любой стороны четырехугольника после перегибания будут располагаться на одном луче, исходящем из соответствующей вершины прямоугольника (рис. 1).

Из равенства $AX=BX$ следует, что точки A и B переходят в одну и ту же точку E, а из равенства $DQ=CQ$ — что точки C и D переходят в некоторую точку F. Из равенства углов EPQ и DPQ следует, что точка F лежит на прямой PE, а из равенства углов BYX и XYE — что точка F лежит на прямой YE. Если прямые PE и YE не совпадают, то точка F совпадает с точкой E пересечения этих прямых (рис. 2, а). Если же прямые PE и YE совпадают, то получаем расположение, показанное на рисунке 2, б. Из этих рисунков видно, что площадь треугольника действительно равна половине площади четырехугольника.

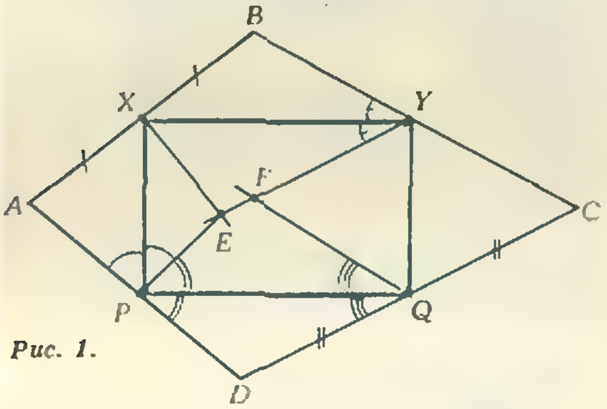


Рис. 1.

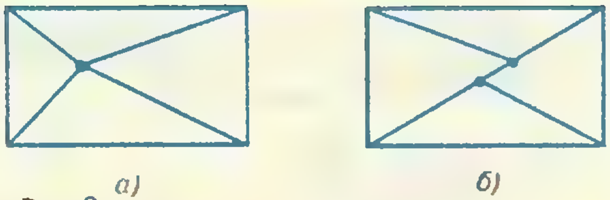


Рис. 2.

[illegible]ейдоскоп «Кванта»
[illegible] «Квант» № 4)

Вопросы и задачи

1. Первая катушка покатится вправо, вторая — влево.

2. Не нарушится.

3. См. рис. 3.

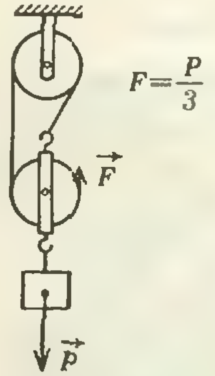


Рис. 3.

4. Нет, поскольку сила F_3 не создает момента относительно точки 0.

5. Сдвинется левый брусок (см. рис. 4, вид сверху).

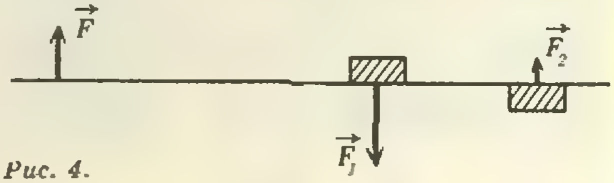


Рис. 4.

6. Применение веревки, перекинутой через бочку, дает выигрыш в силе в два раза, наклонная плоскость (при $\alpha=30°$) — также в два раза; следовательно, общий выигрыш в силе — в четыре раза.

7. Да, примерно в два раза.

8. См. рис. 5.

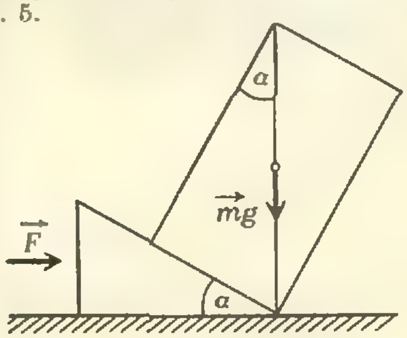


Рис. 5.

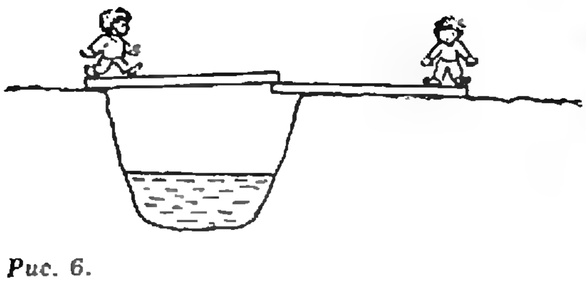


Рис. 6.

9. При выполнении неравенства $2\pi r \geqslant h$, где r — радиус винта, h — его шаг.
10. См. рис.6.

Микроопыт
При сгибании конца полоски ее центр тяжести сместится и не будет совпадать с точкой опоры. Полоска упадет.

[illegible]дители шахматного [illegible]урса 1987 года

Победителями конкурса признаны: В. Арушанян (Гатчина), Э. Бабаев (с. Чопадара АзССР), С. Байчан (Ульгей, МНР), Е. Борзых (Прокопьевск), В. Васильев (Свердловск), К. Ворошилин (Орск), Р. Гашимов (п. Борадыгях АзССР), С. Дорошев (Шатура), М. Исаков (Мингечаур), А. Истер (Вишневое Киевской обл.), С. Катаргин (Омутнинск), И. Кваша (Новочеркасск), С. Киречко (Жданов), М. Клочихин (Архангельск), Д. Красиков (Ростов-на-Дону), М. Куперман (Москва), В. Медведев (Москва), В. Москвленко (Ворошиловград), Ю. Петренко (Желтые Воды), В. Попов (с. Субботино Красноярского края), С. Рудаков (Гусев), А. Рябов (Куйбышев), С. Тасмуратов (Астрахань), А. Тихоиков (д. Моисеевка Гомельской обл.), С. Харченко (Кировоградская обл.), В. Чебкасов (Куйбышев). Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломами и значками журнала «Квант» и шахматно-математической литературой, а также получают право на присвоение соответствующих разрядов по шахматам.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. П. Данелия, М. В. Дубах, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
Е. К. Тенчурина, И. Е. Смирнова, П. И. Черпуский,
В. Б. Юдин
Фото представили:
Е. П. Данелия

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. В. Румянцева

Сдано в набор 16.03.88. Подписано к печати 25.04.88.
Т-09578 Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 22,10. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,27.
Тираж 197 282 экз. Цена 40 коп. Заказ 637

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

СЕРИЙНЫЕ КВАРТЕТЫ

Какие только сюжеты не придумывают шахматные композиторы-фантасты! Сегодня мы остановимся на так называемых серийных задачах (см. также «Квант», 1986, № 4). В них ходит только одна сторона, обычно — белые. Задание состоит в том, чтобы поставить мат черному королю или запатовать его. При этом в искомой серии ходов белых не должно быть ни одного шаха. Известны два типа серийных задач. В первом из них на доске много фигур и надо разобраться в этом клубке, найти хитроумную серию ходов, ведущих к цели. В задачах второго типа, о которых как раз и пойдет сейчас речь, из небольшого фиксированного набора фигур требуется сконструировать позицию, в которой белые ставят серийный мат в максимально возможное число ходов. Но надо учитывать, что серийная задача считается корректной лишь в том случае, если существует единственная серия ходов, которая ведет к мату (в заданное число ходов).

Мы рассмотрим всевозможные наборы четырех фигур — два короля и по одной фигуре с каждой стороны, то есть квартеты на шахматной доске. Поскольку у белых и черных имеется по королю, остается выбор из пяти фигур (ферзь, ладья, слон, конь и пешка), и всего получается 25 возможных видов квартетов. Однако в трех случаях мат невозможен: белый слон против черного ферзя или ладьи и белый конь против черного ферзя. Приведем все 22 рекордных квартета, некоторые — с решениями.

1. **Белые: Кра1, Фb2; черные: Крg8, п. с3.** Серийный мат в 7 ходов. 1—6. Крg6 7. Фb8×. Положение пешки на с3 существенно, иначе было бы два решения (7. Фg7×).

2. **Белые: Кра1, Фb2; черные Крg8, Кh8 (7 ходов).** Предыдущий маршрут короля не проходит, так как поле g6 под боем. 1. Фb7 2—6. Крf6 7. Фg7×.

3. **Белые: Крh1, Фg1; черные: Крb8, Сb7 (8 ходов).** Король белых под шахом, но это не запрещено, первым ходом они, как и положено, избавляются от шаха. 1. Фg2! 2—7. Крg1—b6 8. Ф:b7×.

4. **Белые: Крh1, Фd3; черные: Кра4, Лс2 (7 ходов).** 1—6. Крd1:c2—c3 7. Фа6×.

5. **Белые: Крh1, Фh4; черные: Кра6, Фg3 (7 ходов).** 1. Ф:g3 2—6. Крс6 7. Фа3×.

6. **Белые: Крh1, Лg2; черные: Кра6, п. d7 (8 ходов).** 1—7. Крh2—d6:d7—c6 8. Ла2×.

7. **Белые: Крh7, Лg6; черные: Крb1, Кd2 (8 ходов).**

8. **Белые: Кра1, Лb2; черные: Крh6, Сh8 (12 ходов).** 1—11. Кра2—g8:h8—g8—f6 12. Лh2×.

9. **Белые: Крh8, Ла7; черные Крb1, Лg1 (8 ходов).** 1. Лg7! 2—7. Крg8—b3 8. Л:g1×.

10. **Белые: Крh1, Лf8; черные: Кра6, Фf2 (7 ходов).** 1. Л:f2 2—6. Крс6 7. Ла2×.

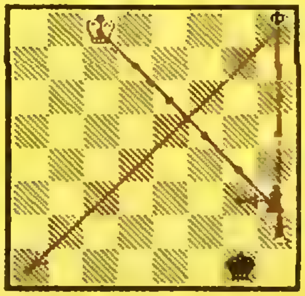
11—13. **Белые: Кра2, Сh6; черные: Крh8, п. h7 (или Кh7, Сh7; 6 ходов).** 1—5. Крf7 6. Сg7×.

14. **Белые: Кра3, Кh6; черные: Крh8, п. h7 (6 ходов).** 1—5. Крf8 6. Кf7×.

15. **Белые: Кра2, Кh4; черные: Крh8, Кh7 (6 ходов).** 1—5. Крf7 6. Кg6×.

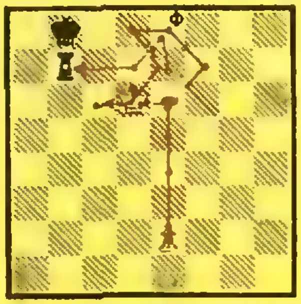
16. **Белые: Кра3, Кd8; черные: Крh8, Сh7 (6 ходов).** 1—5. Крf8 6. Кf7×.

17. **Белые: Крh3, Кf5; черные: Крh8, Лh7 (8 ходов).** 1. Крg4 2. Ке7 3—7. Крd7—e8—f8 8. Кg6×.

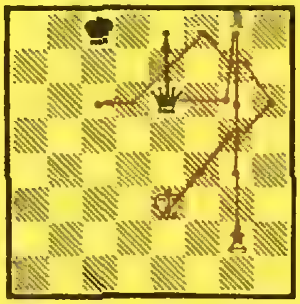


18—19. (На h3 — пешка или конь; 12 ходов).

20. **Белые: Крb8, п. h2; черные: Крg1, Сh3 (13 ходов).** 1—7. Крf4—g3:h3—g3 8—12. h4—h8Ф 13. Фа1×.



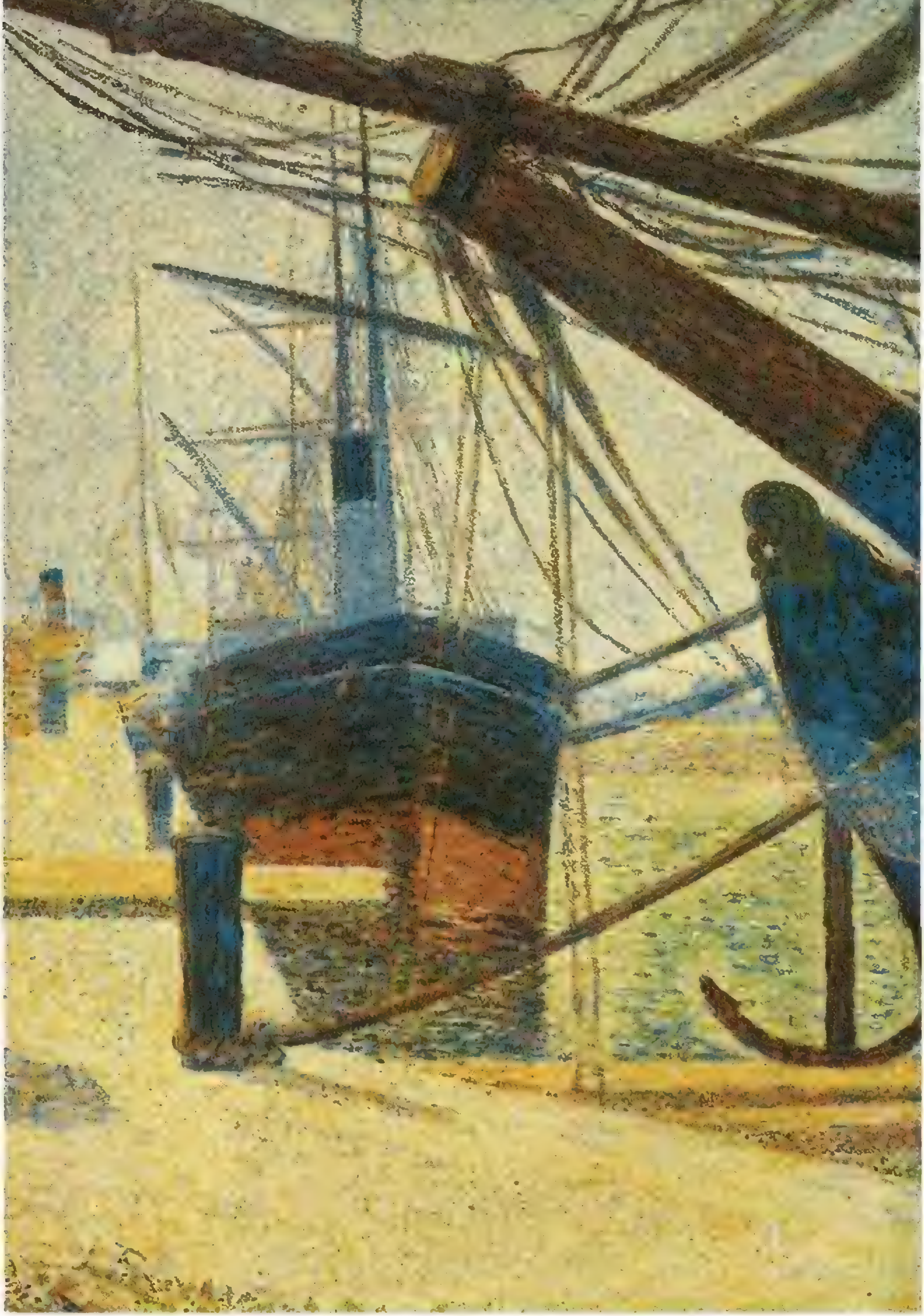
21. (14 ходов). Весьма сложная траектория фигур. Пешка не может просто превратиться в ферзя, так как черный король окажется под шахом. Белый король должен сначала прийти на d8, но мешает черная ладья. Пешка и король действуют сообща. 1—4. с4—е7 5—8. Кре6—f7—e8—d8 9. е8Ф 10. Фd7 11—13. Кре7—d6—c6 14. Ф:b7×.



22. (Суперрекорд: 16 ходов). Только при данном наборе фигур удалось добиться такого марафонского решения. 1. Крf4 2—4. g4—g6 5—9. Крf4—h6—f8 10. g8Л!! 11—12. Лg6:e6 13—15. Кре7—d6—c6 16. Лс8×.

Приведенные рекорды принадлежат композиторам-фантастам разных стран — Югославии, Англии, ФРГ. Однако вполне вероятно, что некоторые из этих рекордов можно побить. Попробуйте сделать это!

Е. Я. Гик



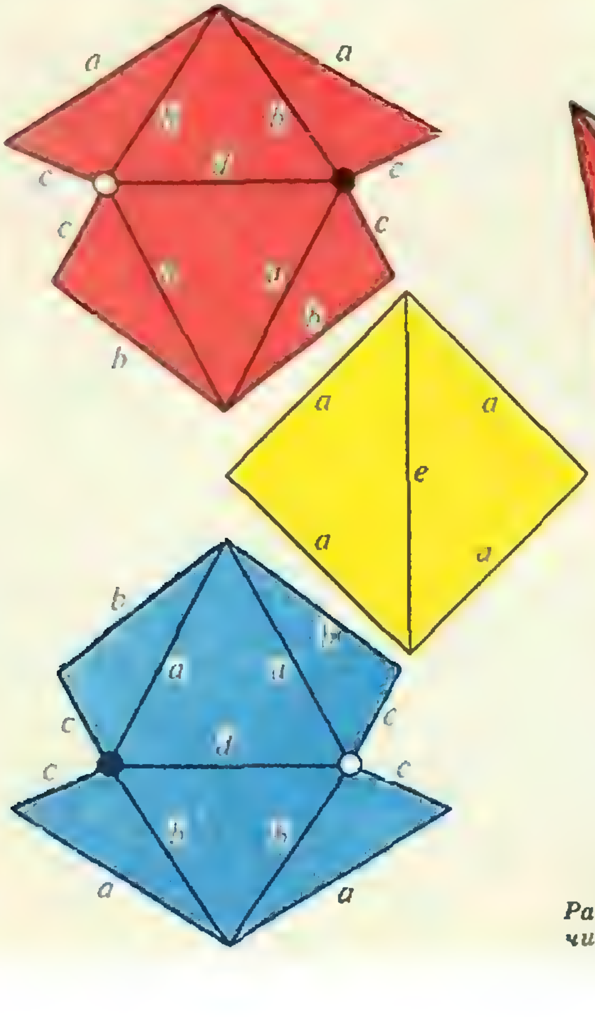
Цена 40 коп.
Индекс 70465

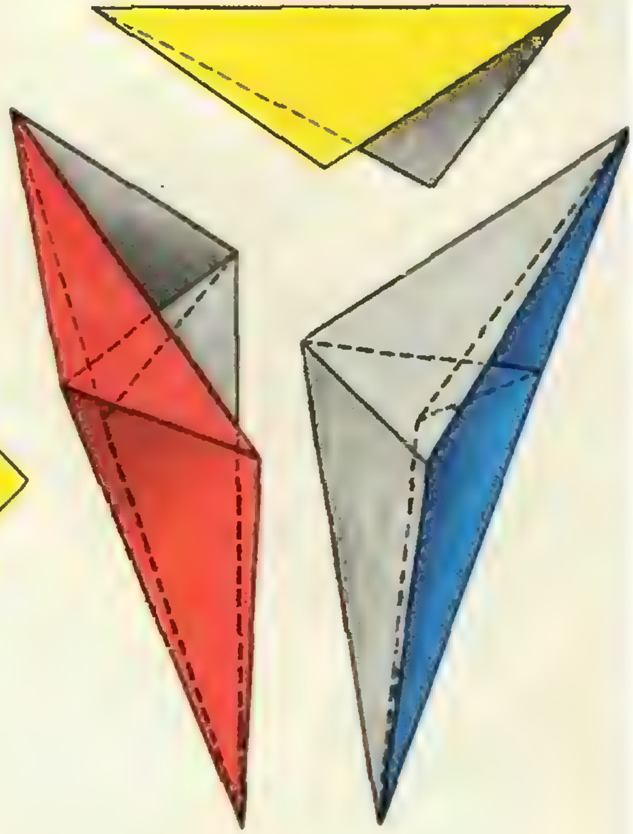
Можно ли непрерывно деформировать многогранник так, чтобы при этом все его грани оставались неизменными, а изменялись лишь двугранные углы? Иными словами — можно ли многогранник изгибать? Оказывается — можно.

На первой странице обложки изображен, по-видимому, наиболее простой известный изгибаемый многогранник — флексор, который предложил Клаус Штеффен, и зеркальный образ этого флексора.

Развертка этого флексора состоит из двух равных оснований и крышки (см. рисунок). В качестве значений a, b, c, d, e, хорошо подходят $a=12$, $b=10$, $c=5$, $d=11$, $e=17$. После того как вырезано основание, нужно склеить попарно ребра c так, чтобы в одной вершине (отмеченной светлым кружком) основание было выпуклым в одну сторону, а в другой вершине (отмеченной темным кружком) — в противоположную, так что в целом основание не является выпуклым.

Второе основание склеивают точно так же, поэтому оба основания могут быть совмещены друг с другом. После этого основания склеиваются так, что у каждого из них остается по два свободных ребра, а эти четыре ребра заклеиваются крышкой. Полученный многогранник-флексор непрерывно изгибаем: его можно немного сжимать и разжимать, изменяя двугранные углы при ребрах.





Разрежьте→изогните→склейте — и вы получите флексор Штеффена.

НОМЕР
6

Квант

Основан в 1970 году

6 1988

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *А. А. Абрикосов.* Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи
12 *А. С. Ярский.* Числа и функции
19 *С. В. Грызлов.* Давление света
22 *В. А. Ефремович.* Что такое непрерывность

Новости науки
11 Музыкальные пульсары

Задачник «Кванта»
25 Задачи М1106—М1110, Ф1118—Ф1122
26 Problems M1106—M1110, P1118—P1122
28 Решения задач М1086—М1090, Ф1097—Ф1102
34 Список читателей, приславших правильные решения

* * *

36 *М. Гарднер.* Нульсторонний профессор

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников
45 Задачи

Лаборатория «Кванта»
46 *Я. Е. Гегузин.* Кто творит радугу?
48 *В. В. Майер, Р. В. Майер.* Искусственная радуга

Математический кружок
52 *В. С. Шевелев.* Три формулы Рамануджана

Искусство программирования
56 *А. Г. Щеголев.* Школьная ЭВМ рисует окружность

Практикум абитуриента
59 *И. Г. Габович, П. И. Горнштейн.* Решения нестрогих неравенств
61 *А. А. Варламов.* Парообразование. Свойства паров

Информация
67 Новосибирск — Андовер. Продолжение обмена

71 **Варианты вступительных экзаменов**

77 **Ответы, указания, решения**

«Квант» улыбается *(70)*

Смесь *(51)*

Наша обложка
1 *На рисунке — радуга, полученная в «домашних условиях». Об экспериментах с искусственной радугой читайте в статьях рубрики «Лаборатория «Кванта».*

2 *Картина Р. Магрита «Прогулка Евклида» — своеобразная иллюстрация идеи проекции — частного случая непрерывного отображения, о котором идет речь в статье В. А. Ефремовича.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *Головоломки «Меледа» и «Чертов цветок».*

© Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

25 июня 1988 года исполняется 60 лет члену редколлегии нашего журнала выдающемуся советскому физику-теоретику, лауреату Ленинской и Государственной премий, академику А. А. Абрикосову. Он является автором многих открытий. Пожалуй, наиболее известное из них — предсказание существования сверхпроводников второго рода и исследование их магнитных свойств.
Ему принадлежит ряд замечательных результатов в области квантовой теории поля и астрофизики, теории металлов и полупроводников, молекулярной физики, теории плазмы, магнетизма...
Мы поздравляем Алексея Алексеевича с юбилеем, желаем ему здоровья и новых творческих успехов.
В этом номере мы предлагаем нашим читателям статью А. А. Абрикосова, которая посвящена проблемам, занимающим сегодня в физике чрезвычайно важное место. Эта статья представляет собой, по существу, запись доклада, сделанного А. А. Абрикосовым осенью 1987 года в Политехническом музее в Москве. Не все в статье может быть понято школьником. Однако вдумчивое ее прочтение дает возможность «из первых рук» получить представление о том замечательном открытии, сообщения о котором вот уже второй год не сходят со страниц газет и журналов всего мира.

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ:

история, современные представления, последние успехи

Академик А. А. АБРИКОСОВ

Явление сверхпроводимости было открыто голландским физиком Камерлинг-Оннесом в 1911 году. Камерлинг-Оннесу первому удалось получить жидкий гелий, и он использовал его для создания криостатов — приборов, в которых можно поддерживать очень низкую температуру. В частности, он решил проверить правильность существовавших в то время представлений о поведении электрического сопротивления при низких температурах. Измеряя сопротивление ртути, Камерлинг-Оннес обнаружил, что оно скачком обращается в нуль при температуре около 4 К. Это явление было названо сверхпроводимостью, а температура перехода в сверхпроводящее состояние — критической. В настоящее время известно много сверхпроводников с самыми разными критическими температурами, от долей градуса до примерно 100 К. Но о последних я скажу позже.

Последующие исследования сверхпроводников позволили обнаружить многие их замечательные свойства. Так, оказалось, что сверхпроводимость разрушается магнитным полем. Критическое поле, при котором это происходит, зависит от температуры. Далее обнаружилось, что сверхпроводимость исчезает и в том случае, когда по образцу пропускают достаточно большой ток. Наконец, был обнаружен так называемый эффект Мейснера, суть которого заключается в следующем. Если поместить металл в не очень сильное магнитное поле и понижать температуру, то при переходе металла в сверхпроводящее состояние силовые линии поля вытолкнутся из него. Последующее изучение показало, что на самом деле при таком переходе у поверхности сверхпроводника возникает небольшой слой, толщиной 10^{-5}—10^{-6} см, в котором циркулируют токи, полностью экранирующие внутренние области образца от внешнего поля. Толщина этого слоя называется глубиной проникновения.

Я не буду перечислять все факты,

свидетельствующие о свойствах сверхпроводников. Их было обнаружено много. Но тем не менее само явление оставалось таинственным. Более того, существовало некое принципиальное обстоятельство, которое, как казалось, делало сверхпроводимость невозможной.

В 1937 году П. Л. Капица открыл явление сверхтекучести жидкого гелия — его способность протекать по узким капиллярам без всякого трения. Через четыре года Л. Д. Ландау сумел объяснить это явление. В теории Ландау был выведен так называемый критерий сверхтекучести, согласно которому вязкость могла возникать при движении со скоростью, превышавшей некоторую критическую. Опишу это качественно. Торможение гелия означает изменение его энергии и импульса. Однако жидкий гелий является квантовой жидкостью и может менять энергию и импульс, поглощая и излучая определенные кванты, названные квазичастицами. Эти квазичастицы ведут себя в объеме тела как настоящие частицы, правда, с необычной связью между энергией и импульсом. Различие между ними и обычными частицами — электронами, фотонами — заключается в том, что вне тела квазичастицы существовать не могут. В жидком гелии такие частицы могут появляться лишь тогда, когда скорость течения гелия выше определенной конечной величины.

Казалось бы, отсюда легко перейти к объяснению сверхпроводимости как сверхтекучести заряженной электронной жидкости в металлах. Однако свойства квазичастиц, возникающих в электронной жидкости, оказались отличными от свойств квазичастиц в жидком гелии. Так, для них критическая скорость равна нулю, и, следовательно, протекание тока без сопротивления оказывается вообще невозможным. В чем же разница между этими двумя жидкостями — жидким гелием и электронной жидкостью? Она, прежде всего, заключается в том, что собственный момент вращения, называемый спином, у атомов гелия равен нулю, а у электронов $\hbar/2$, где $\hbar$ — постоянная Планка. Поэтому сразу встал вопрос, не могут ли электроны объединяться в пары. У таких пар полный спин был бы равен либо нулю (спины электронов направлены в противоположные стороны), либо $\hbar$. Подобные пары квазичастиц в электронной жидкости могли бы напоминать квазичастицы жидкого гелия, и можно было бы надеяться объяснить явление сверхпроводимости по аналогии со сверхтекучестью. Однако электроны — одноименно заряженные частицы, благодаря кулоновскому взаимодействию они отталкиваются, и никакой причины для объединения в пары, казалось бы, нет.

Лишь в 1950 году был произведен эксперимент по измерению критических полей $B_{\text{кр}}$ и температур $T_{\text{кр}}$ образцов ртути разного изотопического состава, который пролил свет на возможные причины образования пар. Выяснилось, что величины $T_{\text{кр}}$ и $B_{\text{кр}}$ зависят от массы изотопа по закону

$$T_{\text{кр}},\ B_{\text{кр}} \sim \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Но масса ядер, образующих кристаллическую решетку, проявляется лишь в их движении. Таким образом, стало ясно, что это движение существенно для сверхпроводимости. Основываясь на этом факте, английский физик Г. Фрёлих и независимо от него американский физик Дж. Бардин предложили концепцию, объясняющую природу сил притяжения между электронами. Дело в том, что ядра, а точнее ионы, образующие кристаллическую решетку металла, тоже являются квантовой системой, и в этой системе также имеются квазичастицы, соответствующие колебаниям решетки. Они называются фононами. Электроны могут обмениваться фононами, и это обязательно приводит к притяжению, которое может превзойти непосредственное кулоновское отталкивание.

Однако даже после того, как была высказана эта идея, оставалось неясно, как благодаря такому притяжению возможно образование пар из электронов. Согласно квантовой механике, для этого силы притяжения должны быть достаточно большими и действовать на большом расстоянии. Иначе кинетическая энергия электронов растащит их в разные стороны. Выход из этого положения нашел американский физик Л. Купер, который обратил внимание на тот факт, что речь идет об образовании пар не из двух изолированных электронов, а в присутствии всей совокупности других электронов. Можно сказать и иначе: пары образуются не из электронов, а из квазичастиц электронной жидкости. Эти пары по имени их открывателя стали называть куперовскими.

Через год, в 1957 году, Бардиным, Купером и Р. Шриффером и независимо от них академиком Н. Н. Боголюбовым была построена микроскопическая теория сверхпроводимости, которая связала воедино все известные опытные факты о свойствах сверхпроводников.

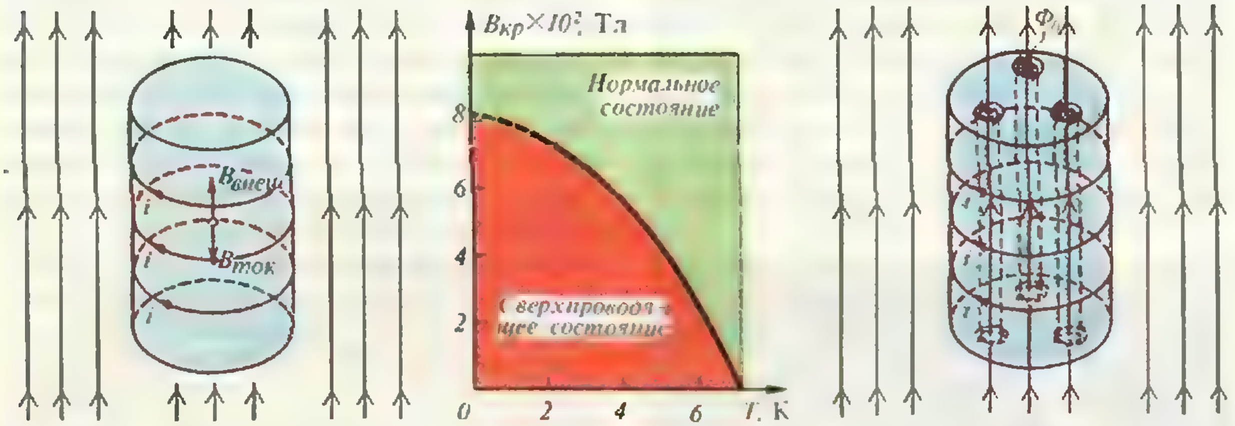
Я не буду излагать здесь эту теорию ввиду ее сложности. Отмечу лишь несколько важных обстоятельств. Прежде всего, если система находится при $T=0$, то передать ей энергию можно лишь разорвав пару. Это требует затраты конечной энергии, которую обозначают 2Δ. В связи с этим электронная теплоемкость при низких температурах ведет себя как $e^{-\Delta/T}$. Второе: я уже отмечал, что для связывания электронов в пары существенно наличие всего электронного коллектива. Но состояние этой системы зависит от температуры. Поэтому энергия связи пары 2Δ зависит от температуры и при $T=T_{\text{кр}}$ $\Delta(T)$ обращается в нуль — сверхпроводник становится нормальным металлом.

Третье свойство связано с тем, что пары имеют конечный размер, порядка 10^{-4}—10^{-5} см. Возникает вопрос: как же они не мешают друг другу? Ведь среднее расстояние между электронами в металле порядка 10^{-8} см. Этот парадокс является проявлением квантовых свойств вещества. Один из авторов микроскопической теории сверхпроводимости Шриффер для сравнения уподобил электроны в сверхпроводнике танцорам в современной дискотеке. Двое танцуют, и хотя между ними еще много других танцоров, они не теряют связь друг с другом. Поэтому точнее говорить не о парах, а о парной корреляции электронов в сверхпроводнике.

Я уже говорил вам о том, что, когда внешнее магнитное поле сравнивается с критическим, сверхпроводник скачком переходит в нормальное состояние. Это утверждение, строго говоря, справедливо лишь для цилиндрического образца в продольном поле и притом не для всех сверхпроводников. Действительно, почему бы массивному сверхпроводнику не разбиться на тонкие слои нормального и сверхпроводящего металла и не сохранить сверхпроводимость до гораздо бо́льших полей? Ведь критическое поле для тонкого слоя выше, чем для массивного сверхпроводника. Разбиение на слои не происходит потому, что во всех чистых сверхпроводниках, состоящих из одного металла, существует особая поверхностная энергия, возникающая на границах между нормальной и сверхпроводящей фазами. Эта энергия, подобно поверхностному натяжению, стремится уменьшить поверхность границ. Микроскопическая теория объяснила ее происхождение. Оказалось, что она связана с конечным размером куперовских пар. Если уменьшать этот размер, то поверхностная энергия может изменить знак и сделаться отрицательной. Тем самым возникает естественное разделение сверхпроводников на сверхпроводники первого рода — с положительной поверхностной энергией и сверхпроводники второго рода — с отрицательной поверхностной энергией. Надо заметить, что сверхпроводники второго рода являются гораздо более распространенными, чем сверхпроводники первого рода. Мало того: любой сверхпроводник первого рода можно перевести во второй род. Для этого достаточно ввести в него некоторое количество атомов примеси или как-нибудь иначе испортить кристаллическую решетку. Электроны начинают рассеиваться на этих дефектах. Характер движения электронов меняется, и размер пар становится меньше. При достаточной концентрации дефектов сверхпроводник первого рода обязательно переходит во второй род.

Теперь я немного расскажу о свойствах сверхпроводников второго рода. Поскольку поверхностная энергия в них отрицательна, то ничто не препятствует бесконечному расщеплению их объема на нормальные и сверхпроводящие области. Поэтому сверхпроводимость в них с увеличением внешнего магнитного поля вытесняется постепенно, начиная с некоторого значения поля $B_{кр.1}$. Переход в нормальное состояние осуществляется в верхнем критическом поле $B_{кр.2}$. Физический смысл $B_{кр.2}$ заключается в следующем. В магнитном поле электроны, будучи заряженными частицами, движутся по спиральным траекториям, и радиус спирали обратно пропорционален B. Если радиус спирали становится меньше размера пары, то пара уже не может существовать и разваливается. Если же внешнее магнитное поле ниже $B_{кр.2}$, но выше $B_{кр.1}$, то оно частично проникает в сверхпроводник. Происходит это за счет возникновения в сверхпроводнике вихревых токов. Оказывается, что эти вихри являются квантовыми объектами. Каждый из них несет квант магнитного потока. Если хотите, можно сказать, что число силовых линий, проходящих в каждом таком вихре, строго определенное. Квант потока является очень малой величиной и равен $\Phi_0 = \pi h/e = 2\cdot10^{-15}$ Вб.

При уменьшении внешнего поля вихри расходятся и в поле $B_{кр.1}$ исчезают из сверхпроводника совсем.



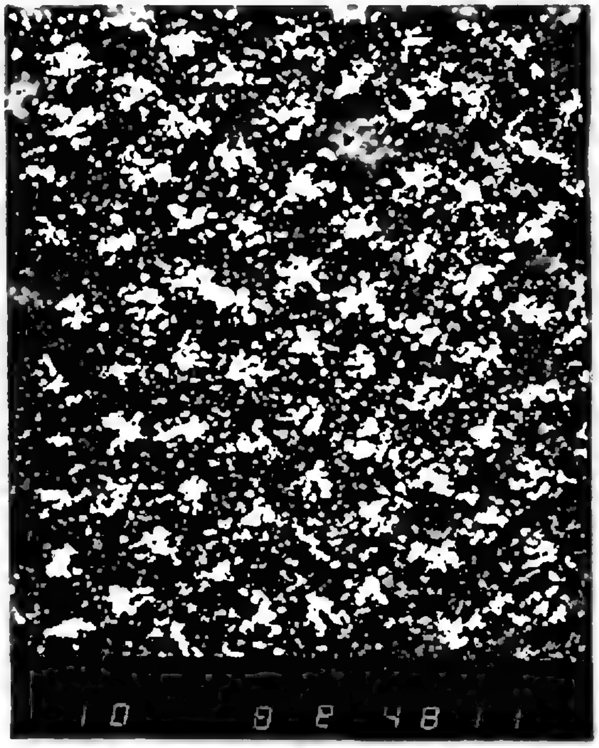
Металлический цилиндр, охлаждаемый до низкой температуры, находится в сверхпроводящем состоянии. При включении магнитного поля на поверхности цилиндра индуцируются круговые токи, которые создают в цилиндре магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{ток}$, равной по величине и противоположной по направлению индукции $\vec{B}_{внеш}$ внешнего поля. Эти круговые токи — сверхпроводящие и не затухают со временем. Поэтому в толще сверхпроводника суммарная индукция равна нулю: $\vec{B}_{внеш}+\vec{B}_{ток}=\vec{0}$. Линии индукции магнитного поля не проникают в сверхпроводник.

Чем больше индукция внешнего поля, тем больший ток должен течь по поверхности, чтобы обеспечить экранировку внутренней области металлического сверхпроводника от внешнего поля. При некотором критическом значении индукции внешнего поля $B_{кр}$ поле проникает внутрь образца, сверхпроводимость разрушается — металл переходит в нормальное состояние. Для такого перехода не обязательно внешнее магнитное поле. Ток, текущий по поверхности сверхпроводника, сам создает магнитное поле, и когда $B_{ток}$ достигает значения, соответствующего $B_{кр}$, сверхпроводимость разрушается. Величина $B_{кр}$ растет с уменьшением температуры, но даже вблизи $T=0$ значение $B_{кр}$ у чистых сверхпроводящих металлов невелико — не более десятых долей тесла.

В сверхпроводящих сплавах, так же как в ряде сверхпроводящих соединений, при некотором значении индукции $B_{кр.1}$ поле начинает проникать внутрь сверхпроводника. В толще образца появляются отдельные сгустки линий магнитной индукции. Каждый такой сгусток окружен кольцевыми незатухающими токами, напоминающими вихри в жидкости или в газе. Эти сгустки и называют вихрями. Внутри вихря сверхпроводимость разрушена, но в пространстве между вихрями она сохраняется. С увеличением индукции магнитного поля число вихрей растет. При некотором значении индукции $B_{кр.2}$ вихри начинают перекрываться, поле «заполняет» образец, сверхпроводимость полностью разрушается. Сверхпроводники с такими свойствами называют сверхпроводниками второго рода.

Фактически поле $B_{\text{кр.1}}$ — это то поле, при котором один вихрь еще может существовать в сверхпроводнике. Область между полями $B_{\text{кр.1}}$ и $B_{\text{кр.2}}$ называется смешанным состоянием. В этом состоянии сверхпроводник пронизан вихревыми нитями — миниатюрными соленоидами, расположенными в правильном порядке. В поперечном срезе они образуют треугольную решетку. Каждый вихрь имеет сердцевину, размер которой равен размеру куперовской пары; эту сердцевину можно считать областью нормального металла.

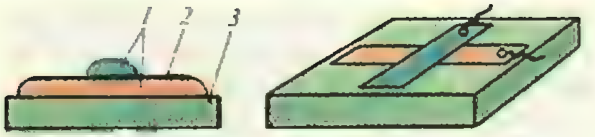
Очень существенным оказывается то обстоятельство, что, увеличивая концентрацию дефектов, можно увеличивать критическое поле $B_{\text{кр.2}}$, вплоть до которого по образцу может течь свехпроводящий ток. Это дает возможность применять сверхпроводники второго рода для создания сверхпроводящих магнитов. Действительно, в сверхпроводящем кольце ток может циркулировать вечно. Можно сделать соленоид и замкнуть его накоротко. Это и будет сверхпроводящий постоянный магнит. Отличие от обычного электромагнита заключается в том, что в обычном магните энергия тока в конечном итоге тратится на разогрев обмотки. Из-за этого приходится делать громоздкую и дорогостоящую систему охлаждения. Именно это обстоятельство ограничивает возможности электромагнитов полями до 5—6 Тл. А с помощью сверхпроводящих магнитов уже сегодня можно получать поля до 10—12 Тл (Nb — Zr — Ti) и даже до 23 Тл (Nb_3Sn). В настоящее время сверхпроводящие магниты используются в генераторах, для создания магнитной подушки в поезде-экспрессе, в ускорителях элементарных частиц, в токамаках — приборах термоядерного синтеза, в магнитогидродинамических генераторах. Кроме того, сверхпроводящая катушка с током может служить накопителем энергии.



Фотография структуры вихрей в сверхпроводнике второго рода. Вихри образуют периодическую структуру, аналогичную кристаллической решетке.

Однако надо иметь в виду, что это дело не такое простое. Чем выше верхнее критическое поле $B_{\text{кр.2}}$, тем ниже нижнее — $B_{\text{кр.1}}$. Значит, в проволоке сверхпроводящего соленоида с током наверняка имеются вихри. Под действием силы Лоренца вихри могут прийти в движение, а это немедленно приведет к диссипации энергии, т. е. к появлению сопротивления. Выход из этого положения — как-то закрепить, пришпилить вихревую решетку, чтобы она не двигалась. Это называется «пиннингом» (от английского pin — булавка). В этом случае сверхпроводящий ток легко огибает нормальные сердцевины вихрей. Я не буду останавливаться на этом очень интересном вопросе и перейду теперь к рассказу о «слабой» сверхпроводимости.

Из квантовой механики известен так называемый туннельный эффект — возможность частицам проникать через потенциальный барьер, даже если высота этого барьера выше энергии частиц. Конечно, реально ширина барьера должна быть очень малой. Туннельный эффект был использован И. Гиэвером в 1960 году для создания туннельного контакта: два металлических электрода разделены слоем изолятора (обычно в качестве



Сверхпроводящий туннельный контакт. На стеклянную подложку (3) наносят пленку сверхпроводника (1). Затем ее окисляют — на поверхности сверхпроводника создается слой диэлектрика (2) толщиной порядка десяти ангстрем. Сверху наносят еще одну пленку (1) сверхпроводника. (Для удобства измерений сверхпроводящие пленки «укладывают» на подложку в виде креста.) С некоторой вероятностью электроны из одной пленки могут проникать в другую через диэлектрическую прослойку — это называют туннельным эффектом.

изолятора берется пленка окиси на поверхности одного из металлов). Благодаря туннельному эффекту, через такой контакт может идти ток. Если один из этих металлов является сверхпроводником, то электроны в нем объединены в пары. Но для целой пары проникновение через барьер очень маловероятно. Поэтому нужно, чтобы электрическое поле расщепило пару, и тогда уже электроны поодиночке пройдут через контакт. Минимальная *энергия на один электрон при этом* равна Δ, и следовательно, при $T=0$ протекание тока начинается лишь когда разность потенциалов между электродами достигнет такого значения U, что $eU=\Delta$. Таким способом измерили Δ.

Можно использовать и туннельный контакт из двух сверхпроводников. Однако в последнем случае возникает и некоторое новое явление. Если диэлектрическая прослойка достаточно тонкая, куперовские пары могут образовываться из электронов, принадлежащих к разным электродам. При этом создается возможность протекания через контакт не просто тока, а сверхпроводящего тока. Это явление было предсказано английским физиком Б. Джозефсоном в 1962 году и после экспериментального подтверждения было названо его именем. Критический ток Джозефсона очень маленький, плотность его не более 10^2—10^3 А/см^2. Эту величину следует сравнить с токами в магнитах — порядка 10^5—10^6 А/см^2 или с «теоретическим пределом» для развала пар в сверхпроводнике — порядка 10^8 А/см^2. Однако эффект Джозефсона получил новое, очень перспективное применение. Дело в том, что величина джозефсоновского критического тока оказалась необыкновенно чувствительной к внешнему магнитному полю. Это позволило создать особые сверхпроводящие устройства — джозефсоновские интерферометры, или сквиды, которые дают возможность измерить магнитные поля до 10^{-14} Тл (магнитное поле Земли $0{,}5\cdot10^{-4}$ Тл), а затем использовать это поле для измерения токов вплоть до 10^{-14} А и разностей потенциалов до 10^{-15} В. Сквиды уже применяются в биологии и медицине, ибо они дают гораздо более точные данные, чем электрокардио- или энцефалографы, и превосходят даже рентгеновские и ЯМР-томографы. Кроме того, джозефсоновские контакты могут быть использованы как для регистрации очень слабых электромагнитных излучений, так и для генерации электромагнитных волн большой частоты. Эффект Джозефсона — это большая область применений сверхпроводимости.

Трудно даже вообразить, сколько разных применений получили бы сверхпроводники, если бы не одно печальное обстоятельство. Все сверхпроводящие устройства, применяемые до сих пор, нуждаются в охлаждении жидким гелием. Стоимость одного литра этого хладагента — 10 рублей, и это очень удорожает использование сверхпроводников. Однако в последнее время появились так называемые сверхпроводящие окислы, или керамики, с критической температурой в районе 95 К. Это уже заметно выше, чем точка кипения жидкого азота (77 К), стоимость которого — 10 копеек за литр. Не исключено, что будут найдены и более высокотемпературные материалы.*)

А теперь я остановлюсь на истории открытия и свойствах таких сверхпроводящих керамик. С 1973 года и до середины 1986 года рекорд максимальной критической температуры принадлежал пленкам из Nb_3Ge, сохранявшим сверхпроводимость вплоть до 23 К. Однако осенью 1986 года появилось сообщение физиков Г. Беднорца и А. Мюллера (Швейцария) об открытии сверхпроводимости соединения La — Ba — Cu — O с критической температурой в районе 30 К. Эти авторы не сразу подошли к своему открытию. Дело в том, что еще до них был известен сверхпроводящий окисел Ba — Pb — Bi — O с критической температурой 14 К. Странным в этом соединении было то, что плотность свободных электронов, переносящих ток, у него была 10^{21} $см^{-3}$, что на порядок меньше, чем у обычных металлов. В то же время, согласно теории Бардина — Купера — Шриффера (БКШ), значение критической температуры растет с увеличением числа свободных электронов. Ясно, что уменьшение числа электронов должно вести к уменьшению $T_{кр}$. А 14 К — это была относительно высокая критическая температура.

---

*) В начале 1988 года стало известно об обнаружении сверхпроводников Bi—Sr—Ca—Cu—O и Tl—Ba—Ca—Cu—O с критической температурой 105—125 К.

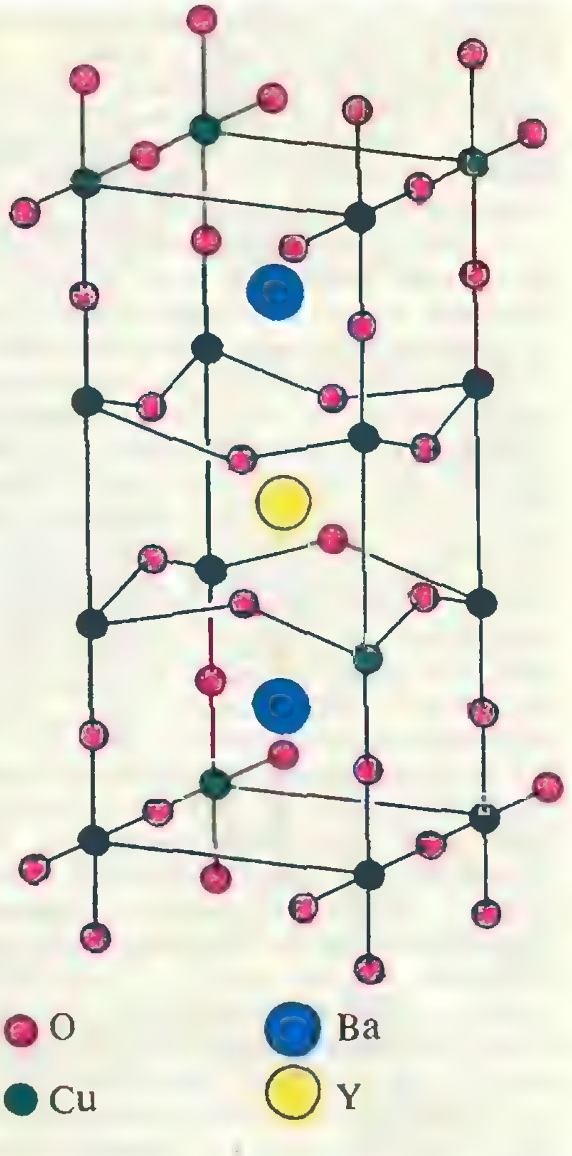
Далее внимание Беднорца и Мюллера привлекли окислы, содержащие медь в состоянии с промежуточной валентностью: часть Cu^{++}, а часть Cu^{+++}. Такие окислы изучались французскими физиками. В качестве элемента структуры в них входил редкоземельный элемент лантан. Если взять соединение La_2CuO_4, то медь в нем только двухвалентная, и это вещество ведет себя как изолятор. Мюллер и Беднорц стали заменять трехвалентный лантан двухвалентными элементами, чтобы отнять часть электронов у меди и тем самым частично перевести медь в трехвалентное состояние. В результате был получен первый высокотемпературный сверхпроводник $La_{2-x}Ba_xCuO_4$, где $x=0{,}1$—0,2. Сначала Беднорцу и Мюллеру никто не поверил, и их статью отказался печатать ведущий американский физический журнал «Physical Review Letters». Тогда они отослали ее в немецкий журнал «Zeitschrift für Physik», где она и вышла осенью 1986 года. Первоначально статья не вызвала интереса. Но потом японские специалисты решили проверить сообщение и убедились, что Мюллер и Беднорц не ошиблись. После этого указанные соединения исследовали американские физики, и с начала 1987 года разразился настоящий «сверхпроводящий бум». Сейчас имеется уже несколько тысяч статей на эту тему. Я не могу рассказать о всех деталях этой гонки, но отмечу основные моменты.

Естественно было попытаться повысить критическую температуру путем замены элементов их химическими аналогами. Замена Ba на Sr привела к $T_{кр}=45$ К. Американская группа из Хьюстона во главе с П. Чу подвергла эти образцы сжатию и обнаружила, что критическая температура быстро растет при сжатии, хотя в обычных сверхпроводниках в подобных условиях $T_{кр}$, как правило, слабо убывает. Тогда они решили попытаться устроить «химическое» сжатие, заменив атомы лантана на атомы иттрия, имеющие меньший размер. В результате было получено соединение с фантастически высокой по тем, еще недавним, временам критической температурой $T_{кр}\sim 93$ К.

Идея о «химическом сжатии» помогла сделать открытие, но в конце концов оказалась неправильной. Очень тщательное исследование показало, что высокотемпературным сверхпроводником является фаза «1 — 2 — 3»: $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, где x меньше единицы. Последующие попытки замены Y другими элементами показали, что сверхпроводимость с $T_{кр}\sim 90$ К наблюдается у соединений со структурой «1 — 2 — 3», где вместо иттрия может стоять осмий и почти все редкие земли, включая лантан.

Теперь я расскажу о некоторых особенностях этих соединений и о попытках теоретического объяснения высоких $T_{кр}$. Прежде всего — о структуре. В обоих типических соединениях La — Ba — Cu — O и Y — Ba — Cu — O она соответствует так называемым слоистым перовскитам. Характерной их особенностью является слоистость (периоды по двум направлениям порядка 2,8 А, а по третьему 12 А). В медных «слоях» каждый атом меди окружен октаэдром атомов кислорода. Расчеты показывают, что основная проводимость происходит по слоям медь — кислород в результате перекрытия *d*-оболочек меди с *p*-оболочками кислорода. Атомы редкой земли роли, по-видимому, не играют: «свободные» электроны туда просто не заходят. Далее, оба вещества имеют в принципе две модификации: тетрагональную и орторомбическую. В первой элементарная ячейка имеет вид правильной четырехгранной призмы, а во второй — прямоугольного параллелепипеда с произвольными длинами ребер. Но отличие от тетрагональности небольшое. Интересно отметить, что чистый La_2CuO_4 при низких температурах является орторомбическим, но добавление Ba подавляет этот переход, и вещество остается тетрагональным. Наоборот, иттриевое соединение 1 — 2 — 3 при низких температурах является орторомбическим. В принципе его можно получить и в тетрагональной модификации, изгнав из него часть кислорода путем нагрева, но эта модификация — не сверхпроводник.

Что касается поведения в магнитном поле, то новые вещества являются экстремальными сверхпроводниками второго рода, ибо нижнее поле $B_{кр. 1}$ в них порядка 10^{-2} Тл, а верхнее $B_{кр. 2}$ при низких температурах оценивается как 10^2 Тл. Надо заметить, что эти вещества хрупкие, и не так просто сделать из них проволоку для сверхпроводящего магнита. Другим отрицательным свойством является то, что критическая плотность тока в них порядка 10^2—10^3 А/см^2. Более того, это значение очень быстро падает при помещении веществ во внешнее магнитное поле. Согласно последним исследованиям, это связано с тем, что новые вещества состоят из сверхпроводящих зерен, разделенных изолирующими прослойками. Через эти прослойки возможен небольшой джозефсоновский ток, который легко подавляется магнитным полем. Правда, в пленках, состоящих из ориентированных кристаллитов, получена критическая плотность тока до 10^6 А/см^2 при температуре кипения жидкого азота ($T=77$ К), но пленки не могут служить обмотками для сверхпроводящих магнитов. В настоящее время усилия многих лабораторий мира сосредоточены на попытках получить монокристаллы новых сверхпроводников. Удалось сделать пластинки со стороной до 1 см и толщиной до 3 мм. Исследование таких образцов подтверждает, что это вещества слоистые: сопротивление поперек слоев в десятки раз превышает сопротивление вдоль них. Кстати, отмечу, что в нормальном состоянии это плохие



Структура кристаллической решетки соединения Y—Ba—Cu—O.

проводники: удельное сопротивление раз в 100 больше, чем у меди.

Что касается теоретических объяснений, то здесь больше вопросов, чем ответов. Например, по теории Бардина — Купера — Шриффера получается соотношение $2\Delta(0)/T_{кр}=3{,}5$. Для новых сверхпроводников разные измерения дают для этой величины значения от 3 до 12. Далее, эти вещества обладают целым рядом специфических особенностей, но не очень ясно, какие именно из них имеют принципиальное значение. Например, какую роль играет слоистость кристаллов, существенны ли атомы лантана или иттрия в механизме сверхпроводимости или они играют роль просто механической фермы, которая скрепляет кристаллическую решетку? Какова роль кислорода? Известно, что в иттриевом соединении есть слои, состоящие из цепочек Cu — O — Cu — O, а есть плоскости, в которых на атом меди приходится по два атома кислорода. При удалении кислорода он прежде всего уходит из цепочек, и вещество теряет сверхпроводимость. Но в лантановом соединении таких цепочек нет.

Итак, не очень понятно, за что зацепиться. Экспериментально установлено, что и в новых сверхпроводниках электроны объединены в куперовские пары. Но каков механизм притяжения? Механизм передачи фононов — квантов колебаний решетки — влечет за собой изотопический эффект, т. е. изменение $T_{кр}$ с переходом к другому изотопу. Были сделаны измерения на образцах с заменой изотопа O^{16} на O^{18}. У лантанового соединения эффект наблюдался, хотя и меньше, чем предсказывала теория БКШ. Но у иттриевого 90-градусного сверхпроводника, так же как и у такого же вещества с европием вместо иттрия, этого эффекта практически нет. Отсюда делается вывод, что помимо давно известного фононного существует другой механизм передачи взаимодействия между электронами. В принципе, в веществе могут существовать квазичастицы и иных типов — например, связанные с возбуждением электронов, удаленных от проводящих слоев. Они называются плазмонами. Есть и другая идея: вещество может находиться близко к переходу в магнитоупорядоченное состояние. В этом состоянии есть свои квазичастицы — магноны. Но даже если нет настоящего упорядочения, то оно может возникать в виде флуктуации и создавать взаимодействие электронов. Появились теории, использующие это обстоятельство.

Я не могу перечислить всех теорий — их очень много. Отмечу еще только очень интересную концепцию двухэлектронных центров. Известно, что кислород очень легко уходит из новых сверхпроводников, в то время как в обычных окислах он связан очень прочно. Есть концепция, согласно которой два электрона могут сразу уйти с атомов кислорода на медь; это делает кислород нейтральным и тем самым облегчает его выход из решетки. А то обстоятельство, что электроны находятся то в коллективизированном металлическом состоянии, то оказываются попарно локализированными на кислороде, приводит к их притяжению.

Итак, сейчас наступило время исследований и поисков как механизма высокотемпературной сверхпроводимости, так и способов практического применения новых сверхпроводящих материалов. Исследования ведутся очень большими силами, и не исключено, что они увенчаются успехом. Однако одно важное дело открытие высокотемпературных сверхпроводников уже сделало: оно уничтожило многолетний предрассудок, что сверхпроводимость обязательно требует низких температур. Это окрыляет людей на дальнейшие поиски, и даже в том случае, если не удастся «приручить» обнаруженные сверхпроводящие керамики, обязательно будут найдены другие классы сверхпроводников с более высокими $T_{кр}$ и более пригодные для практического использования.

Музыкальные пульсары

Среди известных сегодня пульсаров — быстровращающихся нейтронных звезд, блеск которых периодически изменяется, можно выделить пять особых. Периоды их вращения, а значит, и периоды повторения импульсов излучения измеряются несколькими миллисекундами. Это так называемые миллисекундные пульсары*); последний из них открыт совсем недавно — в прошлом году.

Чем же интересна эта группа пульсаров?

Основные характеристики миллисекундных пульсаров можно свести в таблицу:

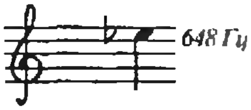
координаты α δ	период (мс) p	увеличение периода за секунду p
1855+64	5,362	$0{,}16\cdot10^{-18}$
1913+16	5,903	$8{,}63\cdot10^{-18}$
1937+21	1,558	$0{,}105\cdot10^{-18}$
1953+29	6,133	$0{,}03\cdot10^{-18}$
1821−24	3,054	$<1\cdot10^{-18}$

Координаты пульсаров записаны в обычной, принятой в астрономии, форме. Так, запись 1855+64 означает, что у данного пульсара прямое восхождение составляет 18 ч 55 мин, а склонение равно 64° северной широты.

Числа в последнем столбце указывают, на сколько изменяются периоды пульсаров в течение одной секунды (p' — производная от p по времени). Увеличение периода пульсара связано с медленным затуханием его вращения из-за потерь энергии на излучение (механизм превращения кинетической энергии нейтронной звезды в энергию электромагнитного излучения пока еще до конца не выяснен). Зависимость периода от времени выражается формулой

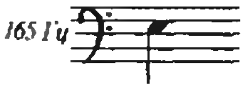
$$p(t)=p_0+p't,$$

где p_0 — величина периода в некоторый начальный момент времени. Интересно, что если бы миллисекундный пульсар был один, написать такую формулу было бы невозможно — нет часов, которые позволили бы ее проверить с достаточной точностью. Но поскольку таких пульсаров пять, они как бы проверяют друг друга. Можно сказать, что по миру «развешаны» часы, очень точно отсчитывающие время. Сейчас серьезно обсуждается вопрос о замене атомного эталона времени астрономическим, связанным с миллисекундными пульсарами. Это одна из причин проявления интереса к миллисекундным пульсарам.



Пульсар 1937+21 «поет» ми-бемоль второй октавы.

Есть и еще одна интересная особенность. Оказывается, частоты миллисекундных пульсаров по порядку величины такие же, как и частоты, соответствующие музыкальным звукам в пределах клавиатуры рояля. Основным тоном музыкальной настройки считается тон «ля» первой октавы, частота которого равна 440 Гц. Тогда третьему пульсару из нашей таблицы, имеющему частоту 642 Гц, отвечает «ми-бемоль» второй октавы, а четвертому пульсару с частотой 163 Гц отвечает «ми» малой октавы. Пульсары, как идеальные камертоны, «поют» очень чисто.



Пульсар 1953+29 «поет» ми малой октавы.

Когда-то Иоганн Кеплер видел в мироздании гармонию мира и говорил о планетах Солнечной системы как об оркестре, играющем (правда, неслышно для человека) мировую симфонию. Можно сказать, что сейчас фантазия Кеплера «реализовалась» в пульсарах — пять из них непрерывно звучат неожиданным аккордом (правда, слишком слабым для нашего уха).

Я. С.

---

*) См. статьи «Самый быстрый пульсар» («Квант», 1983, № 12) и «Миллисекундные пульсары» («Квант», 1985, № 2).

Мы имеем троякого рода величины.
рациональные,
алгебраические,
трансцендентные

Г. Лейбниц

ЧИСЛА И ФУНКЦИИ

Кандидат физико-математических наук ***А. С. ЯРСКИЙ***

«Алгебраическое число», «алгебраическая функция», «алгебраическое уравнение», «алгебраическая кривая»... Среди почти необозримого множества ответвлений современной математики не существует, пожалуй, такого, где не подвергалась бы отдельному изучению алгебраическая сторона рассматриваемого математического объекта. Нередко говорят даже о своего рода «алгебраической экспансии» в математике.

Множество чисел и множество функций наделены единой алгебраической классификацией: «рациональные», «алгебраические», «трансцендентные». Для чисел эта классификация начала складываться еще в XVII веке (хотя лишь в 1844 году появилось первое принадлежащее Ж. Лиувиллю доказательство трансцендентности определенного множества чисел) и постепенно переносилась на все более широкое множество математических объектов.

Общность указанной классификации дает возможность, в частности, с единой точки зрения взглянуть на некоторые свойства функций и чисел, яснее увидеть их сходство и тем самым глубже осознать их отличие.

§ 1. Целые числа и функции

Рассмотрим два множества — множество Z целых чисел и множество $R[x]$ многочленов от одной переменной x с коэффициентами в множестве R действительных чисел. На первый взгляд, эти два множества отличаются решительно всем: элементы Z — числа, а элементы $R[x]$ — функции, все элементы Z можно расположить в виде последовательности $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$, а с элементами $R[x]$ такую операцию проделать не удается — их «слишком много» для этого... Итак, увидеть разницу между Z и $R[x]$ легко. Труднее обнаружить те свойства, которые делают эти два множества похожими, открыть ту аналогию, которая даст основание «называть разные вещи одинаковыми именами» (чем, по словам А. Пуанкаре, и занимается математика).

1. Сумма, разность, произведение целых чисел (многочленов) есть целое число (многочлен).

2. Любое целое число (многочлен) можно разделить с остатком на ненулевое целое число (ненулевой многочлен).

Рассмотрим второе свойство — делимость. Алгоритм деления многочленов с остатком — деления «уголком» — очень похож на деление «уголком» целых чисел. Например:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^3+2x^2-x-1 & x+3 \\ \cline{3-3}
 & x^3+3x^2 & x^2-x+2 \\ \cline{2-2}
- & -x^2-x-1 & \\
 & -x^2-3x & \\ \cline{2-2}
- & 2x-1 & \\
 & 2x+6 & \\ \cline{2-2}
 & -7 &
\end{array}
$$

Отсюда

$$x^3+2x^2-x-1=(x^2-x+2)(x+3)-7.$$

В общем случае, если $P, Q \in R[x]$ и Q — ненулевой многочлен, найдутся такие $P_1, R \in R[x]$, что

$$P=P_1Q+R,$$

причем степень остатка R строго меньше степени делителя Q. Частное P_1 и остаток R однозначно определяются выбором делимого P и делителя Q.

Напомним несколько определений. *Наибольшим общим делителем* (НОД) многочленов P и Q называется многочлен D, делящий P и Q и делящийся на любой другой их общий делитель.*) Обозначим НОД P и Q символом (P, Q).

---

*) На самом деле мы определили НОД лишь с точностью до постоянного множителя.

Многочлены P и Q называются *взаимно простыми*, если они не имеют отличных от константы общих делителей. НОД взаимно простых многочленов считается равным единице: $(P, Q)=1$.

Многочлен P степени n называется *неприводимым*, если он не имеет делителей положительной степени $k<n$. В частности, любой многочлен степени $n=1$ неприводим.

Установим вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть $D=(P, Q)$. Существуют $A, B\in\mathbf{R}[x]$ такие, что

$$D=AP+BQ.$$

Доказательство. Рассмотрим множество H, состоящее из всевозможных многочленов вида $AP+BQ$, где $A, B\in\mathbf{R}[x]$. Выберем в H ненулевой многочлен D наименьшей степени. Тогда, по определению H,

$$D=AP+BQ \qquad (1)$$

при некоторых $A, B\in\mathbf{R}[x]$. Разделим P на D с остатком:

$$P=P_1D+R,$$

где R — многочлен, степень которого строго меньше степени D. Тогда $R=P-P_1D=P-P_1(AP+BQ)=(1-P_1A)P+(-P_1B)Q=A_1P+B_1Q\in H$. Среди ненулевых многочленов из H степень D минимальна. Но $R\in H$ и степень R меньше степени D. Следовательно, $R=0$ и $P\vdots D$. Аналогично доказывается, что $Q\vdots D$. Таким образом, D — общий делитель P и Q. Пусть D_1 — любой другой общий делитель P и Q. Тогда $AP\vdots D_1$ и $BQ\vdots D_1$. Отсюда $(AP+BQ)\vdots D_1$. Из (1) следует теперь, что $D\vdots D_1$. Тем самым D — НОД многочленов P и Q. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть $PQ\vdots R$ и $(P, R)=1$. Тогда $Q\vdots R$ $(P, Q, R\in\mathbf{R}[x])$.

Доказательство. Поскольку $(P, R)=1$, то, по лемме 1, существуют $A, B\in\mathbf{R}[x]$ такие, что $AP+BR=1$. Умножим это равенство на Q: $A(PQ)+(BQ)R=Q$. По условию $PQ\vdots R$. Следовательно, $(APQ+BQR)\vdots R$, откуда $Q\vdots R$.

Теорема 2. Пусть $P_1P_2\ldots P_k\vdots R$, где R — неприводимый многочлен. Тогда хотя бы один из сомножителей $P_i\vdots R$. В частности, если $P^n\vdots R$, то $P\vdots R$.

Доказательство легко получается по индукции, базу которой (при $k=2$) и индуктивный шаг обеспечивает теорема 1.

Следствие 1. $(P^n, Q^k)=1$ тогда и только тогда, когда $(P, Q)=1$ (n и k — целые положительные числа).

Следствие 2. Любой многочлен разлагается на неприводимые множители, причем — с точностью до порядка и постоянных множителей — единственным способом.

Для целых чисел все доказанные факты останутся в силе — хочется в особенности это подчеркнуть!

Упражнение 1. а) Сформулируйте и докажите аналоги леммы 1 и теорем 1 и 2 для целых чисел.

б) Докажите «основную теорему арифметики»: любое целое число обладает единственным с точностью до порядка разложением на простые множители.

В процессе работы над упражнением 1 нельзя не заметить, что рассматриваемые утверждения о целых числах получаются из аналогичных утверждений о многочленах почти автоматически — заменой слова «многочлен» словами «целое число». Таким образом, не только факты, но и доказательства этих фактов подчеркивают сходство свойств $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}[x]$. Как следствие, возникает мысль: ввести в рассмотрение объект, обладающий по определению теми и только теми свойствами, которые использовались в проведенных рассуждениях. Для такого объекта все доказанные утверждения, естественно, останутся в силе. А изученные ранее множества целых чисел $\mathbf{Z}$ и многочленов $\mathbf{R}[x]$ превратятся в частные случаи, конкретные примеры рассматриваемого общего объекта.

С этой — вполне современной — точки зрения, все рассказанное можно описать одним предложением: множества $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}[x]$ являются частными случаями одной алгебраической структуры — евклидова кольца.

§ 2. Рациональные числа и функции

Определение 1. Число y называется *рациональным*, если оно представимо в виде отношения целых чисел:

$$y=p/q,\quad p,q\in Z,\quad q\neq 0.$$

Как видно из определения, каждое рациональное число определяется парой целых чисел p и q.

Определение 2. Рациональные числа p/q и p_1/q_1 называются *равными*, если $pq_1=qp_1$, $(p,p_1,q,q_1\in Z$, $q\neq 0$, $q_1\neq 0)$.

Таким образом, разные пары p/q и p_1/q_1 могут определять одно и то же рациональное число.

Из определения 2 непосредственно вытекает, в частности, известное правило сокращения дробей:

$$\frac{pr}{qr}=\frac{p}{q},\quad qr\neq 0.$$

Для рациональных функций определения вполне аналогичны определениям 1 и 2.

Определение 3. Функция $y=f(x)$ называется *рациональной*, если она представима в виде отношения многочленов:

$$y=P/Q,\quad P,Q\in R[x].$$

Множество всех рациональных функций обозначается символом $R(x)$.

Упражнение 2. Пусть $f,g\in R(x)$. Докажите, что $f\pm g, f\cdot g, f(g(x))\in R(x)$.

Определение 4. Рациональные функции P/Q и P_1/Q_1 называются *равными*, если $PQ_1=QP_1 (P,P_1,Q,Q_1\in R[x])$.

Приведенные определения для рациональных чисел и рациональных функций в такой степени аналогичны, что возникает желание использовать эту аналогию для создания единого, пригодного в обоих случаях определения. В современной алгебре обобщением перехода от целых чисел (многочленов) к рациональным числам (рациональным функциям) является понятие перехода от произвольного евклидова кольца к его «полю частных».

По сравнению с множеством целых чисел, множество рациональных чисел довольно обширно и для многих нужд рациональных чисел вполне достаточно. Однако еще древние греки обнаружили, что множество рациональных чисел не исчерпывает множества всех необходимых чисел. Например, диагональ единичного квадрата, равная $\sqrt{2}$, не является рациональным числом. Итак, помимо рациональных чисел существует множество чисел, не являющихся рациональными — иррациональных чисел. Естественно ввести аналогичное определение и для функций.

Определение 5. Функцию y будем называть *иррациональной*, если она не является рациональной: $y\notin R(x)$.

Упражнение 3. а) Пусть $f\in R(x)$, $g\notin R(x)$. Докажите, что $f\pm g\notin R(x)$, а при $f\neq 0$ $fg\notin R(x)$ и $f/g\notin R(x)$.

б) Докажите иррациональность функции, график которой изображен на рисунке 1.

Довольно часто понятие «иррациональность» связывают с наличием в записи функции радикалов. Как будет ясно из дальнейшего, такое представление справедливо лишь отчасти.

Теорема 3. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ при целом $n\geqslant 2$ иррациональна.

Доказательство. Рассматриваемая функция удовлетворяет уравнению

$$y^n-x=0. \qquad (2)$$

Достаточно доказать, что это уравнение не имеет рациональных решений $y\in R(x)$. Пусть, от противного, $y=P/Q$, $P,Q\in R[x]$ — решение уравнения (2). Тогда

$$P^n=xQ^n,\ P\neq 0,\ Q\neq 0. \qquad (3)$$

Равенство (3) не нарушится, если обе его части сократить на любой общий делитель P и Q. Следова-

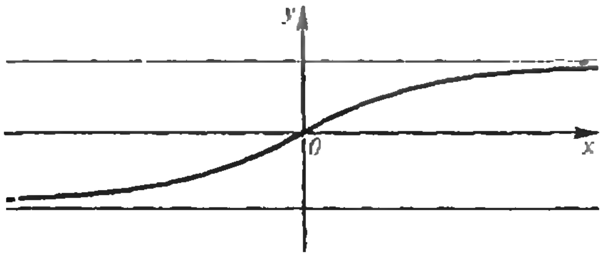


Рис. 1.

тельно, можно считать P и Q взаимно простыми: $(P, Q)=1$.

Правая, а значит, и левая часть равенства (3) делится на x: $P^n \vdots x$. И поскольку x — неприводимый многочлен, получаем, что и $P \vdots x$ (Теорема 2), т. е.

$$P=xP_1,\ P_1 \in R[x].$$

Подставив полученное в (3) и сократив на x, получим

$$x^{n-1}P_1^n=Q^n.$$

По условию $n-1 \geqslant 1$. Поэтому левая часть последнего равенства делится на x. Отсюда $Q^n \vdots x$ и, в силу неприводимости x, $Q \vdots x$. Итак, $P \vdots x$ и $Q \vdots x$ — вопреки условию $(P, Q)=1$. Теорема доказана.

Упражнение 4. Докажите иррациональность числа $y=\sqrt[n]{2}$ при целом $n \geqslant 2$ (и сравните проведенное доказательство с доказательством теоремы 3).

Избранный нами способ доказательства теоремы 3 удается применить и в более общей ситуации. Уравнение (2), которому удовлетворяет функция $y=\sqrt[n]{x}$, является частным случаем алгебраического уравнения

$$p_0y^n+p_1y^{n-1}+\ldots+p_{n-1}y+p_n=0,\quad p_0 \neq 0, \tag{4}$$

где все $p_0, p_1, \ldots, p_n \in R[x]$. Существует универсальный способ отыскания всех рациональных решений таких уравнений.

Лемма 2. Пусть $y=P/Q$, $P, Q \in R[x]$ — рациональное решение уравнения (4), причем дробь P/Q несократима: $(P, Q)=1$. Тогда $p_n \vdots P$ и $p_0 \vdots Q$.

Иными словами, числитель и знаменатель искомого решения нужно выбирать только среди делителей, соответственно, свободного члена p_n уравнения и его коэффициента p_0 при старшей степени.

Доказательство. Подставив $y=P/Q$ в (4) и домножив на Q^n, получим

$$p_0P^n+p_1P^{n-1}Q+\ldots+p_{n-1}PQ^{n-1}+ +p_nQ^n=0.$$

Все слагаемые, кроме последнего, содержат множитель p. Следовательно, $p_nQ^n \vdots P$, так как $(P, Q)=1$, то и $(P, Q^n)=1$ (Следствие 1). Следовательно, $p_n \vdots P$ (Теорема 1). Аналогично доказывается, что $p_0 \vdots Q$. Лемма доказана.

Пример. Опираясь на лемму 2, можно установить иррациональность всех решений уравнения

$$x^2y^3+(2x-1)y-1=0.$$

Положив $y=P/Q$, $P, Q \in R[x]$, $(R, Q)=1$, получим условие: $1 \vdots P$ и $x^2 \vdots Q$. Следовательно, возможны только три варианта:

$$y=C,\ y=C/x,\ y=C/x^2,\ C \in R.$$

Поочередно подставляя эти выражения в уравнение, легко убедиться, что ни одно из них не является решением уравнения, чем и завершается доказательство иррациональности всех его решений.

Упражнение 5. а) Найдите решения $y \in R(x)$ уравнений

$$y^3+y^2+(3x-2)y+x^3-x^2=0;$$
$$xy^3-(x+8)y^2+(x+2)y-2=0;$$

и разложите левые части уравнений на множители.

б) Докажите иррациональность решений уравнений

$$xy^3-2xy^2+y-1=0;\quad y^2+x^2-1=0.$$

в) Пусть $P \in R[x]$ — неприводимый многочлен положительной степени. Тогда $y=\sqrt[n]{P}$ при целом $n \geqslant 2$ — иррациональная функция.

г) Докажите иррациональность функций $y=\sqrt{1-x^3}$, $y=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

Ситуация, аналогичная описанной в условии леммы 2, возникает и для чисел, что отражает следующее

Упражнение 6. а) Пусть несократимая дробь $y=p/q$, $p, q \in Z$ является корнем уравнения (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n \in Z$. Тогда $p_n \vdots p$ и $p_0 \vdots q$.

б) Докажите иррациональность корней уравнения

$$2y^3+3y^2-y-1=0.$$

в) Докажите иррациональность числа $\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}$.

Упражнение 7. Докажите:

а) Функция $y=\sqrt[n]{1+x^n}$ иррациональна.

б) Функции, графики которых изображены на рисунках 2—4, иррациональны.

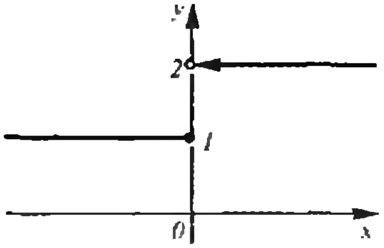


Рис. 2.

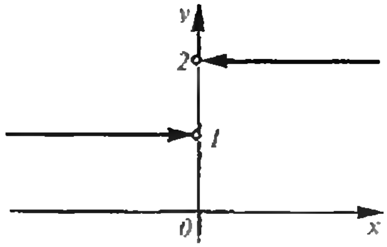


Рис. 3.

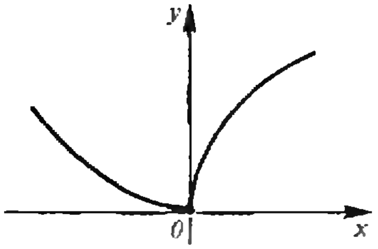


Рис. 4.

в) Отличная от константы периодическая функция иррациональна.

Уже не один раз мы наблюдали аналогию мира чисел и мира функций. В такой ситуации можно подсознательно подменить одно-единственное слово: вместо «аналогично» сказать «следовательно»! Точнее, может возникнуть мысль, не следует ли из иррациональности $\sqrt[n]{x}$ иррациональность $\sqrt[n]{2}$, то есть значения этой функции при $x=2$?

Ответ на этот вопрос отрицателен! Рассмотрим, к примеру, знаменитое равенство

$$a^n+b^n=c^n,\ n\geqslant 3,\ a,\ b,\ c\neq 0. \qquad (5)$$

Разделив обе части на a^n и положив $x=b/a$, $y=c/a$, приведем это равенство к виду $1+x^n=y^n$ или

$$y=\sqrt[n]{1+x^n}.$$

Если бы из иррациональности этой функции (см. упражнение 7а) следовала иррациональность ее значений, мы получили бы, что при $x\in \mathbf{Q}$ значение функции y — число иррациональное, и тем самым исходное равенство (5) при целых a, b, c невозможно!..

Кроме того, при $n=2$ функция $y=\sqrt[n]{1+x^n}$ остается иррациональной, но принимает рациональные значения при любом $x=2pq/(p^2-q^2)$, $p, q\in \mathbf{Z}$, $p\neq\pm q$ (проверьте это самостоятельно).

Упражнение 8. Пусть $a=a(x)$, $b=b(x)$ и $c=c(x)$ — попарно взаимно простые многочлены положительных степеней. Докажите, что при таких a, b и c равенство (5) невозможно.

§ 3. Трансцендентность

Определение 6. Число $y\in \mathbf{R}$ называется *алгебраическим*, если оно является корнем алгебраического уравнения (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in \mathbf{Z}$.

Всякое рациональное число $y=p/q$, $q\neq 0$ удовлетворяет уравнению вида (4)

$$qy-p=0.$$

Тем самым любое рациональное число является алгебраическим. Но множество алгебраических чисел шире множества рациональных. Например, число $y=\sqrt[n]{2}$, $n\geqslant 2$ не является рациональным (упражнение 4), но при этом удовлетворяет уравнению $y^n-2=0$ и тем самым является числом алгебраическим.

Упражнение 9. Докажите:

а) Если $y\neq 0$ — алгебраическое число, то и $1/y$ — алгебраическое число.

б) Если y — алгебраическое, а r — рациональное число, то $y+r$ и yr — алгебраические числа.

Определение 7. Число y называется *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим.

Как и выше, сделаем попытку распространить определение алгебраичности (или трансцендентности) с чисел на функции. Представляется вполне естественным назвать алгебраической функцию $y=y(x)$, удовлетворяющую алгебраическому уравнению (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in \mathbf{R}[x]$, то есть в очередной раз заменить в уже имеющейся конструкции целые числа $p_0, p_1, \ldots, p_n$ многочленами. Действительно, именно такое определение алгебраической функции было изначально общепринятым (да и в современных изданиях упомянутое определение — не редкость). Но в результате развития теории алгебраических функций такими замечательными математиками, как Н. Х. Абель, Б. Риман, К. Вейерштрасс, стало ясно, что из всех удовлетворяющих алгебраическим уравнениям функций следует оставить в рассмотрении лишь более узкий класс — так называемые «аналитические» функции. Тем самым требование аналитичности функции вошло неотъемлемой составной частью в понятие алгебраической функции.

Следует отметить, что почти все изучаемые в школе функции являются на самом деле аналитическими и для таких «школьных» функций первоначальный вариант определения алгебраической функции вполне достаточен. Например, функция $y=\sqrt[3]{x}$ является алгебраической с точки зрения любого из упоминавшихся двух определений.

Чтобы избежать неясности, мы будем говорить лишь о «функциях, удовлетворяющих алгебраическим уравнениям», избегая термина «алгебраическая функция».

Упражнение 10. Пусть функция f — решение алгебраического уравнения, а $g\in R(x)$. Докажите, что $f+g$, fg и $f(g(x))$ являются решениями алгебраических уравнений.

Что же касается функций, не являющихся решениями алгебраических уравнений, то к ним обычно дополнительных требований типа «аналитичности» не предъявляется, что дает нам право (сохранив аналогию с определением трансцендентного числа) ввести заключительное

Определение 8. Функцию $y=f(x)$ будем называть *трансцендентной*, если она не является решением никакого алгебраического уравнения (4) с коэффициентами $p_0, p_1, \ldots, p_n\in R[x]$.

Трансцендентная функция является, в силу сказанного выше, иррациональной. Тем самым, доказав трансцендентность некоторой функции, мы одновременно установим ее иррациональность.

До сих пор наши утверждения о функциях находили аналоги для чисел. Это наводит на мысль, что и доказательства трансцендентности функций и чисел должны быть в значительной мере аналогичными. Увы, формальное сходство определений в данном случае не влечет за собой аналогии свойств. Например, найденное в 1873 г. Ш. Эрмитом и требующее тонких рассуждений доказательство трансцендентности числа e ничем не напоминает относительно простое доказательство трансцендентности функции e^x.

Теорема 4. Функция $y=e^x$ трансцендентна.

Доказательство. Пусть, от противного, функция $y=e^x$ удовлетворяет алгебраическому уравнению. Рассмотрим уравнение (4) наименьшей степени $n\geqslant 1$, решением которого является y:

$$p_0e^{nx}+p_1e^{(n-1)x}+\ldots+p_{n-1}e^x+p_n=0,\quad p_0\neq 0, \tag{6}$$

$p_0, p_1, \ldots, p_n\in R[x]$. Если $p_n=0$, то равенство (6) можно сократить на e^x, получив для y — вопреки минимальности n — уравнение меньшей степени. Следовательно, p_n — ненулевой многочлен. Разделив (6) на p_n, получим

$$r_0e^{nx}+r_1e^{(n-1)x}+\ldots+r_{n-1}e^x+1=0,\quad r_0\neq 0, \tag{7}$$

где $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ — рациональные функции. Продифференцируем равенство (7):

$$(r_0'+nr_0)e^{nx}+(r_1'+(n-1)r_1)e^{(n-1)x}+\ldots$$
$$\ldots+(r_{n-1}'+r_{n-1})e^x=0.$$

Сократив полученное соотношение на e^x, получим уравнение степени $n-1$, корнем которого по-прежнему является $y=e^x$. В силу минимальности n, все коэффициенты этого уравнения обязаны быть нулевыми. В частности,

$$r_0'+nr_0=0,\quad r_0\neq 0. \tag{8}$$

Докажем, что при $r_0\in R(x)$ равенство (8) невозможно. Пусть

$$r_0=P/Q,\quad P, Q\in R[x],\quad (P, Q)=1.$$

Подставив последнее выражение в (8) и домножив на Q^2, получим

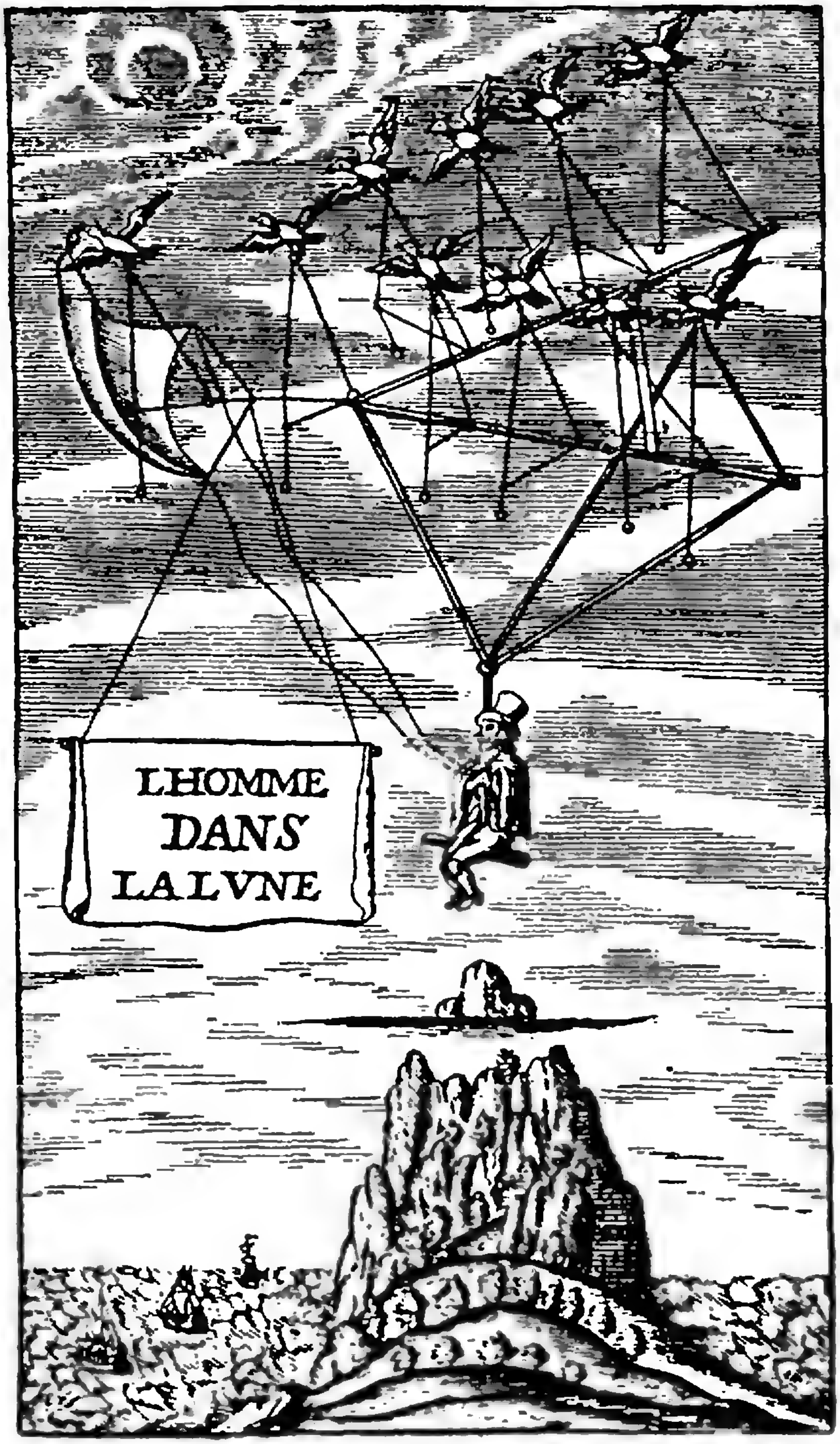
$$P'Q-PQ'+nPQ=0. \tag{9}$$

Многочлены $P'Q$ и nPQ делятся на Q.

(Окончание см. на с. 24)

ДАВЛЕНИЕ СВЕТА

С. В. ГРЫЗЛОВ



Средневековые ученые, наблюдавшие за движением комет, пытались понять, почему в зависимости от положения комет относительно Солнца формы их хвостов изменяются. В 1604 году Иоганн Кеплер предположил, что форма хвостов комет определяется действием светового давления. С тех пор многие исследователи пытались измерить это давление (среди них был и один из создателей волновой теории света О. Френель). Но все эксперименты были безрезультатны. И почти 300 лет световое давление оставалось лишь гипотезой.

Эта гравюра — фронтиспис французского издания 1648 года книги Ф. Годвина «Человек на Луне». Может быть, художник считал, что в небе Луны подобный летательный аппарат будет двигаться за счет давления солнечного света?

В 1865 году Дж. К. Максвелл создал электромагнитную теорию света. Согласно этой теории световые волны имеют электромагнитную природу, т. е. световые явления можно рассматривать как частный случай электромагнитных явлений. Из основных уравнений теории Максвелла как абсолютно точный факт следовало существование светового давления. Максвелл вычислил это давление. По расчетам получалось, что в солнечный полдень на поверхности, полностью отражающей световые лучи, создается давление, равное всего $4{,}7\times10^{-6}$ Н/м^2.

Долгое время ученые спорили о правильности уравнений Максвелла. Вновь предпринимались попытки обнаружить эффект светового давления. И вновь — безуспешно.

Трудность в измерениях давления света заключалась не только и не столько в том, что сила давления света очень мала. Главные осложнения происходили из-за того, что экспериментаторам мешал... сам свет. Причем создаваемые им помехи по «эффективности» во много раз превосходили давление света.

В 1899 году замечательный русский физик Петр Николаевич Лебедев впервые измерил давление света. Ему удалось блестяще справиться с трудностями, которые мешали другим исследователям.

Основной частью прибора Лебедева были плоские легчайшие крылышки из различных (в основном) металлических материалов. Поверхность одних крылышек была зачерненной, а других — зеркальной. От зеркальной поверхности свет практически полностью отражался, а зачерненная поверхность поглощала свет. В результате сила давления света на зеркальные крылышки оказывалась почти вдвое больше, чем сила давления на зачерненные. За счет этого возникал вращающий момент сил, система крылышек начинала поворачиваться, закручивая нить. По углу закручивания нити оценивалось давление света.

Какие же помехи возникали при измерениях?

Первая заключалась в том, что свет, падая на крылышки, нагревал и окружающий воздух. Возникающие конвекционные потоки воздуха, подобно ветру, приводили в движение крылышки. И когда ученый проводил измерения, неизвестно было, от чего перемещались крылышки — то ли от светового давления, то ли от потоков воздуха.

Это была не единственная помеха. Под действием света возникает еще один эффект, который получил название радиометрического. Суть его в том, что разные стороны крылышка нагревались по-разному (ведь свет падает только с одной стороны) и отдавали разное количество энергии соприкасающимся с ними молекулам воздуха. Ту сторону, где эта энергия больше (более теплая сторона), молекулы покидали с большей скоростью, т. е. с бо́льшим импульсом. А по закону сохранения импульса, улетая, они с большей силой отталкивают крылышко, чем молекулы противоположной «холодной» стороны. Оказалось, что радиометрические силы действуют в том же направлении, что и давление света, а величина их, как уже говорилось, на несколько порядков превосходит величину светового давления.

Чтобы свести эти «вредные» силы к минимуму, прежде всего потребовалось создать вакуум. Чем меньше молекул остается в сосуде, тем слабее помехи.

Неспроста Лебедев выбрал в качестве материала крылышек тонкие металлические пленки. Во-первых, такие пленки прекрасно проводили тепло, и перепад температур на разных сторонах крылышек становился меньше — уменьшался и радиометрический эффект. Кроме того, их маленькая масса определяла небольшой момент инерции всей подвижной системы, что в условиях вакуума также позволяло увеличить точность эксперимента.

Много еще различных устройств и приспособлений придумал П. Н. Лебедев. Перебрал много вариантов условий опыта и испытал различные схемы измерений, пока его труд не привел наконец к успеху.

В результате своих экспериментов он измерил давление света; полученное им значение с точностью 20 % совпадало со значением, предсказанным теорией Максвелла. Лебедев показал, что световой поток обладает не только энергией, но и импульсом.

Долгое время использовать световое давление не представлялось возможным из-за его небольшой мощности. Только появление лазеров — устройств, способных концентрировать световую энергию в очень узкий и мощный пучок,— позволило применить открытие Лебедева.

Например, можно удерживать маленькие частицы в воздухе, уравновешивая силу тяжести силой светового давления, и перемещать их. Под действием силы светового давления частицы, имеющие разные массы, разгоняются по-разному. Следовательно, можно с помощью специальных ловушек сортировать очень маленькие частицы.

Световое давление можно использовать для разделения смеси двух газов. Такое разделение может быть реализовано в случае, если частота лазерного излучения (которым облучают смесь) совпадает с частотой перехода атомов одного из газов из невозбужденного состояния в возбужденное. Поглощая фотон, атом такого газа получает импульс по направлению лазерного пучка. При обратном переходе атома из возбужденного состояния в невозбужденное вектор импульса испускаемого фотона имеет произвольное направление. При последующих поглощениях и испусканиях импульсы «испускания» взаимно гасятся, а импульсы «поглощения» суммируются, и в конечном итоге резонансный атом получает общий импульс, направленный вдоль луча лазера. Таким образом, луч лазера, проходя последовательно через две камеры, в первой из которых находится смесь газов, увлекает за собой во вторую камеру атомы одного из них.

Световое давление можно использовать и для ускорения частиц в вакууме (в воздухе слишком велико сопротивление). Этим можно воспользоваться, например, для моделирования взаимодействия обшивки космического корабля с микрометеоритами.

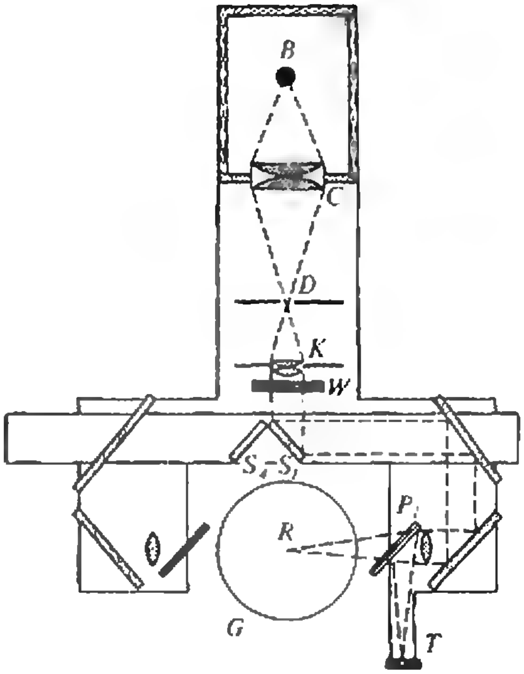


Схема опытов П. Н. Лебедева по измерению давления света. Подвес R с легкими крылышками, помещенный на тонкой нити в откачанном сосуде G, представляет собой весьма чувствительные крутильные весы. Свет от дуговой лампы B концентрируется при помощи системы линз и зеркал на одном из крылышек и вызывает закручивание подвеса, которое наблюдается при помощи трубы и зеркальца, прикрепленного к нити (не показаны на рисунке). Передвигая двойное зеркало S_1S_4, *можно направлять свет от дуги на переднюю или на заднюю поверхность крылышка и таким образом менять направление закручивания. Пластинка* P_1 *позволяет направлять определенную часть светового пучка на термоэлемент T, который служит для измерения величины падающей энергии. В опытах использовались подвесы с различными системами крепления крылышек.*

Изучается возможность использовать давление солнечного излучения для ориентации и ускорения космических аппаратов в пространстве.

Явление, экспериментально исследованное П. Н. Лебедевым, все шире проникает в различные области науки и техники.

ЧТО ТАКОЕ НЕПРЕРЫВНОСТЬ

Доктор физико-математических наук
В. А. ЕФРЕМОВИЧ

Это основное понятие математики. Оно принадлежит так называемой качественной геометрии, т. е. той части геометрии, которая вовсе не интересуется понятиями измерительного характера (расстояниями, длинами, объемами, ...). Несмотря на это (а быть может, благодаря этому?), на нем стоит все здание математического анализа и почти вся геометрия.

Этим понятием владели (на интуитивном уровне) математики древности, но точное определение ему было дано лишь в первой половине XIX века знаменитым французским математиком О. Коши (1787—1857). Чтобы пояснить это определение, нам потребуется

Общее понятие функции

Понятие функции претерпело ряд важных обобщений. Сначала рассматривали только числовые функции числового аргумента, например x^3, $\operatorname{tg} x$, e^x, и притом заданные тем или иным аналитическим выражением. Позднее выяснилось, что последнее не существенно. Важно лишь, что каждому значению аргумента x соответствует свое числовое значение функции. Непрерывная функция при этом изображается непрерывной кривой, получаемой движением карандаша без отрыва от бумаги (на рисунке 1 — непрерывная функция, на рисунке 2 — разрывная).

Далее можно рассматривать числовые функции точечного аргумента, например температуру или атмосферное давление в различных точках пространства. Еще пример. Плоский участок земли покрыт снегом; тогда высота h снежного покрова в каждой точке p есть значение некоторой функции: $h=f(p)$. Если на участке установить координаты x, y, каждая точка получит свое «имя»: $p=(x, y)$, и рассматриваемая функция f может быть записана так: $f(p)=f(x, y)$. Это — функция одной переменной точки p, или функция двух числовых переменных x, y. Графиком этой функции служит поверхность снежного покрова.

Наконец, можно рассматривать (самый общий случай) точечную функцию точечного аргумента, т. е. *отображение* $f\colon X \to Y$ фигуры X в фигуру Y. Таково изображение на плоском чертеже пространственной фигуры, например ортогональная проекция тела на плоскость. Любую картину художника или фотографию можно рассматривать как функцию (т. е. отображение), где каждой точке x изображаемого соответствует точка x' изображения. В этом случае $x'=f(x)$ называется *образом* точки x. Такими функциями-отображениями занимались прежде всего художники. Особо ценен вклад великого Леонардо да Винчи (1452—1519), одного из первых художников, освоивших математическую теорию перспективы.

Непрерывность

Самое общее понятие функции-отображения позволяет вполне наглядно и вместе с тем строго математически

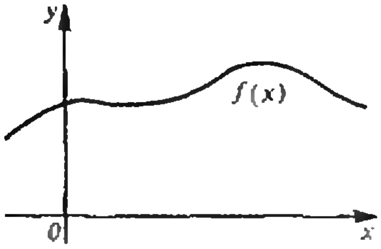


Рис. 1.

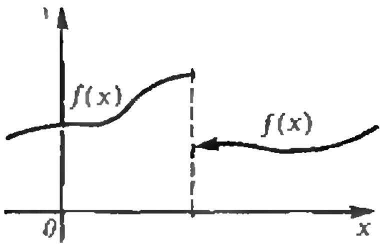


Рис. 2.

объяснить понятие непрерывности. Для этого сначала рассмотрим пример, где происходит разрыв, т. е. нарушение непрерывности.

Пусть X — резинка для упаковки лекарств, грубая модель окружности. Предположим, что в процессе деформации она вдруг разрывается в некоторой точке a. Что это значит? Некоторая ее часть B, примыкавшая раньше к a, т. е. находившаяся от a на нулевом расстоянии (пишем $B\delta a$), после разрыва (теперь мы ее обозначим B') оказывается неблизкой к a' (новому положению точки a — см. рисунок 3). Итак, разрыв в точке a — это такое событие, когда некоторая часть B, близкая к a ($B\delta a$), становится неблизкой к новому положению a' точки a: $B\delta a$, но $B'\not\delta a'$. Теперь понятно следующее определение:

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $a \in X$, если всякая часть $B \subset X$, близкая к a, после отображения переходит в положение B', близкое к $a'=f(a)$, т. е.

$$B\delta a \Rightarrow B'\delta a'.$$

Обозначение $B\delta a$ имеет точный смысл: для всякого сколь угодно малого положительного ε в фигуре B есть точка x такая, что $xa<\varepsilon$ (здесь xa — расстояние от x до a; всюду дальше через pq мы обозначаем расстояние от p до q). Аналогично $A\delta B$ означает, что в фигурах A, B есть точки $x \in A$, $y \in B$ такие, что $xy<\varepsilon$ при любом положительном ε. Заметим, что две различные точки не могут быть в этом смысле близкими: если $a \neq b$, то $a\not\delta b$ (даже если $ab=10^{-100}$).*)

Это определение равносильно классическому определению Коши:

Отображение $f\colon X \to Y$ *непрерывно в точке* $a \in X$, если для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\alpha>0$, что из $xa<\alpha$ следует $x'a'<\varepsilon$ (здесь $a'=f(a)$, $x'=f(x)$).

Равносильность двух определений доказана в конце нашей заметки.

Если функция непрерывна в каждой точке $x \in X$, то говорят, что она *непрерывна на всем* множестве X.

Это определение, вместе с определением Коши, не так легко освоить. Сам знаменитый Коши не раз ошибался, нечаянно подменяя требование непрерывности более сильным — тем, что теперь называют *равномерной непрерывностью*. Это весьма важный частный случай непрерывности, и мы на нем остановимся.

Равномерная непрерывность

Отображение $f\colon X \to Y$ называется *равномерно непрерывным на* X, если любые две близкие части $A, B \subset X$ переходят при f в близкие части $A', B' \subset Y$, т. е. $A\delta B \Rightarrow A'\delta B'$.

Упражнение. Докажите, что отображение

$$\mathrm{tg}\colon \left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right) \to R$$

не равномерно непрерывно на $(-\pi/2;\ \pi/2)$. *(Здесь найти нужные A, B такие, что $A\delta B$, но $A'\not\delta B'$, труднее: это две последовательности точек, например прообразы множеств $A'=\{1, 3, \ldots\}$, $B'=\{2, 4, \ldots\}$, $A'\not\delta B'$.)*

Имеется принципиальное различие между понятиями непрерывности и равномерной непрерывности. Первое основано на близости между точкой и множеством, второе на близости между двумя множествами. Близость между точкой и множеством относится к *топологии*, а близость между множествами — к *геометрии близости*, более «тонкой» науке, чем топология. Чтобы понять это различие, приведем лишь один пример. С точки зрения топологии ветвь гиперболы и ее асимптоту нельзя отличить от пары параллельных прямых (любая точка гиперболы не близка к ее асимп-

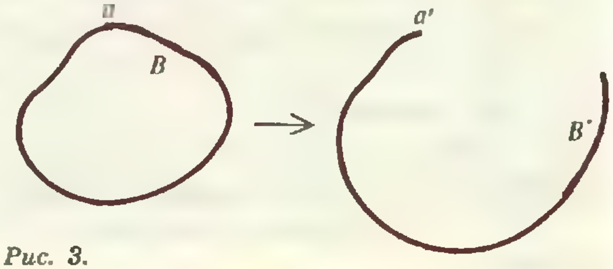


Рис. 3.

---

*) Определение близости, данное здесь, было впервые высказано автором этой статьи в 1936 году. Понятие близости можно задать аксиоматически, не пользуясь расстоянием, и на его основе построить всю топологию. (*Примеч. ред.*)

тоте!), в то время как эти две пары объектов не одинаковы в геометрии близости (асимптота близка к гиперболе!).

Доказательство равносильности определений непрерывности

Пусть отображение $f: X \to Y$ непрерывно в точке a по Коши, где X, Y — фигуры, для которых определено расстояние между точками, обладающее обычными свойствами. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ найдется свое положительное число $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, зависящее от ε, такое, что из $ax < \alpha$ следует $a'x' < \varepsilon$. Пусть часть $B \subset X$ близка к a; значит для всякого $\alpha > 0$ в B найдется точка x такая, что $ax < \alpha$. Если $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, то $a'x' < \varepsilon$, и так как ε произвольно мало́, то $B' = f(B)$ близко к $a' = f(a)$ $(B\delta a \Rightarrow b'\delta a')$.

Пусть, наоборот, известно, что f удовлетворяет первому определению непрерывности. Докажем, что f непрерывно по Коши. Рассуждая от противного, предположим, что не для всякого $\varepsilon > 0$ найдется нужное $\alpha > 0$. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что любое положительное α будет непригодно. Испытаем различные α: $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1/2$, ...; любое из них непригодно — это значит, что для α_n есть такая точка — назовем ее x_n,— что $ax_n < 1/n$, но $a'x'_n \geqslant \varepsilon_0$; тогда, обозначив множество всех x_n через B $(B = \{x_n:\ n = 1, 2, \ldots\})$, получим $B\delta a$, а $B'\not\delta a'$ $(B' = \{x'_n\})$. Противоречие.

Таким образом, два подхода к понятию непрерывности — классический подход Коши, связанный с подбором числа δ по произвольному числу ε, и более наглядный, на наш взгляд, подход, связанный с понятием близости, оказываются равносильными.

Числа и функции

(Начало см. на с. 12)

Поэтому из равенства (9) следует, что и $PQ' \vdots Q$. Но поскольку $(P, Q) = 1$, то $Q' \vdots Q$. Следовательно, степень Q не выше степени Q'. Последнее возможно только если Q — константа. Точно так же из (9) следует, что P — константа. Но тогда и $r_0 = P/Q$ — константа. При постоянном r_0 равенство (8) примет вид $nr_0 = 0$, $r_0 \neq 0$. И так как $n \geqslant 1$, это равенство противоречиво. Теорема доказана.

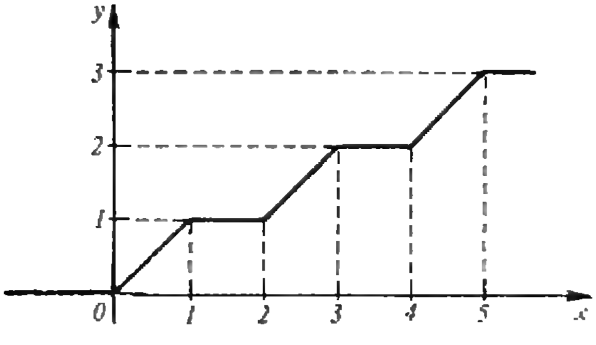


Рис. 5.

Упражнение 11. а) Докажите трансцендентность функций

$$y = \sin x; \quad y = \sqrt{e^x + 1}.$$

б) Приведите примеры трансцендентных функций f и g таких, что $f + g$, fg, $f(g(x))$ не являются трансцендентными.

в) Докажите, что если f и g — трансцендентные функции, то по крайней мере одна из функций $f + g$ и fg также трансцендентна.

В конце § 2 мы попытались найти какую-либо связь иррациональности функции с иррациональностью ее значений — и потерпели полную неудачу. После этого, вероятно, уже никому не придет в голову искать связь трансцендентности функции с трансцендентностью ее значений. Чтобы окончательно снять все сомнения, достаточно рассмотреть функцию, график которой изображен на рисунке 5. Эта функция трансцендентна, однако принимает при всех рациональных значениях x не только алгебраические, но даже рациональные значения (докажите самостоятельно перечисленные свойства этой функции).

Задачник „Кванта“

Задачи

М1106 — М1110, Ф1118 — Ф1122

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 сентября 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №6 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1106» или «Ф1118». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1106. Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.

В. В. Произволов

М1107. Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3.$$

Л. Д. Курляндчик

М1108. В выпуклом n-угольнике ($n>4$) никакие три диагонали не проходят через одну точку внутри многоугольника. Какое наибольшее число диагоналей в нем можно провести так, чтобы все части, на которые они разобьют n-угольник, оказались треугольниками?

М. Хованов, ученик 10 кл., Москва

М1109. В одном старом задачнике по геометрии была помещена такая задача: вычислить длину стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y=x^2$. В указании к задаче говорилось, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Верно ли такое указание? Может ли длина стороны правильного треугольника, вписанного в эту параболу, быть равной а) 3; б) 1988?

В. С. Шевелев

М1110. Для данного натурального $n>1$ выпишем наибольшие общие делители всевозможных пар различных чисел от 1 до n. Докажите, что а) среднее арифметическое всех $n(n-1)/2$ выписанных чисел неограниченно растет с ростом n, но не превосходит $\ln n+1$; б) их среднее геометрическое не превосходит 10 при любом n.

В. Ф. Лев

Ф1118. Рыбак, живший в устье впадающей в океан реки, перебрался на новое место жительства на несколько километров вверх по течению. К своему удивлению, он обнаружил, что время между началом прилива и началом отлива увеличилось, а время между началом отлива и началом прилива уменьшилось. Как объяснить это обстоятельство?

А. С. Бутов

Ф1119. В узкую кювету с параллельными вертикальными стенками налили некоторое количество жидкости (рис. 1). Затем кювету начали вращать вокруг вертикальной оси симметрии O—O. При некоторой скорости вращения обнажается k-я часть площади дна. Как при этом изменилась сила давления на дно и на узкие боковые стенки (по сравнению со случаем неподвижной кюветы)? При вращении жидкость не выплескивается. Поверхностным натяжением пренебречь.

Г. С. Лапидус

Задачник „Кванта"

Ф1120. Для сравнения теплопроводностей различных материалов предлагалось использовать следующий метод. На горячую плиту ставятся два одинаковых цилиндра из исследуемых материалов (рис. 2). На цилиндры кладут по кусочку воска. Где скорее воск начнет таять — тот цилиндр и обладает лучшей теплопроводностью. Верен ли этот метод?

А. И. Буздин

Ф1121. Металлический шар радиусом ρ, удаленный от других предметов, заземлен через сопротивление R. На шар налетает пучок электронов, скорость которых вдали от шара была v. В секунду на шар попадает n электронов. Какое количество теплоты выделяется на шаре за секунду? Каков заряд шара?

И. Ф. Гинзбург

Ф1122. Известны случаи наблюдения миража моря в пустыне. На каком расстоянии от наблюдателя возникает такой мираж? Считать, что скорость света в приземном слое в пустыне меняется по закону $c(z)=c_0(1-\alpha z)$, где c_0 — скорость света у поверхности земли, z — высота над поверхностью.

Б. И. Клячин

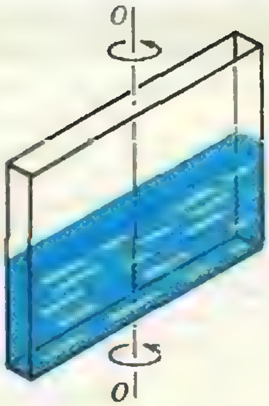


Рис. 1.

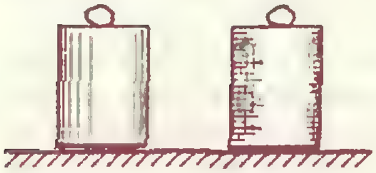


Рис. 2.

Problems

M1106 — M1110, P1118 — P1122

M1106. Each of the three lines joining the midpoints of the opposite sides of a convex hexagon divide its area in half. Prove that these lines intersect at one common point.

V. V. Proizvolov

M1107. Prove the inequality

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3,$$

where a, b, c are the sides of a triangle.

L. D. Kurlyandchik

M1108. No three diagonals of a convex n vertex polygon have a single common point inside it ($n\geqslant4$). What largest number of diagonals may be drawn so that all the parts into which they split the polygon are triangles?

M. Khovanov, 10th form student, Moscow

M1109. An old geometry problem book contains the following exercise: compute the length of the sides of an equilateral triangle inscribed in the parabola $y=x^2$. As a hint for finding the solution, the authors claim that one of the vertices must coincide with the parabola's vertex. Is this correct? Can the side of the inscribed equilateral triangle equal a) 3; b) 1988?

V. S. Shevelev

M1110. For a given integer $n>1$ select all the greatest common divisors of pairs of distinct integers from 1 to n.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 1st, 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

Задачник „Кванта"

Prove that a) the arithmetical mean of all the $n(n-1)/2$ selected numbers increases unboundedly with n, but does not become greater than $\log n+1$; b) their geometric mean is no greater than 10 for all n.

V. F. Lev

P1118. A fisherman who lived near the ocean delta of a big river moved to a new house further upstream by a few kilometers. To his surprise he discovered that the time interval between the beginning of the incoming tide and the outgoing one was increased, while the interval between the outgoing and incoming tides was decreased. How can this fact be explained?

A. S. Butov

P1119. A narrow trough with parallel vertical walls contains a certain amount of liquid (see figure Рис. 1). The trough is rotated about its vertical symmetry axis O—O. At some velocity of rotation the k-th part of the bottom's area is cleared. How does the pressure of the liquid on the bottom and the narrow side walls of the trough change (as compared to the case when the trough is motionless)? The liquid does not spill out during rotation. Surface tension may be neglected.

G. S. Lapidus

P1120. The following method was proposed to compare the heat conductivity of various materials. Two identically shaped cylinders made out of the two materials under study are placed on a heater (figure Рис. 2). Small pieces of wax are placed on top of the cylinders. The cylinder with the highest heat conductivity must be the one where the wax will begin to melt first. Is this method sound?

A. I. Buzdin

P1121. A metal ball of radius ρ, placed far away from other objects, is grounded via a resistor R. The ball is hit by a beam of electrons whose velocity far away from the ball was v. During one second n electrons hit the ball. How much heat per second is liberated on the ball? What is the ball's charge?

I. F. Ginzburg

P1122. A mirage of the sea is sometimes observed in the desert. At what distance from the observer is such a mirage seen? Assume that light velocity near the earth surface varies according to the rule $c(z)=c_0(1-az)$, where c_0 is the velocity of light at the surface and z is the height above the surface.

B. I. Klyachin

Задачник „Кванта“

Решения задач

М1086 — М1090, Ф1097 — Ф1102

М1086. *С числом разрешается производить две операции: «увеличить в 2 раза» и «увеличить на 1». За какое наименьшее число операций можно из числа 0 получить: а) число 100? б) число n?*

а), б) Задачу удобно решать с конца, т. е. искать кратчайший способ получения числа 0 из произвольного натурального n с помощью двух операций — вычитания 1 (В) и деления пополам (Д). Пусть $r(n)$ — число операций В и Д в таком кратчайшем алгоритме. Если число n нечетно, то к нему можно применить только операцию В, так что

$$r(2k+1)=1+r(2k).$$

Покажем индукцией по k, что $r(2k)=1+r(k)$, т. е. четное число в кратчайшем алгоритме надо делить пополам. Для $k=1$ это ясно. Пусть это доказано для всех чисел, меньших k. Если к числу $2k$ сначала применить операцию В (вычесть 1), то число операций до получения 0 будет не меньше, чем

$$1+r(2k-1)=2+r(2k-2)=3+r(k-1)$$

(по предположению индукции). Если же сначала делить $2k$ пополам, а дальше идти по оптимальному пути, то число операций будет $1+r(k)\leqslant 2+r(k-1)$. Таким образом, второй способ заведомо быстрее.

Чтобы узнать, сколько операций потребуется в кратчайшем алгоритме для заданного числа n, представим n в виде суммы степеней двойки: $n=2^{k_1}+2^{k_1+k_2}+\ldots+2^{k_1+k_2+\ldots+k_m}$, где k_1 неотрицательное, а $k_2, \ldots, k_m$ — положительные целые числа ($k_1, k_1+k_2, \ldots$ — это номера разрядов двоичной записи n, в которых стоят единицы). Тогда

$$\begin{aligned}r(n)&=k_1+r(n/2^{k_1})=k_1+1+r(2^{k_2}+\ldots+2^{k_2+\ldots+k_m})=\ldots\\&\ldots=(k_1+1)+(k_2+1)+\ldots+(k_m+1)=\\&=(k_1+k_2+\ldots+k_m)+m=[\log_2 n]+m\end{aligned}$$

($[x]$ — целая часть x), поскольку $k_1+k_2+\ldots+k_m$ — это показатель наибольшей степени двойки, не превосходящей n. Отметим, что m равно количеству единиц в двоичной записи числа n. В частности, для $n=100$ получаем ответ к задаче а): $r(100)=9$.

На полях показано превращение числа 100 в 0 в десятичной и двоичной записи. Поскольку $100=2^6+2^5+2^2$, получаем $r(100)=6+3=9$.

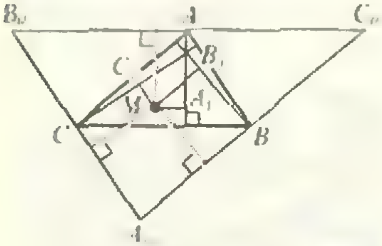
100		1100100
↓	Д²=Д·Д	↓
25		11001
↓	В	↓
24		11000
↓	Д³	↓
3		11
↓	В	↓
2		10
↓	Д	↓
1		1
↓	В	↓
0		0

М. В. Сапир

М1087. *Рассмотрим треугольник ABC, точку M в плоскости этого треугольника и проекции A_1, B_1, C_1 точки M на высоты, проведенные из вершин A, B, C соответственно. Докажите, что*
а) существует одна и только одна точка M, для которой отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны;

а), б) Проведем через каждую вершину треугольника ABC прямую, параллельную противоположной стороне (и перпендикулярную соответствующей высоте). Эти прямые ограничат треугольник $A_0B_0C_0$ (см. рисунок), подобный данному с коэффициентом 2. Очевидно, что отрезки AA_1, BB_1, CC_1 равны расстояниям от точки M до сторон B_0C_0, C_0A_0, A_0B_0 нового треугольника. Поэтому равенство $AA_1=BB_1=CC_1$ возможно тогда и только тогда, когда точка M равноудалена от сторон треугольника $A_0B_0C_0$, т. е. является центром его вписанной окружности. В этом случае отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 равны по длине радиусу этой окружности или диаметру d

б) для такой точки M длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 равны диаметру вписанной в треугольник ABC окружности.



вписанной окружности треугольника ABC (вспомним о подобии наших треугольников!).

Найденная выше точка M лежит внутри треугольника ABC, так как все его высоты больше d. Некоторые читатели под «проекцией на высоту» понимали проекцию на прямую, содержащую высоту. При таком понимании имеется еще ровно три точки, удовлетворяющие условию,— центры вневписанных окружностей треугольника $A_0B_0C_0$.

А. Х. Джафаров

M1088. *Докажите, что если числа p, q, r рациональны и $pq+qr+pr=1$, то $(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)$ — квадрат рационального числа.*

По условию $1+p^2=qr+pq+pr+p^2=(q+p)(r+p)$. Записывая аналогично два других сомножителя рассматриваемого выражения, получим

$$(1+p^2)(1+q^2)(1+r^2)=((q+p)(r+p)(q+r))^2.$$

И. Варга, В. Н. Дубровский

M1089. *В выпуклом четырехугольнике ABCD площадью S диагонали пересекаются в точке O. Пусть K, L, M, N — центры окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD и DOA. Докажите, что произведение периметров четырехугольников ABCD и KLMN не меньше 4S.*

Пусть k, l, m, n — радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, COD, DOA. Тогда периметр $KLMN$ не меньше, чем $2(k+l+m+n)$ ($KL\geq k+l$, $LM\geq l+m$, и т. д.; рис. 1). Но $k=2S_{AOB}/P_{AOB}$, где буквы S и P обозначают площадь и периметр, а $P_{AOB}\leq P_{ABCD}$. Аналогично оцениваются величины l, m, n. Следовательно,

$$P_{KLMN}\geq 4\,\frac{S_{AOB}+S_{BOC}+S_{COD}+S_{DOA}}{P_{ABCD}}=\frac{4S}{P_{ABCD}},$$

что и требовалось доказать.

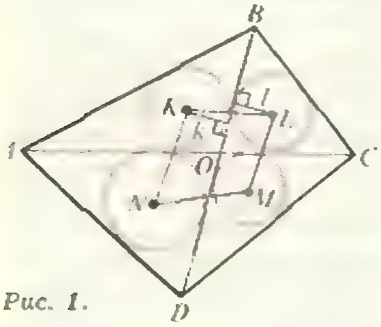


Рис. 1.

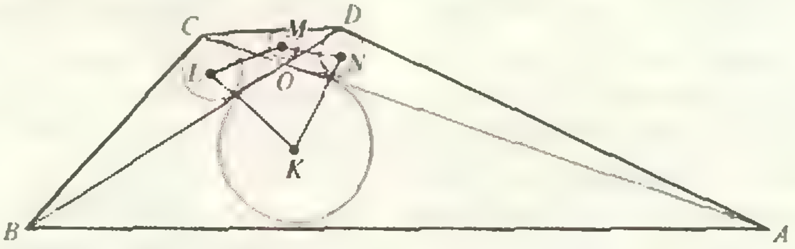


Рис. 2.

Заметим, что число 4 в нашем неравенстве увеличить нельзя. Действительно, фиксируем в четырехугольнике $ABCD$ основание AB и точку пересечения диагоналей O, а длину BC устремим к нулю (рис. 2), тогда

$$P_{KLMN}\to 2LN,\quad P_{ABCD}\to P_{AOB},\quad S=S_{ABCD}\to S_{AOB}.$$

Поэтому

$$\frac{P_{KLMN}\cdot P_{ABCD}}{S}\to 2LN\,\frac{P_{AOB}}{S_{AOB}}=4\,\frac{LN}{k}.$$

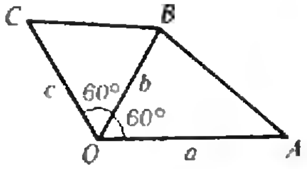
Но отношение LN/k за счет увеличения угла AOB можно сделать сколь угодно близким к 1. Следовательно, величина $P_{KLMN}\cdot P_{AB'C'D}/S$ может быть сколь угодно близка к 4.

Д. Ю. Бураго, Ф. Л. Назаров

М1090. *Докажите, что а) для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство*

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\geqslant\sqrt{a^2+ac+c^2};$$

б) неравенство из п. а) обращается в равенство, если и только если $1/a+1/c=1/b$.



а) Доказываемое неравенство — это алгебраическая запись одного частного случая неравенства треугольника.

Отложим от произвольной точки O три отрезка $OA=a$, $OB=b$ и $OC=c$ так, что $\angle AOB=\angle BOC=60°$, $\angle AOC=120°$ (см. рисунок). По теореме косинусов

$AB=\sqrt{a^2+b^2-ab}$, $BC=\sqrt{b^2+c^2-bc}$, $AC=\sqrt{a^2+c^2+ac}$,

а по неравенству треугольника $AB+BC\geqslant AC$.

б) Равенство возникает тогда и только тогда, когда точка B попадает на отрезок AC или, что равносильно, когда площадь треугольника AOC равна сумме площадей AOB и BOC, т. е. $(ac\sin 120°)/2=((ab+bc)\sin 60°)/2$. Деля обе части этого равенства на $abc\sqrt{3}/4$, получим доказываемое условие $1/b=1/a+1/c$ ($\sin 120°=\sin 60°=\sqrt{3}/2$).

Ю. В. Дейкало

Ф1097. *Для уменьшения доли отраженного света от поверхности стекла на нее наносят тонкую пленку, показатель преломления которой меньше показателя преломления стекла (просветление оптики). Какой наименьшей толщины пленку с показателем преломления $n=4/3$ надо нанести на поверхность стекла, чтобы при падении (нормально к поверхности) света, содержащего излучение двух длин волн с $\lambda_1=700$ нм и $\lambda_2=420$ нм, отраженный свет был максимально ослаблен для обеих длин волн?*

Пусть на пленку толщиной h падает плоская световая волна с длиной волны в вакууме λ. После частичного отражения от верхней и нижней поверхностей пленки в обратном направлении (см. рисунок) идут волны *1* и *2*. Если световая волна падает нормально к поверхности пленки, то разность хода отраженных волн *1* и *2* равна удвоенной толщине пленки. Чтобы отраженный свет был максимально ослаблен, волны *1* и *2* должны быть в противофазе. Чтобы это условие выполнялось, разность хода волн *1* и *2* должна равняться нечетному числу половин длин волн в пленке:

$$2h=(2k-1)\frac{\lambda}{2n}\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots),$$

где λ/n — длина волны в пленке. Отсюда

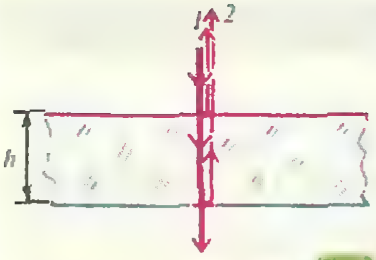
$$h=\frac{(2k-1)\lambda}{4n}.$$

Как видим, h зависит от длины волны. Максимальное ослабление света на длинах волн λ_1 и λ_2 будет при следующих толщинах пленки:

$$h_1=\frac{\lambda_1}{4n},\ \frac{3\lambda_1}{4n},\ \frac{5\lambda_1}{4n},\ldots=\frac{700}{4n},\ \frac{2100}{4n},\ \frac{3500}{4n},\ \ldots,$$

$$h_2=\frac{\lambda_2}{4n},\ \frac{3\lambda_2}{4n},\ \frac{5\lambda_2}{4n},\ldots=\frac{420}{4n},\ \frac{1260}{4n},\ \frac{2100}{4n},\ \ldots$$

(h_1 и h_2 — в нанометрах). Из сравнения этих двух наборов заключаем, что наименьшие совпадающие значения h_1 и h_2 равны $\frac{2100}{4n}$ нм ≈ 394 нм.



Итак, наименьшая толщина пленки, при которой отраженный свет максимально ослаблен для обеих длин волн, — $h \approx 394$ нм.

В. И. Чивилёв

Ф1098. *Детский пистолет, который можно представить в виде пружины конечной массы, прикрепленной к неподвижной стене, выстреливает шариком, сообщая ему скорость v. Если выстрелить шариком вдвое большей массы, его скорость будет $v\sqrt{2/3}$. Какова будет скорость шарика утроенной массы?*

Разгон шарика пружиной продолжается до тех пор, пока пружина не окажется в равновесном состоянии. Если к этому моменту шарик набирает скорость v, то такова же и скорость свободного (не закрепленного у стены) конца пружины. Кинетическую энергию пружины, у которой в равновесном состоянии один конец покоится, а другой имеет скорость v, можно представить в виде $\alpha M v^2/2$, где M — масса пружины, равномерно распределенная по ее длине, α — числовой коэффициент, не зависящий от скорости конца пружины.

Запишем закон сохранения энергии для всех трех случаев (для шариков массой m, $2m$, $3m$), считая начальное сжатие пружины каждый раз одним и тем же и равным x_0:

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{m}{2}v^2 + \frac{1}{2}\alpha M v^2,$$

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{2m}{2}\left(\frac{2}{3}v^2\right) + \frac{1}{2}\alpha M\left(\frac{2}{3}v^2\right),$$

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{3m}{2}u^2 + \frac{1}{2}\alpha M u^2.$$

Решая совместно эти уравнения, найдем скорость u, которую набирает при выстреле шарик массой $3m$:

$$u = v\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

П. И. Зубков

Ф1099. *В горизонтально закрепленной открытой с концов трубе сечением S находятся два поршня (см. рисунок). В исходном состоянии левый поршень соединен с неподвижной стенкой недеформированной пружиной жесткостью k. Давление p_0 газа между поршнями равно внешнему давлению, расстояние H от правого поршня до края трубы равно расстоянию между поршнями. Правый поршень медленно вытягивают к краю трубы. Какую силу нужно приложить к поршню, чтобы удержать его в крайнем*

По мере вытягивания правого поршня давление газа между поршнями будет уменьшаться, левый поршень будет смещаться вправо, растягивая пружину.

Запишем условия равновесия поршней в положении, когда правый поршень выдвинут до края трубы и к нему приложена сила F (см. рисунок):

для левого поршня —

$$p_0S - pS - kx = 0;$$

для правого поршня —

$$F + pS - p_0S = 0 \qquad (*)$$

(p — давление газа между поршнями). Из этих уравнений следует, что

$$F = p_0S - pS = kx.$$

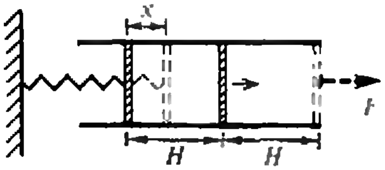
Так как температура постоянна, согласно закону Бойля — Мариотта для газа между поршнями имеем:

$$p_0HS = p(2H - x)S,$$

откуда

Задачник „Кванта"

положении? Трение пренебрежимо мало, температура постоянна.



$$p=\frac{p_0H}{2H-x}=\frac{p_0H}{2H-F/k}=\frac{p_0kH}{2kH-F}.$$

Подставив это выражение для p в (*), получим для F квадратное уравнение:

$$F^2-(p_0S+2kH)F+p_0SkH=0.$$

Его решения —

$$F_{1,2}=\frac{p_0S}{2}+kH\pm\sqrt{\frac{p_0^2S^2}{4}+k^2H^2}.$$

Поскольку ясно, что $F=0$ при $k=0$, окончательно получаем:

$$F=\frac{p_0S}{2}+kH-\sqrt{\frac{p_0^2S^2}{4}+k^2H^2}.$$

В. П. Бородин

Ф1100. *Достаточно длинный капилляр, погруженный в сосуд с водой, герметически закрывают сверху. При этом уровень жидкости в капилляре понижается на $\Delta h=4$ см. Чему равна относительная влажность воздуха у поверхности воды в сосуде, если температура окружающего воздуха 20 °С?*

Когда верхний конец капилляра будет закрыт, водяной пар, находящийся в свободном от воды верхнем конце капилляра, станет насыщенным, и парциальное давление пара увеличится. Из-за этого и понизится уровень воды в капилляре (так как на уровне воды в сосуде давление остается постоянным).

Запишем условия равновесия воды в капилляре, находящейся на уровне свободной поверхности воды в сосуде, до и после закрытия капилляра:

до закрытия —

$$p_п+p_в-\frac{\sigma}{2r}+\rho gh=p_п+p_в, \tag{1}$$

после закрытия —

$$p_н+p_в-\frac{\sigma}{2r}+\rho g(h-\Delta h)=p_п+p_в. \tag{2}$$

Здесь $(p_п+p_в)$ — давление у поверхности воды в сосуде, равное сумме парциальных давлений пара и сухого воздуха; $\left(p_п+p_в-\frac{\sigma}{2r}\right)$ — давление над искривленной поверхностью воды в открытом капилляре (r — радиус капилляра, σ — поверхностное натяжение воды); $p_н$ — давление насыщенного водяного пара при температуре 20 °С; давление сухого воздуха $p_в$ в капилляре можно считать неизменным, так как капилляр достаточно длинный.

Из уравнений (1) и (2) получаем:

$$p_н-p_п=\rho g\cdot\Delta h, \text{ или } \frac{p_п}{p_н}=1-\frac{\rho g\cdot\Delta h}{p_н}.$$

Но $\frac{p_п}{p_н}100\,\%$ — это и есть искомая влажность воздуха φ у поверхности воды в сосуде. Таким образом,

$$\varphi=\left(1-\frac{\rho g\cdot\Delta h}{p_н}\right)100\%.$$

Взяв из таблицы значение $p_н=2{,}33\cdot10^3$ Па и подставив $\rho=10^3$ кг/м^3, $g=9{,}8$ м/с^2, $\Delta h=4\cdot10^{-2}$ м, получим

$$\varphi\approx83\,\%.$$

Л. Г. Маркович

Ф1101. *Легкий горизонтальный стержень длиной 2а может свободно вращаться вокруг вертикальной оси, проходящей через его середину. Одинаковые массивные шары насажены на стержень и могут перемещаться вдоль него без трения и упруго отражаться от упоров на его концах (рис. 1). Сначала шары закреплены на расстояниях а/2 от оси. Стержень раскручивают до угловой скорости ω_0, после чего шары одновременно освобождают. По каким траекториям будут двигаться шары? За какое время стержень совершит полный оборот? Построить график зависимости $\omega(t)$. Размеры шаров много меньше длины стержня.*

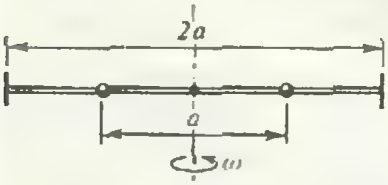


Рис. 1.

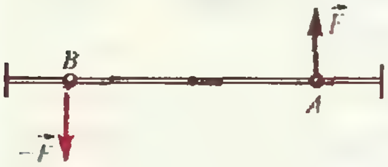


Рис. 2.

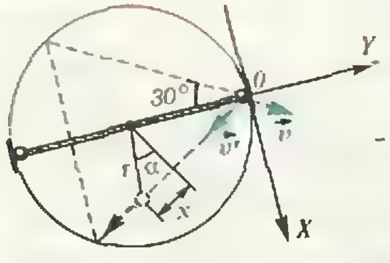
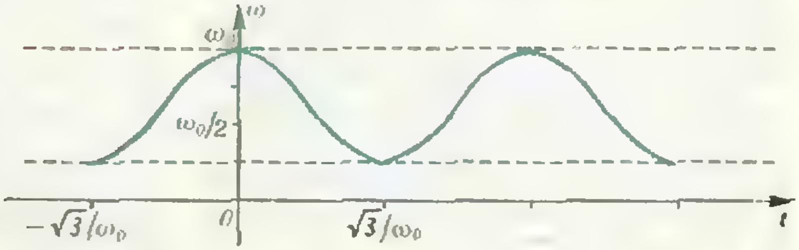


Рис. 3.

Рис. 4.



В силу симметрии начального расположения и начальных скоростей шары всегда будут находиться в симметричных точках и иметь симметричные скорости. Тогда легко показать, что шары будут двигаться свободно, кроме моментов отражения от упоров.

Действительно, предположим, что на шар A действует сила $\vec{F}$, перпендикулярная стержню (продольных сил нет, так как нет трения). Тогда из соображений симметрии на шар B должна действовать сила $-\vec{F}$ (рис. 2). Но это означает, что со стороны шаров на стержень будет действовать раскручивающая его пара сил. Пренебрегая массой стержня по сравнению с массами шаров, заключаем, что эти силы должны быть пренебрежимо малы (в пределе для того, чтобы поворачивать невесомый стержень, сил вообще не требуется). Таким образом, мы приходим к выводу, что между столкновениями с упорами шары будут двигаться равномерно и прямолинейно.

Проанализируем теперь столкновения шаров с упорами. Во-первых, при столкновении сохраняется X-компонента импульса (рис. 3), так как иначе на шары в момент удара будут действовать силы, перпендикулярные стержню, что невозможно в силу предыдущих рассуждений. Во-вторых, в силу упругости соударений сохраняется энергия. Поэтому при соударениях шаров с упорами выполняется закон равенства углов падения и отражения.

Из приведенных рассуждений и геометрии задачи ясно, что траекторией каждого шара будет равносторонний треугольник со стороной $l=2a\cos 30^\circ=a\sqrt{3}$ (см. рис. 3).

Стержень совершит полный оборот за время T, которое понадобится шару, чтобы обойти такой треугольник со скоростью, равной начальной скорости $v_0=\omega_0 a/2$. Таким образом,

$$T=3l/v_0=6\sqrt{3}/\omega_0.$$

Найдем зависимость $\omega(t)$. Понятно, что $\omega=v_t/r$, где v_t — перпендикулярная к радиусу компонента скорости шара, т. е. $v_t=v\cos\alpha=va/2r$. Следовательно,

$$\omega=va/2r^2=\omega_0/(1+(2x/a)^2)$$

(см. рис. 3). Если начинать с момента, когда $\alpha=0$, то $x=v_0 t$,

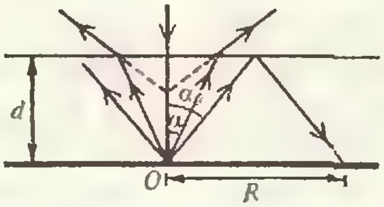
$$\omega=\omega_0/(1+(\omega_0 t)^2) \text{ при } -\sqrt{3}/\omega_0\leqslant t\leqslant\sqrt{3}/\omega_0.$$

В момент $t=\sqrt{3}/\omega_0$ произойдет удар об упор, и цикл повторится (см. рис. 4).

А. Ю. Алексеев

Ф1102. *Лазерный луч падает на прозрачную плоскопараллельную пластину, одна поверхность которой закрашена так, что может рассеивать свет во всех направлениях. На пластине видна следующая картина: светлая точка в центре, темный круг с резко очерченной границей, а вокруг — светлый ореол. Объясните явление.*

Лазерный луч попадает в точку O закрашенной поверхности (см. рисунок). Лучи рассеянного света, исходящие из точки O под углом α, меньшим α_0 (α_0 — угол полного внутреннего отражения), выходят из пластинки и создают изображение светящейся точки O. Лучи, исходящие из точки O под углом, большим α_0, снова попадают на закрашенную поверхность и освещают ее, создавая светящийся ореол. При этом радиус R неосвещенной области равен $2d\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$, где d — толщина пластинки.



А. М. Шалагин

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1061—М1075, Ф1073—Ф1087, справились с задачами М1071, М1072, М1075, Ф1073, Ф1076, Ф1078, Ф1084, Ф1086. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

М а т е м а т и к а

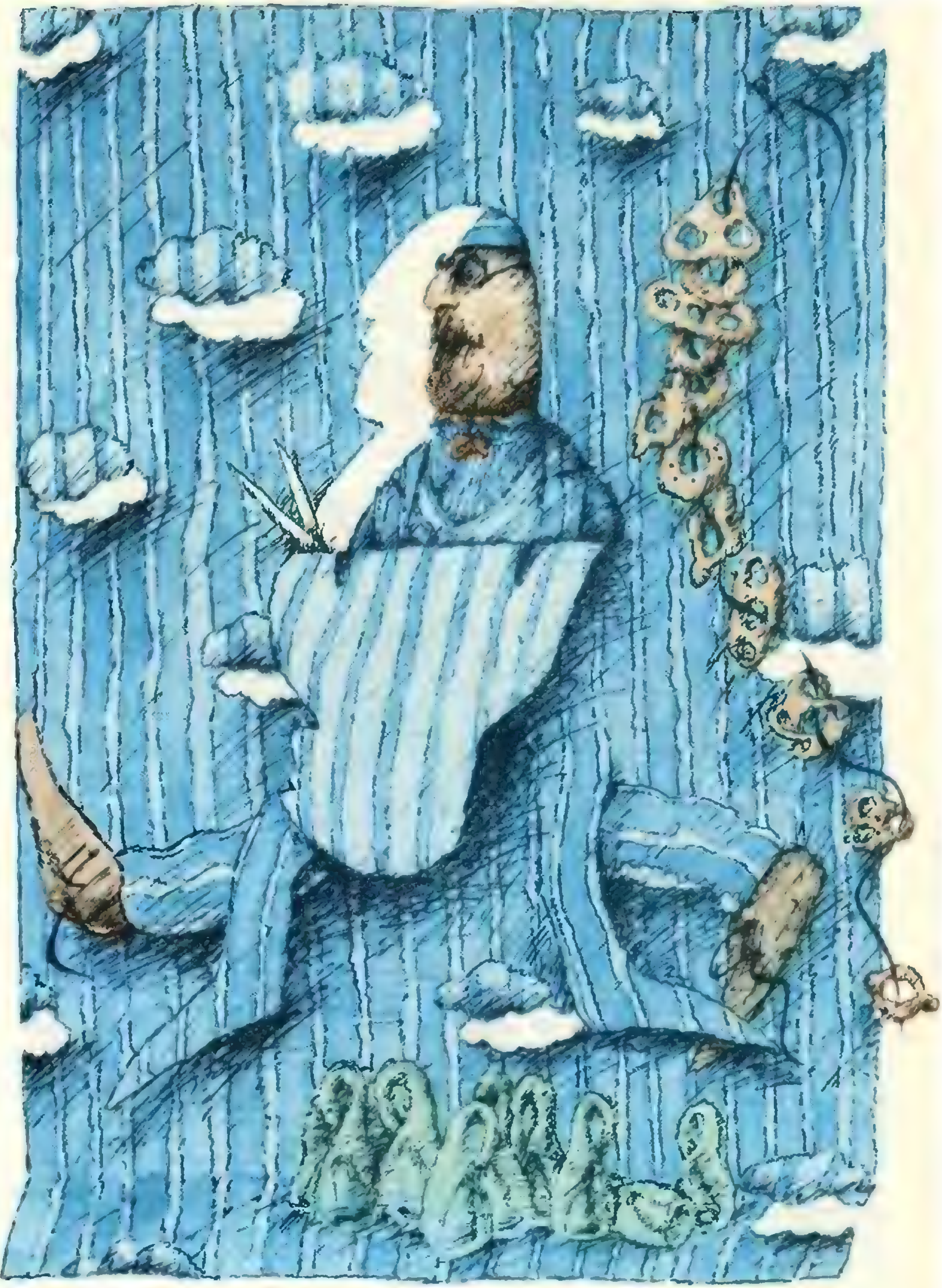
Ц. Адриан (Каракал, СРР) 62; *А. Акимов* (Евпатория) 67—69; *Д. Алиевский* (Свердловск) 68, 70; *И. Аржанцев* (Киев) 61, 62, 66, 67, 69, 70; *Р. Арустамян* (Ереван) 61; *С. Аршава* (Усинск) 62, 63, 65—67, 69, 70; *А. Бабкин* (Киев) 62, 66—68; *З. Бандик* (СФРЮ) 62, 63, 68; *В. Барановский* (Омск) 73; *В. Бодулеску* (Тимишоара, СРР) 63; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 62, 65—70, 73; *В. Бзикадзе* (Тбилиси) 73; *Т. Бозжонов* (Алма-Ата) 68; *Ж. Бопаев* (Талды-Курган) 67; *Я. Бренер* (Вильнюс) 64; *Ц. Василев* (София, НРБ) 64; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 63, 66, 68, 69, 73, 74; *А. Виницкий* (Калуга) 62, 68, 73; *А. Винцюк* (Киев) 68, 70, 73; *А. Витяев* (Новосибирск) 63; *В. Вологодский* (Омск) 61, 63, 64; *П. Волфбейн* (Киев) 68, 69; *В. Волчков* (Шахтерск) 61—70, 73, 74; *Д. Вольпер* (Омск) 61—64, 66—70, 73, 74; *М. Всемирнов* (Ленинград) 62, 63, 66, 68, 69, 73; *М. Выборнов* (Киев) 68, 73; *С. Гарданов* (Керчь) 62; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 66—70; *М. Гольдштейн* (Челябинск) 63; *А. Гороховский* (Киев) 62—64; *Р. Гринив* (Львов) 61—63; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 66, 69; *И. Жарков* (Свердловск) 61, 62, 64; *Ю. Журавель* (Киев) 66, 68; *В. Завражний* (Фрунзе) 69; *Н. Зверев* (Москва) 62; *С. Зелик* (Краматорск) 61—63, 66—70, 74; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 61—64, 68—70, 73, 74; *Т. Ионеску* (Будапешт, ВНР) 62; *А. Калинин* (Саратов) 61—64, 67, 69, 70, 73; *В. Калошин* (Харьков) 61—64, 66—70, 73, 74; *А. Караваев* (Волгоград) 61; *С. Кириллов* (Одесса) 61, 69; *О. Кирнасовский* (Винница) 62, 66, 67, 69, 70, 73, 74; *С. Коваценко* (Винница) 62, 67—70, 73; *О Коврижкин* (Майкоп) 63, 66, 69, 70; *А. Козачко* (Винница) 62, 67—70, 73; *И. Кокорев* (Ленинград) 62, 63, 66, 68—70, 73, 74; *Г. Колесницкий* (Тбилиси) 61; *М. Колодей* (Омск) 73, 74; *А. Кондратьев* (Отрадное Ленинградской обл.) 69; *А. Коршков* (Мозырь) 61—63, 68—70; *Д. Косоня* (Белорецк) 61—64, 66—69; *В. Крепец* (Новосибирск) 62, 67, 68, 73; *О. Крепец* (Новосибирск) 68; *В. Крушкаль* (Новосибирск) 62, 66, 68, 70, 74; *В. Куватбекова* (Фрунзе) 66, 73; *А. Кулик* (Киев) 61—64, 66—70, 73, 74; *С. Лесик* (Донецк) 61, 66, 68—70, 74; *А. Лосев* (Ленинград) 62, 66, 68—70, 73, 74; *В. Лысенков* (Белорецк) 61—64, 66—69, 74; *С. Лященко* (Харьков) 69; *И. Марков* (Киев) 61, 64, 68, 69; *Т. Мартиросова* (Ташкент) 66, 67, 69, 73; *М. Марченко* (Гайворон) 73; *В. Матвеев* (Москва) 61—64, 68, 69, 73, 74; *О. Мельник* (Шевченко) 66; *А. Мельников* (Краснодар) 61, 66, 73; *А. Мельцер* (Ленинград) 66, 69, 70, 73, 74; *М. Мельцер* (Вильнюс) 63, 66, 69, 70; *С. Морозов* (Заволжье) 61; *А. Морозова* (Одесса) 67, 68; *Я. Мустафаев* (Баку) 62, 63, 65—70, 73, 74; *А. Назарян* (Тбилиси) 61—63; *Д. Никшич* (Киев) 67, 69, 73; *И. Опульский* (Киев) 61—63, 67—70, 73, 74; *О. Павлов* (Новосибирск) 63, 73, 74; *С. Павлов* (Новосибирск) 61, 62, 68—70; *В. Павлунин* (Фрунзе) 63, 64, 66, 69; *А. Паламарчук* (Киев) 73; *А. Паршин* (Омск) 73, 74; *А. Пиковский* (Киев) 62, 63; *Д. Погребинский* (Киев) 63; *В. Полищук* (Киев) 61, 62, 66—70; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) 62, 63, 66, 68—70, 73, 74; *В. Рагулин* (Москва) 61, 63, 74; *В. Радулеску* (Каракал, СРР) 73; *Л. Рябова* (Клин) 67; *В. Савчик* (п. Ахмедлы АзССР) 73; *А. Савчин* (Киев) 68; *Д. Синиц-*

кий (Ленинград) **61—70, 73, 74**; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) **66—70, 73, 74**; *А. Скопенков* (Саратов) **62—65, 67, 68, 70, 73**; *В. Слитинский* (Киев) **61—70**; *Д. Смиренников* (Подпорожье) **69**; *Ю. Соколов* (Челябинск) **73, 74**; *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) **61, 62**; *Д. Сторожук* (Киев) **69**; *В. Стрижевский* (Одесса) **61, 67—69**; *Г. Тер-Саакое* (Баку) **61, 62, 66, 68, 70**; *С. Тер-Саакое* (Баку) **61, 62, 66, 68, 70**; *С. Тихонов* (Воронеж) **66, 68, 69**; *Ю. Томилов* (Киев) **62—64**; *Д. Туляков* (Жданов) **67—69**; *Д. Турсунов* (Караганда) **61, 63, 64, 66, 68, 69, 73, 74**; *А. Устинов* (Плавск) **69**; *К. Ушаков* (Киев) **66, 68—70**; *П. Федосеев* (Новгород) **68, 69**; *В. Федотов* (Москва) **68, 70**; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **61—64, 66—70, 73, 74**; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) **68, 69**; *В. Филлипов* (Киев) **73**; *Ф. Фот* (Томск) **62, 63, 70**; *В. Харламов* (Ленинград) **73**; *О. Христенко* (Караганда) **61, 63, 64, 66, 68, 69, 73, 74**; *Д. Черников* (Баку) **66, 68**; *А. Шаповал* (Киев) **62, 66—69**; *Л. Шахбагян* (Ереван) **69**; *К. Щербаков* (Арзамас) **61, 63, 66, 67, 69**; *В. Эйгес* (Москва) **67**; *Я. Эфендиев* (Баку) **62, 63, 66, 68—70, 73**.

Физика

И. и Х. Абдулазизовы (Шекинский р-н АзССР) **74, 75**; *В. Адамия* (Тула) **74, 75, 77**; *Х. Акимов* (к/х «Москва» Шаватского р-на УзССР) **74, 75, 77, 79—82**; *О. Армоник* (Гродно) **77**; *Ю. Артемов* (Джамбулский р-н Алма-Атинской обл.) **80, 81**; *А. Андрианов* (Кузнецовск) **74, 75, 77**; *Р. Арустамян* (Ереван) **87**; *А. Афонин* (Брест) **74, 79—82**; *Н. Бабенко* (Киев) **81**; *А. Бабкин* (Киев) **74, 77**; *А. Баландина* (Воркута) **74, 75**; *А. Белецкий* (Канев) **74, 75, 80**; *С. Белоусов* (Ленинград) **75, 77**; *С. Бенчисова* (Старый Оскол) **83**; *Д. Беседных* (Киев) **74, 75, 77**; *В. Бескровный* (Донецк) **75, 80**; *А. Билибин* (Боровичи) **74, 75, 77, 79—82**; *С. Бобровник* (Черновцы) **74, 77, 80, 81, 87**; *А. Богданов* (Мичуринск) **75, 77, 83**; *А. Бузунов* (Киев) **74, 77**; *С. Бусленко* (Тула) **74, 75, 81, 82, 87**; *А. Бучель* (Луцк) **74, 77, 79—81**; *В. Быдзан* (Киев) **74**; *М. Ванюшов* (Ленинград) **80, 83**; *А. Винцюк* (Киев) **82, 83**; *В. Вовк* (Барвенково) **77**; *П. Вольфбейн* (Киев) **74, 75, 77, 79—82**; *В. Гавенский* (Баку) **74, 77, 85**; *А. Гончаров* (Новосибирск) **74, 75, 77, 82, 83, 85, 87**; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 75, 77**; *Р. Губарев* (Тула) **74, 75, 77**; *Б. Гуревич* (Саратов) **74, 75, 77, 81—83, 85, 87**; *С. Гусев* (Лобня) **74**; *В. Гусятников* (Москва) **74, 80**; *С. Дворник* (Талды-Курган) **74, 77, 79, 80, 82, 87**; *Б. Дейч* (Харьков) **83, 87**; *Е. Демлер* (Новосибирск) **74, 75, 77, 82, 83, 85, 87**; *Е. Демченко* (Жданов) **74**; *А. Долуханян* (Баку) **77**; *В. Дядечко* (Винница) **74, 75, 77**; *А. Езерский* (Минск) **74, 75, 77, 79—83, 87**; *В. Завадский* (Минск) **77**; *В. Завражный* (Фрунзе) **74, 77**; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) **81**; *Ф. Занин* (Старый Оскол) **83**; *Д. Звонов* (Челябинск) **85**; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) **75**; *Е. Зельцер* (Киев) **74, 75, 77, 79, 82**; *А. Зискинд* (Винница) **74, 75, 77, 87**; *К. Зуев* (Вологда) **74, 77**; *Г. Исрафилов* (Шекинский р-н АзССР) **74, 75**; *М. Ифиев* (Москва) **75**; *С. Казенас* (Алма-Ата) **81**; *Е. Кальмирук* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 75, 77**; *В. Каменькович* (Харьков) **74, 77**; *В. Камчатный* (Киев) **74, 75**; *А. Капустин* (Москва) **74, 75, 80—83, 87**; *В. Касабян* (Баку) **75**; *А. Клочанов* (Алма-Ата) **74, 77**; *Р. Кобзев* (Канев) **74, 75, 80**; *С. Коваценко* (Винница) **83**; *А. Колесник* (Старый Оскол) **83**; *М. Колпаков* (Абанский р-н Красноярского кр.) **87**; *А. Комник* (Старый Оскол) **81—83, 87**; *О. Кондратьев* (Брест) **75, 80, 87**; *Д. Коростелкин* (Киев) **74**; *Е. Корсунский* (Харьков) **74, 75, 77**; *А. Коршиков* (Мозырь) **74, 75, 77, 81, 85, 87**; *А. Корытько* (Киев) **74**; *С. Кравец* (Старый Оскол) **74, 77**; *Ю. Кравченко* (Москва) **83, 87**; *К. Краснов* (Киев) **74**; *И. Королев* (Старый Оскол) **77**; *М. Кудава* (Тбилиси) **74, 80—82**; *В. Кузьменко* (Ивано-Франковск) **83**; *Ю. Кумпан* (Москва) **74, 77**; *О. Кушнир* (Дубляны) **74, 75, 87**; *В. Лашко* (Глазов) **75**; *Ю. Левин* (Харьков) **74, 81**; *В. Лендерман* (Киев) **74, 77**; *И. Лохтин* (Москва) **74**; *С. Луганский* (Москва) **74, 82**; *О. Лугуев* (Махачкала) **75, 85**; *А. Лутовинов* (Мичуринск) **79, 81**; *М. Лысянский* (Новосибирск) **87**; *А. Мазуренко* (Минск) **74, 75, 77, 79—82, 87**; *А. Майков* (Старый Оскол) **77, 81, 82, 87**; *Р. Маяков* (Саратов) **74, 77, 79—82, 87**; *А. Мамаев* (Заволжье) **74, 77, 79—81, 85, 87**; *Д. Матрасулов* (Хазарасп) **83**; *А. Мацко* (Киев) **74, 75, 77, 82, 83**; *А. Мелеховец* (Брест) **74, 75, 87**; *О. Мельников* (Красноярск) **74, 75, 85**; *В. Меркер* (Старый Оскол) **81, 83, 87**; *А. Мина* (Киев) **74, 80**; *А. Митусов* (Ефремов) **75**; *А. Михайлова* (Старый Оскол) **81**; *Н. Михайловский* (Красноярск) **75, 80, 87**; *П. Михеев* (Старый Оскол) **81**; *Я. Михеев* (Киев) **74**; *К. Моршнев* (Фрязино) **74, 77, 79, 81**; *Р. Москвин* (Раменское) **74, 77, 85, 87**; *И. Набиев* (Баку) **74**; *А. Натаров* (Белгород) **83**; *О. Наумов* (Заволжье) **85**; *К. Недбаев* (Брест) **75, 87**; *М. Недвига* (Корсунь-Шевченковский) **83**; *К. Николоев* (п. Черноголовка Московской обл.) **74, 75, 77**; *А. Новик* (Мозырь) **74, 75, 77, 79, 81, 87**; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) **74, 75, 77**; *А. Носенко* (Коммунарск) **75, 77, 79—81**; *М. Оконь* (Старый Оскол) **83, 87**; *В. Ольховец* (Киев) **77**; *А. Ольшанский* (Жданов) **74**; *З. Османов* (Тбилиси) **74, 77**; *В. Павлунин* (Фрунзе) **74**; *А. Панас* (Могилев) **74, 77, 80, 83**; *И. Паниашвили* (Тбилиси) **74**; *Е. Пармузин* (Старый Оскол) **83**; *Д. Пастухов* (Москва) **74, 77, 80—83, 85**; *В. Пастушенко* (Джалал-Абад) **77**; *К. Пенанен* (Одесса) **74, 77, 79—83, 87**; *Л. Петько* (Минск) **74, 75, 77, 79—83, 87**; *В. Писаренко* (Киев) **83**; *Т. Подоляко* (Ленинград) **74, 75, 79, 81**; *А. Подтележников* (Харьков) **74, 75, 82**; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) **74, 75, 81, 87**; *П. Полынкин* (Тула) **74, 75, 77, 81, 82, 87**; *И. Рассадин* (Минск) **75, 82**; *У. Рахманов* (Новосибирск) **74, 77, 81**; *Т. Рашник* (Киев) **74, 80, 87**; *А. Резуненко* (Харьков) **74, 77**; *А. Рожков* (Калининград) **80—82, 85, 87**; *В. Романенков* (Могилев) **74**; *А. Рыжов* (Горький) **74, 81, 82**; *А. Рыжов* (Новосибирск) **81**; *Р. Сагайдак* (Канев) **74, 75, 77**; *А. Садыков* (Казань) **77, 79, 81, 82**; *С. Сазонов* (Климовск) **75**; *А. Свердлов* (Ленинград) **74**; *В. Свидзинский* (Киев) **74, 77**; *М. Сергазин* (Алма-Ата) **75, 77**; *А. Сибиряков* (Томск) **75, 80**; *Д. Симонян* (Рига) **74, 77, 79—82**; *В. Синенко* (Канев) **74, 75, 77, 80**; *М. Соколов* (Одинцово) **83, 85, 87**; *А. Стародубов* (Алма-Ата) **74, 75**;

(Окончание см. на с. 44)



НУЛЬСТОРОННИЙ ПРОФЕССОР

М. ГАРДНЕР

Долорес, стройная черноволосая звезда чикагского ночного клуба «Пурпурные шляпы», замерла в самом центре танцевальной площадки и под едва слышный аккомпанемент оркестра, наигрывавшего какую-то восточную мелодию, начала танец живота, свой знаменитый номер «Клеопатра». В зале было совсем темно, и только сверху на нее падал изумрудный луч прожектора, поблескивая на воздушном «египетском костюме» танцовщицы.

Первым должно было упасть прозрачное покрывало, ниспадавшее с головы и закрывавшее плечи Долорес. Еще мгновение,— и Долорес изящным жестом сбросила бы покрывало, как вдруг откуда-то сверху донесся громкий звук, похожий на выстрел, и с потолка головой вниз свалился обнаженный мужчина.

Поднялся невероятный переполох.

Метрдотель Джейк Боуэрс приказал дать свет и попытался успокоить зрителей. Управляющий клубом, стоявший у оркестра и наблюдавший за представлением, набросил на распростертую фигуру скатерть и перекатил ее на спину.

Незнакомец тяжело дышал и был без сознания. Ему было далеко за пятьдесят. Бросались в глаза короткая, тщательно подстриженная рыжая борода и усы. Незнакомец был совершенно лыс и по сложению напоминал профессионального борца.

С большим трудом трем официантам удалось перенести его в кабинет управляющего. Зрительный зал волновался, дамы были на грани истерики. Изумленно тараща глаза то на потолок, то друг на друга, зрители горячо обсуждали, каким образом мог упасть незнакомец. Единственная гипотеза, не чуждая здравому смыслу, состояла в том, что тело было подброшено высоко в воздух откуда-то сбоку от танцевальной площадки. Впрочем, никто из присутствовавших в зале не видел, как это произошло.

Тем временем в кабинете управляющего бородатый незнакомец пришел в себя. По его утверждению, он был доктором Станиславом Сляпенарским, профессором математики Венского университета, прибывшим по приглашению для чтения лекций в Чикагском университете.

Прежде чем продолжить этот удивительный рассказ, считаю своим долгом предуведомить читателя, что я не был очевидцем описанного эпизода и полагаюсь всецело на интервью с метрдотелем и официантами. Тем не менее мне посчастливилось принять участие в цепи необычайных событий, которые и привели к скандальному появлению профессора, наделавшему столько шума.

События эти начались за несколько часов до того, как члены общества «Мебиус» собрались на свой ежегодный банкет в одной из укромных столовых на втором этаже клуба «Пурпурные шляпы». Общество «Мебиус» — небольшая, малоизвестная чикагская организация математиков, работающих в области топологии — одного из разделов современной математики.

Объяснить человеку, далекому от математики, что такое топология, довольно трудно. Можно сказать, что топология занимается изучением тех свойств фигур, которые сохраняются независимо от того, как деформируется фигура.

Представьте себе бублик из податливой, но необычайно прочной резины, который вы можете как угодно крутить, сжимать и растягивать в любом направлении. Независимо от того, как деформирован такой бублик, некоторые его свойства остаются неизменными. Например, в нем всегда есть дыра. В тополо-

---

Рассказ замечательного американского популяризатора Мартина Гарднера мы перепечатываем из сборника «Трудная задача» (М.: Мир, 1982). Перевод Ю. А. Данилова.

гии бублик принято называть тором. Соломинка, через которую вы пьете коктейль, тоже тор, только вытянутый. С точки зрения топологии бублик и соломинка ничем не отличаются.

Топологию не интересуют свойства фигур, связанные с длиной, площадью, объемом и тому подобными количественными характеристиками. Она занимается изучением наиболее глубоких свойств фигур и тел, которые остаются неизменными при самых чудовищных деформациях, но без разрывов и склеиваний. Если бы тела и фигуры разрешалось разрывать и склеивать, то любое тело сколь угодно сложной структуры можно было бы превратить в любое другое тело с какой угодно структурой, и все первоначальные свойства были бы безвозвратно утрачены. Поразмыслив немного, вы поймете, что топология занимается изучением самых простых, и в то же время самых глубоких свойств, какими только обладает тело*).

Хотя еще в восемнадцатом веке многие математики бились над решением отдельных топологических задач, начало систематической работы в области топологии было положено Августом Фердинандом Мебиусом, немецким астрономом, преподававшим в Лейпцигском университете в первой половине прошлого века. До Мебиуса все думали, что у любой поверхности две стороны, как у листа бумаги. Именно Мебиус совершил обескураживающее открытие: если взять полоску бумаги, перекрутить ее на пол-оборота, а концы склеить, то получится односторонняя поверхность, обладающая не двумя, а одной-единственной стороной!

Трудно поверить, что такое вообще может быть, но односторонняя поверхность действительно существует — реальная, осязаемая вещь, которую каждый может построить в один миг. В том, что у листа Мебиуса есть лишь одна сторона, сомневаться не приходится, и это свойство он сохраняет, как бы вы не растягивали и не деформировали его.

Но вернемся к нашей истории. Я преподавал математику в Чикагском университете, докторскую диссертацию защитил по топологии, и мне без особого труда удалось вступить в общество «Мебиус». Нас было не очень много — всего лишь двадцать шесть человек, главным образом чикагских топологов, но некоторые члены общества работали в университетах соседних городов.

Мы устраивали ежемесячные заседания, носившие сугубо академический характер, но раз в году — 17 ноября (в день рождения Мебиуса) — собирались на банкет и приглашали в качестве гостя какого-нибудь знаменитого тополога, который выступал с лекцией.

В нынешнем году мы решили отпраздновать годовщину патрона нашего общества в «Пурпурных шляпах», где цены были вполне умеренные, а после лекции можно было спуститься в зал и посмотреть программу варьете. С гостем нам повезло: наше приглашение принял знаменитый профессор Сляпенарский, первый тополог мира и один из величайших математических гениев нашего века.

В «Пурпурные шляпы» я и Сляпенарский поехали вместе на такси, и по дороге я попросил его рассказать в общих чертах то, о чем он собирался говорить на лекции. Сляпенарский в ответ только улыбнулся и посоветовал запастись терпением. Тема лекции «Нульсторонние поверхности» вызвала среди членов общества «Мебиус» такие оживленные толки, что даже профессор Роберт Симпсон из Висконсинского университета письменно уведомил правление о своем намерении прибыть на банкет. Ни на одном заседании в этом году профессор Симпсон присутствовать не соизволил!

---

*) Чтобы пояснить суть дела, приведем типичную топологическую задачу. Представьте себе поверхность тора, сделанную из тонкой резины, наподобие велосипедной камеры. Предположим, что в стенке тора проколота крохотная дырочка. Можно ли через эту дырочку вывернуть тор наизнанку, как выворачивают велосипедную камеру? Решить эту задачу в «уме», руководствуясь только своим пространственным воображением,— дело нелегкое.

(Нужно сказать, что профессор Симпсон считался признанным авторитетом по топологии на Среднем Западе и был автором нескольких важных работ по топологии и теории поля, в которых выступал с резкими нападками на основные тезисы теории Сляпенарского.)

Мы прибыли вовремя. После того, как наш почетный гость был представлен профессору Симпсону и другим членам общества, мы сели за стол. Я обратил внимание Сляпенарского на традицию оживлять наши банкеты мелкими деталями, выдержанными в «топологическом духе». Например, серебряные кольца для салфеток были выполнены в форме листов Мебиуса. К кофе подавали специально испеченные бублики, а кофейник был изготовлен в виде «бутылки Клейна».

После моего краткого вступительного слова Сляпенарский встал, поблагодарил присутствующих улыбкой за аплодисменты и откашлялся.

Изложить сколь-нибудь подробно блестящий, но доступный пониманию только специалистов доклад Сляпенарского вряд ли возможно. Суть его сводилась к следующему. Лет десять назад Сляпенарский наткнулся в одном из менее известных трудов Мебиуса на утверждение, поразившее его воображение. По словам Мебиуса, теоретически не существовало причин, по которым поверхность не могла бы утратить обе свои стороны: иными словами, стать «нульсторонней».

Разумеется, пояснил профессор, такую поверхность невозможно представить себе наглядно, так же как квадратный корень из минус единицы или гиперкуб в четырехмерном пространстве. Но абстрактность понятия отнюдь не означает, что оно лишено смысла или не может найти применения в современной математике и физике.

Не следует забывать и о том, продолжал профессор, что те, кто никогда не видел лист Мебиуса, не могут представить себе даже одностороннюю поверхность. Немало людей с хорошо развитым математическим воображением отказываются верить в существование односторонней поверхности, даже когда лист Мебиуса у них в руках.

Я взглянул на профессора Симпсона, и мне показалось, что при этих словах он чуть заметно улыбнулся.

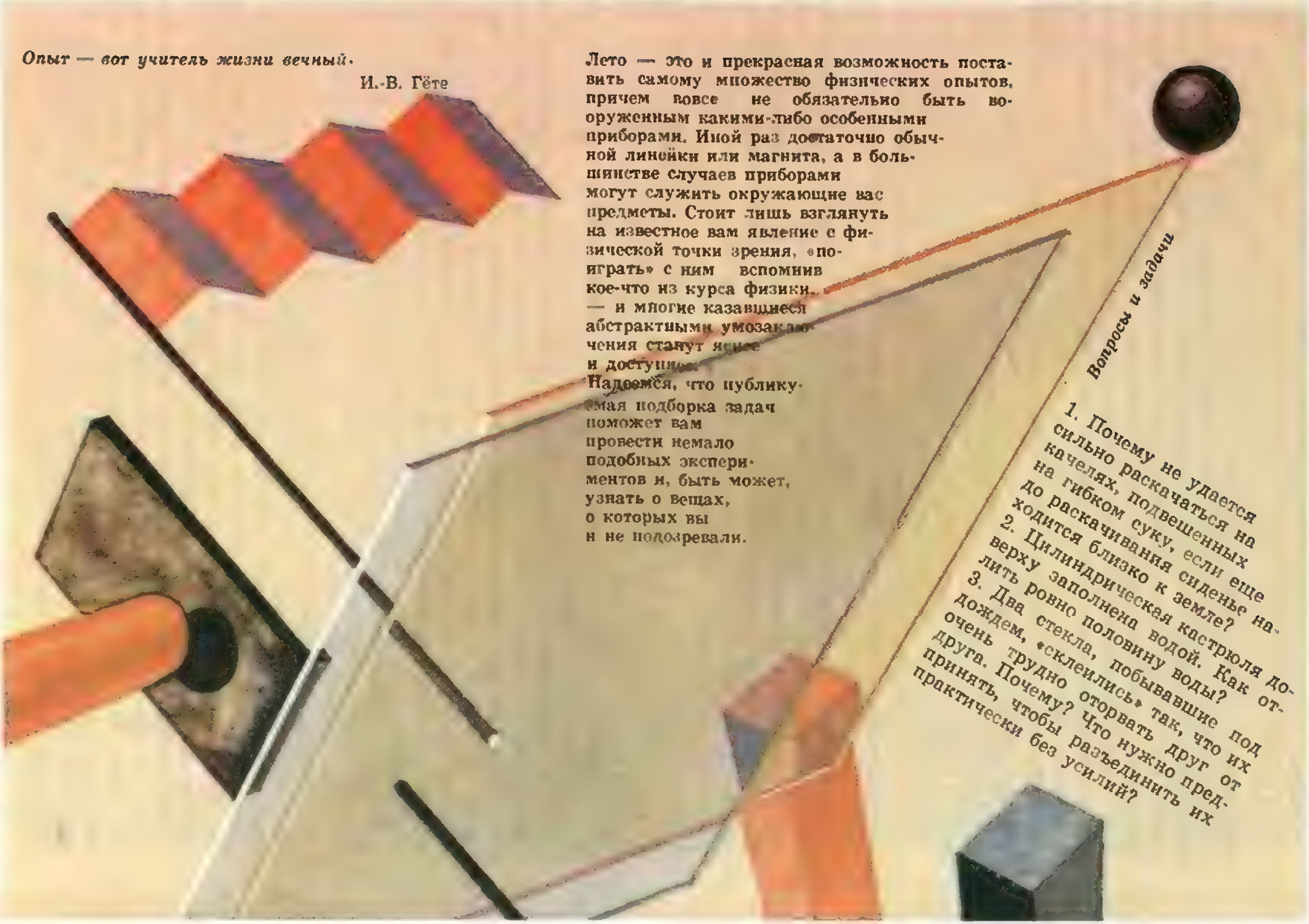
На протяжении многих лет, продолжал Сляпенарский, он упорно стремился построить нульстороннюю поверхность. По аналогии с известными типами поверхностей ему удалось изучить многие свойства нульсторонней поверхности. Наконец, долгожданный день настал. Сляпенарский выдержал паузу, чтобы посмотреть, какое впечатление его слова произвели на слушателей, и окинул взглядом замершую аудиторию. Его усилия увенчались успехом, и он построил нульстороннюю поверхность.

Подобно электрическому разряду, его слова обежали сидевших за столом. Каждый встрепенулся, удивленно посмотрел на соседа и уселся поудобнее. Профессор Симпсон яростно затряс головой. Когда Сляпенарский отошел в дальний конец столовой, где была приготовлена классная доска, Симпсон повернулся к соседу слева и шепнул: «Чушь несусветная! Либо Сляппи совсем спятил с ума, либо он просто вздумал подшутить над нами».

Мне кажется, что мысль о розыгрыше пришла в голову многим из присутствовавших. Я видел, как некоторые из них недоверчиво улыбались, пока профессор вычерчивал на доске сложные схемы.

После некоторых пояснений (их я полностью опускаю из опасения, что они были бы совершенно непонятны большинству читателей) профессор заявил, что хотел бы в заключение лекции построить одну из простейших нульсторонних поверхностей. К этому времени все присутствовавшие, не исключая и меня, обменивались понимающими улыбками. На лице профессора Симпсона улыбочка была несколько напряженной.

(Продолжение см. на с. 42)



Опыт — вот учитель жизни вечный.

И.-В. Гёте

Лето — это и прекрасная возможность поставить самому множество физических опытов, причем вовсе не обязательно быть вооруженным какими-либо особенными приборами. Иной раз достаточно обычной линейки или магнита, а в большинстве случаев приборами могут служить окружающие вас предметы. Стоит лишь взглянуть на известное вам явление с физической точки зрения, «поиграть» с ним вспомнив кое-что из курса физики, — и многие казавшиеся абстрактными умозаключения станут яснее и доступнее. Надеемся, что публикуемая подборка задач поможет вам провести немало подобных экспериментов и, быть может, узнать о вещах, о которых вы и не подозревали.

Вопросы и задачи

1. Почему не удается сильно раскачаться на качелях, подвешенных на гибком суку, если еще до раскачивания сиденье находится близко к земле?
2. Цилиндрическая кастрюля доверху заполнена водой. Как отлить ровно половину воды?
3. Два стекла, побывавшие под дождем, «склеились» так, что их очень трудно оторвать друг от друга. Почему? Что нужно предпринять, чтобы разъединить их практически без усилий?

4. Вам известно, что в алюминиевом шарике имеется большой воздушный пузырек. Можно ли узнать, где он находится — в центре шарика или вблизи его поверхности?

5. Чтобы разыскать прокол в надувном матрасе, можно для создания давления положить на него стопку книг. Будет ли струйка воздуха из отверстия столь же интенсивной, если эти книги разложить двумя стопками?

6. Почему стук громче, если стучать не в стенку, а в дверь?

7. Как определить диаметр футбольного мяча с помощью деревянной линейки?

8. Налейте в чистую тарелку хорошо прокипяченной воды и набросайте на ее поверхность несколько спичек. Если коснуться воды между спичками кусочком сахара, то они сплываются, если же коснуться мылом — разбегаются в разные стороны. Почему?

9. Развевающийся на здании одноцветный флаг кажется ночью полосатым, если его подсвечивать с определенного направления, причем полосы все время перемещаются. Как это объяснить?

10. Можно ли, не разбирая кофемолки, определить направление вращения ротора ее электродвигателя?

11. Почему в свете фар автомобиля лужа на асфальте ночью кажется водителю темным пятном?

12. Как с помощью сильного магнита определить, постоянным или переменным током питается электролампочка?

13. Если в холодную погоду отлить из термоса часть горячего чая и снова плотно закрыть термос пробкой, то через некоторое время можно обнаружить, что пробка вылетела. Отчего это могло произойти?

Сляпенарский достал из кармана пиджака пачку синей бумаги, ножницы и тюбик с клеем. Он вырезал из бумаги фигурку, до странности напоминавшую бумажную куклу: пять длинных выступов, или отростков, походили на голову, руки и ноги. Затем он сложил фигурку и стал аккуратно склеивать концы отростков. Процедура была весьма деликатная и требовала большой осторожности, выступы весьма хитроумно переплетались. Наконец, осталось только два свободных конца. Сляпенарский капнул клеем на один из них.

— Джентльмены,— сказал он, держа перед собой замысловатое сооружение из синей бумаги и поворачивая его так, чтобы все могли видеть,— сейчас вы увидите первую публичную демонстрацию поверхности Сляпенарского.

С этими словами профессор прижал один из свободных концов к другому.

Раздался громкий хлопок, как будто лопнула электрическая лампа,— и бумажная фигурка исчезла!

На мгновение мы замерли, а потом все как один разразились смехом и аплодисментами.

Разумеется, мы были убеждены, что стали жертвами тонкого розыгрыша. Но нельзя не признать, что исполнено все было великолепно. Как и другие участники банкета, я полагал, что Сляпенарский показал нам остроумный химический фокус, и что бумага была пропитана особым составом, позволяющим поджечь ее трением или каким-то другим способом, после чего она мгновенно сгорела, не оставив и пепла.

Профессор Сляпенарский, казалось, был озадачен дружным смехом, и лицо его приобрело неотличимый от бороды цвет. Он смущенно улыбнулся и сел. Аплодисменты мало-помалу стихли.

Мы все столпились вокруг нашего гостя и наперебой шутливо поздравляли его с замечательным открытием. Старший из официантов напомнил нам, что для тех, кто хотел бы заказать напитки и посмотреть программу варьете, внизу заказаны столики.

Столовая постепенно опустела. В комнате остались только Сляпенарский, Симпсон и ваш покорный слуга. Два знаменитых тополога стояли у доски. Симпсон, широко улыбаясь, указал на один из чертежей:

— Ошибка в вашем доказательстве скрыта необычайно остроумно, профессор. Не знаю, заметил ли ее еще кто-нибудь из присутствующих.

Лицо Сляпенарского было серьезно.

— В моем доказательстве нет никакой ошибки,— заметил он не без раздражения.

— Да полно вам, профессор,— возразил Симпсон,— ошибка вот здесь.

Он коснулся пальцем чертежа:

— Пересечение этих линий не может принадлежать многообразию. Они пересекаются где-то вне многообразия.— Он сделал неопределенный жест вправо.

Лицо Сляпенарского снова покраснело.

— А я говорю вам, что никакой ошибки здесь нет,— повторил он, повысив голос, и медленно, тщательно выговаривая, как бы выстреливая слова, повторил шаг за шагом все доказательство от начала до конца, постукивая для пущей убедительности по доске костяшками пальцев.

Симпсон слушал с мрачным видом и в одном месте прервал Сляпенарского, возразив ему что-то. Сляпенарский мгновенно парировал возражение. Последовало еще одно замечание, но и оно не осталось без ответа. Я не вмешивался в их спор, поскольку он уже давно вышел за рамки моего понимания и воспарил к недоступным мне высям топологии.

Между тем страсти у доски накалялись, оппоненты говорили все громче и громче. Я уже говорил о давнем споре Симпсона со Сляпенарским по поводу нескольких топологических аксиом. О них-то теперь и зашла речь.

— А я говорю вам, что ваше преобразование не взаимно непрерывно и, стало быть, эти два множества не гомеоморфны,— кричал Симпсон.

На висках Сляпенарского вздулись вены.

— Не будете ли вы так любезны объяснить в таком случае, каким образом исчезло мое многообразие? — заорал он в ответ.

— Дешевый трюк, ловкость рук и ничего больше,— презрительно фыркнул Симпсон.— Не знаю, да и знать не хочу, как вы его делаете, но ясно одно: ваше многообразие исчезло не из-за того, что стало нульсторонним.

— Ах, не стало? Не стало? — процедил Сляпенарский сквозь зубы и, прежде чем я успел вмешаться, нанес своим огромным кулаком удар Симпсону в челюсть. Профессор из Висконсина со стоном упал на пол. Сляпенарский обернулся ко мне с грозным видом.

— Не вздумайте вмешиваться, молодой человек,— предупредил он меня. Профессор был тяжелее меня по крайней мере на сотню фунтов, и я, вняв предупреждению, отступил.

О дальнейшем я вспоминаю с ужасом. С налитым кровью глазами Сляпенарский присел рядом с распростертой фигурой своего оппонента и принялся сплетать его руки и ноги в фантастические узлы. Он складывал своего коллегу из Висконсина так же, как полоску бумаги! Раздался взрыв — и в руках у Сляпенарского осталась только груда одежды.

Симпсон обрел нульстороннюю поверхность.

Сляпенарский поднялся, тяжело дыша и судорожно сжимая твидовый пиджак Симпсона. Потом он разжал руки и пиджаком накрыл остатки симпсоновского туалета, лежавшие на полу. Сляпенарский что-то невнятно пробормотал и принялся колотить себя кулаком по голове.

Я сохранил достаточно самообладания, чтобы догадаться запереть дверь. Когда я заговорил, голос мой звучал чуть слышно:

— А его... можно вернуть?

— Не знаю, ничего не знаю,— завопил Сляпенарский.— Я только начал изучать нульсторонние поверхности, только начал. Не знаю, где он может быть. Ясно только одно: Симпсон сейчас находится в пространстве бóльшего числа измерений, чем наше, скорее всего в четномерном пространстве. Бог знает куда его занесло.

Внезапно он схватил меня за лацканы пиджака и тряхнул так сильно, что я подумал, не настала ли теперь моя очередь.

— Я должен найти его,— сказал Сляпенарский.— Это единственное, что я могу сделать.

Он уселся на пол и принялся переплетать самым невероятным образом свои руки и ноги.

— Да не стойте вы, как идиот,— прикрикнул он на меня.— Лучше помогите.

Я кое-как привел в порядок свою одежду и помог ему изогнуть правую руку так, чтобы она прошла под его левой ногой и вокруг шеи. С моей помощью ему удалось дотянуться до уха. Левая рука была изогнута аналогичным способом.

— Сверху, сверху, а не снизу,— раздраженно поправил меня Сляпенарский, когда я пытался помочь ему дотянуться левой рукой до кончика носа.

Раздался еще один взрыв, гораздо более громкий, чем тот, которым сопровождалось исчезновение Симпсона, и лицо мое обдал порыв холодного ветра. Когда я открыл глаза, передо мной на полу высилась еще одна груда одежды.

Я стоял и тупо смотрел на две кучи одежды, как вдруг сзади раздался приглушенный звук, нечто вроде «пффт». Оглянувшись, я увидел Симпсона. Он стоял у стены голый и дрожал. В лице его не было ни кровинки. Затем ноги его подкосились, и он опустился на пол. На его конечностях, там, где они плотно прилегали друг к другу, выступали красные пятна.

Я подкрался к двери, отпер ее и устремился вниз по лестнице: мне настоятельно требовалось подкрепиться. Потом мне рассказали о страшном переполохе в зале: за несколько секунд до моего появления Сляпенарский завершил свой прыжок из другого измерения.

В задней комнате я застал других членов общества «Мебиус» и администрацию клуба «Пурпурные шляпы» за шумным и бестолковым спором. Сляпенарский, завернувшись в скатерть как в тогу, сидел в кресле и прижимал к нижней челюсти носовой платок с кубиками льда.

— Симпсон вернулся,— сообщил я.— Он в обмороке, но думаю, что с ним все в порядке.

— Славу богу,— пробормотал Сляпенарский.

Администратор и владелец «Пурпурных шляп» так и не поняли,что произошло в тот сумбурный вечер, и наши попытки что-либо объяснить лишь усугубляли ситуацию. Прибытие полиции еще больше усилило неразбериху и панику.

Наконец, нам удалось одеть пострадавших коллег, поставить их на ноги, и мы покинули поле брани, пообещав вернуться назавтра с нашими адвокатами. Управляющий, по-видимому, считал, что его клуб пал жертвой заговора каких-то иностранцев, и грозился взыскать с нас компенсацию за ущерб, нанесенный, по его словам, «безупречной репутации клуба». Оказалось, что таинственное происшествие, слух о котором разнесся по городу, послужило клубу отличной рекламой, и «Пурпурные шляпы» отказались от иска.

Симпсон отделался легко, но у Сляпенарского оказался перелом челюсти. Я отвез его в госпиталь Биллингс, что неподалеку от университета.

Несколько недель он пробыл в госпитале, запретив пускать к себе посетителей, и я увидел его только в день выписки, когда проводил его на вокзал. Сляпенарский уехал в Нью-Йорк, и с тех пор я его не видел. Через несколько месяцев он скончался от сердечного приступа. Профессор Симпсон вступил в переписку с вдовой профессора Сляпенарского в надежде разыскать хотя бы черновики работ своего покойного коллеги по теории нульсторонних поверхностей.

Сумеют ли топологи разобраться в черновиках Сляпенарского (разумеется, если их удастся найти), покажет будущее. Мы извели массу бумаги, но пока что нам удавалось построить только обычные двусторонние и односторонние поверхности. Хоть я и помогал Сляпенарскому «складываться» в нульстороннюю поверхность, чрезмерное волнение стерло из моей памяти все детали.

Но я никогда не забуду замечание, которое обронил великий тополог в тот памятный вечер перед моим уходом.

— Счастье,— сказал он,— что Симпсон и я успели перед возвращением освободить правую руку.

— А что могло бы случиться? — спросил я недоумевающе.

Сляпенарский поежился.

— Мы бы вывернулись наизнанку,— сказал он.

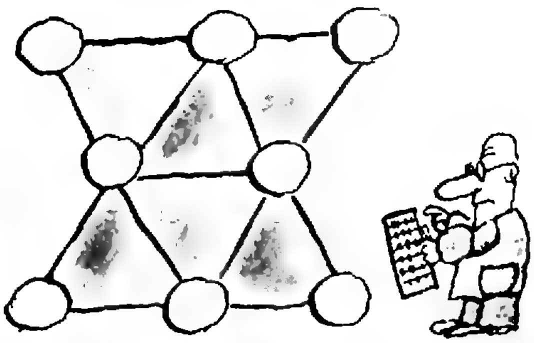
Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

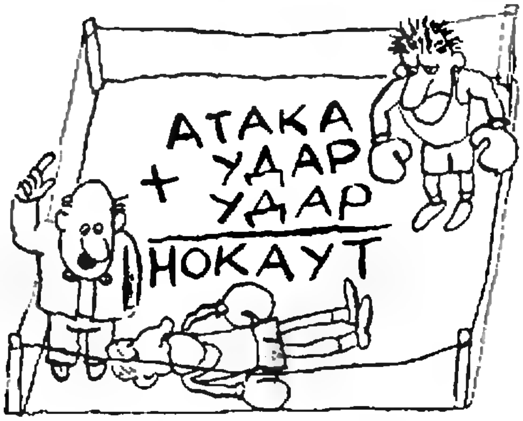
М. Столяр (Киев) 74, 80—82; *Д. Сторожук* (Киев) 74, 75; *М. Субботин* (Старый Оскол) 83; *А. Супруненко* (Киев) 74; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) 77, 87; *Д. Тейтельман* (Минск) 75; *В. Тенависиров* (Русе, НРБ) 77; *С. Титов* (Старый Оскол) 81; *И. Тодощенко* (Пермь) 74, 75, 77, 79—81, 87; *Д. Толкачев* (Ногинск) 85, 87; *Ю. Уваров* (Леннинград) 74, 77, 87; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 74, 75, 87; *Е. Ушакова* (Старый Оскол) 83; *В. Федотов* (Москва) 77, 80, 81; *Г. Фейгин* (Тула) 74, 75, 77, 82, 83, 87; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) 74, 77, 79, 82, 83, 87; *С. Фираго* (Шклов) 74; *И. Химони* (Днепропетровск) 74, 75, 79, 82, 87; *О. Хорошилова* (Старый Оскол) 83; *О. Цодиков* (Артемовск Донецкой обл.) 87; *И. Чайка* (Кузнецовск) 74, 75, 77, 82; *О. Чанов* (Брест) 74, 75, 81, 82, 85, 87; *О. Черных* (Старый Оскол) 81—83; *В. Чуев* (Старый Оскол) 77; *В. Шварцман* (Брест) 75; *О. Шведов* (Москва) 74, 75, 77, 81, 83, 85, 87; *С. Шинкевич* (Березники) 74, 75, 77, 79—83, 87; *О. Шиховцев* (Верхняя Салда) 80—82; *С. Штовба* (Винница) 74; *И. Ягольницер* (Черновцы) 75; *В. Янкевич* (Витебск) 77, 83; *И. Ясников* (Тольятти) 75, 77, 81.

„Квант" для младших школьников

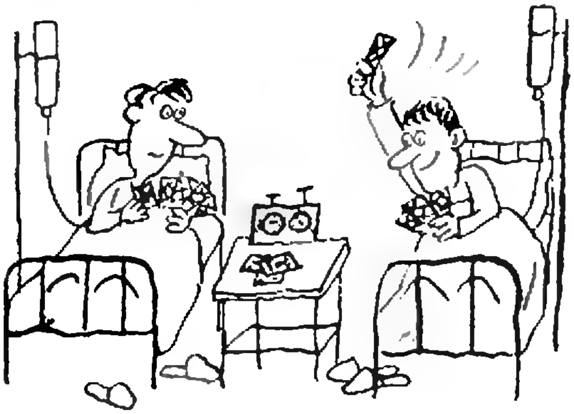
Задачи



1. Числа от 1 до 8 расставьте в кружки фигуры, изображенной на рисунке, так, чтобы сумма трех чисел в вершинах каждого зеленого треугольника равнялась 13, а в вершинах каждого коричневого треугольника равнялась 14.

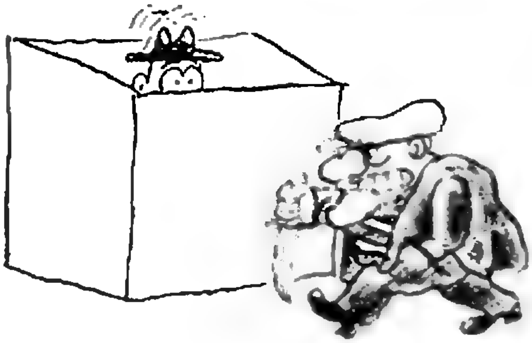


2. Решите числовой ребус, изображенный на рисунке. Одинаковым цифрам соответствуют одинаковые буквы, разным — разные.



3. В шахматном турнире Женя и Саша сыграли одинаковое количество партий, заболели и выбыли из турнира. Остальные участники турнира доиграли до конца. Всего в турнире было сыграно 23 партии. Играли ли Женя и Саша в турнире между собой?

4. ЭВМ напечатала два числа: 2^{1987} и 5^{1987}. Сколько цифр она при этом напечатала?



5. Все стенки и дно картонной коробки (без крышки) представляют собой квадраты площадью 1. Разрежьте коробку на три куска так, чтобы из них можно было сложить квадрат площадью 5.

Эти задачи нам предложили: *Н. И. Авилов, ученица [illegible] класса из г. Ленинграда Н. Яковлева, ученик 10 класса из г. Гагарина В. Близнеков, ученик 10 класса из г. Харькова В. Пушня, В. В. Произволов.*

Лаборатория „Кванта"

Наверное, каждый из вас хотя бы однажды любовался радугой — этим красивым и загадочным природным явлением.
А как образуется радуга? Когда и как ее можно увидеть? Какова теория этого явления? Можно ли экспериментально исследовать радугу? Как получить искусственную радугу? Ответы на эти вопросы вы сможете найти, прочитав публикуемые ниже две статьи.

Кто творит радугу?

Доктор физико-математических наук
Я. Е. ГЕГУЗИН

Радугу творят водяные капли: в небе — дождинки, на поливаемом асфальте — капельки, брызги от водяной струи. Радугу могут сотворить и капли-росинки, которыми осенним утром покрыта низко скошенная трава.

Вначале поговорим о «геометрии» радуги, т. е. о форме и расположении разноцветных дуг, а затем — о «физике» радуги, о том, какие физические законы определяют ее форму и цвета.

«Геометрия» радуги в небе описана давным-давно. Обычно в небе видны две разноцветные концентрические дуги — одна яркая, а другая побледнее. Каждая дуга является частью окружности, центр которой лежит на прямой, проведенной через солнце и глаз наблюдателя. Эта прямая — своеобразная ось, и вокруг нее изогнута радуга. Глаз наблюдателя оказывается в вершине конусов, в основании которых — разноцветные дуги (рис. 1). Образующие этих конусов с осью соответственно составляют углы 42 и 51°. Солнце светит из-за спины наблюдателя, и чем ниже оно опускается к горизонту, тем выше поднимается вершина радуги. В тот момент, когда солнце касается горизонта, можно увидеть полукруглую радугу — большей она никогда не бывает. Если же солнце поднимется над горизонтом более чем на 42°, вершина яркой радуги уйдет за горизонт.

Эта статья — глава из книги «Капля» известного популяризатора физики Я. Е. Гегузина (М.: Наука, 1973).

Все происходит так, будто негнущиеся прямые, как коромысло, закреплены в точке *O*, где находится глаз *наблюдателя, а на концах коромысла* — солнце и вершина радуги. Это означает, что у каждого наблюдателя «своя» радуга, изогнутая вокруг «своей» оси, той самой, которая проходит через его глаз... И еще: дойти до *радуги, как и до горизонта*, невозможно. И приблизиться к ней тоже невозможно, потому что это означало бы изменение всей геометрии радуги, в частности угла при вершине конуса. А его соблюдение — первейшее *требование и физики и геометрии* радуги.

К геометрическим сведениям следует отнести данные о порядке чередования цветов в радугах. Как известно, в радуге представлены «все цвета *радуги*» — *от красного* до фиолетового. Порядок цветов в дугах обратный, и друг к другу они обращены красными полосами. Вот и вся геометрия радуги, во всяком случае той, которая сотворена каплями в небе.

Теперь о физике радуги. Ее история восходит к 1637 году, когда французский философ и естествоиспытатель Рене Декарт впервые понял роль капли в возникновении радуги. Свое открытие он подтвердил расчетом, *потребовавшим затраты* огромного труда: он проследил путь в сферической капле десяти тысяч параллельных солнечных лучей. Первый из них касается поверхности капли, а десятитысячный проходит через ее центр, т. е. *расстояние между* крайними лучами равно радиусу капли.

Идея Декарта была проста и естественна. Он считал, что солнечные лучи, двукратно преломляясь в капле и один раз отражаясь от ее поверхно*сти, могут попасть* в глаз наблюдателя (рис. 2). Проследив такой путь десяти тысяч лучей, он убедился, что все лучи, номера которых приблизительно находятся между 8500 и 8600, будут из капли выходить практически в одном и том же направлении, под углом 42° к оси радуги. Следовательно, среди прочих это направление выделено своей яркостью, и стократно усиленный луч воспримется наблюдателем...

Все рассказанное о десяти тысячах лучей касается главной радуги, той, к которой относится цифра 42°. Если же мы рассмотрим более сложный путь лучей в капле — два преломления при двух, а не одном отражении — получим объяснение второй дуги, к которой относится цифра 51°.

...Появление цветов — естественное следствие зависимости показателя преломления от длины волны света. В капле происходит то же, что в стеклянной призме, которая разлагает белый свет на «все цвета радуги». «Физика» радуги остается неизменной при различных «геометриях» — для радуги на мокром асфальте и на скошенной траве, покрытой росой.

Еще следует упомянуть об эффектах, связанных с малостью размера капель. Те капли, которые в основном творят радугу, имеют диаметр 0,08—0,20 мм. При таких размерах надо учитывать, что свет имеет волновую природу. Однако связанные с этим изменения элементарной теории Декарта, который рассматривает луч, а не волну, оказываются не очень существенными.

Если бы создающие радугу капли сохранялись в небе, не изменяясь, радугу можно было бы наблюдать в течение не более 2 ч 48 мин: именно за это время солнце по небосводу проходит дуговой путь в 42°. Но каплям в небе не свойственно долголетие — они испаряются, соединяются и, уве-

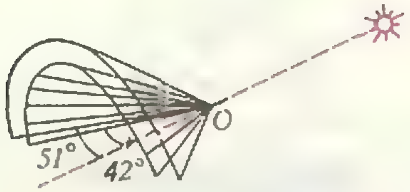


Рис. 1.

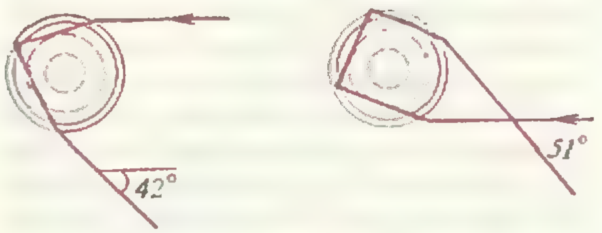


Рис. 2.

личивая свой размер, опадают. Все это отражается на радуге — на яркости ее цвета, ширине соответствующих световых полос, продолжительности ее жизни. Когда капель становится мало, радуга блекнет и исчезает.

Искусственная радуга

В. В. МАЙЕР, Р. В. МАЙЕР

Одно дело теория радуги или случайные наблюдения этого природного явления и совсем другое — его экспериментальное исследование. Но для этого нужно прежде всего получить радугу искусственно.

Искусственные радуги известны давно. В одном из опытов наполненную водой круглую колбу сквозь отверстие в экране освещают параллельным пучком света и наблюдают возникающую на экране цветную каемку. Главный недостаток этого опыта заключается в том, что он не совсем отражает реальное положение вещей: настоящая радуга получается не от одной капли, а от огромного количества капель. Можно сделать и по-другому: с помощью пульверизатора или небольшого фонтана создать облако падающих в воздухе капель и на них наблюдать радугу. Условия такого опыта вполне соответствуют природным, однако получить требуемое облако совсем не просто, да и экспериментировать с ним не слишком приятно.

Мы же предлагаем вам еще один опыт и надеемся, что вы его обязательно проведете.

Приготовьте ровный лист дюраля или жести размером примерно 200×200 мм, свечу, воду или глицерин, микроэлектродвигатель, батарейку на 4,5 В, грифель от простого карандаша или кусок нихромового проводника диаметром 0,2—0,3 мм и длиной 200—400 мм, ластик, стальную проволоку диаметром около 0,3 мм и длиной 100 мм (такую проволоку можно получить, растянув подходящую пружинку), жестяную или полиэтиленовую крышку для банки. Оказывается, используя перечисленные предметы, можно получить устойчивое множество примерно одинаковых капель, пригодное для наблюдения и исследования радуги.

Основная идея заключается в следующем: если прозрачную жидкость распылить на несмачивающуюся ею поверхность, то под действием сил поверхностного натяжения капельки превращаются в прозрачные шарики. А это как раз то, что нужно для создания радуги. А теперь — за дело.

Металлическую пластинку вымойте с мылом и высушите. Перемещая ее над пламенем свечи, равномерно нанесите на поверхность пластинки слой копоти. Вода и глицерин не смачивают копоть, но, если влажность воздуха велика, копоть может отслоиться от пластинки и как бы «промокнуть». Чтобы исключить это нежелательное явление, пластинку нужно предварительно покрыть тонким слоем клея «Момент», нитролака или нитрокраски и после высыхания этого слоя нанести копоть.

Глицерин в опытах предпочтительнее воды, потому что он испаряется значительно медленнее. Даже в жаркую погоду «глицериновую радугу» вы сможете наблюдать несколько суток, а от «водяной» уже через час не останется и следа.

Для нанесения капель жидкости на закопченную поверхность необходим распылитель. К сожалению, обычный пульверизатор для этого не годится. Дело в том, что он выдает капли, размеры которых колеблются

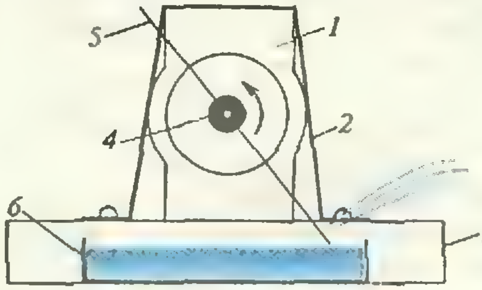


Рис. 1.

в довольно широких пределах, а на таких каплях радуга получается размазанной, не контрастной. Хорошие же радуги дают примерно одинаковые капли диаметром от 0,3 до 1 мм.

Одна из возможных конструкций генератора капель показана на рисунке 1. Микроэлектродвигатель *1* жестяной обжимкой *2* и двумя болтами закреплен на основании *3*. На вал двигателя насажен кусок ластика *4*, сквозь который пропущена стальная проволока *5*. Концы проволоки при вращении вала попеременно погружаются в жидкость, налитую в неглубокую баночку (крышку) *6*, и, покидая ее, разбрызгивают капли. Понятно, что диаметр капель определяется диаметром проволоки, глубиной погружения в жидкость и скоростью ее вращения. Чтобы можно было изменять эту скорость, микроэлектродвигатель подключите к батарейке через импровизированный реостат, состоящий из грифеля или куска нихромового проводника. Капли, срывающиеся с концов вращающейся проволоки, летят не только в направлении, показанном на рисунке, но и в другие стороны, поэтому сзади и с боков генератор капель нужно оградить П-образным защитным экраном из картона. Положив перед открытой частью экрана лист черной бумаги, отрегулируйте скорость вращения брызгающей проволоки (она должна составлять не более нескольких оборотов в секунду) и определите место преимущественного падения капель. Введите туда закопченную металлическую пластинку и, перемещая ее, добейтесь по возможности равномерного покрытия пластинки каплями. Плотность капельного слоя должна быть настолько большой, чтобы в рассеянном отраженном свете поверхность пластинки казалась состоящей сплошь из блестящих капелек.

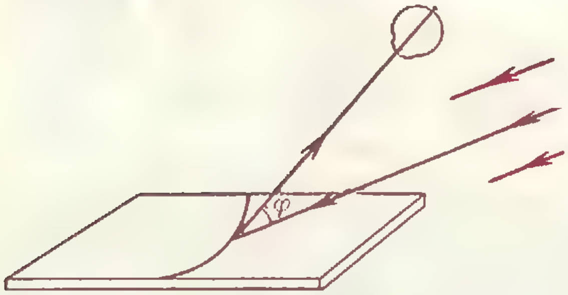


Рис. 2.

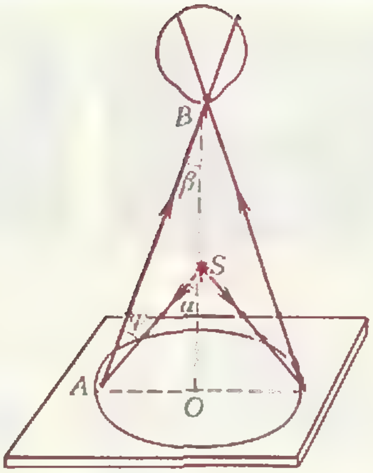


Рис. 3.

Для наблюдения радуги достаточно пластинку с каплями подставить под прямые лучи и подобрать необходимый угол φ между этими лучами и направлением наблюдения (рис. 2; радуга схематически показана кривой линией). Как следует из теории радуги, этот угол для воды должен быть равен $\varphi_в = 42°$, а для глицерина — $\varphi_г = 27°$.

Если все сделано достаточно хорошо, вы увидите прекрасную яркую радугу и, может быть, рядом с ней — вторую, значительно более слабую. Явление настолько впечатляющее, что, чтобы увидеть его, право, стоит потрудиться.

В природе радуга обычно представляет собой часть окружности (если исключить радугу на росе и ту, которую при особом везении можно увидеть с самолета). Вам же ничто не мешает наблюдать полную радугу (полную окружность). Для этого на расстоянии 5—8 см от пластинки с каплями закрепите лампочку для карманного фонаря. При наблюдении сверху вы заметите слабо освещенный круг с разноцветной границей, которая и является радугой (рис. 3; радуга схематически показана окружностью). Закрывая поочередно один глаз, а затем другой, вы обнаружите, что радуга несколько смещается от-

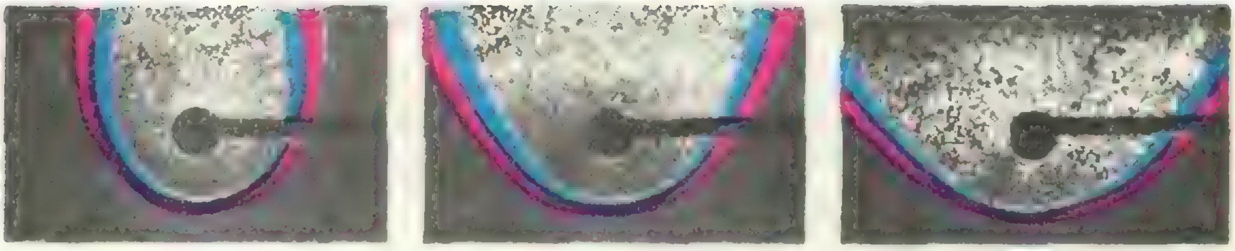


Рис. 4.

носительно пластинки. Вот почему при наблюдении двумя глазами сразу радуга кажется не лежащей на пластинке с каплями, а парящей над ней.

К сожалению, мы не сумели получить цветные фотографии искусственной радуги. На рисунке 4 приведены черно-белые снимки, раскрашенные карандашами. Они лишь иллюстрируют результаты наблюдений при разных условиях, но ни в коей мере не передают всей красоты явления. На переднем плане этих фотографий видна закрепленная в держателе лампочка. Если на пластинку с каплями смотреть почти сверху, то наблюдается полная радуга в виде эллипса (рис. 4, *а*); при смещении глаза вниз и вбок радуга становится похожей на параболу (рис. 4, *б*) и гиперболу (рис. 4, *в*).

Вопросы для самостоятельной работы

1. Похожа ли созданная вами радуга на ту, которая иногда наблюдается на росе? Соответствует ли последовательность цветов в искусственной радуге той, которая имеет место в естественной?

2. Пользуясь схемой наблюдения, представленной на рисунке 3, измерьте расстояния OA, OS, OB, вычислите углы α и β и определите угол φ, под которым наблюдается радуга на водяных и глицериновых каплях. Подтверждают ли ваши измерения теоретические расчеты?

3. Объясните, почему в ваших опытах внутри радуги получается освещенная белая область (см. рис. 4), а в природе такая область не наблюдается.

4. Поместив перед глазом поляроидную пленку, на полной радуге вы заметите две диаметрально противоположные темные полосы, которые поворачиваются вместе с вращением поляроида. Какова причина этого явления?

5. Экспериментально покажите, что чем меньше диаметр капель, тем слабее красный цвет радуги, заметнее фиолетовый и в целом радуга становится более белесой.

И в заключение — рекомендуемая литература:

1. И. К. Белкин. Что такое радуга? — «Квант», 1984, № 12, с. 20.

2. Я. Е. Гегузин. Капля.— М.: Наука, 1973.

3. М. Миннарт. Свет и цвет в природе.— М.: Наука, 1969.

4. Л. В. Тарасов, А. Н. Тарасова. Беседы о преломлении света.— М.: Наука, серия «Библиотечка «Квант», выпуск 18, 1982.

Дорогие читатели!
Журнал «Квант» распространяется только по подписке. Если вы хотите стать нашими подписчиками, вы можете оформить подписку в агентствах «Союзпечати», на почтамтах или в отделениях связи, начиная с любого номера (но не позднее первого числа предподписного месяца).
Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465, цена одного номера 40 копеек.

СКОЛЬКО ДЕНЕГ В КОШЕЛЬКЕ?

1.

Мама послала Алешу в магазин за покупками, вручив ему кошелёк с деньгами.

2.

Мальчик, я отойду...
КАССА

Половину денег Алёша уплатил за молоко и сыр.

3.

Дядь, продайте талончик

Потом он поехал на автобусе в книжный магазин, уплатив за проезд 5 копеек.

4.

Половину оставшихся денег и ещё 10 копеек он уплатил за книгу. На половину того, что ещё осталось, Алёша купил тетрадей.

5.

НОЕ
Мне купи „Планету"

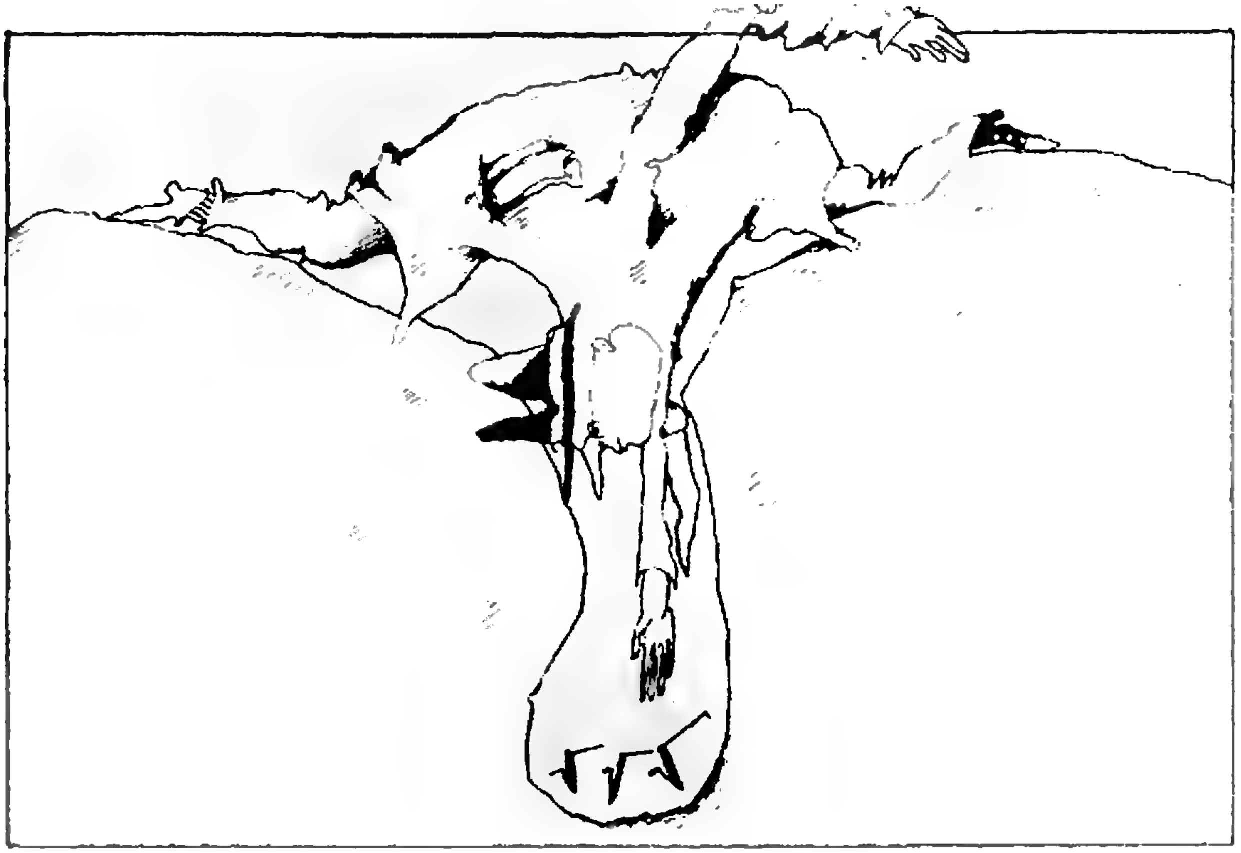
Выйдя из магазина, Алёша купил мороженое за 15 копеек.

6.

Теть, продайте талончик
236

В результате у Алёши осталось 5 копеек, которые он уплатил за проезд домой в автобусе.

Сколько же денег было в кошельке?



Математический кружок

Три формулы Рамануджана

Кандидат физико-математических наук
В. С. ШЕВЕЛЕВ

> *В формулах Рамануджана всегда содержится гораздо больше, чем это кажется на первый взгляд...*
>
> Харди

В этой статье речь пойдет о трех замечательных формулах Рамануджана*), каждая из которых содержит в левой части три кубических корня:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}, \qquad (1)$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}}, \qquad (2)$$

$$\sqrt[3]{\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}}. \qquad (3)$$

Эти формулы трудно спутать с формулами какого-либо другого математика: они напоминают загадочное жонглирование с числами.

Первая формула более проста и доказывается последовательным возведением в куб. Для нас, кроме эстетического восприятия, она интересна тем, что в структурном отношении очень похожа на две следующие. Что же касается формул (2) и (3), то здесь далеко не все так просто. Приведем интересные цитаты об этих формулах из брошюры В. И. Левина**): «Эти формулы совсем элементарны, но очень глубоки. Они обладают неповторимой внутренней симметрией, и догадаться об их существовании мог только математик самого высокого ранга». И еще: «Эти точные равенства являются, конечно, частными случаями значительно более общих соотношений, которыми располагал Рамануджан, но о которых он никому ничего не сообщил...»

---

*) О жизни и творчестве этого уникального математика вы можете причитать в «Кванте» № 10 за 1987 год.

**) Левин В. И. *Рамануджан.* — М.: Знание, 1968.

Мы приглашаем читателя проследить за доказательством формул (2) и (3). В некоторых местах ему понадобятся карандаш и бумага. В награду он поймет внутренний механизм, управляющий этими красивыми формулами и, по-видимому, сможет, уже самостоятельно, доказать несколько формул типа формул Рамануджана (найденных автором,— см. упражнение 5), а возможно, и придумать свои.

Связь с формулами Виета

Связь между тригонометрией и алгеброй легко угадывается в формулах Рамануджана. Вглядимся пристальнее в числа

$$\left\{\cos\frac{2\pi}{7},\ \cos\frac{4\pi}{7},\ \cos\frac{8\pi}{7}\right\},$$

$$\left\{\cos\frac{2\pi}{9},\ \cos\frac{4\pi}{9},\ \cos\frac{8\pi}{9}\right\}.$$

Прежде всего бросается в глаза, что аргументы косинусов составляют в обеих тройках геометрические прогрессии со знаменателей 2.

Воспользовавшись преобразованием

$$\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=\frac{\sin2\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha}{2\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin4\alpha\cos4\alpha}{4\sin\alpha}=\frac{\sin8\alpha}{8\sin\alpha},$$

можно установить такие равенства:

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{8},$$

$$\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{8}.$$

Это — наш первый успех, показывающий, что аргументы косинусов в формулах Рамануджана выбраны отнюдь не случайно.

Попробуем найти теперь суммы трех косинусов. Имеем:

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\right.$$

$$\left.-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\pi-\sin\frac{5\pi}{7}\right)=-\frac{1}{2};$$

$$\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{8\pi}{9}=$$

$$=\cos\frac{2\pi}{9}+\cos\frac{4\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}=$$

$$=2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{\pi}{9}=0.$$

Наконец, поищем такие суммы:

$$S_1=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+$$

$$+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7},$$

$$S_2=\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}+\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}+$$

$$+\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{8\pi}{9}.$$

Упражнение 1. Докажите, что $S_1=-\frac{1}{2}$, $S_2=-\frac{3}{4}$.

Напишем теперь формулы Виета для кубического уравнения. Если x, y, z — корни уравнения

$$t^3+pt^2+qt+r=0,$$

то, как известно,

$$\begin{cases}x+y+z=-p,\\ xy+xz+yz=q,\\ xyz=-r.\end{cases}\qquad(4)$$

Сравнивая (4) с равенствами, которые мы получили выше для рамануджановских троек косинусов, заключаем, что первая тройка состоит из корней уравнения

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}=0,\qquad(5)$$

а вторая — из корней уравнения

$$t^3-\frac{3}{4}t+\frac{1}{8}=0.\qquad(6)$$

Этот этап — самый важный в нашем доказательстве. Он показывает, какова природа связи между тригонометрическими и алгебраическими выражениями в формулах (2) и (3).

Рассмотрим сумму трех корней...

Поставим теперь задачу так. Дано уравнение

$$t^3+pt^2+qt+r=0,$$

корнями которого являются числа x, y, z. Требуется найти сумму их кубических корней (куб этой суммы обозначим через A):

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{A}. \qquad (7)$$

Оказывается, сумму (7) легче искать вместе с другой суммой:

$$\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{xz}+\sqrt[3]{yz}=\sqrt[3]{B}. \qquad (8)$$

Возводя в куб обе части (7), а затем (8) и учитывая формулы Виета (4), получаем (проверьте это самостоятельно):

$$A=-p+3\sqrt[3]{AB}+3\sqrt[3]{r}, \qquad (9)$$

$$B=q-3\sqrt[3]{ABr}-3\sqrt[3]{r^2}, \qquad (10)$$

Умножая (9) на $\sqrt[3]{r}$ и складывая с (10), выражаем B через A:

$$B=q-(A+p)\sqrt[3]{r}.$$

Подставляя это в (9), получаем уравнение только относительно A:

$$A+p-3\sqrt[3]{r}=3\sqrt[3]{A(q-(A+p)\sqrt[3]{r})}.$$

Наконец, возводя обе части уравнения в куб, получаем следующее кубическое уравнение относительно A:

$$A^3+3(p+6\sqrt[3]{r})A^2+$$
$$+3(p^2+3p\sqrt[3]{r}+9\sqrt[3]{r^2}-9q)A+$$
$$+(p-3\sqrt[3]{r})^3=0. \qquad (11)$$

Упрощение кубического уравнения

Пусть дано кубическое уравнение

$$x^3+3bx^2+3cx+d=0. \qquad (12)$$

Покажем, как — в некоторых случаях особенно успешно — оно может быть упрощено.

Подставляя в (12) $x=z-b$, получим кубическое уравнение относительно z, не содержащее z^2 (проверьте!). Более того, если b и c в уравнении (12) связаны соотношением

$$b^2=c,$$

то в уравнении относительно z исчезнет и член с z^1. В результате уравнение (12) примет вид

$$z^3=b^3-d.$$

Возвращаясь к x, получим

$$x=\sqrt[3]{b^3-d}-b. \qquad (13)$$

Проверим, в каком случае выполняется условие $b^2=c$ для уравнения (11). Сравнивая его с (12), имеем:

$$b=p+6\sqrt[3]{r},$$
$$c=p^2+3p\sqrt[3]{r}+9\sqrt[3]{r^2}-9q,$$

и условие $b^2=c$ принимает вид:

$$3\sqrt[3]{r^2}+p\sqrt[3]{r}+q=0. \qquad (14)$$

Теперь наступает волнующий момент: ведь числа p, q и r известны для уравнений, корнями которых являются рамануджановские тройки косинусов (см. формулы (5) и (6))!

Для первой тройки: $p=1/2$, $q=-1/2$, $r=-1/8$; для второй тройки: $p=0$, $q=-3/4$, $r=1/8$. Подставляя эти значения в (14), получаем числовые равенства! Но в этом случае, согласно (13) (при $x=A$, $b=p+6\sqrt[3]{r}$, $d=(p-3\sqrt[3]{r})^3$),

$$A=\sqrt[3]{b^3-d}-b.$$

В случае первой тройки $b=\frac{1}{2}-3=-\frac{5}{2}$, $d=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)^3=8$, так что

$$A=\frac{-\sqrt[3]{189}+5}{2}=\frac{5-3\sqrt[3]{7}}{2}.$$

В случае второй тройки $b=3$, $d=\left(-\frac{3}{2}\right)^3=-\frac{27}{8}$ и

$$A=\sqrt[3]{27+\frac{27}{8}}-3=\frac{3\sqrt[3]{9}-6}{2}.$$

Но это как раз подкоренные выражения правых частей формул Рамануджана (2) и (3). Следовательно, доказательство завершено.

Упражнение 2. Положив $\sqrt[3]{x}=u$, $\sqrt[3]{y}=v$, $\sqrt[3]{z}=w$, докажите, что условие (14) при u, v, w, не равных 0, эквивалентно условию

$$u^3+v^3+w^3+\frac{(uv)^2}{w}+\frac{(uw)^2}{v}+\frac{(vw)^2}{u}+$$
$$+3uvw=0. \qquad (15)$$

Из нашего доказательства следует, что условию (15) удовлетворяют кубические корни рамануджановских косинусов (первой и второй тройки). Непосредственно легко проверить, что ему удовлетворяет также тройка чисел

$$u=\sqrt[3]{\frac{1}{9}},\ v=-\sqrt[3]{\frac{2}{9}},\ w=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}.$$

Таким образом, в основе равенств (1), (2), (3) лежит общее условие (15).

Возможно, Рамануджан знал и другие тройки чисел (u, v, w), удовлетворяющие условию (15).

Упражнение 3. Покажите, что вместе с числами u, v, w условию (15) удовлетворяют: а) числа $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$; б) числа $\sqrt[3]{u^3+uvw}$, $\sqrt[3]{v^3+uvw}$, $\sqrt[3]{w^3+uvw}$.

Упражнение 4. Докажите, что если выполнено условие (15), то справедливо равенство

$$\left(\frac{u}{v}+\frac{v}{u}+\frac{u}{w}+\frac{w}{u}+\frac{v}{w}+\frac{w}{v}\right)^2+$$
$$+6=\left(\frac{u}{v}\right)^3+\left(\frac{v}{u}\right)^3+\left(\frac{u}{w}\right)^3+\left(\frac{w}{u}\right)^3+$$
$$+\left(\frac{v}{w}\right)^3+\left(\frac{w}{v}\right)^3.$$

Проверьте, например, (16) для тройки чисел $u=\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$, $v=-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$, $w=\sqrt[3]{\frac{4}{9}}$. Можно ли, наоборот, вывести (15) из (16)?

Упражнение 5. Докажите равенства:

1°. $\sqrt[3]{\sec\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sec\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\sec\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{8-6\sqrt[3]{7}}$;

2°. $\sqrt[3]{\sec\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\sec\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\sec\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-1)}$;

3°. $\sqrt[3]{2+\sec\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{2+\sec\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{2+\sec\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{6\sqrt[3]{7}-10}$;

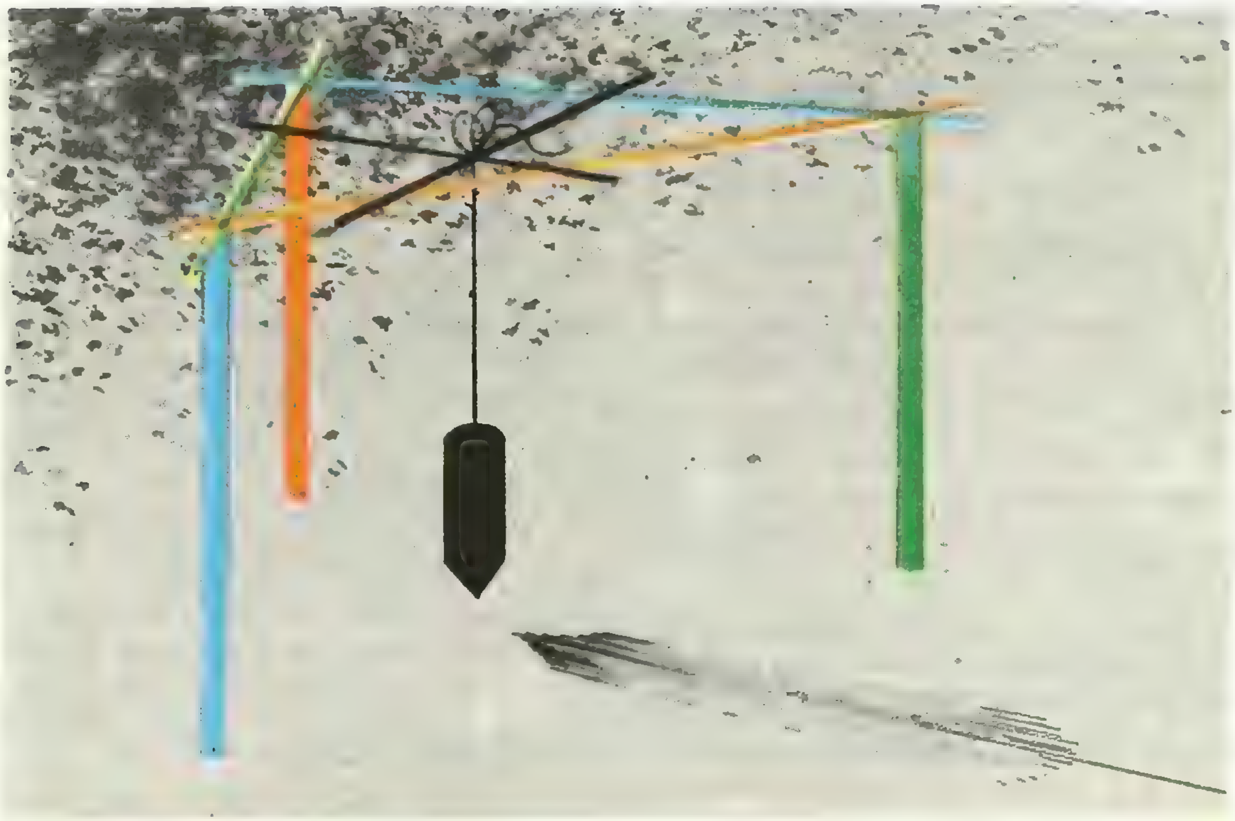
4°. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\cos\frac{2\pi}{7}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\cos\frac{4\pi}{7}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\cos\frac{8\pi}{7}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[3]{7}-2}$;

5°. $\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{2\pi}{7}}{2\cos\frac{2\pi}{7}+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{4\pi}{7}}{2\cos\frac{4\pi}{7}+1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{8\pi}{7}}{2\cos\frac{8\pi}{7}+1}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}\sqrt[3]{7}-2}$;

6°. $\sqrt[3]{2-\sec\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{2-\sec\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{2-\sec\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{6(\sqrt[3]{9}-2)}$;

7°. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\cos\frac{2\pi}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\cos\frac{4\pi}{9}}+\sqrt[3]{\frac{1}{2}-\cos\frac{8\pi}{9}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)}$;

8°. $\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{2\pi}{9}}{2\cos\frac{2\pi}{9}-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{4\pi}{9}}{2\cos\frac{4\pi}{9}-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{\cos\frac{8\pi}{9}}{2\cos\frac{8\pi}{9}-1}}=\sqrt[3]{\frac{3}{2}(\sqrt[3]{9}-1)}$.



Искусство программирования

Школьная ЭВМ рисует окружность

А. Г. ЩЕГОЛЕВ

В предыдущем номере «Кванта» мы немного рассказали о графических возможностях школьной ЭВМ «Ямаха» (и языка MSX — Бейсик), нарисовали красивые картинки — вернее, составили алгоритмы, выполняющие эти рисунки. В этот раз мы продемонстрируем графические возможности машины при решении *геометрических задач на построение*. Мы ограничимся разбором лишь одной задачи, но разбор этот будет очень подробным; он основан на принципах *систематического программирования* (см. «Квант», 1987, № 10, 11). Итак, задача: *проведите окружность через три точки, заданные своими координатами.*

В сущности, это хорошо известная вам задача о построении окружности, описанной около треугольника. Такое построение выполнимо, причем единственным образом, если данные три точки различны и не лежат на одной прямой.

Проведем полное систематическое построение алгоритма и программы.

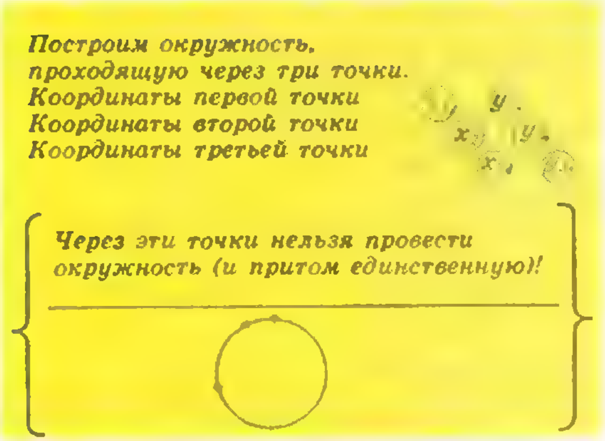

Построим окружность,
проходящую через три точки.
Координаты первой точки
Координаты второй точки
Координаты третьей точки
y
x
y
x
Через эти точки нельзя провести
окружность (и притом единственную)!

Рис. 1.

Постановка:

Дано: (x_1, y_1) — координаты точек A, B, C.

Треб: σ — изображение окружности (или ее части, находящейся в пределах экрана).

При: A, B, C не лежат на одной прямой.

Связь: $A \in \sigma$, $B \in \sigma$, $C \in \sigma$.

Сценарий:

На рисунке 1 в синие кружочки сведены переменные элементы будущего диалога — конкретные числа, сообщаемые человеком в ответ на запрос ЭВМ. В фигурные скобки заключены два варианта реакции ЭВМ: первый будет выдан в случае, если точки с данными координатами лежат на одной прямой, второй — если координаты точек удовлетворяют постановке; в этом последнем случае на экране будут изображены точки A, B, C с заданными координатами и проходящая через них окружность.

Метод:

Условие того, что три данные точки A, B и C лежат на одной прямой, равносильно коллинеарности векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (рис. 2) и имеет вид

$$(x_2-x_1)(y_3-y_2)=(y_2-y_1)(x_3-x_2).$$

Упражнение 1. *Убедитесь в том, что это условие охватывает и случаи, когда любые две (и даже все три) точки совпадают.*

Для того чтобы изобразить окружность, мы должны сообщить исполнителю (школьной ЭВМ) координаты ее центра и радиус.

Как известно, центр S описанной окружности может быть найден как точка пересечения серединных перпендикуляров к двум сторонам треугольника (AB и BC на рисунке 3).

Координаты векторов:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,\ y_2-y_1),$$
$$\overrightarrow{BC}=(x_3-x_2,\ y_3-y_2);$$

M — середина стороны AB — имеет координаты

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right);$$

координаты точки N — середины стороны BC —

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

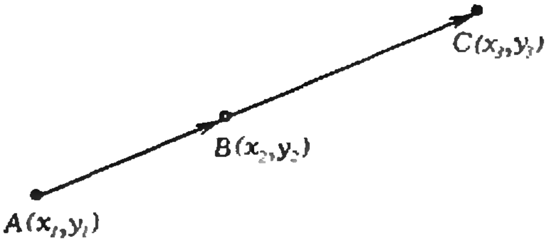


Рис. 2.

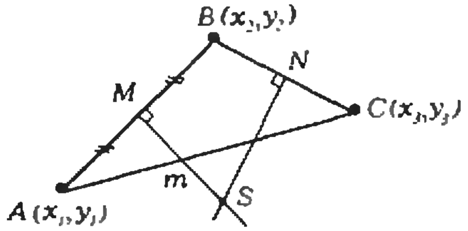


Рис. 3.

Любая точка, лежащая на прямой MS, имеет координаты $(M_x+\lambda m_x,\ M_y+\lambda m_y)$, где M_x и M_y — соответственно абсциса и ордината точки M; $m_x=y_2-y_1$ и $m_y=x_2-x_1$ — координаты вектора m; λ — некоторое число.

Упражнение 2. *Докажите, что* $\bar{m} \perp \overrightarrow{AB}$.

Координаты точек на прямой NS выражаются аналогично через параметр μ, координаты точки N и вектора, перпендикулярного к $\overrightarrow{BC}$ (например вектора $\bar{n}=(y_3-y_2,\ x_2-x_3)$). Для нахождения точки пересечения прямых MS и NS приравняем соответствующие координаты:

$$\begin{cases} M_x+\lambda m_x=N_x+\mu n_x, \\ M_y+\lambda m_y=N_y+\mu n_y. \end{cases}$$

Решая эту систему линейных уравнений относительно неизвестных λ и μ, получим, например, выражение для λ:

$$\lambda=\frac{1}{2}\,\frac{(y_3-y_2)(y_3-y_1)-(x_2-x_1)(x_3-x_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_2)-(x_2-x_1)(y_3-y_2)}.$$

Координаты центра окружности

$$S_x=M_x+\lambda m_x=\frac{x_1+x_2}{2}+\lambda(y_2-y_1),$$
$$S_y=M_y+\lambda m_y=\frac{y_1+y_2}{2}+\lambda(x_1-x_2).$$

Радиус отыщется по теореме Пифагора как расстояние между центром и любой из данных точек (например A):

$$r=\sqrt{(S_x-x_1)^2+(S_y-y_1)^2}\,.$$

Теперь, располагая сценарием и методом вычислений, построим алгоритм и переведем его на MSX — BASIC. Используем вспомогательный алгоритм «изображение» (GOSUB 200 — это обращение к соответствующей подпрограмме).

Алгоритм:

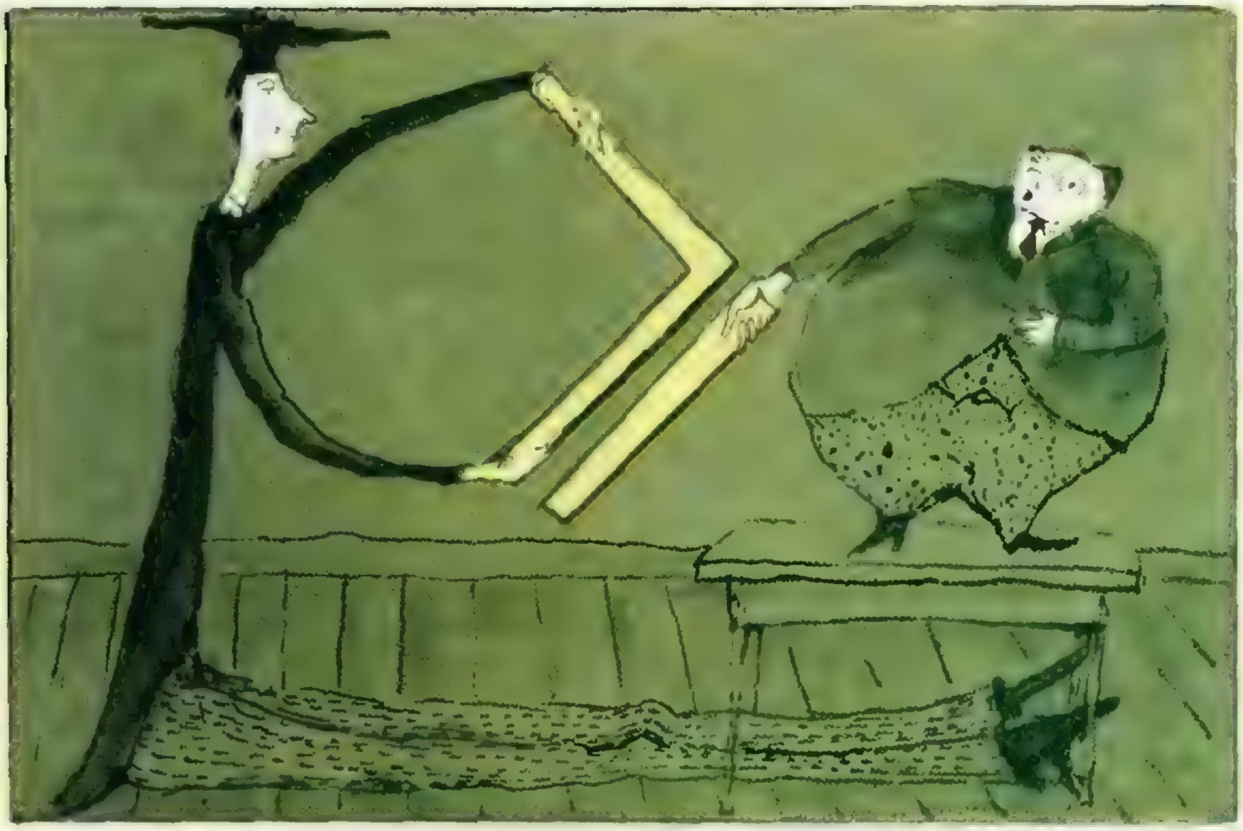
```
алг окружность
 нач
  вывод  «Построим окружность,» «проходящую через три точки.»
  запрос «Координаты первой точки»; $x_1$, $y_1$
  запрос «Координаты второй точки»; $x_2$, $y_2$
  запрос «Координаты третьей точки»; $x_3$, $y_3$

  если $(x_2-x_1)(y_3-y_2)=(y_2-y_1)(x_3-x_2)$
  то вывод «Через эти точки нельзя» «провести окружность» «(и притом единственную)!»
   иначе изображение
 все
кон

алг изображение
 нач
  графика
  точка ($x_1$, $y_1$), розовый
  точка ($x_2$, $y_2$), розовый
  точка ($x_3$, $y_3$), розовый

  $\lambda:=\frac{1}{2}\frac{(y_3-y_2)(y_3-y_1)-(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(y_2-y_1)(x_3-x_2)-(x_2-x_1)(y_3-y_2)}$

        $S_x:=\frac{x_1+x_2}{2}+\lambda(y_2-y_1)$
        $S_y:=\frac{y_1+y_2}{2}+\lambda(x_1-x_2)$

        $r:=\sqrt{(S_x-x_1)^2+(S_y-y_1)^2}$

  окружн ($S_x$, $S_y$), $r$, розовый
 кон
```

Программа:

```
10'   окружность
20 PRINT «Построим окружность,»
30 PRINT «проходящую через три
          точки.»
40 INPUT «Координаты первой точ-
          ки»; X1, Y1
50 INPUT «Координаты второй точ-
          ки»; X2, Y2
60 INPUT «Координаты третьей точ-
          ки»; X3, Y3

70 IF (X2-X1)*(Y3-Y2)=
   (Y2-Y1)*(X3-X2)
  THEN PRINT «Через эти точки
              нельзя провести ок-
              ружность (и притом
              единственную!)»
  ELSE GOSUB 200
80 GOTO 80
90 END

200'   изображение

210 SCREEN 2
220 PSET (X1, Y1), 13
230 PSET (X2, Y2), 13
240 PSET (X3, Y3), 13
250  L=((Y3-Y2)*(Y3-Y1)-(X2-
   X3)*(X3-X1))/((Y2-Y1)* (X3 -
   X2)-(X2-X1)*(Y3-Y2))/2
260   SX=(X1+X2)/2+L*(Y2-Y1)

270   SY=(Y1+Y2)/2+L*(X1-X2)
280  R=SQR((SX-X1)^2+
    (SY-Y1) ^2)
290 CIRCLE (SX, SY), R, 13
300 RETURN
```

В заключение предлагаем вам самостоятельно разобрать следующую задачу, пользуясь предыдущей как образцом.

Задание. *Напишите постановку, сценарий, алгоритм и программу нахождения и изображения общей точки двух отрезков, заданных координатами их концов.*



Практикум абитуриента

Решения нестрогих неравенств

И. Г. ГАБОВИЧ, П. И. ГОРНШТЕЙН

В этой статье пойдет речь о решении *нестрогого* неравенства $f(x) \geqslant 0$ или, вернее, о том, насколько это решение отличается от решения соответствующего строгого неравенства $f(x) > 0$. С наивной точки зрения дело обстоит просто: решением неравенства $f(x) > 0$ служит объединение нескольких конечных или бесконечных интервалов*), а чтобы получить решение неравенства $f(x) \geqslant 0$, нужно к этим интервалам добавить их концы.

В некоторых случаях это правило дает верный результат. Например, так будет в случае линейных неравенств: решением нестрогого неравенства

$$ax + b > 0$$

служит множество $(-b/a;\ \infty)$, а решением строгого неравенства

$$ax + b \geqslant 0$$

— множество $[-b/a;\ \infty)$, получающееся из предыдущего множества присоединением конца интервала $-b/a$. Но уже в случае квадратных неравенств наше правило приобретает изъян. Простейший пример: решением неравенства

$$-x^2 > 0$$

служит пустое множество, а решением неравенства

$$-x^2 \geqslant 0$$

— не пустое множество, как можно было бы подумать, а множество, состоящее из одной точки $x = 0$. Впрочем, это бывает только в том случае, если дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства равен нулю; например, если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два раз-

---

*) Строго говоря, это верно, если $f(x)$ — *непрерывная* функция, определенная на всей прямой или на некотором объединении интервалов.

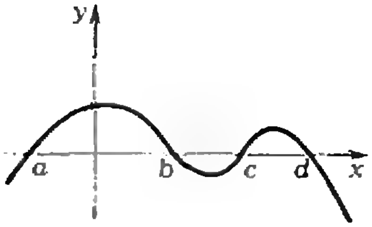


Рис. 1.

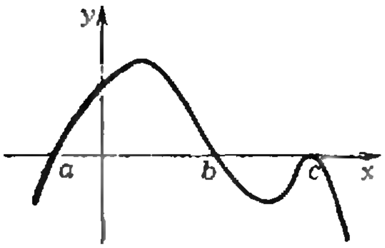


Рис. 2.

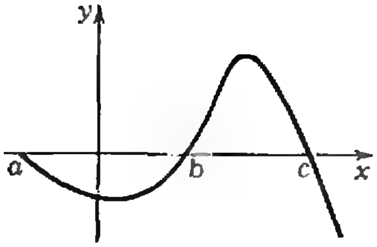


Рис. 3.

личных корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$) и $a>0$, то решением неравенства

$$ax^2+bx+c>0$$

служит объединение $(-\infty;\ x_1)\cup(x_2;\infty)$, а решением неравенства

$$ax^2+bx+c\geqslant 0$$

— объединение $(-\infty;\ x_1]\cup[x_2;\ \infty)$.

В чем же тут дело? Если в точках графика функции $y=f(x)$, лежащих на оси Ox, функция $f(x)$ *меняет знак*, т. е. ее график переходит с одной стороны оси Ox на другую, то сформулированное выше «правило» верно; например, для функции $f(x)$, график которой изображен на рисунке 1, решением неравенства $f(x)>0$ служит объединение $(a;\ b)\cup(c;\ d)$, а решением неравенства $f(x)\geqslant 0$ — объединение $[a,\ b]\cup[c,\ d]$. Для функции же, график которой изображен на рисунке 2, неравенство $f(x)>0$ имеет решение $(a,\ b)$, а неравенство $f(x)\geqslant 0$ — решение $[a,\ b]\cup\{c\}$! Еще пример: функция $y=f(x)$ определена при $x\geqslant a$ и имеет график, показанный на рисунке 3. Тогда неравенство $f(x)>0$ имеет решение $(b,\ c)$, а неравенство $f(x)\geqslant 0$ — решение $\{a\}\cup[b,\ c]$!

Если A — объединение интервалов, то множество, получающееся из A присоединением концов интервалов множества A, называется *замыканием* множества A и обозначается через $\bar{A}$. Сказанному выше можно придать такую форму: если A есть решение неравенства $f(x)>0$, а B — решение неравенства $f(x)\geqslant 0$, то B содержит $\bar{A}$, но может с ним не совпадать.

Как же правильно решить нестрогое неравенство $f(x)\geqslant 0$, зная решение строгого неравенства $f(x)>0$?

Очень просто: нужно присоединить к решению строгого неравенства $f(x)>0$ все решения уравнения $f(x)=0$.

К этому очевидному замечанию мы добавим еще одно очевидное замечание, которое может оказаться полезным на практике: решением неравенства $f(x)g(x)\geqslant 0$ служит объединение решений систем неравенств

$$\begin{cases} f(x)\geqslant 0,\\ g(x)\geqslant 0;\end{cases}\quad \begin{cases} f(x)\leqslant 0,\\ g(x)\leqslant 0.\end{cases}$$

(Аналогично — для неравенства $f(x)g(x)\leqslant 0$.)

Теперь рассмотрим несколько примеров (некоторые из них взяты из конкурсных экзаменов разных лет).

Пример 1. *Решить неравенство*

$$\sqrt{-25x^2+15x-2}\,(8x^2-6x+1)\geqslant 0.$$

Решим четыре неравенства:

$\sqrt{-25x^2+15x-2}\geqslant 0;$

решение: $\frac{1}{5}\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$.

$\sqrt{-25x^2+15x-2}\leqslant 0;$

решение: $x=\frac{1}{5}$ и $x=\frac{2}{5}$.

$8x^2-6x+1\geqslant 0;$

решение: $x\leqslant\frac{1}{4}$ и $x\geqslant\frac{1}{2}$.

$8x^2-6x+1\leqslant 0;$

решение: $\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$.

Обозначив четыре найденных множества соответственно через A, B, C, D, мы можем сказать, что решением исходного неравенства служит множество $(A\cap C)\cup(B\cap D)$. Произведя указанные действия, получаем

Ответ: $\left[\frac{1}{5};\ \frac{1}{4}\right]\cup\left\{\frac{2}{5}\right\}$.

Пример 2. *Решить неравенство*

$$\sqrt{x^2-7{,}5x+14}\ \log_2|x-3|\leqslant 0.$$

(Окончание см. на с. 66)

Практикум абитуриента

Парообразование. Свойства паров

Кандидат физико-математических наук А. А. ВАРЛАМОВ

Испарение. Насыщенный и ненасыщенный пары

Как известно, процесс парообразования — переход вещества из жидкого состояния в газообразное — может происходить двумя путями: испарением и кипением. Начнем с первого.

В жидкости, как и в газе, частицы находятся в постоянном тепловом движении. Но если в газе (при обычных условиях) кинетическая энергия движения молекул значительно превышает потенциальную энергию их взаимодействия, то в жидкости эти величины оказываются одного порядка. Поэтому молекулы жидкости совершают лишь тепловые колебания около некоторых положений равновесия, временами «перепрыгивая» в другие. Средняя энергия таких колебаний определяется температурой жидкости, однако в жидкости всегда имеется некоторое число молекул с кинетическими энергиями, существенно бо́льшими средней. Когда такие высокоэнергетичные молекулы оказываются в приповерхностном слое, они могут, в принципе, преодолев притяжение со стороны окружающих молекул, выйти за пределы жидкости и образовать над ее поверхностью газообразную фазу — пар. Описанный процесс и называется испарением. Важно, что в той или иной степени испарение имеет место при всех температурах. Испаряются любые жидкости и даже твердые тела (для них процесс испарения называют сублимацией).

Если жидкость находится в закрытом сосуде, то, наряду с процессом испарения, т. е. вылетом из жидкости быстрых молекул, происходит и обратный процесс — возвращение молекул из пара в жидкость, т. е. конденсация. В конечном счете между жидкостью и паром устанавливается динамическое равновесие — состояние, в котором число частиц, покидающих жидкость в единицу времени, в среднем равно числу возвращающихся в нее частиц. Пар, находящийся в динамическом равновесии со своей жидкостью, называют насыщенным.

Задача 1. *Равны ли между собой температуры жидкости и находящегося в динамическом равновесии с ней насыщенного пара?*

В ответ на такой вопрос на экзамене часто можно услышать, что температура пара выше, чем температура жидкости, поскольку испаряются — вылетают из жидкости — наиболее «горячие» молекулы, кинетическая энергия которых в жидкости была заметно выше средней.

Это неверно, и вот почему. Вырываясь из жидкости, «горячим» молекулам приходится совершать работу против сил притяжения, действующих на них со стороны окружающих молекул. Эта работа производится за счет уменьшения кинетической энергии «горячих» молекул, в результате чего они, переходя в пар, «охлаждаются». Причем «охлаждаются» именно до температуры жидкости. Это и понятно — температуры жидкости и находящегося с ней в равновесии насыщенного пара *должны быть равны*, иначе нарушалось бы одно из важнейших условий термодинамического равновесия системы — равенство температур ее отдельных элементов.

Какими же свойствами обладает насыщенный пар? При заданной температуре он характеризуется определенным давлением $p_н(T)$, которое, в отличие от случая идеального газа, не зависит от занимаемого объема. Объем же сосуда, в котором находится насыщенный пар, определяет его массу. Оказывается, что, несмотря на имеющееся взаимодействие между молекулами насыщенного пара (именно оно и приводит к конденсации пара), его состояние можно с довольно высокой точностью описывать с помощью уравнения Менделеева — Клапейрона. Поэтому для массы пара, занимающего при температуре T объем V, имеем

$$m=\frac{p_н(T)VM}{RT},$$

где M — молярная масса рассматриваемого вещества, R — универсальная газовая постоянная.

Задача 2. *Сравните плотности воды и насыщенного водяного пара при температуре $t=100$ °C.*

Плотность насыщенного пара определим из уравнения Менделеева — Клапейрона, приняв во внимание тот факт, что при 100 °C давление насыщенного пара равно нормальному атмосферному давлению (10^5 Па):

$$\varrho_п=\frac{p_нM}{RT}=0{,}58\ кг/м^3,$$

где $M=18\cdot10^{-3}$ кг/моль, $R=8{,}31$ Дж/(моль · К). Плотность воды при той же температуре равна $\varrho_в=0{,}98\cdot10^3$ кг/м^3. Таким образом, плотность насыщенного водяного пара меньше плотности воды примерно в 1700 раз.

В случае, когда испаряющееся вещество достаточно интенсивно отводится от поверхности и поэтому испарение преобладает над конденсацией, образующийся пар является ненасыщенным. Ненасыщенный пар образуется также после полного испарения жидкости в закрытом сосуде, если ее начальная масса была меньше необходимой для образования насыщенного пара. При описании свойств ненасыщенного пара также можно пользоваться уравнением Менделеева — Клапейрона. Кроме того, ненасыщенный пар подчиняется известным закономерностям для различных изопроцессов идеального газа (чего нельзя сказать про насыщенный пар).

Давление и плотность ненасыщенного пара меньше, чем насыщенного при той же температуре. Поэтому ненасыщенный пар можно обратить в насыщенный путем изотермического сжатия или изохорного охлаждения.

Задача 3. *В жарко натопленной кухне открыли форточку. За окном — сильный мороз. Что увидит наблюдатель, смотрящий на проем форточки из кухни? С улицы?*

Наблюдатель, находящийся на улице, увидит, что из открытой форточки вверх валит пар. Действительно, горячий воздух из кухни будет выходить через форточку и подниматься вверх. Содержащийся в воздухе ненасыщенный водяной пар немедленно охлаждается, становится насыщенным и начинает конденсироваться, образуя множество мельчайших капелек, которые мы и видим. Именно о них обычно и говорят — «водяной пар», хотя на самом деле это не пар, а туман. Водяной пар — прозрачен и сам по себе не может быть видимым.

Более неожиданным окажется зрелище, которое будет наблюдать зритель внутри кухни. Он увидит, как в натопленную кухню через форточку с улицы валит пар и опускается вниз. В чем здесь дело? Холодный воздух с улицы, замещая вышедший через форточку горячий, не сразу смешивается с воздухом внутри кухни и, будучи значительно холоднее, опускается вниз. Попадающий в него из окружающего теплого воздуха водяной пар охлаждается, становится насыщенным и частично конденсируется. Наблюдателю же кажется, что клубы этого тумана падают вниз.

Влажность воздуха

Для количественной характеристики содержания в воздухе водяных паров вводятся специальные физические величины — абсолютная влажность и относительная влажность воздуха. Абсолютной влажностью принято называть давление ненасыщенного водяного пара, присутствующего в воздухе. Отношение этого давления к давлению насыщенного водяного пара при той же самой температуре называют относительной влажностью воздуха.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 4. *В помещение нужно подать $V=10\ 000$ м^3 воздуха при температуре $t_1=18$ °С и относительной влажности $\varphi_1=50$ %, забирая его с улицы при $t_2=10$ °С и относительной влажности $\varphi_2=60$ %. Сколько воды следует дополнительно испарить в подаваемый воздух? Давление насыщенных паров при t_1 равно $p_{н1}=2{,}1\cdot 10^3$ Па, а при t_2 — $p_{н2}=1.2\times 10^3$ Па.*

Из уравнения Менделеева — Клапейрона определим массу насыщенного пара, находящегося в объеме V в условиях помещения и улицы:

$$m_{н1}=\frac{Mp_{н1}V}{RT_1},\quad m_{н2}=\frac{Mp_{н2}V}{RT_2}.$$

Зная относительную влажность воздуха в каждом из двух случаев, найдем истинные массы воды, содержащейся в воздухе:

$$m_1=\varphi_1 m_{н1},\quad m_2=\varphi_2 m_{н2}.$$

Разность этих масс

$$\Delta m=m_1-m_2=$$

$$=\frac{MV}{R}\left(\frac{\varphi_1 p_{н1}}{T_1}-\frac{\varphi_2 p_{н2}}{T_2}\right)=21{,}7\ \text{кг}$$

и определяет то количество воды, которое следует дополнительно испарить в подаваемый воздух.

Задача 5. *При какой максимальной относительной влажности воздуха в комнате бутылка молока, вынутая из холодильника, не будет запотевать? Температура в холодильнике $t_1=5$ °С, в комнате $t_2=25$ °С. Давление насыщенных паров воды при t_1 равно $p_{н1}=866$ Па, при t_2 — $p_{н2}=3192$ Па.*

Когда бутылку вынимают из холодильника, температура воздуха вблизи ее поверхности быстро понижается до 5 °С. При этом бутылка не запотеет, если для находящегося в комнате воздуха не будет перейдена точка росы (температура конденсации), т. е. если относительная влажность воздуха при его охлаждении до 5 °С не достигнет 100 %. Таким образом,

$$\varphi_1=\frac{p_1}{p_{н1}}100\ \% \leqslant 100\ \%,\quad \varphi_2=\frac{p_2}{p_{н2}}100\%,$$

при этом

$$\frac{p_2}{p_1}=\frac{T_2}{T_1}.$$

Отсюда получаем, что относительная влажность воздуха в комнате должна быть меньше

$$\varphi_{2\max}=\frac{p_{н1}}{p_{н2}}\frac{T_2}{T_1}100\,\%=29\,\%.$$

Задача 6. *В закрытом с обоих концов горизонтальном цилиндре объемом $V=2$ л свободно перемещается невесомый поршень. В пространство с одной стороны поршня вводится $m_1=2$ г воды, и с другой — $m_2=1{,}0$ г азота. Где установится поршень при $t=100\,^\circ C$?*

Давление, создаваемое водяным паром, будет существенно зависеть от того, насыщенный он или нет. Заранее мы ничего определенного сказать не можем, поэтому примем в качестве гипотезы, что вся введенная в сосуд вода испарилась, но образовавшийся водяной пар все же оказался ненасыщенным. Решим задачу в этом предположении, а затем вычислим давление пара, сравним его с давлением насыщенного пара при 100 °С и сделаем вывод о правильности или неправильности нашей гипотезы.

Если пар ненасыщенный, то его давление p_1 связано с занимаемым объемом V_1 уравнением Менделеева—Клапейрона:

$$p_1=\frac{m_1RT}{M_1V_1}.$$

Поскольку поршень находится в равновесии, давления водяного пара и азота должны быть равны:

$$p_1=p_2,\ \text{где}\ p_2=\frac{m_2RT}{M_2(V-V_1)}.$$

Отсюда находим, что

$$V_1=V\frac{m_1M_2}{m_1M_2+m_2M_1}=1{,}51\ \text{л}.$$

Подставляя найденный объем в формулу для давления пара, находим, что оно составляет $2{,}3\cdot10^5$ Па, что превышает давление насыщенного пара при рассматриваемой температуре $p_н=10^5$ Па. Таким образом, наше исходное предположение было неверным — пар в цилиндре насыщенный, и его давление равно 10^5 Па. Нам осталось найти объем, занимаемый азотом, при котором его давление такое же, как и давление пара:

$$V_2=\frac{m_2RT}{M_2p_н}=1{,}1\ \text{л}.$$

Итак, 11/20 объема цилиндра занимает азот, а 9/20 — водяной пар (точнее, водяной пар и капля воды, но ее объемом можно пренебречь — проверьте это сами).

Кипение

В отличие от испарения, при кипении парообразование, причем интенсивное, происходит не только на свободной поверхности жидкости, но и во всем ее объеме. Когда это возможно?

Предположим, что в жидкости возник пузырек пара. Для того чтобы он тут же не схлопнулся, необходимо, чтобы давление насыщенного пара при данной температуре внутри пузырька было не меньше внешнего давления. Давление на пузырек извне определяется тремя слагаемыми — внешним давлением p над поверхностью жидкости, гидростатическим давлением ρgh столба жидкости и дополнительным давлением $2\sigma/r$*) под искривленной поверхностью пузырька, обусловленным поверхностным натяжением (σ — коэффициент поверхностного натяжения, r — радиус пузырька). Таким образом, условие существования пузырька пара в жидкости записывается в виде:

$$p_н(T)\geqslant p+\rho gh+\frac{2\sigma}{r}.$$

Чаще всего мы говорим о кипении воды в открытом сосуде, тогда $p\approx10^5$ Па. Для того чтобы гидростатическое давление могло конкурировать с давлением p, столб воды должен составлять хотя бы несколько метров, чего обычно, конечно, не бывает. Давление, связанное с поверхностным натяжением, существенным становится тогда, когда $r\approx10^{-3}$ мм, что много меньше размеров пузырьков, которые обычно возникают при кипении воды. Так что для кипения воды в обычных условиях достаточно выполнения условия

$$p_н(T)\approx p.$$

В своих рассуждениях мы приняли

---

*) См., например, статью А. И. Буздина и С. С. Кротова «Поверхностное натяжение и капиллярные явления» («Квант», 1988, № 4).

за факт, что пузырек с насыщенным паром в жидкости уже образовался. А откуда он взялся? Это совсем не простой вопрос.

Один из путей возникновения пузырька может быть, например, таким: поскольку молекулы жидкости постоянно движутся, случайно может оказаться, что плотность в некоторой макроскопической области пространства понизится до плотности насыщенного пара при данной температуре. Вот вам и пузырек. Строгая теория на это предположение дает следующий ответ: да, такое событие произойти может, однако его вероятность столь мала, что закипания чайника таким способом можно прождать миллиарды лет. Второй путь — это возникновение пузырьков всегда имеющихся в жидкости растворенных газов и испарение воды в такие, изначально газовые, пузырьки. Это в принципе возможно. Но гораздо более эффективный механизм рождения достаточно крупных пузырьков пара связан с наличием неоднородностей дна и стенок сосуда, в котором происходит кипение, или примесей в самой жидкости. Именно они обычно становятся центрами парообразования, на них возникают начальные пузырьки пара. И уже затем, если температура жидкости такова, что выполняется условие кипения для образовавшихся пузырьков, то они, разрастаясь в объеме, всплывают на поверхность и там лопаются.

Задача 7. *Определите наибольший допустимый размер пузырьков, при котором может происходить перегрев воды на $\Delta t=1\ ^\circ C$. Атмосферное давление $p=10^5$ Па, давление насыщенного пара вблизи температуры кипения воды $t_к=100\ ^\circ C$ при увеличении температуры на 1 °С возрастает на $\Delta p=10^3$ Па, коэффициент поверхностного натяжения воды при этих условиях равен $\sigma=0{,}6$ Н/м.*

Если жидкость тщательно очистить от примесей и нагревать в сосуде с достаточно гладкими стенками, то ее действительно можно перегреть выше температуры кипения при данном атмосферном давлении, иногда даже весьма значительно.

Ясно, что, для того чтобы точка кипения повысилась, необходимо, чтобы не возникало слишком крупных пузырьков. Ограничения на радиус пузырька, который станет устойчивым только при 101 °С, а до этой температуры будет схлопываться силами поверхностного натяжения, найдем из условия:

$$\Delta p=\frac{2\sigma}{r_{\max}}$$

(давлением столба жидкости мы здесь пренебрегли; оцените сами, при каких высотах столба это можно делать), откуда

$$r_{\max}=\frac{2\sigma}{\Delta p}=1{,}2\cdot 10^{-4}\ \text{м}.$$

Таким образом, размер шероховатостей на стенках сосуда не должен превышать 0,01—0,1 мм, иначе на них будут появляться пузырьки пара нежелательного размера и жидкость перегреть не удастся.

Упражнения

1. Определите давление насыщенного водяного пара при температуре $t=17\ ^\circ C$, если в комнате объемом $V=50$ м^3 при относительной влажности $\varphi=65$ % и указанной температуре находится $m=0{,}476$ кг паров воды.

2. В сосуде смешивают две порции воздуха: объемом $V_1=2$ л с относительной влажностью $\varphi_1=40$ % и объемом $V_2=6$ л с относительной влажностью $\varphi_2=20$ %. Каким должен быть объем сосуда, чтобы влажность в нем была равной $\varphi=75$ %? Температуру считать постоянной.

3. В сосуде объемом $V=100$ л находился сухой воздух. Затем в сосуд налили $m=100$ г воды и герметически закрыли его. Вся ли вода превратится в пар, если сосуд нагреть до температуры $t=100\ ^\circ C$ и поддерживать эту температуру постоянной? Молярная масса воды $M=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К). Изменением объема сосуда при нагревании можно пренебречь.

4. Воздух при температуре $t_1 = 20\ °C$ имеет относительную влажность $\varphi = 70\ \%$. Сколько водяного пара сконденсируется из $V = 10\ м^3$ воздуха, если температура воздуха понизится до $t_2 = 10\ °C$? Давление насыщенных паров при температуре t_1 равно $p_{н1} = 2{,}3 \cdot 10^4$ Па, а при t_2 — $p_{н2} = 1{,}2 \cdot 10^3$ Па.

5. Кондиционер подает в помещение объемом $V = 50\,000\ м^3$ воздух при температуре t_1 и относительной влажности $\varphi_1 = 60\ \%$, забирая его с улицы при температуре t_2 и относительной влажности $\varphi_2 = 80\ \%$. Сколько воды дополнительно испаряет кондиционер в подаваемый воздух? Плотность насыщенных паров при температуре t_1 равна $\rho_{н1} = 15{,}4 \times 10^{-3}$ кг/м³, а при температуре t_2 — $\rho_{н2} = 9{,}4 \cdot 10^{-3}$ кг/м³.

Решения нестрогих неравенств

(Начало см. на с. 59)

Решение. Снова решаем четыре неравенства:

$\sqrt{x^2 - 7{,}5x + 14} \geqslant 0$; решение: $x \leqslant \frac{7}{2}$, $x \geqslant 4$.

$\sqrt{x^2 - 7{,}5x + 14} \leqslant 0$; решение: $x = \frac{7}{2}$, $x = 4$.

$\log_2 |x - 3| \geqslant 0$; решение: $x \leqslant 2$, $x \geqslant 4$.

$\log_2 |x - 3| \leqslant 0$; решение $2 \leqslant x < 3$, $3 < x \leqslant 4$.

Здесь ответом (в обозначениях, аналогичных предыдущему примеру) будет множество $(A \cap D) \cup (B \cap C)$, где A, B, C, D — найденные четыре множества.

Ответ: $[2;\ 3) \cup \left(3;\ \frac{7}{2}\right] \cup \{4\}$.

Пример 3. *Решить неравенство*

$$(1 + \sin x)(x^2 - 3x - 28) \geqslant 0.$$

Решение. Действуем по прежней схеме:

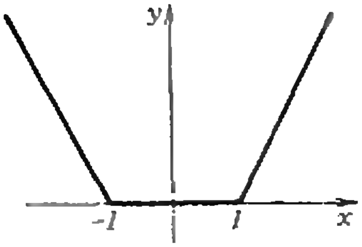


Рис. 4.

$1 + \sin x \geqslant 0$; решение: все x $(-\infty < x < \infty)$.

$1 + \sin x \leqslant 0$; решение: $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

$x^2 - 3x - 28 \geqslant 0$; решение: $x \leqslant -4$, $x \geqslant 7$.

$x^2 - 3x - 28 \leqslant 0$; решение: $-4 \leqslant x \leqslant 7$.

Рассматривая множество $(A \cap C) \cup (B \cap D)$, получаем

Ответ: $(-\infty;\ -4] \cup \left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{3}{2}\pi\right\} \cup [7;\ \infty)$.

Пример 4. *Решить неравенства*

а) $|x - 1| + |x + 1| - 2 < 0$;

б) $|x - 1| + |x + 1| - 2 \leqslant 0$.

Решение. См. график функции $y = |x - 1| + |x + 1| - 2$ на рисунке 4.

Ответ. а) $\varnothing$ (пустое множество); б) $[-1;\ 1]$.

Этот пример интересен тем, что решения строгого и нестрогого неравенств отличаются на целый отрезок!

Упражнения. *Решите неравенства:*

1. $x^2 - \sqrt{x} \geqslant 0$;
2. $\sqrt{(x-2)^2 - \sqrt{6 - (x-2)^2}} \geqslant x - 2$;
3. $(x - 1)\sqrt{-x^2 + x + 6} \leqslant 0$;
4. $\dfrac{\sqrt{x - 5}}{\log_{\sqrt{2}}(x - 4) - 1} \geqslant 0$;
5. $\frac{1}{2}\log_{4+x}(x^2 + 2x + 1) + \log_{-x-1} \times (-x^2 - 5x - 4) \leqslant 3$;
6. $3^{x^2+2} + 3^{x^2} \leqslant 2 \cdot 5^{x^2+1}$.

Информация

Новосибирск — Андовер. Продолжение обмена

В девятом номере журнала «Квант» за 1987 год была опубликована статья В. Г. Харитонова о первом обмене учащимися между Новосибирской ФМШ № 165 и Академией Филлипс (США). В сентябре—октябре 1987 года состоялся второй обмен между школами. Советскую делегацию представляли десять учащихся: Абросова Елена из Усть-Каменогорска, Айкина Светлана из Новокузнецка, Гунченко Эдуард из Петропавловска-Камчатского, Гурова Валерия из Читинской области, Дробышев Максим из Алма-Атинской области, Ерохов Сергей из Новокузнецка, Малыхин Денис из Омска, Мельников Алексей из Красноярска, Огилько Сергей из Целиноградской области и Тисленок Илья из Томска и два руководителя: директор школы кандидат физико - математических наук А. А. Никитин и заместитель директора по учебно-воспитательной работе Ю. В. Михеев. В этом номере они делятся своими впечатлениями о поездке.

Советская делегация прибыла в Андовер 15 сентября. В тот же день вся школа фотографировалась на ступеньках галереи искусств, после чего на лужайке около столовой был организован пикник. 16 сентября директор Академии Филлипс Дональд Мак-Немар устроил традиционный прием всей школы на лужайке около своего дома, а оттуда все отправились в здание церкви на торжественное открытие занятий. Это было первым событием, которое произвело на нас очень сильное впечатление. Сначала все кроме сениоров (учеников выпускного класса) вошли в зал и устроились на боковых местах. Затем стали входить сениоры, которых зал восторженно приветствовал. Шум при этом стоял невероятный, ученики кричали, стучали ногами, свистели, хлопали. Это продолжалось в течение нескольких минут, но как только встал директор и поднял руку, мгновенно наступила тишина. В своем выступлении директор отметил, что открытие школы происходит в знаменательный день, который совпал с празднованием 200-летия американской Конституции. Затем он рассказал, сколько учащихся начинают занятия в Академии Филлипс, и особо отметил, что в этом году будут учиться школьники из 29 стран мира, в том числе 5 китайских школьников и 10 школьников из Новосибирской ФМШ по обмену с Академией Филлипс. Затем слово было предоставлено А. А. Никитину. Его речь на английском языке была встречена бурными аплодисментами. После этого президент ученического коллектива рассказал о программе на предстоящий учебный год, под его руководством весь зал исполнил традиционную песню Академии Филлипс с множеством движений, а затем великолепно выступил школьный симфонический оркестр.

С 17 сентября начались трудовые будни. Каждый из наших учеников выбрал один из математических курсов, один курс, связанный с искусством, и два курса из следующих трех: физика, химия, программирование.

Математические курсы рассчитаны на любых учеников: от тех, кто имеет лишь самые элементарные навыки, до таких, которые уже два-три года изучали математику в Академии Филлипс. Особого внимания заслуживают вводный курс исчисления функций (Precalculus), исчисление функций (Calculus), теория вероятностей, математическая статистика, векторный анализ, теория функций комплексного переменного. Право выбора отдельных курсов нужно «заработать», изучив предварительно определенные курсы, поэтому количество учащихся в группах колеблется от 20—22 до 4—5. Сложность отдельных курсов, изучаемых в последнем, двенадцатом классе достаточно высока. Например, курс по теории функций комплексного переменного близок к первому — второму курсам наших университетов. По каждому из курсов имеются учебники, многие из них подготовлены преподавателями Академии Филлипс. При беглом знакомстве с учебником у нас создалось впечатление, что американские учителя совсем мало внимания уделяют логике доказательств, большинство теорем изучают на уровне интуитивных рассуждений и учат их применению в решении задач. Однако, как мы смогли увидеть на занятиях, логике и методологии решения задач уделяется очень большое внимание на уроках. Темп изучения материала высок, причем многое дается в качестве домашнего задания, а занятия превращаются скорее в беседы и консультации по домашней работе. Ученики задают вопросы в любой момент времени, учитель прерывает свои рассуждения и подробно и обстоятельно отвечает, пока все ученики не разберутся во всем, а затем продолжает объяснения. Учитель преимущественно сам работает у доски, ученики к доске вызываются исключительно редко, а проверка знаний проводится только письменно.

Подобным образом проходят занятия и по другим предметам. Курсы по программированию (Computer) рассчитаны только на один триместр, изучаются алгоритмические языки Лого и Паскаль с практической работой на персональных компьютерах Apple, Makintosh и IBM.

Подходы к обучению различны. На одном из курсов принципы программирования разбирались на примере готовой программы, играющей в «крестики — нолики».

На другом курсе, наоборот, начали изучение с составления простейших программ, рисующих картинки, а затем стали усложнять эти программы, вводя понятия процедур, переменных, циклов, условных переходов и так далее. Теоретические занятия чередовались с практической работой на ЭВМ.

Мы не заметили, чтобы компьютеры широко применялись на уроках по другим предметам. В основном они используются при работе с текстами: печатании и редактировании. По математике несколько занятий проводились с программой, которая позволяет строить графики элементарных функций, определять их нули, вычислять производные и изображать касательные к графику, находить значения определенных интегралов, изображать фигуры вращения относительно различных осей и вычислять их объем.

Структура курса физики в Академии Филлипс близка к принятой в нашей стране, изучение начинается с механики и постепенно за три триместра доходит до основ атомной физики. Есть два уровня изучения: один для тех, кто желает получить общее знакомство с физикой, а второй — для желающих получить глубокие знания. При внешне одинаковой структуре эти уровни отличаются использованием математического аппарата, а поэтому для выбора глубокого курса физики необходимо предварительно изучить, как минимум, Calculus.

Важным для наших учеников было совершенствование в языке. Большинство учителей и учащихся Академии Филлипс проявляли заметный интерес к представителям Советского Союза, поэтому если возникали трудности с языком, то старались и говорить помедленнее, и употреблять какие-то другие слова. На уроках английского языка много внимания уделялось шуткам, юмору, иногда устраивались дискуссии с американскими школьниками о спорте, об образовании, о культурной жизни и так далее.

Очень скоро выяснилось, что учиться в Академии Филлипс достаточно трудно как для наших школьников, так и для американских. Некоторые ученики (правда, таких немного) вынуждены через одну-две недели бросать один из выбранных курсов, оставляя только четыре. Нашим ученикам большинство курсов по математике и физике показались слишком простыми, знакомыми, однако недели через две пришлось прилагать много усилий, чтобы справляться со всем объемом работы, но еще через некоторое время, когда ребята начали достаточно свободно воспринимать речь американцев, учиться стало полегче.

Наша жизнь в США, конечно, не ограничивалась

На уроке математики.

Светлана Айкина в компьютерном классе.

только учебой и спортом. Проходило много разнообразных встреч. Особенно запомнились встречи с клубами: русским, интернациональным, политическим. Запомнились также поездки в Бостон, где мы побывали на смотровой площадке небоскреба, в музее науки, на бейсбольном матче, в Гарвардском университете. Еще мы посетили Джорджтаунский универститет в Вашингтоне, а также две частные школы: Академию Филлипс Экзетер недалеко от Андовера и Сейнт Олбани в Вашингтоне. Посещение этих школ позволило нам понять, что система жизни и учебы в школах США не «стандартизирована». Было очень непривычно видеть строгую форму одежды в Экзетер и ритуальные обряды в столовой Сейнт Олбани. Ученики Академии Филлипс свободны в общении между собой и с учителями, могут пренебрежительно относиться к своей одежде, не связаны никакими ритуалами во время приема пищи.

Последние несколько дней в США наша делегация должна была провести в Вашингтоне. В связи с этим нам очень часто говорили, что нашей делегации повезло, что мы сможем увидеть самый красивый город США, и очень часто задавали вопрос, будем ли мы встречаться с президентом Р. Рейганом. Однако лишь вечером 15 октября нам сообщили, что завтра в час дня нашу делегацию будет принимать президент США. Утром 16 октября мы вылетели в Вашингтон, устроились в гостинице и отправились в Советское посольство в Вашингтоне, где нас очень тепло встретил посол Ю. В. Дубинин. И несмотря на то, что встреча была очень короткой, после нее сразу снялось то напряжение, которое охватило членов делегации перед встречей с президентом США. К часу дня нас провели в небольшую приемную президента, где уже находилось множество телерепортеров, фотокорреспондентов и журналистов. Ровно в час появился Рональд Рейган. Света Айкина вручила ему значок, посвященный обмену между Новосибирском и Андовером, президент США зачитал заготовленное сообщение, в котором отметил, что обмены среди молодежи будут способствовать улучшению отношений между нашими странами. Репортеры начали задавать вопросы, не относящиеся к проблеме обменов, президент ответил на два вопроса и попросил репортеров удалиться. Затем директор Академии Филлипс коротко рассказал о нашем обмене. Выслушав его речь, Рейган сказал, что у него очень плотное расписание, но тем не менее остался и ответил на вопросы. На вопрос, как он относится к изменениям, происходящим в нашей стране, президент ответил, что с интересом следит за ними, ему нравится перестройка и гласность, что у него хорошие отношения с М. С. Горбачевым и что в ближайшем будущем состоится встреча руководителей СССР и США. На замечание о том, что в Советском Союзе больше знают о США, чем в Соединенных Штатах об СССР, он сказал, что сейчас в США интерес к СССР возрастает, а начавшиеся культурные и научные обмены помогут народам наших стран больше узнать друг о друге. В конце встречи президент сфотографировался с участниками делегации.

Оставшиеся дни мы знакомились со столицей США, ее музеями и достопримечательностями.

За время пребывания нашей группы в США было много встреч, завязалось много дружеских отношений, накопилось много впечатлений. Но несмотря на все это мы испытали ни с чем не сравнимое чувство, когда 22 октября приземлились в Шереметьево в дорогой нам всем Москве.

А. А. Никитин,
Ю. В. Михеев

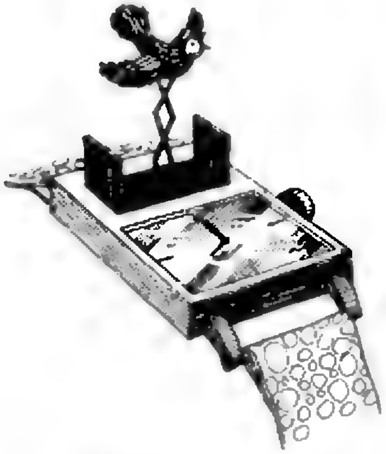
„Квант" улыбается

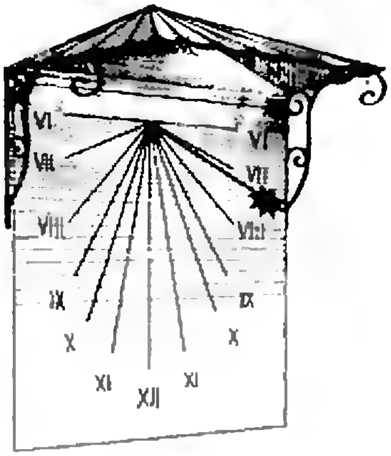
Оригинальные часы

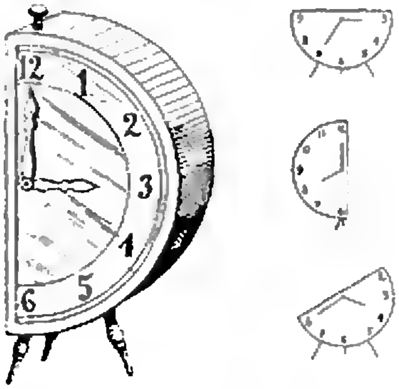
Наручные часы с кукушкой. Какой сюрприз для вашего окружения, когда кукушка с радостным криком выскакивает из часов, поднимая рукав вашей рубашки или пиджака!

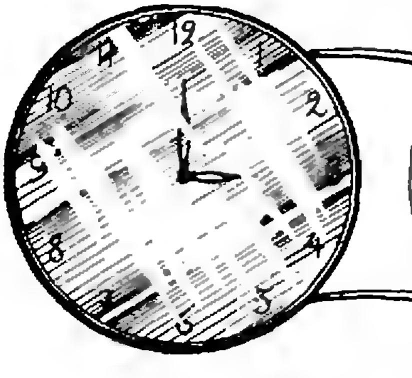
Солнечные часы с козырьком. Цинковый козырек предохраняет солнечные часы от воздействия солнца, которое может испортить циферблат или какую-нибудь иную часовую деталь.

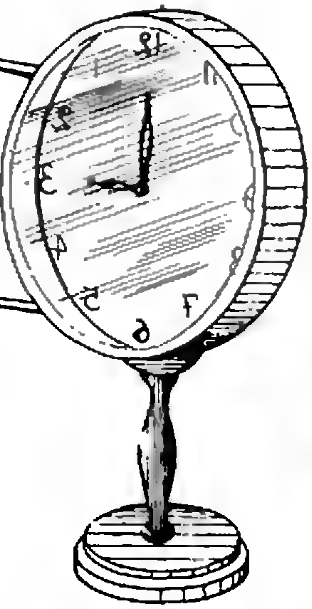
Будильник «половинной» конструкции. Вы можете выбрать модель с наиболее необходимой вам частью циферблата.

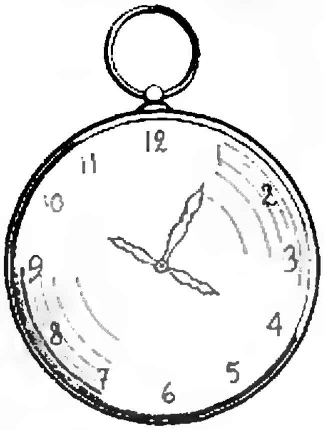


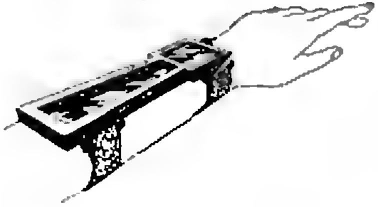


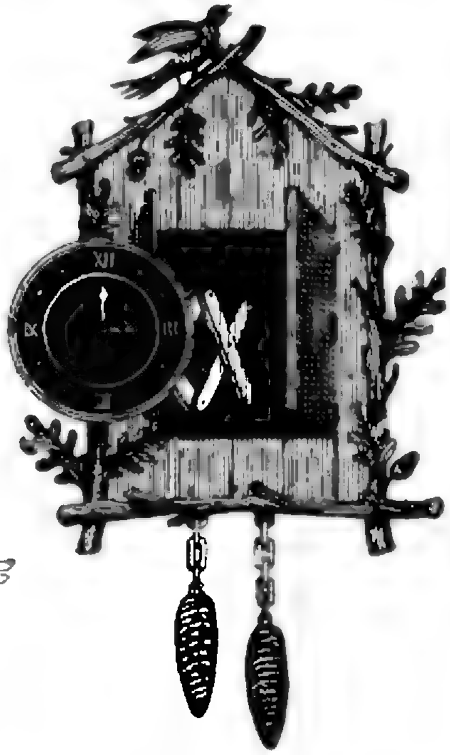












Часы с зеркально обращенными стрелками и цифрами. Они позволяют легко определять время с помощью зеркала заднего обзора.

Часы с тремя стрелками. Вторая маленькая стрелка показывает, какой час был шесть часов назад или какой будет через шесть часов.

Наручные маятниковые часы. Их размеры таковы, что они вполне могут заменить женщине все украшения.

Часы-кукушка с выскакивающим каждый час циферблатом. Все остальное время он находится внутри элегантной деревянной коробки.

Из «Каталога несуществующих объектов»

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1987 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Горьковский (1), Донецкий (2), Омский (3), Саратовский (4), Тбилисский (5) и институты — Горьковский политехнический (6), Киевский педагогический (7), Минский радиотехнический (8), Московский архитектурный (9), Томский политехнический (10), Ярославский педагогический (11).

Математика

Алгебра

1(2). Найдите двузначное число, зная, что число его десятков на 4 больше числа его единиц, а произведение этого числа на полусумму его цифр равно 153.

2(11). Мотоциклист отправился из пункта A в пункт B, отстоящий от A на 120 км. Обратно он выехал с той же скоростью, но через час после выезда он должен был остановиться на 10 мин. После этой остановки он продолжал путь до A, увеличив скорость на 6 км/ч. Какова была первоначальная скорость мотоциклиста, если известно, что на обратный путь он потратил столько же времени, сколько на путь от A до B?

3(7). По окружности, длина которой 60 м, равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 с скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту. Найдите скорости точек.

4(7). Найдите скорость и длину поезда, если он проходил мимо неподвижного наблюдателя с постоянной скоростью в течение 7 с и затратил 25 с на то, чтобы проехать с той же скоростью вдоль платформы длиной 378 м.

5(7). Два куска латуни имеют (в сумме) массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок — 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит на 15 % больше первого?

6(6). Для перевозки 60 т груза намечалось использовать несколько грузовиков. Ввиду большого подъема пути на каждый грузовик пришлось грузить на 0,5 т меньше, чем предполагалось, и поэтому потребовалось еще 4 машины. Какое число грузовиков предполагалось использовать первоначально?

7(6). Числитель дроби на 2 больше ее знаменателя. Если сложить эту дробь с обратной ей дробью, получится 74/35. Найдите исходную дробь.

8(6). Найдите сумму всех двузначных чисел, кратных 5.

9(6). Докажите тождество

$$\sin\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\cos\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

10. Решите уравнения:

а)(2) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

б)(1) $\lg 5+(x-2)\lg 0{,}2=\lg(26-5^{x-1})$;

в)(1) $\sqrt{\log_5 x^2}+\sqrt{\log_5 x}=\sqrt{2}\log_5 x+1$;

г)(3) $2x^{\lg x}+3x^{-\lg x}=5$;

д)(3) $2\lg 2+\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3-\lg\left(3^{\frac{1}{x}}+27\right)=0$;

е)(6) $(\sqrt[5]{3})^x+(\sqrt[10]{3})^{x-10}=84$;

ж)(9) $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$;

з)(9) $3\sqrt{\lg x}+2\lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2$;

и)(11) $\sin x(\sin x+\cos x)=1$;

к)(9) $\sin x\cos x\cos 2x=\frac{1}{8}$;

л)(9) $\cos 2x+\cos^2 x=0$;

м)(9) $\sin 2x+\sqrt{3}(\sin x-\cos x)-\frac{3}{2}=0$;

н)(6) $\operatorname{ctg}^4 2x+\frac{1}{\sin^4 2x}=25$;

о)(7) $2\log_3(-\sin x)+\log_{\frac{1}{3}}(1-\sin x\times\cos x)+1=0$;

п)(7) $2^{3+2\cos 2\pi x}+4=9\cdot 4^{\cos^2\pi x}$;

р)(3) $\frac{2}{\sqrt{3}}(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)=\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x-2$;

с)(3) $\sin^2 2x+\sin^2 4x=\sin^2 6x$;

т)(3) $\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}+2\operatorname{tg} x=0$;

у)(2) $\frac{\sin x}{(x-4)^2}+|\sin x|=0$;

ф)(1) $\frac{\cos x+\sin x}{\cos x-\sin x}=\frac{1}{2}\times$
$\times\left(\frac{\cos x}{\sin x}+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

11. Решите неравенства:

а)(6) $\frac{1}{2-x}+\frac{5}{2+x}<1$;

б)(1) $\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|<1$;

в)(2) $\sqrt{2x-x^2}>1-x$;

г)(2) $\sqrt{3x+x^2}<4-x$;

д)(1) $\sqrt{4\cdot 3^{-x}-3}<(\sqrt{3})^x$;

е)(11) $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{3x-5}{x-3}\geqslant 2$;

ж)(6) $\log_{0,5}x>6\log_x 0,5-1$;

з)(11) $\log_{\sqrt{2}}(x^2+2x)<\log_{\sqrt{2}}(x+6)$;

и)(3) $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0$;

к)(3) $(\log_x 2)(\log_{2x}2)(\log_2 4x)>1$;

л)(3) $x^{\lg^2 x-3\lg x+1}>1000$;

м)(7) $\log_{0,2}\log_2\frac{x^2}{x+2}>0$;

н)(2) $a^{\log_{1/4}(x^2-3x+1)}<1$.

12. Решите системы уравнений:

а)(1) $\begin{cases} x^3-y^3=218,\\ x^2+xy+y^2=109;\end{cases}$

б)(9) $\begin{cases} 2\cdot 6^x-3y=69,\\ 6^{x-1}-y=5;\end{cases}$

в)(9) $\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)}=60,\\ \lg(x-y)+\lg(x+y)=1+\lg 3,\end{cases}$

г)(9) $\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}+y^{-\frac{1}{2}}=6,\\ \log_4 x+\log_4 y=-3;\end{cases}$

д)(9) $\begin{cases} (x+y)\cdot 3^{y-x}=\frac{5}{27},\\ 3\log_5(x+y)=x-y;\end{cases}$

е)(1) $\begin{cases} 5^{\lg(x-2y)}=1,\\ 3^{x-y}-26\cdot 3^{\frac{x-y}{2}}=27;\end{cases}$

ж)(7) $\begin{cases} y^{200}=3^{300},\\ x-\log_3 3y=1;\end{cases}$

з)(1) $\begin{cases} \sin^2 x+\cos^2 y=\frac{3}{4},\\ \cos 2x+2\cos y=1;\end{cases}$

и)(7) $\begin{cases} 2^{\cos x}+2^{\frac{1}{\cos y}}=5,\\ 2^{\cos x+\frac{1}{\cos y}}=4.\end{cases}$

13(3). При каких a система

$$\begin{cases} x+ay=1,\\ ax+y=2a\end{cases}$$

имеет решение? Найдите его.

14(3). Найдите a, при котором один из корней уравнения

$$x^2+(2a-1)x+a^2+2=0$$

вдвое больше другого.

15(3). При каких a разность корней уравнения

$$2x^2-(a+1)x+(a-1)=0$$

равна их произведению?

16(1). Найдите наибольшее и наименьшее среди тех целых чисел n, при которых имеет действительные корни уравнение

$$nx^2+8x+n+8=0.$$

Анализ

1(3). Постройте графики:

а) $y=|\lg|x-1||$; б) $y=|\sqrt{|x-1|}-2|$;
в) $y=|3^{|x-1|}-3|$.

2. Исследуйте на экстремум функции:

а)(9) $y=\sqrt{2x^2-x+3}$;

б)(9) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$;

в)(2) $f(x)=(2x-1)e^{1/x}$.

3(7). Исследуйте функцию $y=f(x)$ на возрастание (убывание) и экстремумы, если

а) $f(x)=x^4(x-12)^2$,

б) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

4(11). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=6x-x^3$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

5(2). Найдите наибольший объем цилиндра, который можно вписать в конус с радиусом R и высотой H.

6(2). Из всех конусов, описанных около шара радиусом R, найдите тот, который имеет наименьший объем.

Геометрия

1(11). Сумма углов при основании трапеции равна 90°. Докажите, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

2(6). Площадь прямоугольного треугольника равна 54, а катеты его относятся как 3:4. Определите площадь круга, описанного около треугольника.

3(9). В треугольнике известны длины двух сторон a и b и угол между ними α. Найдите длину биссектрисы этого угла.

4(6). Сумма длин диагоналей ромба равна 5, а площадь ромба — 2. Найдите его сторону.

5(9). Около круга, радиус которого равен 4, описан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна 36. Найдите периметр треугольника.

6(1). AB — диаметр окружности радиусом r, MN — хорда. Отрезки AB и MN не пересекаются. Прямые AM и BN пересекаются в точке C, лежащей вне круга, причем $AC=a$, $BC=b$. Найдите MN.

7(9). В окружность радиусом R вписан правильный треугольник, в который вписан круг, а в этот круг квадрат. Определите сторону квадрата.

8(9). Радиусы концентрических окружностей относятся как 7:4, а ширина кольца равна 12. Определите радиус меньшей окружности.

9(3). Длины оснований трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка прямой, параллельной основаниям трапеции и делящей ее на две равновеликие фигуры ($a>b$).

10(3). В равнобочной трапеции отношение оснований равно 0,75; средняя линия трапеции равна ее высоте и равна 7. Вычислите радиус окружности, описанной около трапеции.

11(3). В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно l и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды.

12(11). Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна a и острый угол равен α. Каждый из двугранных углов при ребрах основания равен φ. Найдите объем пирамиды.

13(7). Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны. Определите угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

14(1). В прямоугольном треугольнике ABC известны длины катетов a и b. Точка O находится в плоскости треугольника и удалена от вершин острых углов на расстояние, равное $\frac{5}{8}$ длины гипотенузы, а от вершины прямого угла — на большее расстояние. Найдите расстояние от точки O до вершины прямого угла.

15(6). В призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M лежит на отрезке $[B_1C_1]$ так, что выполняется соотношение $\frac{|B_1M|}{|B_1C_1|}=\frac{2}{3}$. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

16(7). Шар радиусом R вписан в конус; из центра шара образующую конуса видно под углом α. Найдите объем конуса.

17(6). В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания a и апофемой m вписан конус. Найдите площадь его полной поверхности.

18(7). Определите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого равна l и наклонена к плоскости основания под углом α.

19(1). В конус вписаны два касающихся друг друга шара радиусов r и R. Найдите площадь части поверхности конуса, заключенной между линиями касания конуса с шарами.

Физика

Механика

1(3). Торможение электропоезда метро началось на расстоянии $l_0=200$ м от станции. На каком расстоянии от станции окажется поезд, идущий со скоростью $v_0=30$ м/с, через $t=7$ с после начала торможения с ускорением $a=-5$ м/с^2?

2 (1). Звук выстрела и пуля одновременно достигают высоты $H=680$ м. Выстрел произведен вертикально вверх; сопротивление движению пули со стороны воздуха отсутствует. Какова начальная скорость пули, если скорость звука $v=340$ м/с?

3 (4). В комедии А. С. Грибоедова «Горе от ума» есть строки:

> *Строжайше б запретил я этим господам*
> *На выстрел подъезжать к столицам.*

Выразите это расстояние в метрах для случая, когда выстрел производится из пушки под углом $\alpha=30°$ к горизонту, а верхняя точка траектории полета снаряда находится на высоте $H=3125$ м. Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2.

4 (5). Даны кинематические уравнения движения тела: $x=R\sin\omega t$, $y=R\cos\omega t$. Найдите его траекторию и ускорение (модуль и направление). Каков смысл постоянных R и ω?

5 (6). Вагон, масса которого $m=16$ т, двигаясь по инерции со скоростью $v=36$ км/ч, останавливается, пройдя расстояние $l=0{,}5$ км. Вычислите силу трения.

6 (10). Автомобиль массой $m=2\cdot10^3$ кг, двигаясь из состояния покоя по горизонтальному пути, через $t=10$ с от начала движения достигает скорости $v=20$ м/с. Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. Определите силу тяги двигателя автомобиля. Результат представьте в килоньютонах (кН). Принять $g=10$ м/с^2.

7 (5). Найдите силу трения, если коэффициент трения $\mu=0{,}5$, масса тела $m=0{,}6$ кг, а приложенная под углом $\alpha=30°$ к горизонту сила равна $F=2$ Н (рис. 1).

8 (1). Вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, груз может скользить равномерно. Какой путь пройдет этот груз до остановки, если ему сообщить начальную скорость v_0, направленную вверх вдоль наклонной плоскости?

9 (1). Тело массой m скользит по гладкому горизонтальному столу и растягивает пружину, с помощью которой оно крепится к стене (рис. 2). Найдите наибольшее ускорение тела, если его скорость при нерастянутой пружине была равна v_0. Жесткость пружины k.

10 (1). Шарик массой m вращается с постоянной угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости на стержне длиной l, жестко закрепленном на оси AB (рис. 3). С какой силой шарик действует на стержень?

11 (11). Радиус рукоятки колодезного ворота в 3 раза больше радиуса вала, на который наматывается трос. Какова линейная скорость конца рукоятки при поднятии ведра с глубины $h=10$ м за $t=20$ с?

12 (6) Определите мощность, развиваемую трактором, если в гору с уклоном $\alpha=30°$ он движется со скоростью $v=10$ м/с. Масса трактора $m=5$ т, коэффициент трения $\mu=0{,}3$.

13 (4). Самолет массой $m=1000$ кг должен набрать для взлета скорость $v=25$ м/с на полосе длиной $l=100$ м. Считая движение равноускоренным, оцените минимальное значение мощности моторов в момент взлета. Коэффициент трения $\mu=0{,}02$.

14 (10). С башни высотой $h=30$ м горизонтально брошен камень. Найдите потенциальную энергию камня

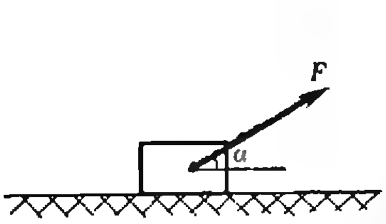


Рис. 1.

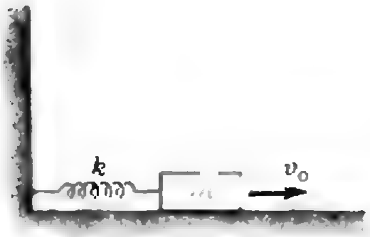


Рис. 2.

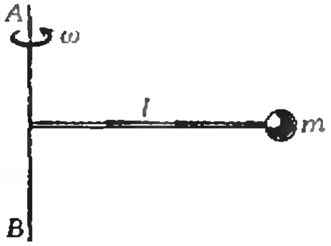


Рис. 3.

спустя $t=2$ с после начала движения. Масса камня $m=200$ г. Результат представьте в единицах СИ. Принять $g=10$ м/с^2.

15 (8). Шар массой m подвешен на нити длиной l. Такой маятник отклонили от положения равновесия на угол 90° и отпустили. При каком значении угла между нитью и вертикалью нить оборвется, если известно, что она выдерживает удвоенный вес шара?

16 (8). Упругий мяч падает с высоты $h=2$ м. После каждого удара мяч сохраняет $k=81$ % энергии. Через какое время мяч остановится?

17 (5). Три одинаковых упругих шарика висят на параллельных нитях одинаковой длины, касаясь друг друга. Один из шариков отклоняют перпендикулярно к прямой, соединяющей центры двух других шариков, и отпускают. Найдите скорости шариков после соударения, если в момент удара налетающий шарик имел скорость v_0.

18 (4). В зажатой между двумя телами пружине запасена энергия $W=100$ Дж. Масса одного тела $m_1=900$ г, а другого $m_2=100$ г. Как распределится энергия после освобождения пружины? Предполагается, что пружина отдает этим телам всю свою энергию.

19 (4). Какое максимальное количество теплоты выделится при столкновении пластилинового шара массой $m=200$ г, движущегося со скоростью $v=10$ м/с, с покоящимся шаром такой же массы?

20 (1). Тело массой m, утонувшее в жидкости плотностью ρ_1, давит на дно с силой F_1. Какая часть тела будет погружена в жидкость плотностью ρ_2, на поверхности которой оно плавает?

21 (10). Через какой промежуток времени после начала колебаний смещение точки из положения равновесия будет равно половине амплитуды, если период колебаний $T=24$ с, начальная фаза равна нулю, а колебания совершаются по синусоидальному закону? Результат представьте в единицах СИ.

22 (11). Маятник массой m отклонен от вертикали на угол α. Какова сила натяжения нити при прохождении маятником положения равновесия?

Молекулярная физика

1 (11). Какой скоростью обладала молекула паров серебра, если угловое смещение в опыте Штерна составляло $\varphi=5{,}4°$ при частоте вращения прибора $n=150$ с$^{-1}$? Расстояние между внутренним и внешним цилиндрами $d=2$ см.

2 (6). Какова максимальная разница зимой и летом при нормальном атмосферном давлении ($p=10^5$ Н/м^2) в массе воздуха, заполняющего помещение объемом $V=100$ м^3, если летом температура в помещении повышается до $t_1=30$ °C, а зимой падает до $t_2=10$ °C? Масса киломоля воздуха $M=29$ кг/кмоль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31\cdot10^3$ Дж/(кмоль·К).

3 (3). Газ изотермически сжали от первоначального объема $V_1=0{,}15$ м^3 до $V_2=0{,}1$ м^3. Давление при этом повысилось на $\Delta p=20$ Па. Каково было первоначальное давление газа?

4 (6). Колба объемом $V=500$ см^3, содержащая воздух, нагревается до температуры $t_1=227$ °C, после чего опускается горлышком в воду. Какая масса воды будет затянута в колбу в момент, когда температура колбы понизится до $t_2=27$ °C? Изменением объема колбы пренебречь.

5 (8). Два сосуда одинаковой емкости содержат воздух: один при температуре T_1 и давлении p_1, другой при температуре T_2 и давлении p_2. Сосуды соединяют, и после выравнивания давлений и температур воздух оказывается нагретым до температуры T. Какое давление устанавливается при этом?

6 (8). Смешали $V_1=1$ м^3 воздуха влажностью $\varphi_1=20$ % и $V_2=2$ м^3 воздуха влажностью $\varphi_2=30$ %. При этом обе порции были взяты при одинаковых температурах. Определите относительную влажность смеси.

7 (10). С какой высоты должен падать град (с температурой 0 °C), чтобы градинки при ударе о землю расплавились? Сопротивление воздуха не

учитывать. Удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2. Ответ выразите в километрах (км).

Электродинамика

1 (3). В вершинах квадрата со стороной a расположены четыре заряда: два из них равны $+q$ и два $-q$. Определите напряженность электрического поля в точке пересечения диагоналей квадрата. Рассмотрите все возможные случаи.

2 (5). Два одинаковых металлических шарика радиусом a каждый составляют конденсатор. Расстояние r между шариками настолько велико, что можно принять распределение зарядов на их поверхностях равномерным. Вычислите емкость такого конденсатора, рассмотрев предельный случай $r\to\infty$.

3 (11). Заряды $q_1=40$ нКл и $q_2=-10$ нКл расположены на расстоянии $l=10$ см друг от друга. Какой надо взять третий заряд и где следует его поместить, чтобы система находилась в равновесии? Устойчивым или неустойчивым будет равновесие?

4 (10). Шарик, имеющий массу $m=0{,}4$ г и заряд $q=4{,}9\cdot10^{-7}$ Кл, подвешен на нити в однородном электрическом поле, силовые линии которого горизонтальны. На какой угол от вертикали отклонится при этом нить, если напряженность поля $E=8{,}0\cdot10^3$ В/м? Результат представьте в градусах. Принять $g=9{,}8$ м/с^2.

5 (6). К проволочному кольцу присоединены подводящие провода. В каком отношении точки присоединения делят длину окружности, если общее сопротивление получившейся цепи в 6,25 раза меньше сопротивления кольца?

6 (8). К батарее с ЭДС $\mathscr{E}=6$ В подключены последовательно амперметр и вольтметр. Когда параллельно вольметру подключили резистор, показание амперметра удвоилось, а показание вольтметра уменьшилось вдвое. Определите показание вольтметра до подключения резистора. Сопротивления резистора и приборов, а также внутреннее сопротивление источника не известны.

7 (10). При силе тока $I_1=4$ А во внешней цепи батареи аккумуляторов выделяется мощность $P_1=18$ Вт, при силе тока $I_2=2$ А — соответственно $P_2=10$ Вт. Определите ЭДС батареи. Результат представьте в единицах СИ.

8 (1). При перемещении заряда $q=20$ Кл по проводнику сопротивлением $R=0{,}5$ Ом совершена работа $A=100$ Дж. Найдите время, в течение которого по проводнику шел ток, считая его постоянным.

9 (11). Троллейбус массой $m=11$ т движется равномерно со скоростью $v=36$ км/ч. Найдите силу тока в обмотке двигателя, если напряжение $U=550$ В и КПД $\eta=80\,\%$. Коэффициент сопротивления движению $\mu=0{,}02$.

10 (4). Нагреватель электросамовара состоит из двух элементов. При подключении к сети первого элемента вода в самоваре закипает через $t_1=15$ мин, при подключении только второго элемента — через $t_2=20$ мин. Через сколько времени закипит вода в самоваре, если подключить к сети оба элемента: а) последовательно, б) параллельно?

11 (3). Батарея, имеющая ЭДС $\mathscr{E}=60$ В и внутреннее сопротивление $r=4$ Ом, замкнута на внешнюю цепь, потребляющую мощность $P=200$ Вт. Определите силу тока в цепи, падение напряжения на внешней цепи, сопротивление внешней цепи.

12 (6). Катушка диаметром $d=0{,}4$ м находится в переменном магнитном поле. При изменении индукции магнитного поля на $\Delta B=127{,}4$ Тл в течение $\Delta t=2$ с в обмотке катушки возбуждается ЭДС индукции $\mathscr{E}=200$ В. Сколько витков имеет катушка?

13 (11). Скорость самолета с реактивным двигателем $v=950$ км/ч. Найдите ЭДС индукции, возникающую на концах крыльев такого самолета, если вертикальная составляющая индукции земного магнитного поля $B=5\cdot10^{-5}$ Тл и размах крыльев самолета $l=12{,}5$ м.

14 (4). К конденсатору, заряд которого $q=2{,}5\cdot10^{-10}$ Кл, подключена

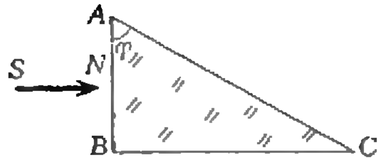


Рис. 4.

катушка индуктивности. Определите максимальный ток, протекающий через катушку, если частота свободных колебаний образованного контура $\nu=4\cdot10^7$ Гц. Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

15 (5). Луч SN падает на прямую треугольную призму перпендикулярно грани AB (рис. 4). Преломляющий угол призмы $\varphi=60^\circ$. Найдите угол отклонения луча от первоначального направления после прохождения призмы. Показатель преломления призмы $n=3/2$.

16 (8). В блоке оптического стекла с показателем преломления $n=\sqrt{3}$ имеется наполненная воздухом полость в виде плоскопараллельной пластинки толщиной $h=0{,}2$ см. Луч света падает на границу раздела стекло — воздух под углом $\alpha=30^\circ$. Определите смещение луча после прохождения через воздушную полость.

17 (10). Дифракционная решетка освещена нормально падающим монохроматическим светом. В дифракционной картине максимум второго порядка наблюдается под углом $\varphi=14^\circ$. Под каким углом виден максимум третьего порядка? Результат представьте в градусах и округлите до целого числа.

Элементы теории относительности

1 (10). На сколько увеличится масса пружины жесткостью $k=10$ кН/м при ее растяжении на $x=3$ см (1 кН$=10^3$ Н). Скорость света $c=3\cdot10^8$ м/с. Результат представьте в аттокилограммах (1 акг$=10^{-18}$ кг).

Квантовая физика

1 (3). Определите длину волны излучения, кванты которого имеют такую же энергию, что и электрон, пролетевший разность потенциалов $U=4{,}1$ В.

Публикацию подготовили *А. А. Егоров, В. А. Тихомирова*

Ответы, указания, решения

Решения нестрогих неравенств

1. $\{0\}\cup[1;\infty)$.
2. $[2-\sqrt{6};\ 2-\sqrt{2}]\cup\{2+\sqrt{6}\}$.
3. $[-2;1]\cup\{3\}$.
4. $\{5\}\cup(4+\sqrt{2};\infty)$.
5. $(-4;-3)\cup\left\{-\frac{5}{2}\right\}\cup(-2;-1)$.
6. $\{0\}\cup[\log_5 3;\infty)$.

Парообразование. Свойства паров

1. $p_н=\frac{mRT}{MV\varphi/100\,\%}=1910$ Па.
2. $V=(\varphi_1V_1+\varphi_2V_2)/\varphi=2{,}7$ л.
3. Нет, не вся.
4. $m_в=\frac{MV}{R}\left(\frac{p_{н1}\varphi/100\,\%}{T_1}-\frac{p_{н2}}{T_2}\right)=0{,}027$ кг.
5. $m_в=V(\rho_{н1}\varphi_1/100\,\%-\rho_{н2}\varphi_2/100\,\%)=86$ кг.

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1987 году

Математика

Алгебра

1. 51. **2.** 48 км/ч. **3.** 4 м/с, 3 м/с. **4.** 45,6 км/ч, 147 м. **5.** 25 %. **6.** 20. **7.** 7/5. **8.** 945.

10. а) $\{3\}$; б) $\{1;3\}$; в) $\{\sqrt{5};5\}$; г) $\{10^{-\sqrt{3}/2}, 1, 10^{\sqrt{3}/2}\}$; д) $\{1/2;1/4\}$; е) $\{20\}$; ж) $\{3;3+\sqrt{2}\}$; з) $\{10;10^4\}$; и) $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$, $x_2=\frac{\pi}{4}(4n+1)$, $k, n\in Z$; к) $x=\frac{\pi}{24}(6n+(-1)^n)$, $n\in Z$; л) $x=\pi k\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$, $k\in Z$; м) $x_1=\frac{\pi}{3}(3k+(-1)^k)$, $x_2=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi l$, $k, l\in Z$; н) $x=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi m}{2}$; о) $x_1=\operatorname{arctg}1/2+\pi(2k+1)$, $x_2=-\frac{\pi}{4}+2\pi n$; $k, n\in Z$; п) $x=n$, $n\in Z$; р) $x_1=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\frac{\pi}{3}(3m+1)$, $x_3=\frac{\pi}{6}(6n-1)$; $k, m, n\in Z$; с) $x_1=\pi k/4$, $x_2=\frac{\pi}{12}(2m+1)$, $k, m\in Z$; т) $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\frac{1}{2}\times\arccos\frac{1}{6}+\pi m$, $k, m\in Z$; у) $x_1=5$, $x_2=k\pi$, $k\in Z$; ф) $x=\frac{\pi}{8}(4k+1)$, $k\in Z$.

11. а) $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$; б) $\left(\frac{2}{3};4\right)$; в) $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}};2\right]$; г) $(-\infty;-3]\cup[0;16/11)$;

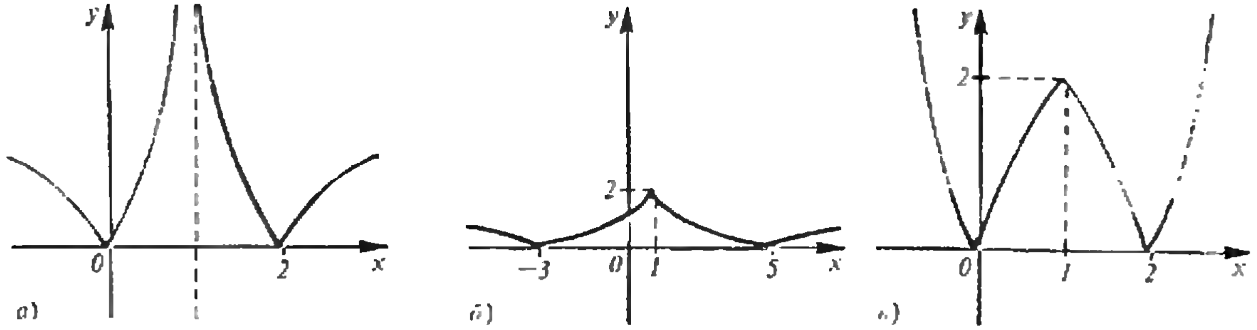


Рис. 1.

д) $(0; \log_3 4/3]$; е) $[-29/9; -5/3)$; ж) $(0; 1/4) \cup (1; 8)$; з) $(-3; -2) \cup (0; 2)$; и) $(1; 3/2) \cup (2; 5/2) \cup (3; \infty)$; к) $(2^{-\sqrt{2}}; 1/2) \cup (1; 2^{\sqrt{2}})$; л) $(1000; \infty)$; м) $(1-\sqrt{5}; -1) \cup (2; 1+\sqrt{5})$; н) $(0, (3-\sqrt{5})/2) \cup ((3+\sqrt{5})/2; 3)$ при $0 < a < 1$; $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$ при $a > 1$; $(0; (3-\sqrt{5})/2) \cup ((3+\sqrt{5})/2; 3)$ при $a = 0$; $\varnothing$ при остальных a.

12. а) $\{(-5; -7); (7; 5)\}$; б) $\{(2; 1)\}$; в) $\{(5{,}5; 0{,}5)\}$; г) $\{(4^{-2}; 4^{-1}); (4^{-1}; 4^{-2})\}$; д) $\{(4; 1)\}$; е) $\{(11; 5)\}$; ж) $\{(5; 27); (-3; 3^{-5})\}$;

з) $\left\{\left(\frac{\pi}{4}(4k \pm 1); \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)\right)\right\}$, $k, n \in Z$;

и) $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l\right)\right\}$, $k, l \in Z$.

13. $\left(\frac{1-2a^2}{1-a^2}; \frac{a}{1-a^2}\right)$ при $a \neq \pm 1$.

14. $a=-4$. **15.** $a=2$. **16.** $-9, 1$.

Анализ

1. См. рис. 1 (*а, б, в*).

2. а) $x_{\min}=1/4$; б) $x_{\min}=-1$, $x_{\max}=3$; в) $x_{\min}=1/6$.

3. а) $(-\infty; 0)$ и $(3; 12)$ — промежутки убывания $(0; 8)$ и $(12; \infty)$ — промежутки возрастания, $x=0$ и $x=12$ — точки минимума, $x=8$ — точка максимума;

б) $(-\infty; 0)$ и $(2; \infty)$ — промежутки возрастания, $(0; 1)$ и $(1; 2)$ — промежутки убывания, $\bar{x}=0$ — точка максимума, $x=2$ — точка минимума.

4. $\max f(x)=f(\sqrt{2})=4\sqrt{2}$, $\min f(x)=f(3)=-9$.

5. $\pi R^2H/27$. **6.** Конус с высотой $4R$ и радиусом основания $R\sqrt{2}$.

Геометрия

2. $56{,}25\pi$. **3.** $\frac{2ab\cos\gamma/2}{a+b}$. **4.** $\sqrt{17}/2$. **5.** 80.

6. $r(a^2+b^2-4r^2)/ab$. **7.** $R/\sqrt{2}$. **8.** 16.

9. $\sqrt{(a^2+b^2)/2}$. **10.** 5.

11. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$.

12. $\frac{a^3}{6}\sin^2\alpha\,\mathrm{tg}\,\varphi$. **13.** $\arccos\sqrt{2/3}$.

14. $\frac{1}{8}\sqrt{25(a^2+b^2)+48ab}$.

15. $\overline{AM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}$.

16. $-\frac{1}{3}\pi R^3\,\mathrm{tg}^3\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha$. **17.** $\frac{\pi a}{4}(a+2m)$.

18. $\frac{l\sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}+\mathrm{tg}\,\alpha}$. **19.** $4\pi Rr$.

Физика

Механика

1. $l=l_0-(v_0t_0+at_0^2/2)=110$ м, где $t_0=-v_0/a=6$ с — время до полной остановки поезда.
2. $v_0=v+gH/(2v)\approx 350$ м/с.
3. $l=4H\,\mathrm{ctg}\,\alpha\approx 21\,650$ м.
4. Уравнение траектории: $x^2+y^2=R^2$. Это уравнение окружности, радиус которой равен R. Ускорение тела направлено по радиусу к центру окружности и равно по модулю $a=\omega^2R$, где ω — круговая частота.
5. $F_{\text{тр}}=mv^2/(2l)=1{,}6$ кН.
6. $F_{\text{т}}=m(\mu g+v/t)=6$ кН.
7. $F_{\text{тр покоя}}=F\cos\alpha\approx 1{,}7$ Н.
8. $l=v_0^2/(4g\sin\alpha)$.
9. $a_{\max}=v_0\sqrt{k/m}$.
10. $F=m\sqrt{g^2+\omega^4l^2}$.
11. $v=3h/t=1{,}5$ м/с.
12. $N=mgv(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)\approx 380$ кВт.
13. $N_{\min}=mv(\mu g+v^2/(2l))\approx 83$ кВт.
14. $W=mg(h-gt^2/2)=20$ Дж.
15. $\alpha=\arccos 2/3\approx 48°$.
16. $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}\,\frac{1+\sqrt{k}}{1-\sqrt{k}}\approx 12$ с.
17. $v_1=-v_0/5$; $v_2=v_3=2\sqrt{3}v_0/5$.
18. $W_1=Wm_2/(m_1+m_2)=10$ Дж; $W_2=Wm_1/(m_1+m_2)=90$ Дж.
19. $Q=mv^2/4=5$ Дж.
20. $\frac{V_2}{V}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\frac{mg}{mg-F_1}$.
21. $t=T/12=2$ с.
22. $T=mg(3-2\cos\alpha)$.

Молекулярная физика

1. $v=2\pi nd/\varphi=200$ м/с.
2. $m_2-m_1=pVM(T_1-T_2)/(RT_1T_2)=8{,}1$ кг.
3. $p_1=\Delta pV_2/(V_1-V_2)=40$ Па.
4. $m_{\text{в}}=\rho_{\text{в}}V(1-T_2/T_1)=0{,}2$ кг.
5. $p=\frac{T}{2}\left(\frac{p_1}{T_1}+\frac{p_2}{T_2}\right)$.
6. $\varphi=(\varphi_1V_1+\varphi_2V_2)/(V_1+V_2)\approx 27\ \%$.
7. $h=\lambda/g=33$ км.

Электродинамика

1. $E=0$, если на концах диагонали находятся

одноименные заряды, и $E=\sqrt{2}q/(a^2\pi\varepsilon_0)$, если на концах диагонали находятся разноименные заряды.

2. $C=\pi\varepsilon_0 a(1+a/r)$.

3. $q_3=40$ нКл; этот заряд должен находиться на расстоянии 10 см от второго заряда и на расстоянии 20 см от первого заряда; равновесие неустойчивое.

4. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{qE}{mg}=45^\circ$.

5. $l_1:l_2=1:4$.

6. $U=2/3\mathscr{E}=4$ В.

7. $\mathscr{E}=\frac{P_2I_1^2-P_1I_2^2}{I_1I_2(I_1-I_2)}=5,5$ В.

8. $t=q^2R/A=2$ с.

9. $I=\mu mgv/(\eta U)=50$ А.

10. а) $t=t_1+t_2=35$ мин; б) $t=t_1t_2/(t_1+t_2)\approx8,6$ мин.

11. Возможны два случая: 1) $I_1=10$ А, $U_1=20$ В, $R_1=2$ Ом; 2) $I_2=5$ А, $U_2=40$ В, $R_2=8$ Ом.

12. $n=\frac{4\mathscr{E}}{\pi d^2(\Delta B/\Delta t)}=25$.

13. $\mathscr{E}=Blv\approx165$ мВ.

14. $I_m=2\pi\nu q\approx0,06$ А.

15. $\delta\approx41^\circ$ (на грани AC луч испытывает полное отражение).

16. $d=h=0,2$ см.

17. $\varphi'=\arcsin(3/2\sin\varphi)=21^\circ$.

Элементы теории относительности

1. $\Delta m=kx^2/(2c^2)=50$ акг.

Квантовая физика

1. $\lambda=hc/(eU)=3\cdot10^{-7}$ м.

Головоломки

(см. 4-ю с. обл.)

1) Чтобы снять челнок в позиции В надо сначала продеть в него $(k-1)$-е кольцо — это потребует L_{k-1} ходов — и снять k-е кольцо (1 ход). Получится позиция В, но для меледы с $k-1$ кольцами. Теперь, чтобы освободить челнок, нужно выполнить еще L_{k-1} ходов. Итак, $L_k=2L_{k-1}+1$. Если в исходном положении челнок пройдет через все k колец (рис. А), то сначала нужно снять с него кольца 1, 2, ..., $k-2$ (M_{k-2} ходов), а затем k-е кольцо. Заключительные L_{k-1} ходов такие же, как в первом случае. Таким образом, $M_k=M_{k-2}+1+L_{k-1}$.

2) Переписав соотношение для L_k в виде $L_k+1=2(L_{k-1}+1)$ и замечая, что $L_1=1$, получим: $L_k+1=2^k$, т. е. $L_k=2^k-1$. Следовательно, $M_k=M_{k-2}+2^{k-1}$, причем $M_1=1$, $M_2=2$. Отсюда легко вывести формулы: $M_k=(2^{k+1}-1)/3$ при нечетном k, $M_k=(2^{k+1}-2)/3$ при четном k. Обозначим через i операцию снятия i-го кольца с челнока, через i' — операцию продевания этого кольца в челнок, через f_k — последовательность ходов для освобождения челнока в позиции В. Рассуждая так же, как в задаче 1), получим, что $f_k=f_{k-1}^{-1}kf_{k-1}$, где f_{k-1}^{-1} — операция, обратная к f_k. Полагая $f^{-1}gf=f*g$, можно переписать это равенство в виде $f_k=f_{k-1}*k=(f_{k-2}*(k-1))*k=\ldots=(\ldots((1*2)*3)*\ldots\ldots*(k-1))*k$; например, для $k=3$ $f_3=1'2'131'21$. Последовательность для снятия челнока в позиции А при произвольном нечетном k выглядит так: $13f_25f_4\ldots kf_{k-1}$, а при четном k — $214f_36f_5\ldots kf_{k-1}$.

Решение задачи 3) оставляем читателям: никаких принципиальных отличий от случая меледы здесь нет.

Архимедова сила в литературных произведениях

(см. «Квант» № 5)

1. Архимедова сила не возникает, так как под лодкой нет воды.

2. Плотность соленой воды больше, чем плотность пресной.

3. Плотность воды уменьшается с повышением температуры.

4. Условие равновесия листа с грузом массой m — $F_A=mg$, (считаем массу листа много меньшей массы груза), т. е.

$$\rho_в gV=mg\Rightarrow\rho_в\pi\frac{d^2}{4}\cdot\frac{h}{2}=m;$$

здесь $d\approx2$ м — диаметр листа, $h\approx0,07$ м — высота заборчика, $\rho_в\approx10^3$ кг/м^3 — плотность воды. Отсюда $m\approx110$ кг.

5. $F_A=(m_л+m_к)g$, т. е. $\rho_вV_л=\rho_лV_л+m_к$. Объем льдины $V_л=Sh$. Положим толщину льда равной $h\approx0,5$ м, массу коровы $m_к\approx500$ кг. Тогда площадь льдины —

$$S=\frac{m_к}{(\rho_в-\rho_л)h}\approx\frac{500}{(1\cdot10^3-0,9\cdot10^3)\cdot0,5}\text{ м}^2=10\text{ м}^2.$$

6. Ратибор сможет опуститься на дно, если действующая на него сила тяжести будет больше архимедовой силы.

7. $F_A=10m_зg+\rho_дgV_д\Rightarrow V_д=\frac{10m_з}{\rho_в-\rho_д}$.

Если масса зайца $m_з\approx3$ кг, плотность дерева (сосны) $\rho_д=0,5\cdot10^3$ кг/м^3, то минимальный объем бревна $V_д\approx0,06$ м^3.

8. Стебель куги полон воздушных ячеек.

9. Давление атмосферы убывает с высотой. Давление газа в оболочке воздушного шара тоже уменьшается по мере подъема (уменьшается температура), но медленнее, чем внешнее давление. Силы давления газа изнутри могут разорвать оболочку.

10. Дирижабли не требуют затраты энергии для поддержания их в воздухе.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Чтобы победить Змея-Горыныча, Иван-царевич должен срубить четное число голов. Новые головы появляются лишь при отрубании хвостов. Так как хвостов три, то при отрубании всех хвостов вырастает не меньше двух новых голов. Значит, четное число голов должно быть уже не меньше, чем шесть. Шесть голов получится, если сначала по очереди отрубить каждый из трех хвостов, затем срубить трижды по паре хвостов. После этого нужно срубить трижды по паре голов. Всего 9 ударов.

2. Если предположить, что сложение было выполнено правильно, то две последние цифры дают в сумме число 15, две предпоследние — 13, далее 11, 15 и 13. Сумма этих чисел равна 67; но это — удвоенная сумма цифр первого числа, так что нечетное число получиться не

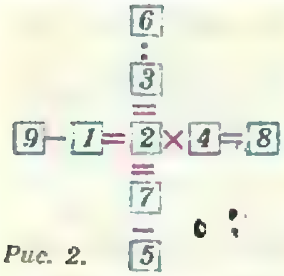


Рис. 2.

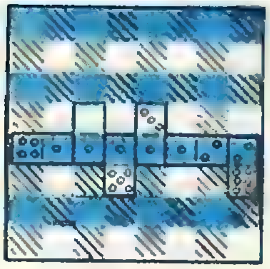


Рис. 3.

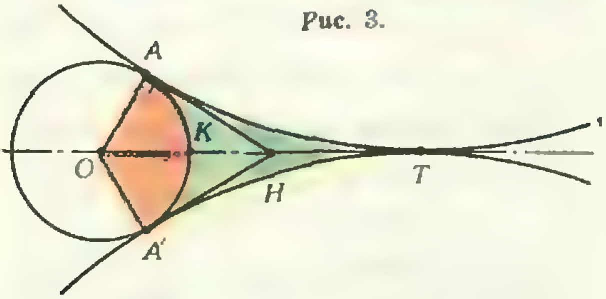


Рис. 4.

может. Значит, Вася, складывая пятизначные числа, ошибся.

3. См. рис. 2.

4. Верно. Так как в сумме вертикально и горизонтально расположенных костяшек у нас 32, достаточно убедиться в том, что четным будет число костяшек, расположенных вертикально. Для этого окрасим горизонтальные ряды полей шахматной доски через один в синий цвет (рис. 3). Каждая вертикальная костяшка покрывает одно поле на какой-либо синей полосе. Число вертикальных костяшек, которые покрывают по одному полю на любой фиксированной синей полосе, должно быть четным. Значит, общее число вертикально расположенных костяшек четно.

5. Возьмем окружность радиусом 1 с центром O и построим к ней касательную окружность большого радиуса R (например, $R=1000$). Из точки O проведем касательную OT к большой окружности и возьмем третью окружность, симметричную второй относительно OT (рис. 4). Тогда зеленый криволинейный треугольник $AKA'T$ имеет площадь S, заведомо превосходящую площадь первого круга (равную π). В самом деле, площадь четырехугольника $AOA'H$ равна $OA\cdot AH=AH$, но $AH>10$ (что легко проверить двухкратным применением теоремы Пифагора). Площадь красной фигуры меньше $\pi/2$, поэтому

$$S=\text{пл.}\,(OAHA')-\text{пл.}\,(OAKA')>10-\pi/2>\pi.$$

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 5)
Головоломки

1. См. рис. 5.
2. ПОДУМАЙТЕ=461 897 253.

8		1	6	9		2	2	5		1
4	8	4		6	2	5		7	2	9
1		4	4	1		6	7	6		6

Рис. 5.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Н. С. Кузьмина, Т. Н. Кольченко, Э. В. Назаров,
Е. К. Тенчурина, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский,
В. Б. Юдин

Фото представил
Э. Гунченко

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 15.04.88. Подписано к печати 27.05.88.
Т-12536. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,09. Усл. печ. л. 6,45. Уч.-изд. л. 7,6.
Тираж 197 364 экз. Цена 40 коп. Заказ 928

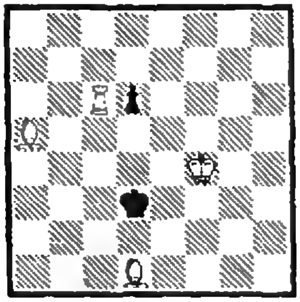
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

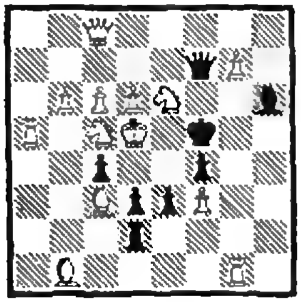
КОМПЬЮТЕР ОПРОВЕРГАЕТ

Все чаще и чаще машины с большим быстродействием используются для проверки правильности шахматных задач, оказывая неоценимую помощь композиторам. Через компьютеры были «просеяны» многие сборники задач, и нередко обнаруживался брак. Одни задачи содержали побочные решения и дуали, в других мат ставился быстрее, чем задумывал автор, третьи вообще не решались. Любопытно, что опровержения порой отличаются изяществом и вызывают удивление самих авторов. Кстати, обнаружены изъяны даже в произведениях знаменитых проблемистов.



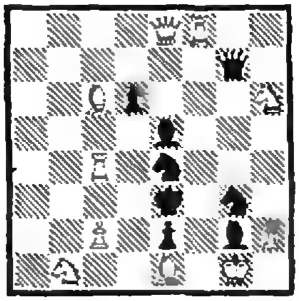
С. Лойд, 1867 г. Мат в 4 хода.

Содержащееся в книгах решение миниатюры знаменитого композитора и гроссмейстера математических головоломок довольно симпатично: 1. Сс3 d5 2. Крf3 d4 3. Сb3 dc 4. Лd6×. Машина указала грубое побочное решение: 1. Сb6! Крd2 2. Крf3 Кр:d1 (2... Крd3 3. Се3 и 4. Се2×) 3. Се3 и 4. Лс1×; 1. ...d5 2. Крf3 d4 3. Се2+ Крd2 4. Са5×.



Л. Лошинский, Л. Гугель, В. Шиф, 1932 г. Мат в 2 хода.

Авторский замысел заключается в 1. К:d3 с угрозой 2. Кр:с4×. На 1. ...Ф:g7 (Фf6, С:g7, Лb2, Ла2) с целью перекрыть пятую линию следует 2. К:g7 (соответственно Кd4, Лg5, Кb2, Кb2)×. Не помогает и 1... Фа7 (Ф:е6) — 2. Кс7 (Ф:е6)×. Кажется, все в порядке, но вмешивается компьютер и находит блестящее опровержение — 1...Фd7!! и мата нет.

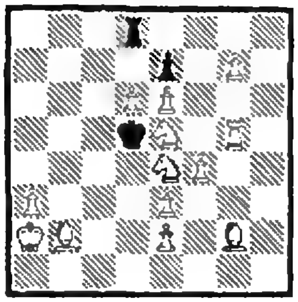


В. Сычев, 1983 г. Мат в 3 хода.

Автор указывает такое вступление: 1. Фе6! Теперь создана угроза 2. Лс3+ С(К):с3 3. Сf2×, 2...Крd4 3. Фd5×. Вариантов здесь немало, но черный конь и слон то и дело попадают под связки: 1...Сf6 2. Сd2+! Крf3 3. Лс3×, 1...Сf4 2. Сf2+! Крf3 3. Кd2×. Еще один мат со связкой завершает игру после 1... d5 — 2. Ф:е5 Ф:f8 3. Лс3×, 2...Ф:е5 3. Кg4×. Наконец, 1...Ф:f8 (Кf5) 2. Сd2+ и мат следующим ходом. Вроде все убедительно. И тем не менее задача опровергается первым же ходом, причем опровержение столь неожиданно, что найти его может только машина! Эффектный скачок коня в угол доски: 1...**Кh1!!** и мата, а стало быть и задачи, нет.

После этих примеров можно, пожалуй, согласиться с композиторами, которые любят повторять парадоксальный тезис: нет задач правильных, а есть неопровергнутые!

Любопытно, что гроссмейстер по шахматной композиции Я. Владимиров никогда не расстается с шахматным компьютером. Вот четырехходовка, которую совсем недавно ему удалось довести до совершенства с помощью электронного помощника.



Я. Владимиров, 1987 г. Мат в 4 хода.

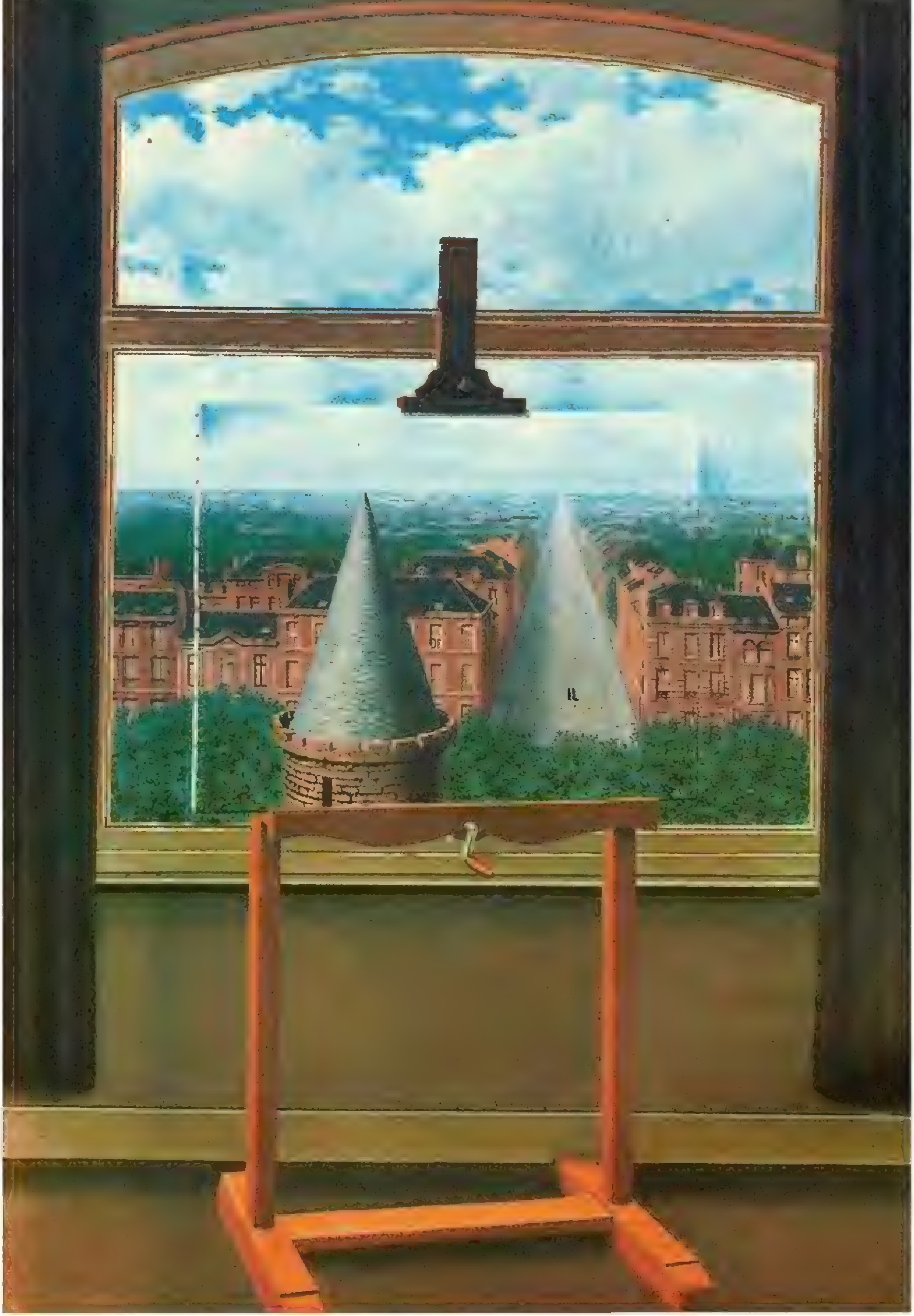
Основные варианты решения: 1. Сd4! Лg8 2. Сb6 Л:g7 3. Кс5+ Кр:d6 4. Кс4×, 1...Лс8 2. Кс5+ Кр:d6 3. Кf7+ Крс7 4. Ка6×, и еще два тематических варианта: 1... Ла8 2. Сh3!, и черные в цугцванге, так как ладья не может удержать контроль одновременно над полями а5 (3. Кс4+, 4. Ка5×) и d8 (3. Кf7+, 4. Кd8×); 1... Лb8 2. f5!, и нельзя парировать 3. Кс3+ и 4. Кb5× или 3. Кf6+ и 4. Ке8×.

Претензий к задаче нет, но сначала гроссмейстеру казалось, что черную ладью лучше расположить на g8. Компьютер тут же указал красивое побочное решение: 1. Кс5+! Кр:с5 2. Кс4+!! Кр:с4 3. Ла5 и 4. Сd5×, 1...Кр:d6 2. Кf7+ Крс7 3. Кd7! и 4. Лс5×.

Этот пример показывает, что компьютер может помогать композиторам не только в проверке задач на корректность, но и в чисто творческих вопросах.

Стоит остановиться еще на одном вопросе. При массовом распространении микро-ЭВМ шахматные конкурсы могут потерять свое значение. Участник конкурса поручит решать задачу машине, а сам отправится в кино. Впрочем, большинство любителей решают задачи для своего удовольствия, и им нет резона эксплуатировать машину. Ну, а что касается конкурсов, то композиторы должны придумывать головоломки похитрее, чтобы машине они оказывались не по зубам!

Е. Я. Гик



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Задача в головоломке «чертов цветок» — снять с «цветка» веревочную петлю. Если бы проволока, из которой сделан «цветок», была достаточно мягкой, мы бы просто вытащили самый высокий «стебель» из охватывающих его колец (схема внизу), затем точно так же последовательно расцепили остальные «стебли», и тогда ничто не мешало бы преспокойно снять веревочку. Но такое «решение» правилами игры запрещено. Понять, как на самом деле отцепляется петля, будет проще, если разобраться в более известном, можно сказать, классическом варианте этой головоломки — меледе (рис. А). Здесь вместо веревочки — жесткая проволочная петля-челнок, а вместо «цветка» — цепочка подвижных колец на стержнях, которые могут перемещаться по вертикали.

Занумеруем кольца, как на рисунке А. Заметим, что снять k-е кольцо с челнока можно лишь тогда, когда в него продето еще и ($k-1$)-е кольцо, а кольца с меньшими номерами сняты (рис. Б). Будем считать операцию продевания кольца в челнок или снятия кольца с челнока одним ходом. Пусть L_k и M_k — наименьшее число ходов, необходимое для того, чтобы снять с меледы с k кольцами челнок, зацепленный за одно кольцо (рис. В) и, соответственно, за все кольца (рис. А).

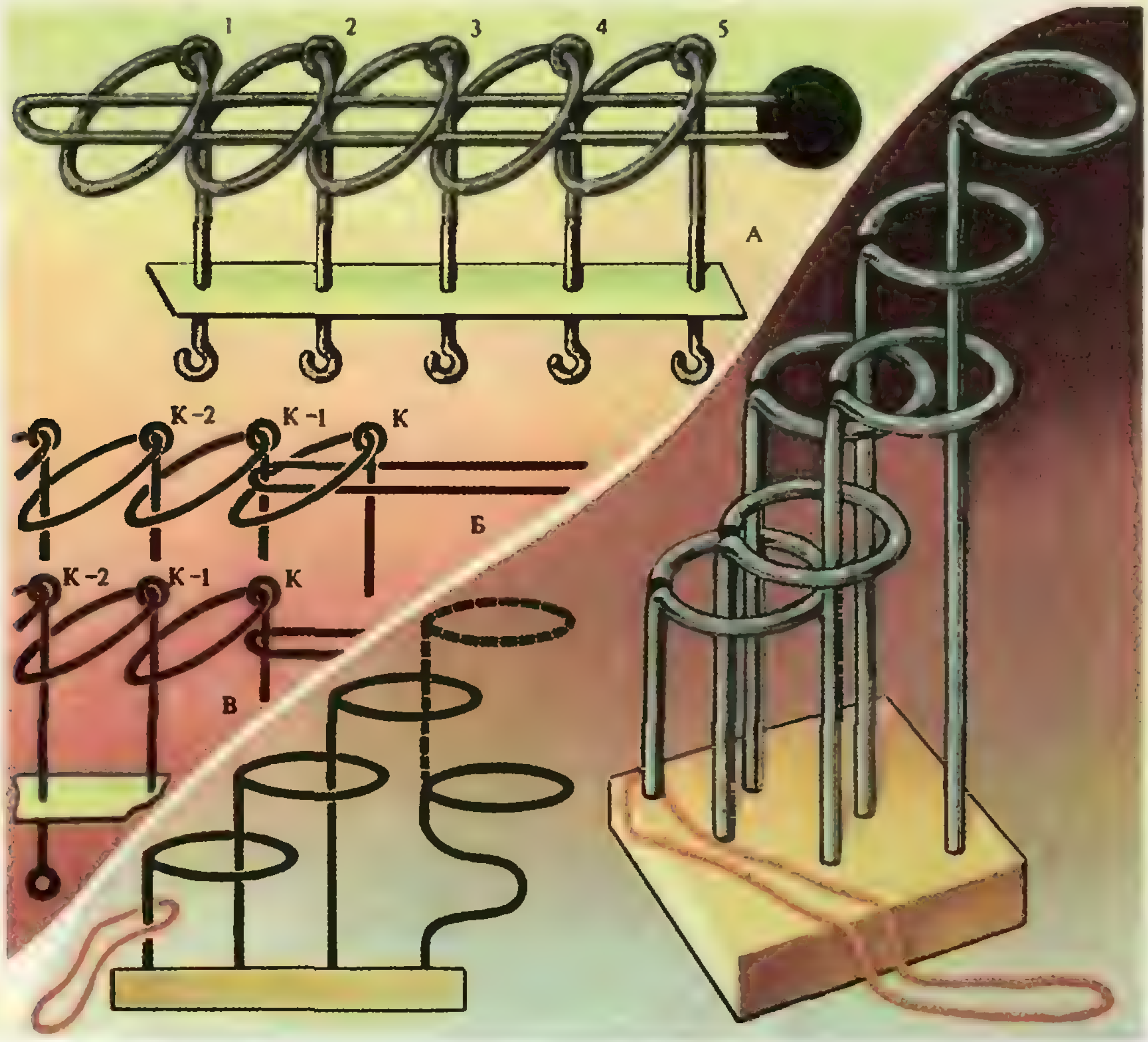
1) Докажите, что $L_k=2L_{k-1}+1$, $M_k=M_{k-2}+L_{k-1}+1$.

2) Выразите L_k и M_k через k, напишите соответствующие последовательности ходов.

3) Как снять веревочку с «чертова цветка»?

Решить эти задачи вам поможет сделанное выше замечание, а ответы и указания помещены на с. 79.

В. Д.



НОМЕР
7

Квант

1988

7

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *И. М. Яглом* Якоб Штейнер
10 *А. А. Панов.* Флексагоны, флексоры, флексманы
15 *А. Д. Чернин.* Космические иллюзии и миражи
24 *А. А. Абрикосов (мл.).* История росинки

Задачник «Кванта»

31 Задачи М1111—М1115, Ф1123—Ф1127
34 Problems M1111—M1115, P1123—P1127
36 Решения задач М1091—М1095, Ф1103—Ф1107
32 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

45 Задачи
46 *Т. С. Петрова.* Из жизни молекул

* * *

50 *М. Гарднер.* Остров пяти красок

Искусство программирования

57 *В. Н. Касаткин.* Сколько цифр в числе 100!?

Информация

22 Заказы принимаются...
60 Заочная школа при НГУ
Смесь (*44*)

Наша обложка

1 *Любую ли карту на плоскости можно правильно раскрасить четырьмя красками — так, как это сделано, например, для острова, изображенного на нашей обложке? («Правильно» — это так, чтобы никакие две соседние страны не были окрашены в один цвет.)*
В 1976 году Аппелем и Хакеном была доказана теорема, дающая утвердительный ответ на этот вопрос.
А вот в статье М. Гарднера «Остров пяти красок» вы столкнетесь с фантастической историей, «опровергающей» эту знаменитую теорему.

2 *Трудно поверить, но 250 лет назад теория тяготения Ньютона вызывала недоверие, споры и даже насмешки. Свидетельство тому — карикатура, появившаяся при жизни Ньютона. А в нашем веке были обнаружены явления поистине космического масштаба, связанные с законом всемирного тяготения. Об этом читайте в статье А. Д. Чернина.*

3 *Шахматная страничка.*

4 *«Рецепт» склейки флексора Клауса Штеффена. Что такое флексор (а также флексагон и флексман) вы узнаете, познакомившись со статьей А. А. Панова.*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1988

ЯКОБ ШТЕЙНЕР

(из истории геометрии)

Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ

Во второй половине XVIII и в начале XIX века в Швейцарии жил замечательный педагог-гуманист Иоганн Генрих Песталоцци (1746—1827). Ныне Песталоцци во всем мире считается основоположником теории начального обучения детей, идеи о соединении обучения с производительным трудом. Рассказывать о нем можно было бы долго — но не Песталоцци является здесь нашим героем. Свои идеи Песталоцци проверял и реализовывал в основанной им превосходной начальной школе-интернате для детей бедняков. Сотрудники Песталоцци разъезжали по всей Швейцарии, отбирая будущих учеников и уговаривая (часто это было труднее всего) их родителей послать детей в школу.

В 1814 году один из посланных Песталоцци сотрудников встретил в горах Швейцарии молодого пастуха Якоба Штейнера, сына бедного крестьянина. Якоб в это время едва умел читать и писать, однако самоучкой он приобрел некоторые познания в математике и в особенно увлекавшей его тогда астрономии. Эти знания и интересы молодого пастуха поразили сотрудника Песталоцци, который стал убеждать Штейнера-отца отказаться от услуг ценного помощника и отправить сына в школу учиться. С большим трудом ему удалось до-

[redacted]

Автор этой статьи Исаак Моисеевич Яглом умер 17 апреля этого года. Читателям «Кванта» хорошо известно это имя: И. М. Яглому принадлежит такое большое число популярных книг по математике, что, вероятно, каждый интересующийся математикой читал что-то написанное им. В разные годы на страницах журнала было опубликовано более десяти его статей. Более сорока лет жизни он верно служил популяризации математики.

Исаак Моисеевич Яглом родился в 1921 году. По счастливой случайности, когда он учился в старших классах, замечательные математики с энтузиазмом организовывали в Московском университете первые математические кружки и олимпиады. В 1938 году Яглом получил первую премию на олимпиаде, а на следующий год, став студентом, И. М. Яглом оказался одним из самых активных руководителей кружка. Еще до войны Д. О. Шклярский, погибший на фронте, задумал создать сборник кружковских задач и начал собирать материал. Замысел Шклярского был завершен после войны, причем большая часть работы была выполнена Исааком Моисеевичем, ставшим основным хранителем «кружковской мудрости». Трехтомник «Задачи и теоремы элементарной математики» Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома на долгие годы становится основным руководством для ребят, интересующихся математикой. Эта книга открыла серию «Библиотека математического кружка». В этой серии вышло еще несколько книг И. М. Яглома.

Для Яглома важно, что уже в школьные годы ребята могут не только решать изолированные красивые задачи, но и, работая над хорошо спланированными сериями задач, они могут непрерывно переходить к профессиональной математической деятельности. На это ориентированы такие книги «Библиотеки» как «Выпуклые фигуры» (написана совместно с В. Г. Болтянским), «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (совместно с А. М. Ягломом), двухтомник «Геометрические преобразования».

В последние годы жизни Исаака Моисеевича остро волновали гуманитарные аспекты математики: он много пишет о ее истории, связях с естественными и гуманитарными науками, ее месте в жизни общества. В этой деятельности в полной мере проявились высочайшая культура, широкая эрудиция, которые поражали каждого, кто имел счастье быть лично знаком с Исааком Моисеевичем.

Предлагаемая вниманию читателя статья посвящена Якобу Штейнеру, крупнейшему представителю «золотого века» немецкой геометрии. Очень характерно, что внимание И. М. Яглома привлекала эта колоритная, противоречивая фигура. В Штейнере уживались фантастическая геометрическая интуиция и необычайный консерватизм, выражавшийся в категорическом неприятии координат и комплексных чисел в геометрии, которые, как он был искренне уверен, ведут к уничтожению истинного духа геометрии.

биться этого — и 18-летний Штейнер (он родился в 1796 году) навсегда покинул родную деревню. Вскоре Якоб оказался в городке Иверден вблизи Берна, в руководимой Песталоцци школе-интернате, куда Песталоцци принял его бесплатно: ведь ни за учебу, ни за питание, ни за проживание Штейнеру платить было нечем.

У Песталоцци Штейнер провел 4 года. Сначала он учился в школе, а затем сам преподавал в ней математику. Однако Песталоцци быстро понял, что талант Штейнера заслуживает лучшего применения. Следуя настоятельным советам Песталоцци, Штейнер в 1818 году переезжает в Германию, в город Гейдельберг — ближайший к Ивердену крупный университетский центр.

Песталоцци рассчитывал, что Штейнер закончит Гейдельбергский университет и затем сам выберет свой путь; однако в полной мере эти надежды не осуществились. Песталоцци выдал Штейнеру некоторую сумму денег на дорогу и на первое обзаведение в чужом городе. Но дальше Штейнеру предстояло самому обеспечивать себя хлебом насущным. Никакой профессией, кроме профессии учителя математики, Штейнер не владел. Он вынужден был перегружать себя частными уроками, за которые платили ему мало: ведь он не имел никакого серьезного образования. Эти глубоко ненавидимые Штейнером уроки не давали ему возможности систематически посещать университет. За три года пребывания в Гейдельберге он сумел прослушать лишь несколько университетских курсов (что, впрочем, тоже было не мало, учитывая его уровень подготовки). Кроме того, в Гейдельберге Штейнер приобрел первые математические знакомства, ибо выдающиеся таланты швейцарца сразу же бросались в глаза.

В 1821 году друзья сообщили Штейнеру об открывшейся в Берлине вакансии преподавателя математики в одной из столичных гимназий, и он сразу же пустился в путь. Положение гимназического учителя давало бы ему регулярный заработок. Но для занятия столь желанного места ему предстояло еще сдать экзамены, а их результаты никак не могли особенно воодушевить руководство гимназии.

Прежде всего у кандидата на должность учителя спросили, знаком ли он с курсом гимназии. На этот вопрос Штейнер ответил кратко: «Нет, не знаком». А что еще он мог сказать? Ведь в прусской гимназии проходились латынь и древнегреческий язык, с которыми сын швейцарского крестьянина был знаком не больше, чем мы с вами, мой читатель. Но и с экзаменом по математике дело обстояло не слишком благополучно: Штейнер показал обширные и глубокие знания по геометрии, но более чем скромные — по алгебре и тригонометрии, а в области математического анализа у него оказались зияющие пробелы. Однако бросающиеся в глаза выдающиеся геометрические способности молодого швейцарца и представленные им лестные характеристики сделали свое дело: Штейнеру было разрешено два года преподавать математику во всех классах, кроме выпускного. Он должен был за это время сдать экзамены по курсу гимназии (их Штейнер так никогда и не сдал) и дополнительный экзамен по математике (его Штейнер сдал значительно позже).

В средней школе Штейнер проработал 14 лет. Стало это возможным лишь после открытия в Берлине реального училища, в котором увеличено было число часов на математику и на естественные науки, но не преподавались древние языки (а следовательно, их знание не требовалось и от учителей училища). Однако, несмотря на то, что организатором и директором училища являлся также ученик Песталоцци, Штейнер сначала и здесь числился только помощником учителя. Лишь после сдачи дополнительных экзаменов (в 1829 году) он стал старшим учителем. Увы! Приходится признать, что раздражительный и невнимательный к людям Штейнер учителем был неважным. Он с увлечением занимался с одаренными учениками, придумывая для них яркие индивидуальные задания (в первую очередь — по геометрии, см. задачи 1,

Якоб Штейнер (1796—1863).

2, 6 и Приложение). Остальные же школьники только сердили его: отсутствие у учащегося способностей и интереса к математике Штейнер просто не мог понять. Иногда, когда становилось совсем уж невмоготу, он даже бросал регулярную работу в школе и вновь, как в молодости, добывал пропитание частными уроками. Так же обстояло дело и в тот, к счастью, краткий период, когда от преподавания в гимназии Штейнер за неcдачу экзаменов был отстранен, а реальное училище еще не открылось. Однако он неизменно возвращался в родное училище, где к его выходкам привыкли, а математические его таланты высоко ценились.

В реальном училище, подбирая задачи для сильных школьников, Штейнер приобрел сохранившийся у него на всю жизнь интерес к элементарной геометрии. Рассмотрим несколько результатов Штейнера в этой области. Начнем с задач, идущих от великого Эйлера.

Эйлер установил, что *три середины сторон произвольного треугольника, три основания его высот и три точки, делящие пополам отрезки высот от точки их пересечения* (ортоцентра треугольника) *до вершин принадлежат одной окружности.* Эта окружность называется *окружностью Эйлера* или *окружностью девяти точек треугольника.* Замечательно, что для каждого треугольника его окружность Эйлера касается вписанной и трех вневписанных окружностей (рис. 1). Этот факт часто называют *теоремой Фейербаха* по имени того, кто впервые его доказал; но мало кто знает, что незнакомый с результатом Фейербаха Штейнер доказал эту теорему всего через два года после ее первооткрывателя и сразу же опубликовал свой результат (так что многие математики познакомились с ним по публикации Штейнера, а не Фейербаха).

Задача 1. Пусть окружность S с центром в ортоцентре H треугольника ABC пересекает его средние линии $B_1A_1(\parallel AB)$, C_1B_1 $(\parallel BC)$ и $A_1C_1(\parallel CA)$ соответственно в точках F_1 и F_2, D_1 и D_2, E_1 и E_2. Докажите, что $AD_1=AD_2=BE_1=BE_2=CF_1=CF_2$ (теорема Штейнера).

Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ *перспективны с центром перспективы* P, если прямые AA_1, BB_1 и CC_1 сходятся в одной точке P. Два «собственно подобных» треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (т. е. подобных и таких, что направления обхода $A\to B\to C$ и $A_1\to B_1\to C_1$ одинаковы — оба совпадают с направлением вращения часовой стрелки или оба противоположны

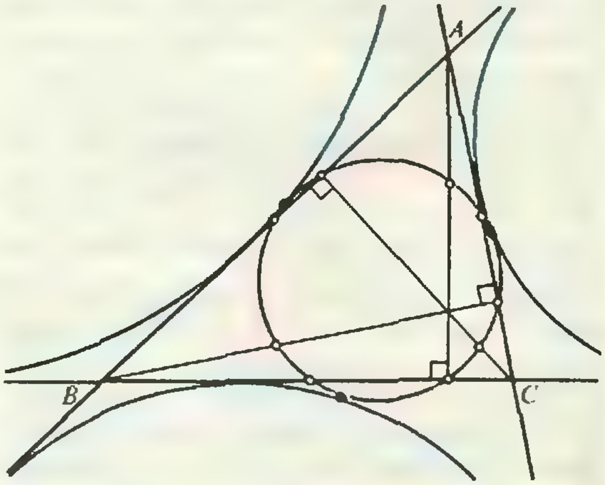


Рис. 1.

ему) всегда можно совместить *центроподобным поворотом* с центром Q, т. е. равномерным растяжением от Q или сжатием к Q (гомотетией), сопровождаемым поворотом вокруг Q (почему?); точка Q называется *центром подобия* треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

Задача 2. Пусть a, b, c — прямые, образующие треугольник T; пусть прямая l пересекает a, b, c в точках A_0, B_0, C_0. Восстановим в этих точках перпендикуляры к сторонам треугольника T: $a_1 \perp a$, $b_1 \perp b$, $c_1 \perp c$. Обозначим треугольник, образованный прямыми a_1, b_1, c_1, через t.

а) Тогда треугольники T и t собственно подобны и перспективны; описанные вокруг них окружности S и s взаимно перпендикулярны (т. е. перпендикулярны касательные к S и к s в точке их пересечения); точки $\{P, Q\} = S \cap s$ являются соответственно центром перспективы и центром подобия треугольников T и t (теоремы Штейнера).

б) Как изменятся приведенные теоремы, если прямые a_1, b_1, c_1 не перпендикулярны a, b и c, а образуют с a, с b и с c соответственно заданный (по величине и по направлению) угол α?

Следующая серия задач, касающихся полного четырехсторонника, идет от великого Гаусса: Штейнер со вкусом выбирал предшественников!

Полным четырехсторонником Ч называется фигура, образованная четырьмя прямыми «общего положения» (т. е. такими, что никакие три не пересекаются в одной точке и никакие две не параллельны); треугольники, сторонами которых являются три из этих прямых, называются *треугольниками четырехсторонника Ч*; точки пересечения прямых — *вершинами четырехсторонника Ч*; отрезки, соединяющие «несмежные» (не принадлежащие одной из наших прямых) вершины,— *диагоналями четырехсторонника Ч*.

Задачи

3 (теорема Гаусса). Середины трех диагоналей четырехсторонника Ч принадлежат одной прямой (рис. 2, *а*). Эта прямая называется *прямой Гаусса четырехсторонника Ч*.

4. Описанные вокруг четырех тре-

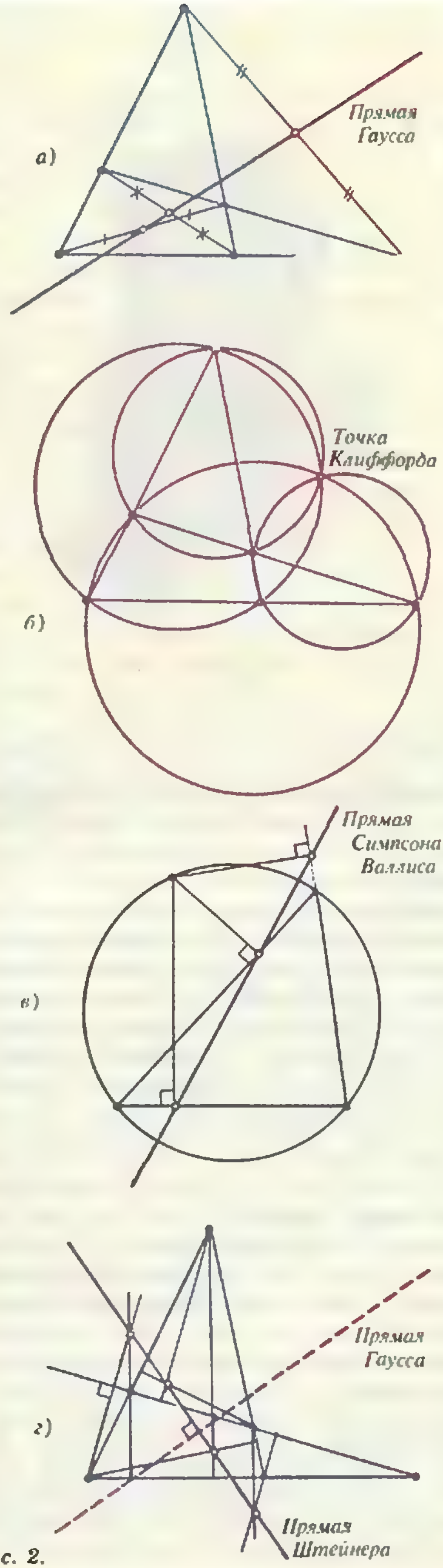
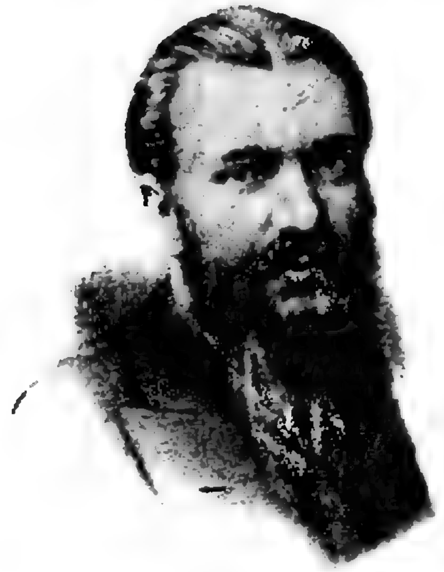


Рис. 2.



Уильям Кингдом Клиффорд (1845—1879).

угольников Ч окружности пересекаются в одной точке (рис. 2, *б*). Эта точка C называется *точкой Клиффорда четырехсторонника Ч*.

Теорема из задачи 4 была известна и до Клиффорда. Он, однако, придумал замечательную конструкцию (*цепь Клиффорда*), в которую эта задача включается. *Полным n-сторонником N* назовем n прямых «общего положения»; N содержит n полных $(n-1)$-сторонников $M_1, M_2, \ldots, M_n$, получаемых отбрасыванием прямых по одной. ***Точкой Клиффорда «полного 2-сторонника»*** (a, b) назовем точку пересечения прямых a и b, а ***окружностью Клиффорда полного 3-сторонника*** (a, b, c) — окружность, содержащую три точки Клиффорда 2-сторонников (a, b), (a, c) и (b, c) (т. е. окружность, описанную вокруг треугольника со сторонами a, b, c). Далее, если n четно, то n окружностей Клиффорда $(n-1)$-сторонников $M_1, M_2, \ldots, M_n$ пересекаются в одной точке — *точке Клиффорда полного n-сторонника N* (при $n=4$ — это теорема задачи 4). Если же n нечетно, то n точек Клиффорда $(n-1)$-сторонников $M_1, M_2 \ldots, M_n$ принадлежат одной окружности — *окружности Клиффорда полного n-сторонника N*.

Задачи

5 (вспомогательные задачи). а) Основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника T из точки M описанной вокруг него окружности, принадлежат одной прямой (рис. 2, *в*). Эта прямая w называется *прямой Симпсона — Валлиса* точки M относительно треугольника T.

б) Прямая w делит пополам отрезок MH, где H — ортоцентр треугольника T.

6 (теоремы Штейнера). *а*) Ортоцентры четырех треугольников Ч принадлежат одной прямой (рис. 2, *г*). Эта прямая s называется *прямой Штейнера четырехсторонника Ч*.

б) Для каждого полного четырехсторонника Ч его прямая Штейнера s перпендикулярна его прямой Гаусса g.

Продолжим теперь жизнеописание Штейнера. Самой большой его удачей в берлинский период жизни было знакомство с математиком-любителем, богатым промышленником, талантливым инженером и железнодорожным магнатом Августом Леопольдом Крелле (1780—1855). Видным ученым Крелле не был, хоть он и состоял членом Берлинской (Прусской) и членом-корреспондентом Петербургской (Российской) академий наук. Однако этих отличий он удостоился скорее за свои инженерные достижения и организационные таланты, чем за научные успехи. Но крупный предприниматель обязан хорошо разбираться в людях — и Крелле доказал, что этими способностями он обладал в полной мере.

Первый специализированный математический журнал в Европе был основан в 1810 году известным французским математиком Жозефом Диазом Жергоном (1771—1859) и назывался «Анналы Жергона». Крелле решил создать математический журнал в Германии. Обдумывая состав будущих авторов журнала, Крелле в первую очередь рассчитывал на двух совершенно неизвестных профессиональным математикам лиц, в таланты которых он глубоко верил: на недоучившегося норвежского студента Н. Х. Абеля и на учителя средней школы Якоба Штейнера. Первый выпуск нового журнала, который инженер Крелле назвал: «Журнал чистой и прикладной математики», вышел в 1826 году. Основное его содержание (как и содержание следующих выпусков журнала) составляли статьи Абеля и Штейнера. Так, в первых трех томах журнала напечатано 15 (!) статей и заметок Штейнера. «Журнал Крелле», как его тут же стали именовать математики, стал «первым математическим журналом мира». (В этой связи Жергон даже закрыл в 1831 году свой журнал. Впрочем, в 1836 году он был возобновлен другим французским математиком Жозефом Лиувиллем (1809—1882) под названием, в точности копирующим название журнала Крелле.)

С созданием журнала Крелле Штейнер получил трибуну, с которой он мог возвещать свои геометрические идеи. К тому же влиятельный Крелле стал инициатором избрания Штейнера (в 1834 году) в Берлинскую Академию наук: выдающиеся научные труды Штейнера, опубликованные в журнале Крелле, давали для этого достаточные основания. После этого было уже нетрудно добиться избрания Штейнера профессором — и в 1835 году Штейнер расстался со средней школой, заняв место профессора естественно-научного отделения Берлинского университета.

Замечательно, что неважный школьный учитель Штейнер оказался выдающимся университетским профессором. В школе его раздражали чуждые математике ученики; интересующиеся же геометрией студенты вдохновляли Штейнера, и его яркие по форме и темпераментные по исполнению лекции сразу же стали пользоваться очень большим успехом: даже швейцарский акцент необычного профессора нравился студентам. Импонировало студентам и то, что Штейнер постоянно ставил на своих лекциях задачи и вызывал слушателей к доске для решения этих задач. (В наши дни так же строил свои лекции в Московском университете академик И. М. Гельфанд — и они тоже имели у студентов большой успех.)

Этот успех лекций Штейнера в истории геометрии частично сыграл даже отрицательную роль. Так, еще и во второй половине нашего столетия, лекции, скажем, по проективной геометрии во многих университетах мира читались по сильно к тому времени устаревшей схеме, разработанной не получившим систематического образования швейцарским пастухом. При этом использовалась придуманная Штейнером архаическая терминология, не употребляемая больше ни в одном разделе математики.

Штейнер чувствовал себя лидером немецкой геометрии; при этом на отступления от своих установок он реагировал зачастую достаточно болезненно. Самой заметной фигурой в современной Штейнеру геометрии в Германии был профессор Боннского университета Юлиус Плюккер (1801—1868). Однако Плюккер представлял *аналитическое* направление геометрии, стремящееся заменить геометрические образы их записью в координатах и затем работать с координатными представлениями геометрических объектов, используя совершенный алгебраический аппарат. Уже одно это было крайне антипатично «чистому» геометру Штейнеру, аналитических методов в геометрии не признававшему. Кроме того, возможно, Плюккер имел в глазах выходца из бедной крестьянской семьи Штейнера, так и не получившего университетского образования, еще два недостатка. Плюккер происходил из семьи рейнских промышленных магнатов и был чрезвычайно богат. Помимо того, он окончил два университета: в Бонне и в Париже. Поэтому немудрено, что работы Плюккера вызывали ярость Штейнера.

Плюккер в своих работах бывал неаккуратен — описки и другие дефекты, обычно легко устранимые, встречались у него нередко, так что почва для нападок Штейнера и в самом деле была. Резкая (и чаще всего несправедливая) критика Штейнера так утомила Плюккера, что он времен-

Давид Гильберт (1862—1943).

но даже вовсе отказался от геометрии, вернувшись к ней (с выдающимися успехами) лишь после смерти Штейнера. Пока же он обратился к эспериментальной физике, успев и в этой области очень много. В частности, возможно, что без нападок Штейнера на Плюккера человечество позже пришло бы к идеям физического структурного анализа и к открытию так называемых катодных лучей, осуществленному учеником Плюккера Иоганном Вильгельмом Гитторгом (1824—1914).

Так даже недостатки больших ученых иногда оборачиваются благом для науки!

Последние два года жизни Штейнер много болел — здесь сказались перенапряжение и недоедание в ранние годы. Для излечения он часто ездил в родную Швейцарию, но в 1863 году из такой поездки он так и не вернулся: Штейнер умер 1 апреля 1863 года в полном одиночестве в номере гостиницы в Берне. Длительный период материальной необеспеченности помешал ему обзавестись семьей. Он завещал некоторую сумму денег Берлинской Академии наук — для учреждения премии за сочинения по геометрии (конечно же, «чистой»!), и руководству кантона, где он родился — на премию за успехи в области математики ученикам начальной школы для детей бедняков.

Приложение

Построения с помощью одной линейки

Постулаты 1—3 Евклидовых «Начал» утверждают возможность неограниченного продолжения заданного отрезка прямой, проведения прямой через две известные точки и проведения окружности с заданными центром (точкой) и радиусом (отрезком). Вместе с подразумеваемыми Евклидом, но явно не формулируемыми, постулатами о возможности указать точку пересечения двух заданных (например, каждая — двумя своими точками) прямых, двух известных (определенных своими центрами и радиусами) окружностей и заданных прямой и окружности эти постулаты описывают весь массив «разрешимых по Евклиду» задач на построение: эти задачи должны сводиться к перечисленным постулатам, т. е. решаться с помощью линейки и циркуля.

В 1797 году в Италии была издана книга Лоренцо Маскерони (1750—1800) «Геометрия циркуля», в которой устанавливалось, что *все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, разрешимы также с помощью одного лишь циркуля* (с тем естественным ограничением, что отрезок прямой, понятно, циркулем быть построен не может,— однако, зная две его точки, можно циркулем указать неограниченное количество других точек отрезка). Гораздо позже была найдена изданная в 1672 году (за 125 лет до Маскерони!) по-голландски и по-датски книга датчанина Георга Мора (1640—1697), в которой была доказана та же теорема.

Штейнер же заинтересовался построениями, осуществимыми с помощью одной линейки (см. задачи 1—3 ниже). Он последовательно рассмотрел построения одной линейкой, выполнимые при наличии на плоскости а) двух параллельных прямых или отрезка, разделенного известной точкой в данном рациональном отношении; б) параллелограмма; в) квадрата; г) окружности с известным центром — и установил, что в случае г) разрешимы все «разрешимые по Евклиду» задачи на построение (конечно, окружность с данными центром и радиусом мы одной линейкой

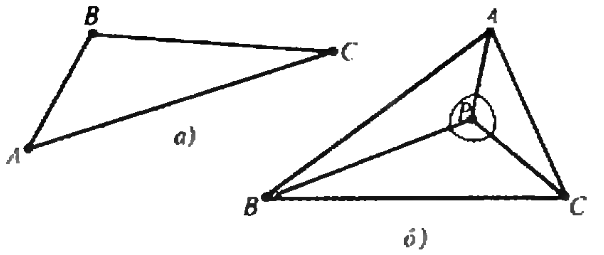


Рис. 3.

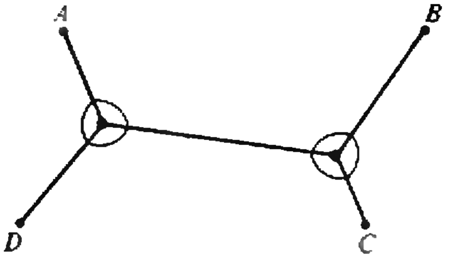


Рис. 4.

построить не можем,— но можем найти любое число точек этой окружности).

Задачи

1°. Даны параллельные прямые AB и l. Постройте: а) середину C отрезка AB; б) такую точку D этого отрезка, что $AD=AB/n$, где n — заданное (натуральное) число.

2°. Даны точки A, B и а) середина C отрезка AB; б) такая точка D этого отрезка, что $AD=AB/n$. Проведите через заданную точку M прямую $l \parallel AB$.

3°. На плоскости заданы точка M, прямая l и а) параллелограмм, б) квадрат. Проведите через точку M в случае а) прямую $m \parallel l$, в случае б) — прямую $m \perp l$.

4°. На плоскости даны окружность S с центром O и а) 5 точек: A, B, Q, K, L; б) 6 точек Q, K, L, P, M, N. Постройте в случае а) точки пересечения прямой AB и окружности с центром Q и радиусом KL; в случае б) — точки пересечения окружностей с центрами Q и P и радиусами KL и MN.

5° (задача Гильберта). На плоскости дана окружность S. Докажите, что одной линейкой — без циркуля! — построить центр этой окружности невозможно.

Кратчайшие сети дорог

Штейнер часто задавал своим студентам задачи, требующие указать самую лучшую в том или ином отношении фигуру или конфигурацию. Вот одна из его любимых задач:

Имеются три деревни: A, B, C. Требуется соединить их минимальной по длине сетью дорог.

Более или менее ясно (хотя и это требуется еще доказать), что решение здесь задается либо двумя (кроме длиннейшей) сторонами $\triangle ABC$, либо отрезками AP, BP, CP, где сумма расстояний от P до вершин $\triangle ABC$ — наименьшая возможная (рис. 3, *а*, *б*). При этом в случае рисунка 3,*б* отрезки AP, BP, CP должны образовывать в точке P одинаковые углы, ибо если, скажем $\angle APB \neq \angle APC$, то можно найти такую точку Q, что $QA=PA$, а $QB+QC<PB+PC$. Отсюда следует, что решение задачи Штейнера дается рисунком 3, *б*, если каждый угол $\triangle$ ABC меньше 120°, и рисунком 3, *а*, если $\angle B \geqslant 120°$.

В случае, когда число деревень $n>3$, «минимальная» система соединяющих их дорог может оказаться родственной рисунку 3,*а*, т. е. состоять из каких-то дорог, соединяющих наши деревни — такая система дорог называется *остовной*. Перебором (если надо — с помощью ЭВМ; сейчас к решению «общей» задачи Штейнера с большим числом «деревень» активно привлекаются компьютеры) всегда можно найти самую короткую остовную систему дорог. Но чаще лучшей является сеть дорог, родственная рисунку 3,*б*, т. е. содержащая дополнительные «узлы» сети, в которых сходятся три дороги, попарно образующие между собой углы в 120° — такие узлы называются *точками Штейнера*, а содержащие их сети дорог — сетями Штейнера (рис. 4). Увы! Никаких общих методов отыскания минимальных сетей Штейнера, соединяющих n пунктов, у нас нет; неизвестно также, когда «абсолютно минимальная» сеть дорог будет остовной, а когда — сетью Штейнера. Правда, предполагают, что минимальная остовная сеть дорог очень заметно превышать минимальную сеть Штейнера не может: в самом худшем случае она окажется всего в $(2/3)\sqrt{3}$ раз (т. е. примерно на 15 %) длиннее — но и эта гипотеза доказана пока всего лишь для случая $n \leqslant 5$.

Вот как непроста оказалась «общая» задача Штейнера о кратчайшей сети путей, соединяющих n точек (у самого Штейнера для случая $n>3$ имелись лишь отдельные примеры таких сетей — но и сегодня мы знаем почти так же мало, как знал он!).

Задачи

6°. Докажите сформулированный результат Штейнера.

7°. Найдите кратчайшую сеть путей, соединяющих 4 точки A, B, C, D, являющиеся вершинами: а) квадрата; б) треугольной пирамиды (тетраэдра).

ФЛЕКСАГОНЫ, ФЛЕКСОРЫ, ФЛЕКСМАНЫ

А. А. ПАНОВ

Приглашаем вас на короткую экскурсию в загадочный мир флексагонов и флексоров — бумажных игрушек, обладающих поразительной способностью внезапно менять свою форму и цвет. Любую из этих игрушек вы сумеете склеить за самое короткое время.

Но прежде всего — о названии статьи. Английское to flex означает складываться, сгибаться, гнуться.

А теперь приготовьте лист ватмана или плотной альбомной бумаги, карандаши, ножницы, клей — и за дело.

Гексафлексагон

Флексагон — это склеенный из бумаги многоугольник, который, изгибаясь и складываясь, может переходить во все новые и новые состояния.

Гексафлексагон — это флексагон, имеющий форму правильного шестиугольника. Вырежем из бумаги полоску шириной 2,5 см, состоящую из десяти правильных треугольников, и раскрасим ее обе стороны — прямую и оборотную, как на рисунке 1.

Несколько раз перегнем полоску по границам треугольников и продолжим изготовление флексагона, складывая полоску, как на рисунке 2.

Теперь остается только подогнуть вниз синий треугольник, склеить друг с другом две неокрашенные треугольные поверхности — и флексагон готов. Одна сторона у него красная, другая — синяя. Чтобы извлечь на свет его третью — зеленую поверхность, необходимо действовать следующим образом. Сначала флексагон ставится на плоскость стола так, чтобы он опирался на три нижние точки. Эти точки нужно поджать друг к другу, и в момент их полного сближения флексагон сам собой вывернется наизнанку, обнажая свою зеленую поверхность. Теперь остается развести верхние точки флексагона в стороны, и флексагон готов к новой трансформации. Так, последовательно переходя из одного состояния в другое, флексагон будет поочередно предъявлять нам все свои три поверхности. Рисунок 3 дает некоторое представление об изгибании флексагона.

Сделанная нами модель является простейшей из обширного семейства гексафлексагонов, описанного в книге Мартина Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., Мир, 1971). В этой интереснейшей книге изложена история открытия гексафлексагонов и подробно рассказано о том, как можно строить модели с бóльшим числом поверхностей.

Двойное шарнирное соединение

Двойное шарнирное соединение — это конструктивный элемент, служащий основой для еще одного ряда флексагонных моделей. Вырежем из бумаги два прямоугольника размером 2,5×5 см и две полоски размером 1×7 см. На обоих концах каждой полоски отогнем по квадрату 1×1 см. Раскрасим прямоугольники и полоски, как на рисунке 4, где представлены их прямые и оборотные стороны.

Приклеим обе полоски к одному из прямоугольников, соединяя незакрашенные квадраты с незакрашенными, и завернем обе полоски на красную сторону прямоугольника. Должно получиться то, что изображено на рисунке 5.

Сверху красной стороной наложим второй прямоугольник и снова склеим незакрашенные квадраты. Это и есть двойное шарнирное соединение. Оно само является простейшим флексагоном, который может находиться в

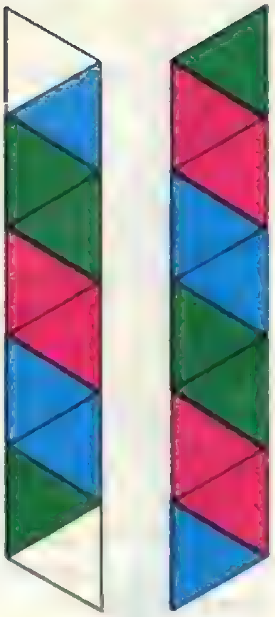


Рис. 1.

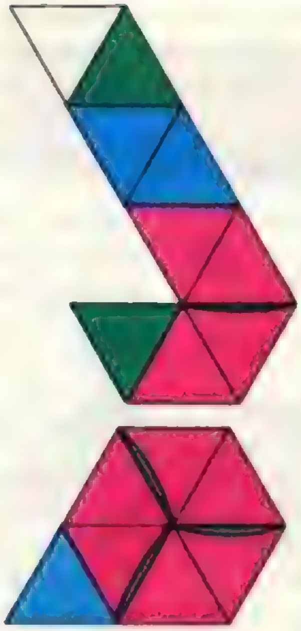


Рис. 2.

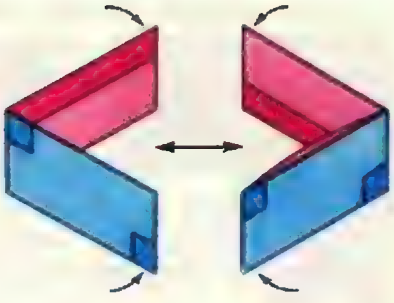


Рис. 6.

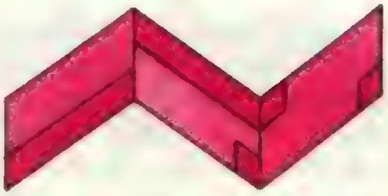


Рис. 7.

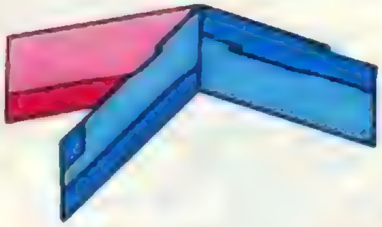


Рис. 8.

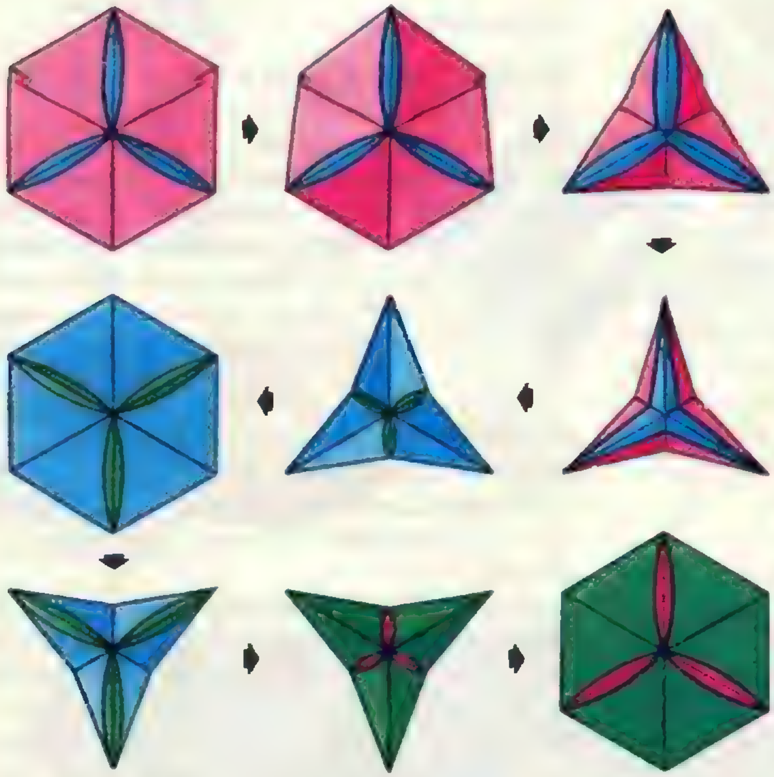


Рис. 3.

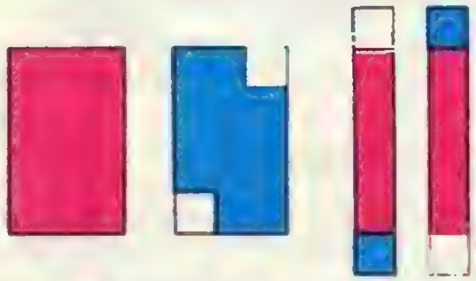


Рис. 4.

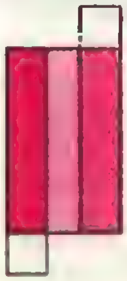


Рис. 5.

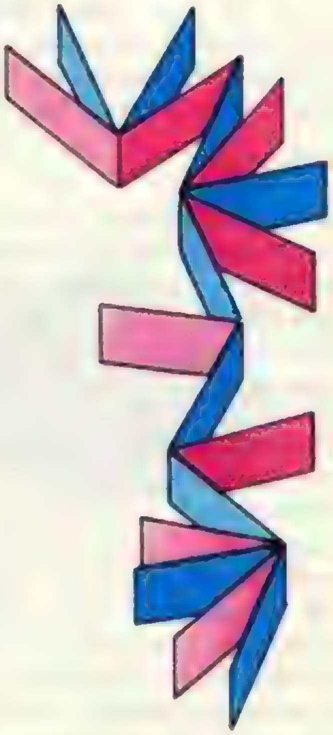


Рис. 9.

двух состояниях. Чтобы перейти от одного состояния к другому, нужно сблизить удаленные стороны прямоугольников (рис. 6).

В упомянутой книге Гарднера описано целое семейство флексагонов, в конструкции которых использовано двойное шарнирное соединение. Они называются тетрафлексагонами.

Флексоцепь 1

Возьмем двойное шарнирное соединение и присоединим к нему еще один прямоугольник. Получится короткая цепочка из трех прямоугольников, содержащая два двойных шарнирных соединения — флексоцепь (рис. 7).

Она может находиться уже в четырех состояниях. Еще одно из них изображено на рисунке 8.

Не будем останавливаться на достигнутом и удлиним нашу цепочку до 15—20 прямоугольников (рис. 9). Если цепь содержит n двойных шарнирных соединений, т. е. $n+1$ прямоугольников, то она может находиться в 2^n состояниях. Например, цепочка, состоящая из 21 прямоугольника может находиться всего в $2^{20} = 1\,048\,576$ состояниях. Забавно наблюдать, как такая флексоцепь, изгибаясь, лежит на столе. Легкого прикосновения достаточно, чтобы перевести ее в новое состояние.

Флексоны

Пусть флексоцепь находится в каком-то определенном состоянии. Возьмемся за оба ее конца и начнем ее растягивать. Пройдя через ряд состояний, цепочка окажется в каком-то устойчивом состоянии, например, как на рисунке 10.

Устойчивые состояния представляют собой прямолинейную цепочку, от которой в некоторых узлах отходят единичные прямоугольники. Такие устойчивые состояния флексоцепи будем называть флексонными состояниями, а отходящие от цепи прямоугольники — флексонами. Мы выбрали такое название, чтобы подчеркнуть аналогию флексонов и элементарных частиц. Действительно, флексоны обладают следующими двумя замечательными свойствами:

флексоны могут перемещаться
вдоль флексоцепи;
при столкновении флексоны
«аннигилируют»

Для того чтобы заставить флексон сдвинуться, нужно приблизить его свободную сторону к флексоцепи — сработает двойное шарнирное соединение и флексон переместится (рис. 11). Последовательно перемещаясь, флексон может свободно двигаться вдоль всей флексоцепи.

Не буду описывать, как происходит аннигиляция флексонов, и говорить о других их свойствах, чтобы не портить вам удовольствия от самостоятельной работы с флексоцепью.

Флексоцепь 2

На этот раз мы будем строить флексоцепь не из прямоугольников, а из квадратов размером 2,5×2,5 см. Снова рассмотрим двойное шарнирное соединение и попытаемся подсоединить к нему третий квадрат. Это можно сделать двумя способами. Либо так, как показано на рисунке 12, *а* (как для флексоцепи 1), либо как на рисунке 12, *б*.

Сейчас мы продолжим цепь вторым способом и получившуюся цепочку назовем флексоцепью 2 (рис. 13). Это тоже довольно занимательная модель, и я предлагаю ее вам для исследования.

Любопытно замкнуть флексоцепь 2, состоящую из четырех квадратов (рис. 14). Получившийся флексагон можно перегибать в двух перпендикулярных направлениях, и он может находиться в четырех состояниях, последовательно переходя из одного в другое.

На этом мы заканчиваем наш рассказ о флексагонах. Подошел черед флексоров.

Кольцо из тетраэдров

На этот раз на листе бумаги нужно разместить фигуру, состоящую из 40 правильных треугольников и 13 клапанов (рис. 15). После того как вы ее

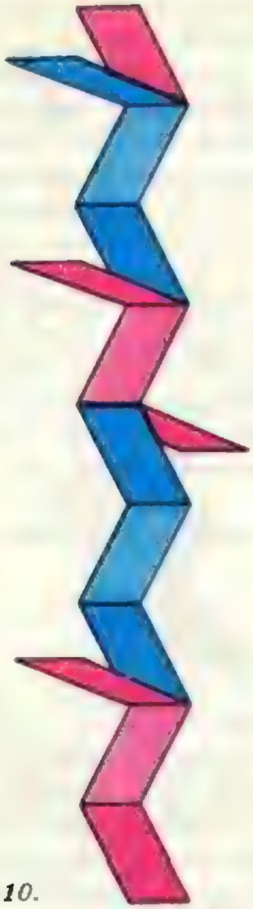


Рис. 10.

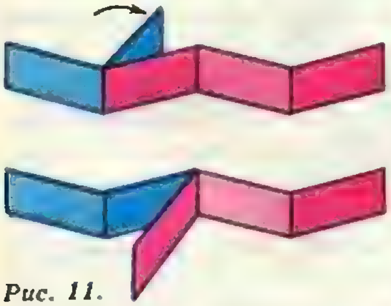


Рис. 11.

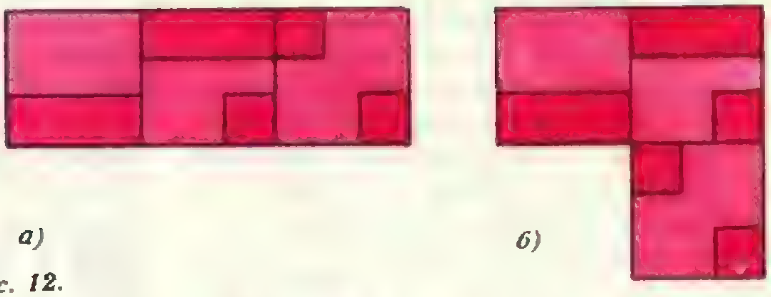


Рис. 12.

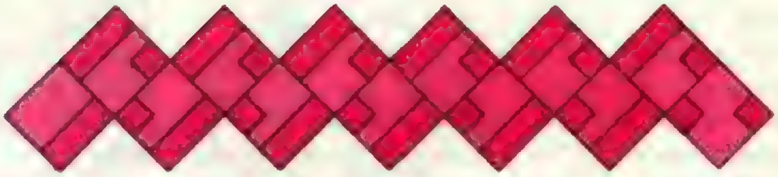


Рис. 13.

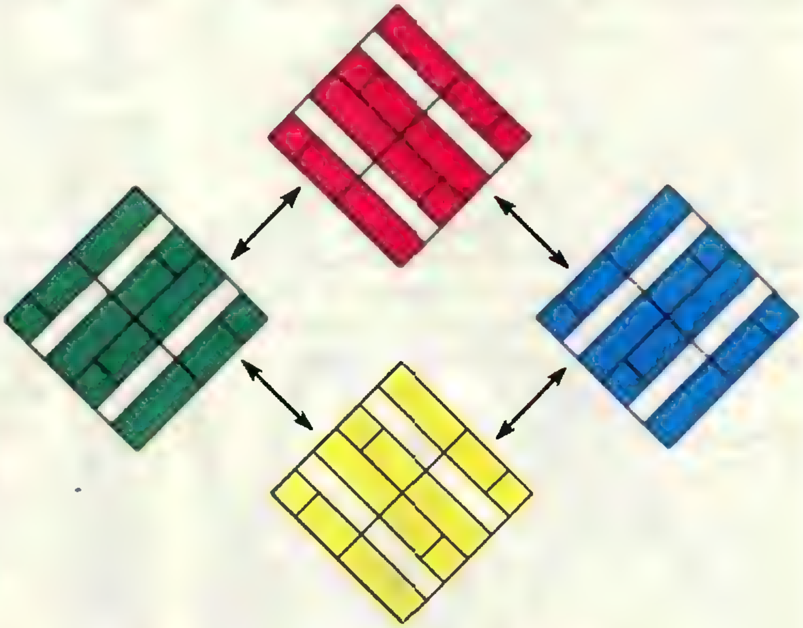


Рис. 14.

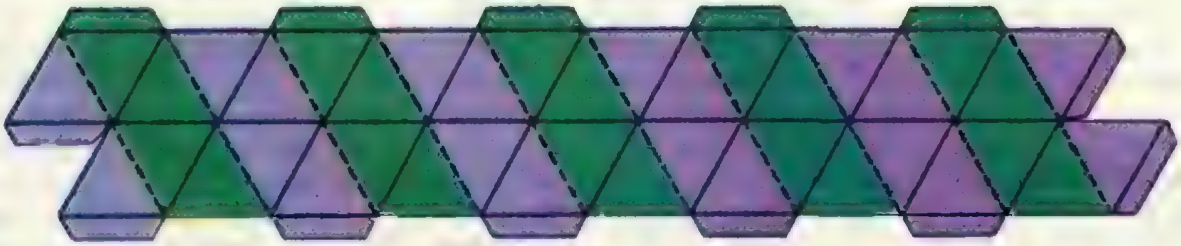


Рис. 15.

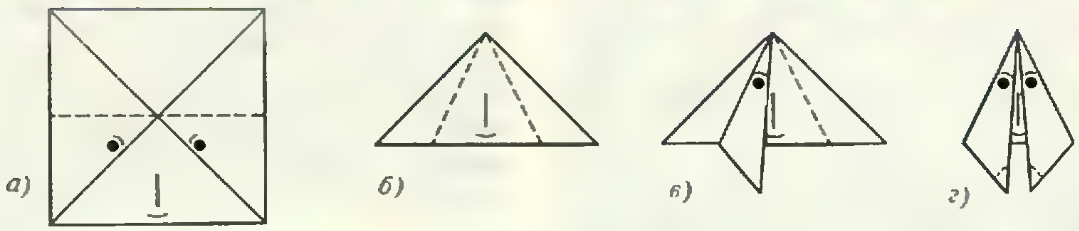


Рис. 16.

вырежете, нужно будет сделать сгибы — по сплошным линиям сгибом вверх, а по пунктирным — вниз.

Теперь приступим к склейке. Сначала работаем с левой полоской из четырех зеленых треугольников. Изогнем ее и подклеим клапан так, чтобы из этих треугольников составился тетраэдр. Сдвинемся вправо и склеим следующий тетраэдр из фиолетовых треугольников и так далее. После того как будет склеена цепочка из девяти тетраэдров, останутся четыре фиолетовых треугольника. Теперь вы уже легко сообразите, как объединить эти треугольники в последний, десятый тетраэдр и замкнуть цепочку. Можете проконтролировать себя, взглянув на четвертую страницу обложки.

Эта цепочка обладает удивительной способностью изгибаться и выворачиваться до бесконечности, все время меняя свою форму. Кольцо из тетраэдров — это первый пример флексора — изгибаемого многогранника. Еще о кольцах из тетраэдров вы можете прочесть в увлекательной книге У. Болла и Г. Коксетера «Математические эссе и развлечения» (М., Мир, 1986).

Флексоры Роберта Коннели и Клауса Штеффена

Нужно сказать, что кольцо из тетраэдров как изгибаемый многогранник вызывает ряд возражений. Во-первых, в нем есть дырка. Во-вторых, имеются ребра, к которым подходят по четыре грани. Так что не понятно, стоит ли называть это кольцо многогранником.

Чтобы избежать всяких сомнений, при поиске флексоров можно было бы ограничиться только выпуклыми многогранниками, т. е. многогранниками, лежащими по одну сторону от каждой из своих граней. Но имеется знаменитая теорема Коши о том, что любой выпуклый многогранник неизгибаем (см. например, статью Н. П. Долбилина «Жесткость выпуклых многогранников», «Квант», 1988, № 5). Она была доказана в 1813 году. Хотя эта теорема не исключала существования невыпуклых флексоров, но многие математики считали, что и таких флексоров тоже не существует. Поэтому подлинной сенсацией явился флексор, открытый Робертом Коннели в 1977 году. В свое время конструкция, предложенная Коннели, обсуждалась в статье В. Залгаллера «Непрерывно изгибаемый многогранник» («Квант», 1978, № 9) и показалась мне тогда настолько сложной, что я даже и не стал в ней разбираться. Однако вскоре Клаусу Штеффену удалось придумать настолько простой флексор, что его можно склеить буквально за считанные минуты. Как это сделать, показано на 4-й странице обложки «Кванта» № 5 за этот год.

А теперь переходим к заключительному сюжету.

Фле́ксманы

Флексманы — это существа, населяющие мир флексагонов и флексоров. Вы уже наверняка обратили внимание на изображение флексмана (с. 13). Чтобы поближе познакомиться с флексманами, вырежьте из плотной бумаги квадрат со стороной 15—20 см. Его нужно согнуть по диагоналям сгибом вверх и по штриховой линии (рисунок 16, *а*) сгибом вниз, а затем сложить, чтобы получился треугольник. Теперь нужно будет проделать четыре одинаковые операции. Результат первой из них — сгиб по штриховой линии рисунка 16, *б* — изображен на рисунке 16, *в*, окончательный результат — на рисунке 16, *г*. Остаются еще четыре одинаковые завершающие операции — отгибание маленьких треугольничков, и перед нами — флексман.

Самое примечательное свойство флексманов — это их умение ходить по наклонным плоскостям. Стоит поставить флексмана на достаточно пологую наклонную плоскость, и он тут же начинает мелкими шажками спускаться по ней. Каждый из флексманов обладает своеобразным характером или, уж во всяком случае, своеобразной походкой. Думаю, что знакомство с ними доставит вам удовольствие.

КОСМИЧЕСКИЕ ИЛЛЮЗИИ И МИРАЖИ

Доктор физико-математических наук
А. Д. ЧЕРНИН

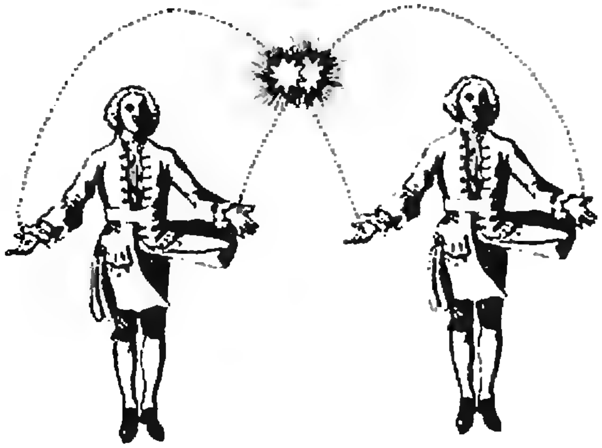
КОСМИЧЕСКИЕ ИЛЛЮЗИИ
И МИРАЖИ

Космические источники излучения, получившие название квазаров, открыты четверть века назад, в 1963 году. Но их природа и до сих пор остается не до конца разгаданной. Не видно конца сюрпризам, которые они преподносят физикам и астрономам. Недавно обнаружены удивительные явления, никогда прежде не наблюдавшиеся на небе: удвоение образов и движение со сверхсветовой скоростью.

В этой статье мы не будем касаться истории открытия квазаров, гипотез и теорий, выдвинутых для объяснения их свойств.*) Приведем лишь самые общие сведения о квазарах, а затем подробно расскажем, что представляют собой миражи и иллюзии в мире квазаров и как их следует понимать.

---

*) Об этом можно прочитать в книге А. Д. Чернина «Звезды и физика», выпущенной в 1984 году издательством «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» (выпуск 38). (*Примеч. ред.*)



Самые мощные излучатели во Вселенной

Каждый квазар — это яркий «фонарь», который светит не только в видимом оптическом диапазоне электромагнитных волн, но и во всех других диапазонах — от радиоволн до гамма-лучей. Размер излучающей области чаще всего сравним с размером Солнечной системы. Но в Солнечной системе лишь одна звезда — Солнце, а у квазара в том же объеме умещается генератор энергии, в тысячи раз более мощный, чем целая Галактика с ее ста миллиардами звезд. Как работает этот генератор? Таков самый главный вопрос физики квазаров, на который еще предстоит найти ответ.

Квазары различимы в таких далях Вселенной, где ни звезды, ни целые галактики уже не разглядеть даже с помощью крупнейших телескопов. Самый далекий из известных сейчас квазаров находится от нас на расстоянии 13 миллиардов световых лет. Это значит, что свет от него идет к нам 13 миллиардов лет и, следовательно, мы видим его таким, каким он был 13 миллиардов лет назад. В те времена не существовало еще ни Земли, ни Солнца (по современным оценкам возраст Солнечной системы — около 5 миллиардов лет).

О расстояниях до квазаров и других далеких космических тел судят по спектрам их излучений. В спектрах квазаров видны линии излучения обычных атомов — таких, как водород, кислород, углерод и т. п.,— но все они сдвинуты к красному концу спектра, т. е. в область бо́льших длин волн. Этот сдвиг — знаменитое красное смещение — связан с тем, что источники излучения удаляются от нас. Само же удаление — это проявление общего расширения Вселенной. Согласно законам космологии, чем дальше от нас квазар или галактика, тем больше скорость убегания.

Если источник света испускает волны с периодом T_0 и при этом движется относительно нас со скоростью v, то волны видимого нами света будут иметь период

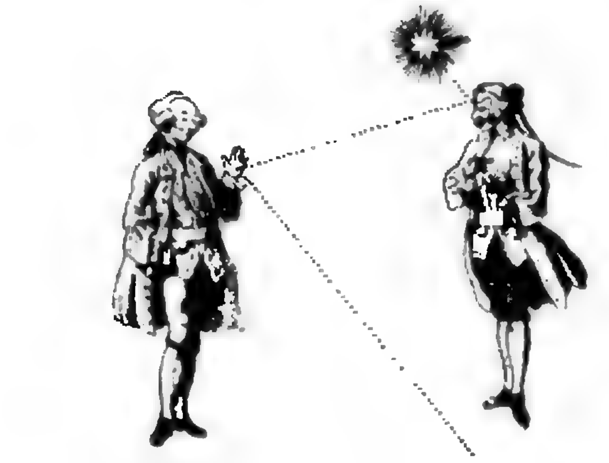
$$T=T_0\frac{1-\frac{v}{c}\cos\vartheta}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (1)$$

Здесь c — скорость света, ϑ — угол между направлением скорости и лучом зрения (прямой, которая соединяет нас и источник; когда источник движется прямо к нам, $\vartheta=0$, когда прямо от нас — $\vartheta=\pi$). Для самых далеких квазаров период T в 4—5 раз больше периода T_0. Изменение периода, а с ним и частоты и длины волны света из-за относительного движения источника и приемника называется эффектом Доплера. Он и создает красное смещение в спектрах удаляющихся галактик и квазаров.

Сейчас известно более 2500 квазаров. Они рассеяны по небесной сфере более или менее равномерно. В среднем расстояние между ними, если измерять его по дуге на небе, составляет несколько градусов (для наглядности скажем, что угловые диаметры Луны и Солнца около 0,5 градуса).

Но давно уже известны два очень близких друг к другу квазара, которые к тому же так похожи друг на друга, что получили название квазаров-близнецов. Они находятся друг от друга на расстоянии всего в шесть секунд дуги, что в тысячи раз меньше среднего расстояния между квазарами; яркость их практически одинакова; спектры этих квазаров одинаковы — в обоих случаях видны одни и те же линии излучения с одной и той же интенсивностью. Красное смещение в спектрах одно и то же — $T/T_0=2{,}4$. Это довольно значительная величина. Ей отвечают скорость удаления 0,7 c и расстояние от нас 7 миллиардов световых лет.

Поразительное сходство квазаров-близнецов сильно озадачивало астрономов. И вот была высказана догадка, что это в действительности не два объекта, а два изображения одного и того же объекта. Но как может возникнуть на небе такое удвоение образа?



Гравитационная линза

Лучи распространяются, как известно, прямолинейно, если отсутствует преломление. Космическая среда настолько разрежена, что практически не вызывает преломления. И тем не менее пути света могут оказаться искривленными. Такое искривление создают поля тяготения небесных тел.

В этом нет ничего особенно удивительного. Еще в ньютоновой теории тяготения считалось само собой разумеющимся, что луч света, рассматриваемый как поток частиц — световых корпускул, движущихся со скоростью света, отклоняется от прямолинейной траектории, когда проходит вблизи тяготеющего тела. Частицы света, как и все частицы и тела Вселенной, испытывают притяжение к гравитирующему телу.

Соображения об искривлении луча света полем тяготения остаются справедливыми и в релятивистской теории тяготения, которая называется общей теорией относительности. Согласно этой теории угол отклонения луча, проходящего на минимальном расстоянии r от тела массой M, равен (см. рис. 1)

$$\alpha=\frac{4GM}{c^2r}. \qquad (2)$$

По предложению А. Эйнштейна первые попытки наблюдать этот эффект предпринимались для света звезд, проходящего вблизи Солнца. Измерения можно проводить во время полного солнечного затмения, когда Луна закрывает солнечный диск. Множество наблюдений, проведенных начиная с полного солнечного затмения 1919 года, дали результаты, прекрасно согласующиеся с предсказанием общей теории относительности.

В 1936 году Эйнштейн опубликовал небольшую заметку, в которой предсказал новый эффект, связанный с отклонением света в поле тяготения,— эффект гравитационной линзы. Если на пути света от какого-то далекого источника к наблюдателю окажется тяготеющее тело, то при определенных условиях к наблюдателю придет больше света, чем в отсутствие этого тела. Поле тяготения тела способно направить к наблюдателю такие лучи, которые иначе прошли бы мимо наблюдателя. Тяготеющее тело, подобно обычной линзе, как бы фокусирует лучи.

Гравитационная линза и похожа, и не похожа на обычную световую. В собирающей линзе отклонение луча тем меньше, чем ближе он проходит к центру линзы. Поэтому в некоторую точку, лежащую на оси линзы,— в ее фокус — приходит не только луч, распространяющийся вдоль этой оси, но и все лучи, прошедшие через линзу. В поле тяготеющего центра картина иная: отклонение луча тем больше, чем ближе его путь к центру. Это видно из формулы (2).

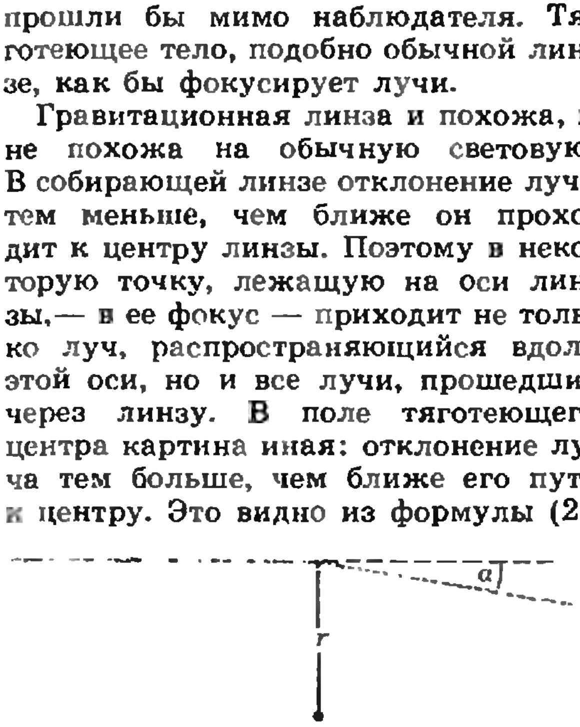


Рис. 1. Отклонение луча света в поле тяготеющей массы.

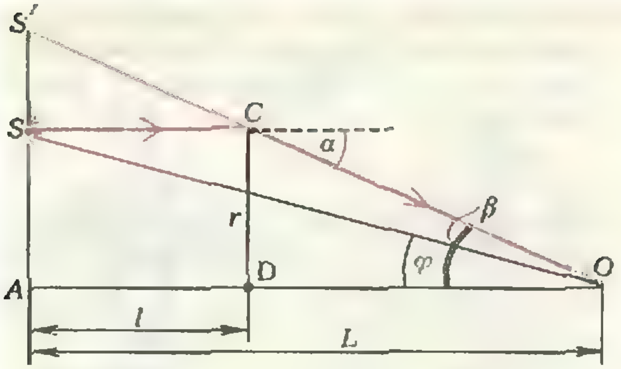


Рис. 2. Ход луча в гравитационной линзе.

Гравитационная линза может не только усилить изображение, но и создать два изображения одного объекта. Посмотрим, как это происходит.

На рисунке 2 показан ход лучей, распространяющихся от источника (точка S) к наблюдателю (точка O) мимо тяготеющего центра (точка D). Луч, идущий из источника, проходит на минимальном расстоянии $r=DC$ от тяготеющего центра, отклоняется им на угол α и приходит в точку наблюдения. (Для простоты вместо скругленной кривой нарисован просто излом прямой в точке C наибольшего сближения.) Наблюдатель видит источник не в точке S (в направлении OS), а в направлении луча OC — на прямой OS'. (Углы α, β и φ на рисунке должны считаться малыми.)

Как связаны между собой величины, задающие взаимное расположение источника, тяготеющего тела и наблюдателя? Из рисунка 2 видно, что

$$AS'=AS+SS'.$$

Поскольку углы α, β и φ малы (так что $\sin\alpha=\alpha$, $\sin\beta=\beta$ и $\sin\varphi=\varphi$),

$$AS'=L\beta,\ AS=L\varphi,\ SS'=l\alpha.$$

Подставляя эти три выражения в первое равенство, получаем:

$$L\beta=L\varphi+l\alpha.$$

Подставим в формулу (2) $r=DC=(L-l)\beta$ и с учетом этого перепишем соотношение между расстояниями и углами в виде

$$\beta^2-\varphi\beta-\frac{l}{L}\frac{4GM}{c^2(L-l)}=0. \qquad (3)$$

Это квадратное уравнение называют уравнением гравитационной линзы, создаваемой тяготеющим центром.

Рассмотрим возможные решения этого уравнения. Прежде всего обратимся к случаю, когда тяготеющий центр лежит строго на прямой OS (т. е. угол φ равен нулю). Тогда решение уравнения имеет вид

$$\beta=\beta_0=\pm2\left(\frac{l}{L}\frac{GM}{c^2(L-l)}\right)^{1/2}.$$

Картина обладает, очевидно, осевой симметрией, так что наблюдатель видит не точку S', а кольцо, получающееся вращением этой точки вокруг оси симметрии — прямой OS (или совпадающей с ней при $\varphi=0$ прямой OA); угловой радиус кольца равен $\beta=\beta_0$.

Если тяготеющий центр не лежит на прямой, соединяющей источник и точку наблюдения, то в картине отсутствует осевая симметрия. Уравнение (3) при $\varphi\neq0$ имеет два решения:

$$\beta_{1,2}=\frac{1}{2}\varphi\pm\sqrt{\frac{1}{4}\varphi^2+\frac{l}{L}\frac{4GM}{c^2(L-l)}}.$$

Это означает, что линза создает два изображения, направления на которые даются углами β_1 и β_2 (первый из этих углов положителен, а второй отрицателен). Ход соответствующих лучей показан на рисунке 3. Минимальные расстояния от притягивающего центра различны для двух решений:

$$r_1=(L-l)\beta_1,$$
$$r_2=(L-l)\beta_2.$$

Различны для них, очевидно, и углы отклонения.

Гипотеза о квазарах-близнецах как о двух изображениях одного квазара

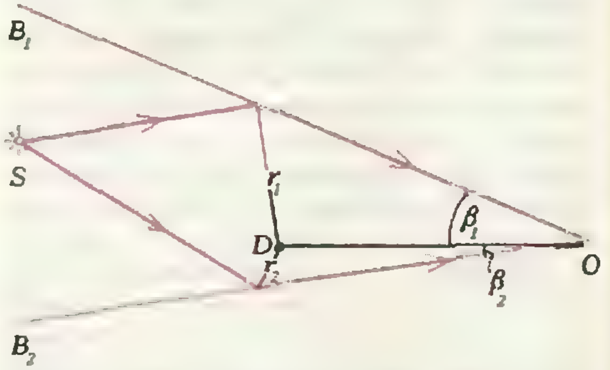


Рис. 3. Как получаются два изображения одного источника.

предполагает такое взаимное расположение источника света, гравитирующего центра и наблюдателя, какое показано на рисунке 3. Прямым ее доказательством могло послужить обнаружение самого́ тяготеющего центра в нужном месте на небесной сфере — между двумя изображениями квазара, но не на строго равных расстояниях от них. И это действительно удалось сделать. Тяготеющим центром оказалась слабая по блеску галактика, расположенная между квазарами-близнецами и притом несколько ближе к одному из них, чем к другому. Расстояние до нее оказалось приблизительно равным половине расстояния до квазара. Дальнейшие наблюдательные исследования показали, что реальная картина несколько сложнее. Выяснилось, что одно из изображений близнецов на самом деле представляет собой два очень близких изображения, которые сливались на прежних фотографиях. Нетрудно догадаться, что тройное изображение может возникать в том случае, когда отклоняющее поле тяготения создается не точечным центром, а объемным телом, лежащим на луче зрения. Таким телом и служит галактика. Лучи света от квазара могут проходить не только у края галактики, но и сквозь нее. Тяготеющая масса, которая определяет отклонения лучей, меньше для света, проходящего вблизи центра галактики, и больше для света, проходящего у ее края. Угол отклонения зависит от распределения масс в галактике. Уравнение линзы теперь уже будет более сложным, чем квадратное, и это создает большее разнообразие в возможных вариантах видимой картины.

Сейчас известно уже несколько примеров удвоения и утроения образов космических тел. Во всех случаях речь идет о квазарах. Эти миражи несомненно создаются эффектом гравитационной линзы.

Почему же гравитационные линзы обнаруживаются именно по квазарам и не действуют на свет звезд или галактик? Дело в том, что квазары, как мы говорили, видны издалека, в среднем с гораздо больших расстояний, чем галактики, не говоря уже о звездах. Поэтому вероятность того, что свет от них встретит по дороге к наблюдателю массивный (но слабый по блеску) объект, достаточно велика. Кроме того, квазар — это очень малый по видимому размеру, почти точечный источник, и из-за этого от него может возникнуть несколько отдельных изображений, которые не смажутся и не сольются, как это было бы для протяженных источников — галактик.

Быстрее света?

Самым первым из открытых квазаров был источник радиоизлучения, который значился под номером 273 в 3-м Кембриджском каталоге*). Это, можно сказать, образцовый квазар; он обладает всеми типичными свойствами квазаров и к тому же удобен для наблюдений. В его самой центральной области, где и рождается излучение, постоянно протекают какие-то бурные процессы, которые проявляются в изменениях блеска. Более того, из этой области время от времени вырываются светящиеся облака и струи вещества. Однажды появилась струя, которая прямо «на глазах у всех» увеличивалась в размерах, а яркое пятно на ее конце быстро удалялось от центра квазара. За четыре года наблюдений яркий конец струи удалился от центра на расстояние в двадцать световых лет. С какой же скоростью он двигался? Деля путь на время, находим, что скорость в пять раз превышает скорость света.

---

*) Это обширный список объектов, составленный радиоастрономами Кембриджского университета в Англии.

Легко представить, как были озадачены астрономы. Ведь согласно теории относительности никакое тело не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Это один из самых важных законов физики. После первого удивления и даже растерянности решение этого парадокса было — по крайней мере в принципе — найдено. Сверхсветовые скорости оказались космической оптической иллюзией.

Вот самый простой пример, показывающий, как возникает иллюзия сверхсветовых движений.

Представим себе, что имеется «фонарик», который движется навстречу нам, но не строго по лучу зрения, а под небольшим углом к нему (рис. 4). Сначала наш фонарик выключен, а потом дважды — в точках S_1 и S_2 — включается и посылает в нашу сторону два световых сигнала. За время между своими двумя включениями источник света прошел путь S_1S_2 на нашем рисунке. Видимое нами перемещение меньше: оно представляет собой проекцию S_1S' этого пути на то, что называют картинной плоскостью (зафиксировав источник в точке S_1, наблюдатель из точки O дальнейшее движение источника проецирует на плоскость, перпендикулярную лучу зрения OS_1,— это и есть картинная плоскость). Как астрономы получали свои оценки скорости? Делили видимое перемещение (отрезок S_1S') на время, прошедшее между приемами первого и второго сигналов. И брали именно время между приемами, а не между испусканиями сигналов. А ведь это разные промежутки времени! Делает их различными тот самый эффект Доплера, о котором мы уже упоминали.

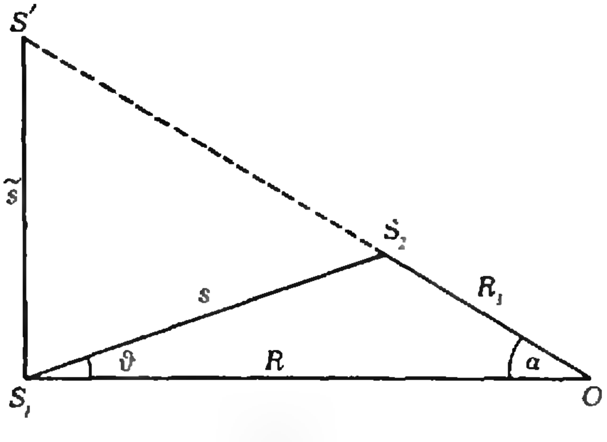


Рис. 4. Пример иллюзии движения со сверхсветовой скоростью.

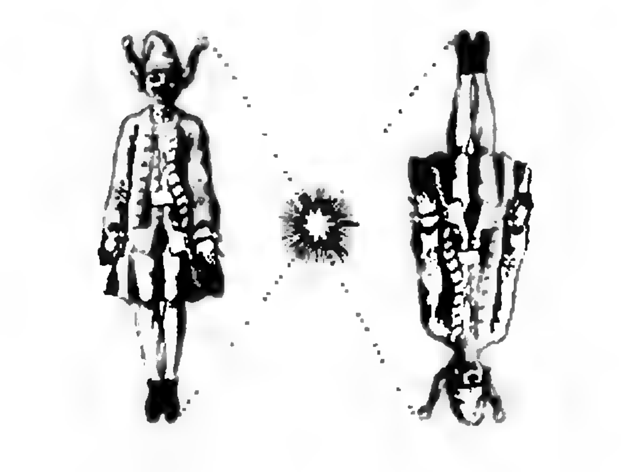
Действительно, соотношение (1) между периодами T и T_0 световой волны имеет на самом деле более общий характер. Оно применимо не только в случае периодических процессов. Период T_0 — это промежуток времени, скажем, между двумя соседними максимумами в испускаемой волне; а T — промежуток времени между теми же максимумами, когда они один за другим регистрируются наблюдателем. Каждый из максимумов можно, конечно, считать «сигналом», так что T_0 — это промежуток времени между двумя испусканиями сигналов, а T — между их приемами.

Когда источник света движется в нашу сторону, T меньше, чем T_0. Значит, в нашем примере с фонариком промежуток между приемами сигналов меньше промежутка между их испусканиями. Если скорость объекта близка к скорости света (но, конечно, не превосходит ее), разница между этими промежутками может быть сколь угодно большой.*)

При вычислении видимой скорости перемещения мы, так сказать, проигрываем в пути (отрезок S_1S' (см. рис. 4) меньше пути S_1S_2), но зато можем очень сильно выиграть во времени. Из-за этого и получается пугающе большое отношение видимого перемещения к времени между приемами сигналов; это отношение и посчитали скоростью движения источника света. Такая «видимая» скорость вполне может оказаться больше скорости света. Но реальная скорость перемещения равна отношению пройденного пути S_1S_2 к промежутку времени между испусканиями — а не приемами! — сигналов. Она может быть близка к скорости света, но никогда не превысит ее. Выходит, что нельзя вычислять скорость делением пути, пройденного «там», на промежуток времени, измеренный «здесь». Но именно этому и учит теория относительности. А эффект Доплера, который дал нам решение парадокса,— прямое следствие теории относительности.

---

*)Тому, кто умеет вычислять пределы, нетрудно убедиться, что $\frac{T}{T_0} \to 0$ при $\frac{v}{c} \to 1$.



Как рождается иллюзия

Самое важное в теории относительности — это утверждение о том, что свет в пустоте распространяется с определенной конечной скоростью, которая не зависит от того, движется относительно нас источник света или покоится. Мы воспользуемся сейчас этим фактом, чтобы непосредственно получить формулы, описывающие наш пример с движущимся фонариком. (И нужно только прибавить, что речь будет идти о распространении света в пустоте при отсутствии на его пути сильных полей тяготения. Мы говорили, что поля тяготения способны искривить путь света; они способны также изменить и его скорость. Но если между нами и источником нет очень массивных притягивающих тел, скорость света есть просто c; так мы и будем считать.)

Пусть первый из двух сигналов испущен фонариком в некоторый момент, который мы выберем в качестве начала отсчета времени ($t=0$). Расстояние от нас (от наблюдателя) до источника в этот момент — R; значит, сигнал будет принят нами в момент времени $t_0=R/c$.

Пусть, далее, второй сигнал испущен в момент времени $t_1=s/v$, когда тело, двигаясь прямолинейно со скоростью v, прошло расстояние $s=S_1S_2$ (см. рис. 4). В момент t_1 расстояние до источника —

$$R_1=\frac{R-s\cos\theta}{\cos\alpha}\approx R-s\cos\theta$$

(мы учли, что угол α очень мал, так как расстояния R и R_1 много больше отрезка s, и $\cos\alpha\approx1$). Второй сигнал доходит к нам за время

$$\frac{R_1}{c}=\frac{1}{c}(R-s\cos\theta)$$

и будет принят в момент

$$t_2=t_1+\frac{R_1}{c}=\frac{s}{v}+\frac{R}{c}-\frac{s}{c}\cos\theta.$$

От приема первого сигнала до приема второго сигнала прошло время

$$\Delta t=t_2-t_0=\frac{s}{v}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right).$$

Отсюда можно выразить пройденное фонариком расстояние s через промежуток времени Δt, скорость движения v и угол θ:

$$s=\frac{v\cdot\Delta t}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}.$$

Видимое перемещение тела $\tilde{s}$ представляется проекцией отрезка s на картинную плоскость:

$$\tilde{s}=s\sin\theta=\frac{v\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}\Delta t$$

(мы вновь учли здесь, что угол α очень мал). Чтобы найти «видимую» скорость $\tilde{v}$, нужно разделить видимое перемещение $\tilde{s}$ на промежуток времени Δt:

$$\tilde{v}=\frac{\tilde{s}}{\Delta t}=\frac{v\sin\theta}{1-\frac{v}{c}\cos\theta}.$$

Допустим, что $v=0{,}8\,c$ и $\cos\theta=0{,}8$; тогда $\sin\theta=0{,}6$, и $\tilde{v}=\frac{4}{3}c$. При большой, но досветовой скорости реального перемещения источника скорость видимого движения оказалась сверхсветовой.

Можно проверить (как это делают для нахождения экстремума функции), что при данной скорости движения источника v видимая скорость имеет максимальное значение при

$$\cos\vartheta = \cos\vartheta_0 = \frac{v}{c}.$$

Тогда $\sin\vartheta_0 = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, и максимальное значение видимой скорости —

$$\tilde{v}_{\max} = \frac{v}{\sqrt{1-\frac{v_2}{c^2}}}.$$

Скорость $\tilde{v}_{\max}$ стремится к бесконечности, когда скорость реального перемещения v стремится к скорости света c.

Чтобы закончить наше рассмотрение, остается еще сравнить две величины: промежуток времени между испусканиями сигналов — $(\Delta t)_0 = t_1 = \frac{s}{v}$ — и промежуток времени между их приемами — $\Delta t = \frac{s}{v}\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right)$. Возможно, у читателя возникнет вопрос: почему у нас отношение $(\Delta t)_0/\Delta t$ не совпало с отношением T_0/T из формулы (1)? Куда делся множитель $\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$? Дело в том, что с этим множителем, встречающимся почти во всех формулах теории относительности (его называют релятивистским корнем), связан более тонкий эффект, который в нашем простом расчете ускользает: ведь мы пользовались не теорией относительности в полном ее объеме, а только фактом конечности скорости света. Можно сказать, что мы сделали расчет в приближении, в котором пренебрегается всеми степенями величины $\frac{v}{c} < 1$ более высокими, чем первая. А формула для эффекта Доплера — это точный результат теории относительности.

Надеемся, что читатель понял, как может возникать иллюзия движений со сверхсветовыми скоростями. Но рассмотренный нами пример с фонариком — не единственная мыслимая возможность. Вот еще ситуация, в которой мы предлагаем вам разобраться самостоятельно. Пусть имеется некоторая полоса, перпендикулярная лучу зрения, которая в какой-то момент вся одновременно вспыхнула. Что будет видеть наблюдатель?

Можно рассмотреть не полосу, а вспыхивающую сферу. Это могла бы быть оболочка квазара, освещаемая его центральным источником. В этом случае картине наблюдаемого явления — увеличению в размерах светящегося пятна — будут соответствовать сверхсветовые скорости. Легко придумать и другие модели такого рода.

Гораздо труднее выяснить, какова действительная природа мощных взрывов, вспышек, выбросов, которые создают иллюзию сверхсветовых движений. Это — задача дальнейших исследований.

Информация

Заказы принимаются...

Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука» является крупнейшей издательской организацией, выпускающей литературу по физико-математическим наукам.

На все издания Главной редакции физико-математической литературы, включенные в тематический план выпуска на 1989 год, гарантируется полное выполнение заказов книготорговых организаций.

Ниже приведен список книг (с краткими аннотациями), которые могут заинтересовать наших читателей. Нумерация соответствует тематическому плану. Цена — ориентировочная.

Заказать эти книги можно в ближайшем (крупном) книжном магазине или в магазине, имеющем отдел «Книга — почтой».

Математика

8. Бюллер В. Гаусс (биографический очерк): Пер. с англ. 1 р. 80 к.

Впервые на русском языке издается книга, специально посвященная жизни и творчеству К. Ф. Гаусса (1777—1855) — одного из величайших математиков в истории человечества. Много внимания уделяется историческим событиям, на фоне которых протекала нелегкая жизнь ученого.

9. **Вейль Г. Математическое мышление**: Пер. с англ. и нем. 2 р.

В сборник включены произведения выдающегося математика современности Германа Вейля (1885—1955), посвященные теоретико-познавательным проблемам математики, ее взаимодействиям с науками о природе, роли в исследовании внешнего мира и творчеству замечательных ученых Д. Гильберта, Ф. Клейна, Э. Нетер, А. Пуанкаре и В. Паули.

18. **Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии.** В 2-х томах. Т. I: Пер. с нем. 2 р. 50 к.

Новый перевод первого тома классического труда по истории математики девятнадцатого столетия, написанного выдающимся немецким математиком, педагогом и деятелем математического просвещения Ф. Клейном (1849—1925).

19. **Клейн Ф. Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени**: Пер. с нем. 1 р. 90 к.

Посвящена одному из ярчайших разделов математики — геометрической теории икосаэдра и является уникальной по широте охватываемого материала и мастерству его изложения. Во второй части излагается основанная на геометрических свойствах икосаэдра теория уравнений пятой степени. На русском языке выходит впервые.

36. **Гашков С. Б., Олехник С. Н., Сергеев И. Н. Примени математику.** 60 к.

Рассматриваются вопросы построения и измерения ограниченными средствами, поиск оптимального решения в той или иной ситуации, способы быстрого счета, задачи на разрезание, переливание, взвешивание и т. п.

37. **Костовский А. Н. Геометрические построения одним циркулем на плоскости и одним лишь сферографом в пространстве.** 30 к.

Книга написана на основе лекций, которые автор в течение ряда лет читал школьникам, принимавшим участие в олимпиадах г. Львова.

38. **Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии.** 80 к.

Содержит около 600 задач, снабженных подробными решениями, и 70 задач для самостоятельной работы. Большинство задач по своей тематике близки к школьной программе.

40. **Задачи по математике. Начала анализа.** 1 р. 70 к.

Методическое построение справочника позволяет углубленно повторить этот раздел математики и самостоятельно подготовиться к поступлению в вуз с повышенной математической программой. Книга создана на основе опыта преподавания математики на подготовительном отделении Московского государственного университета (механико-математический факультет).

42. **Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочник по методам решения задач по математике для средней школы.** 1 р. 90 к.

Содержит основные методы решения задач школьного курса математики. Изложение методов сопровождается разбором типичных задач.

56. **Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук — первые шаги математического анализа и теории катастроф от эвольвент до квазикристаллов.** 80 к.

В книге, написанной на основе лекции для студентов, рассказывается о рождении современной математики и теоретической физики в трудах великих ученых XVII века.

57. **Никольский С. М. Элементы математического анализа.** 40 к.

Математический анализ в этой книге изучается на геометрической и физической основе. Излагаются дифференциальное и интегральное исчисления и их приложения.

Физика

89. **Воробьев И. И. Теория относительности в задачах.** 50 к.

Физические основы теории относительности, ее кинематика и релятивистские законы сохранения представлены взаимосвязанными задачами, сопровождаемыми обсуждением. Достаточно знаний в рамках школьной программы.

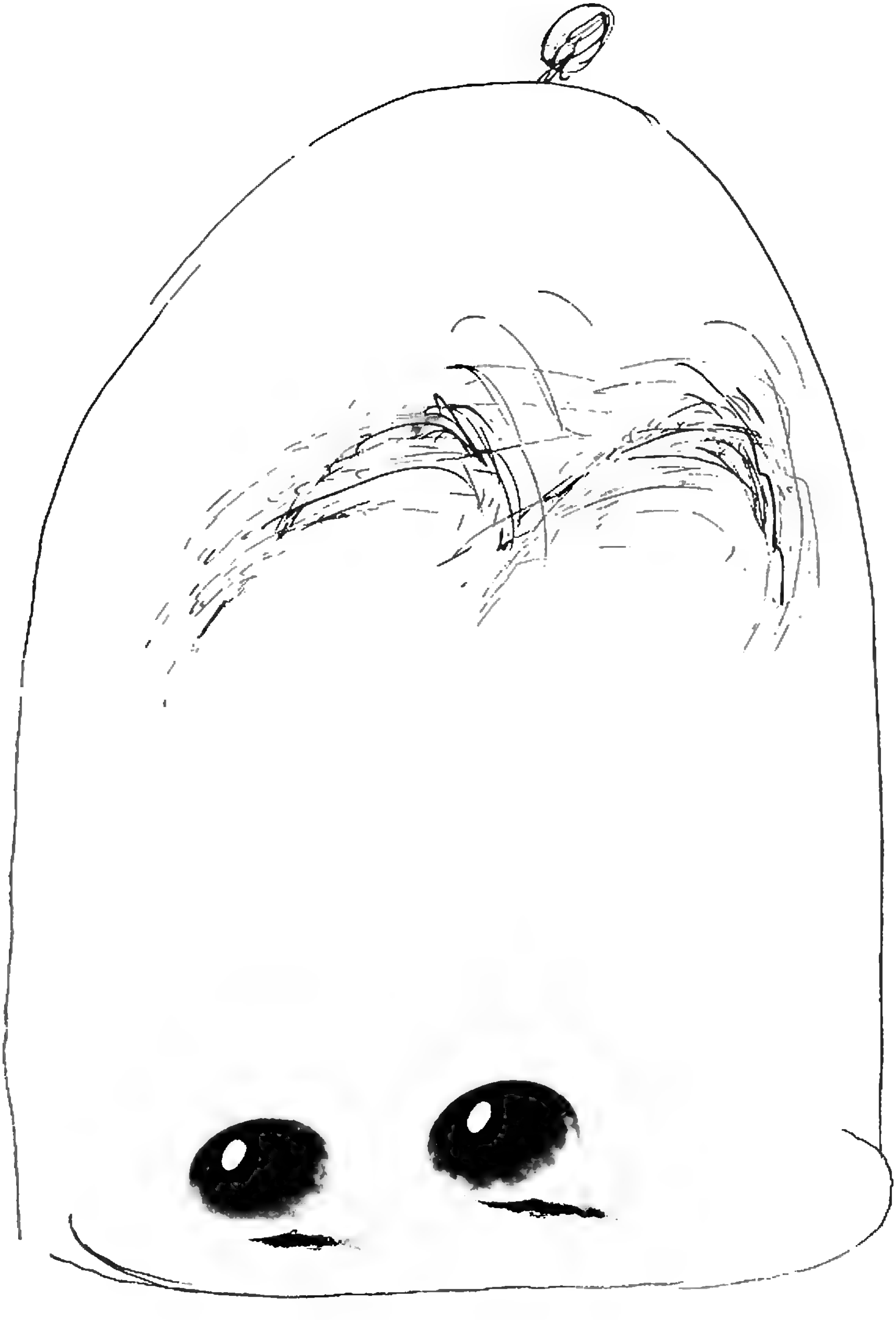
91. **Майер В. В. Кумулятивный эффект в простых опытах.** 50 к.

Посвящена физически очень интересному явлению — кумулятивному эффекту. Дано описание экспериментальных установок для проведения соответствующих опытов, которые читатель может провести сам.

93. **Пономарев Л. И. Под знаком кванта!** 1 р. 10 к.

Квантовая физика — самое выдающееся открытие XX века. Практически ни одно глубокое явление природы невозможно понять и объяснить без квантовых идей.

(Окончание см. на с. 43)



ИСТОРИЯ РОСИНКИ

Кандидат физико-математических наук
А. А. АБРИКОСОВ (мл.)

> *Состояние вещества бывает: твердое, капельное, паровое и воздушное.*
> В. Даль. Толковый словарь живого великорусского языка.

Введение

Все мы буквально на каждом шагу сталкиваемся с процессами испарения и конденсации. И хотя большинство тут же представит себе кипящий чайник, безусловно, важнейший пример — это природный круговорот воды, вне которого жизнь на Земле была бы, по меньшей мере, иной.

Итак, солнечное тепло испаряет влагу у земной поверхности, конвективные токи и диффузия позволяют парам достигнуть высоких атмосферных слоев. По мере движения вверх температура воздуха падает, пары конденсируются и образуются облака. Слияние и укрупнение капель внутри облаков завершается дождем — цикл замыкается.

Мы поговорим об одном из важнейших звеньев в этой цепочке — об образовании капелек при охлаждении водяного пара, но вначале напомним одно важное понятие.

Как вы знаете, насыщенными называются пары́, которые находятся в равновесии с жидкой фазой. Каждой температуре T соответствует свое определенное значение $p^0(T)$ давления насыщенного пара (рис. 1). Линия $p^0(T)$ разбивает плоскость p, T на области, соответствующие жидкому и газообразному состояниям.

Равновесие между жидкостью и газом представляет собой пример так называемого динамического равновесия. Через поверхность раздела происходит постоянный обмен молекулами между фазами: идут как бы встречные процессы испарения и конденсации. Если пары насыщенные, то потоки частиц в ту и другую сторону одинаковы и количество вещества в обеих фазах неизменно.

Концентрация насыщенного пара определяется скоростью испарения с единицы поверхности жидкости, т. е. плотность насыщенных паров является мерой летучести вещества.

«Телеканнибализм» в мире капель. Качественный аспект

Теперь мы можем перейти к основной теме нашей статьи — влиянию формы поверхности на равновесие жидкой и газовой фаз. Оказывается, что искривление поверхности приводит к изменению давления насыщенного пара. Давайте рассмотрим пример.

Пусть под колпаком находятся две одинаковые почти сферические капельки. Мы уже знаем, что кажущаяся неизменность такой системы обманчива. На самом деле под колпаком присутствует пар, причем молекулы, покинувшие одну каплю, легко достигают другой. Устойчиво ли в данном случае динамическое равновесие?

Привлечем сперва энергетические соображения. Свободная поверхность капли обладает энергией

$$E_S(r)=\sigma S=4\pi r^2\sigma$$

(здесь σ — коэффициент поверхностного натяжения, а $S=4\pi r^2$ — поверхность сферы с радиусом r). Нетрудно

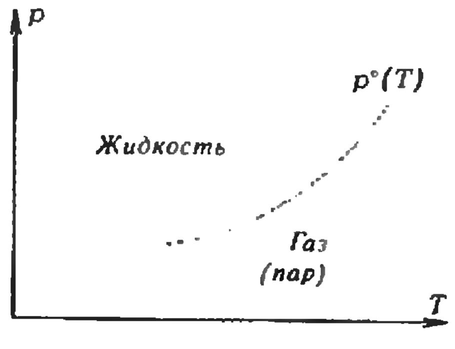


Рис. 1. Фазовая диаграмма системы жидкость — пар. Линия $p^0(T)$, разделяющая области жидкой и газовой фаз, задает зависимость давления насыщенных паров от температуры.

убедиться, что минимальную энергию имела бы одна капля с удвоенной массой, а в нашем случае общая поверхность в $\sqrt[3]{2}$ раз больше.

Теоретически это могло бы значить, что равновесие является неустойчивым. Но существует ли механизм, который привел бы к направленному переносу вещества, если в результате флуктуации симметрия вдруг нарушится и капельки станут хоть чуть-чуть неодинаковы?

Да, такой механизм есть. Мы покажем, что скорость испарения зависит от того, какую форму имеет испаряющая поверхность. На поверхности большей кривизны (у маленькой капли) этот процесс идет интенсивнее. В свою очередь встречный поток молекул (конденсация) определяется только плотностью паров под колпаком и одинаков для обеих капель. Поэтому, если радиусы капель отличаются, капли не могут одновременно находиться в равновесии с паром. При этом бóльшая капля окажется более устойчивой и сможет постепенно поглотить меньшую, даже не прикасаясь к ней. Такое «поедание» на расстоянии можно было бы назвать телеканнибализмом.

Математическое обоснование. Формула Кельвина

Закон сохранения энергии позволяет вычислить поправку к давлению паров, обусловленную искривлением поверхности. Рассмотрим машину, изображенную на рисунке 2. Она представляет собой «вечный двигатель», единственным недостатком которого является, по мнению изобретателя, лишь малая развиваемая мощность.

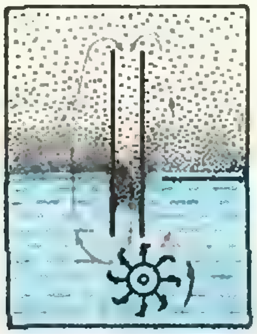


Рис. 2. «Вечный двигатель». Из-за разности уровней жидкости в сосуде и в капилляре давление паров над выпуклым мениском больше $p^0(T)$. Не приведет ли это к круговороту в системе?

Парижская академия наук не рассматривает подобные проекты уже более двух веков (с 1775 года). Закон сохранения энергии гарантирует их неработоспособность. Но порой оказывается полезно разобраться, где именно допустил ошибку изобретатель, какой конкретный физический принцип он не учел. Методически это напоминает доказательства от противного, общепринятые в математике.

Идея этого perpetuum mobile такова. В сосуд с легко летучей жидкостью погружен капилляр из несмачиваемого материала. Уровень жидкости в капилляре будет ниже, чем в основном резервуаре, на величину

$$h=\frac{2\sigma}{\rho_ж g r},$$

где $\rho_ж$ — плотность жидкости, r — радиус капилляра, g — ускорение свободного падения. Пары жидкости непосредственно над ее поверхностью имеют давление $p^0(T)$, а над мениском в капилляре их давление будет больше на величину

$$\Delta p=\rho^0 g h,$$

где ρ^0 — плотность насыщенных паров (согласно уравнению Клапейрона — Менделеева, $\rho^0=\frac{p^0(T)M}{RT}$).

По замыслу изобретателя избыток паров вызовет усиленную конденсацию в капилляре, и вследствие этого в системе возникнет круговорот жидкости.

Такое рассуждение содержит единственное слабое место: автор не учел эффект, о котором мы говорили в предыдущем разделе. Сравним молекулы, находящиеся вблизи поверхности жидкости в резервуаре и в капилляре (рис. 3). Очевидно, что в случае *а*) молекула имеет большее число соседей, с которыми ее связывают межмолекулярные силы. А это значит, что в случае *б*) молекуле проще покинуть жидкость, интенсивность испарения выше, и для компенсации необходим более мощный встречный поток частиц.

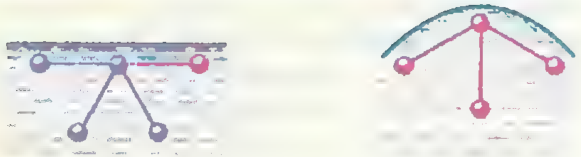

(а) (б)

Рис. 3. Молекула, находящаяся вблизи выпуклой поверхности, связана с меньшим числом соседей. Это облегчает испарение.

Закон сохранения энергии утверждает, что направленный круговорот в системе отсутствует. Мы приходим к выводу, что равновесное давление паров над выпуклой поверхностью жидкости равно

$$p_{\cap}(r)=p^0(T)+\Delta p=p(T)+\frac{2\sigma}{r}\frac{\varrho^0(T)}{\varrho_ж}. \qquad (*)$$

(Обратите внимание, что ускорение свободного падения g не вошло в конечный ответ, хотя и присутствовало в промежуточных выкладках.)

Анализ вечного двигателя — это прием, который позволил нам кратчайшим путем достичь цели. Зато полученная формула имеет универсальный характер: для данной жидкости давление паров зависит не только от температуры, но и от кривизны поверхности.

Пусть теперь поверхность раздела имеет вогнутую форму. Установив в нашем perpetuum mobile смачиваемый капилляр, мы немедленно получаем результат, в котором добавка Δp имеет противоположный знак:

$$p_{\cup}(r)=p^0(T)-\frac{2\sigma}{r}\frac{\varrho^0(T)}{\varrho_ж}.$$

При не слишком малых радиусах кривизны наши соотношения эквивалентны более точному уравнению

$$p(r)=p^0(T)e^{\frac{2\sigma}{r}\frac{M}{\varrho_ж RT}},$$

полученному в 1871 году лордом Кельвином. Радиус кривизны берется со знаком «+» для выпуклой поверхности и со знаком «—» для вогнутой.

Можно найти характерное для данной жидкости значение радиуса кривизны, при котором поправка к давлению становится сравнима с давлением пара над ровной поверхностью:

$$r_0(T)=\frac{2\sigma}{p^0(T)}\frac{\varrho^0}{\varrho_ж}=\frac{2\sigma M}{\varrho_ж RT}=\frac{2\sigma V_ж}{RT}$$

(здесь $V_ж$ — молярный объем жидкой фазы). Величина r_0 зависит только от температуры, ибо функциями температуры являются σ и $V_ж$.

Первые числовые оценки

Давайте обсудим величину обнаруженного эффекта и выясним, играет ли он сколь-нибудь заметную роль в реальной жизни. В таблице приведены значения σ, $\varrho_ж$, ϱ^0, p^0 и r_0 для воды при различных температурах. На первый взгляд кажется, что радиус r_0 удручающе мал, просто ненаблюдаем (ведь он в несколько сот раз меньше длины волны видимого света). Однако шарик такого размера содержит

Таблица

T, К	$\sigma\cdot10^3$, Дж/м^2	$\varrho_ж\cdot10^{3}$, кг/м^3	$\varrho^0\cdot10^3$, кг/м^3	p^0, Па	$r_0\cdot10^9$, м
273	75,5	1,00	4,88	611	1,2
293	72,5	1,00	17,3	$2{,}33\cdot10^3$	1,1
373	58,8	0,96	598	$1{,}013\cdot10^5$	0,7

$$N(r_0)=\frac{4}{3}\pi r_0^3\varrho_ж\frac{N_A}{\mu}\sim10^2 \text{ молекул воды}$$

($N_A=6{,}06\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро). Нельзя не порадоваться этому результату, и вот почему.

При выводе основной формулы мы неявно предполагали, что система является макроскопической. Говорить о поверхностном натяжении и давлении паров можно только при условии, что искривленный участок поверхности содержит достаточно большое количество молекул. Полученное значение $N(r_0)$ свидетельствует, что это справедливо практически для всех $r>r_0$.

Подумаем, где же могут практически проявиться свойства искривленных менисков? Разумеется, безнадежно пытаться вытянуть одиночный капилляр радиуса r_0. Но в нашем случае можно обойтись и менее экзотическими средствами.

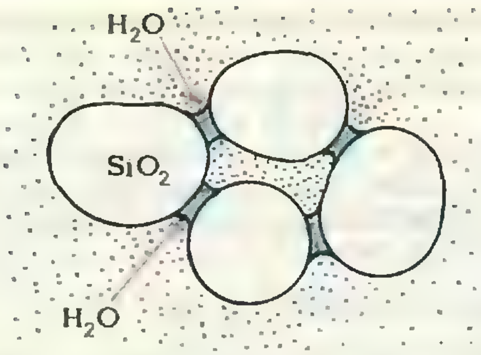


Рис. 4. Силикагель высушивает окружающий воздух. Влага собирается в узких промежутках между зернами.

Заметим прежде всего, что вовсе не обязательно иметь правильную капиллярную сеть, можно попробовать воспользоваться пористым веществом. Примером могут служить силикагели — материалы, состоящие из спекшихся гранул SiO_2 — вещества, смачиваемого водой. Размеры гранул колеблются от $2 \cdot 10^{-7}$ до 10^{-6} см, а промежутки между ними еще меньше, порядка r_0 (рис. 4). Если водяные пары могут беспрепятственно проникать в пространство между зернами, то над таким веществом давление паров должно уменьшиться в несколько раз. С помощью силикагелей удается создавать сухую атмосферу для хранения гигроскопичных веществ, защиты металлов от коррозии. Силикагели можно эффективно использовать для очистки воздуха от газов и от других примесей как в промышленных установках, так и в бытовых, например в кухонных воздухоочистителях.

Реальная значимость воображаемой поверхности

Другой пример влияния границы раздела на свойства системы жидкость — пар мы встретим там, где эта граница еще не образовалась, а именно — в пересыщенном паре.

Если насыщенный пар контактирует с жидкостью, то охлаждение или сжатие неминуемо приводят к конденсации. Состояния такой системы описываются точками $p''(T)$ фазовой диаграммы (см. рис. 1). Однако, когда жидкая фаза отсутствует, изотермически сжимая пары или же охлаждая их при постоянном объеме, можно их перенасытить. Формула (*) позволяет лучше понять, что это значит.

Пары, давление которых превосходит $p''(T)$, будут насыщенными по отношению к капелькам радиуса

$$r(p)=\frac{2\sigma}{p-p''(T)}\frac{v^{0}}{v_{ж}}=\frac{p''(T)}{p-p''(T)}\,r_0(T).$$

Такие капли называются критическими зародышами. Напомним, что капельки меньших размеров охотно испаряются.

Количество молекул внутри зародыша равно

$$N(r)=\left(\frac{p''}{p-p''}\right)^3 N(r_0).$$

Если степень пересыщения водяного пара составляет 10 % $\left(\frac{p-p''}{p''}=0{,}1\right)$, то $N(r)\sim 10^5$ молекул. В газовой фазе такое же количество молекул занимает объем в несколько тысяч раз больший, чем в жидкой. Легко видеть, что образование критического зародыша тут весьма затруднено, так как едва ли молекулы пара вдруг захотят так сильно «потесниться». Поэтому пересыщенный пар может «застрять» в своем энергетически невыгодном, так называемом метастабильном состоянии довольно надолго.

В действительности процесс конденсации проходит немного по-другому. Попробуем оценить характерный размер капелек, с которых начинается образование тумана и выпадение ночной росы. Предположим, что накануне вечером влажность воздуха была 100 %, т. е. парциальное давление пара в воздухе было $p''(T_в)$, где $T_в$ — вечерняя температура. К утру температура понизилась на ΔT градусов. При температуре $T_у=T_в-\Delta T$ пар, имеющий давление $p''(T_в)$,— пересыщенный, ведь давление насыщенного пара убывает с температурой, и $p''(T_в)>p''(T_у)$.

Чтобы определить размер зародыша в этих условиях, нам надо прежде всего знать зависимость давления насыщенного пара от температуры. Эта связь задается уравнением Клапейрона — Клаузиуса:

$$\frac{dp^0(T)}{dT}=\frac{q}{T(V_п-V_ж)}.$$

Здесь q — молярная теплота испарения данной жидкости, $V_ж$ и $V_п$ — молярные объемы жидкости и ее насыщенного пара.

Значит, при уменьшении температуры на ΔT давление превысило равновесное на

$$\Delta p=\frac{q}{T_н(V_п-V_ж)}\Delta T,$$

и радиус критического зародыша —

$$r\approx\frac{2\sigma}{q}V_ж\left(\frac{T}{\Delta T}\right).$$

Для начальной температуры 293 К ($\sigma=72{,}5\cdot10^{-5}$ Дж/м^2, $q=44{,}0\times\times10^3$ Дж/моль) при типичном суточном перепаде температур примерно в 5 градусов это даст $r\approx3r_0$.

Как мы теперь понимаем, образование чисто флуктуационным путем зародыша, содержащего $N\approx6\cdot10^3$ молекул, маловероятно. Приходится сделать вывод о существовании какого-то механизма, облегчающего конденсацию.

Древние греки учат

Герой мифа о Золотом Руне Язон засеял по приказанию царя Колхиды Ээта драконовыми зубами поле Ареса. (Нам привычней римский вариант последнего имени — Марс.) Коварный замысел Ээта открылся, когда появились всходы: семена проросли вооруженными воинами, готовыми броситься в бой с любым появившимся противником. Язона спасла хитрость, подсказанная волшебницей Медеей. Брошенный в середину поля камень отвлек внимание воинов, и они повернули оружие друг против друга.

Примерно так выглядит подлинная картина разрушения метастабильной фазы. В любой реальной среде всегда есть какие-нибудь неоднородности. В лабораторном сосуде ими могут быть дефекты или загрязнения стенок, в атмосферном воздухе — микроскопические пылинки. При охлаждении конденсация начнется именно вблизи этих центров, которые играют роль зародышей и стимулируют переход в стабильную фазу. Поэтому метастабильные состояния редко наблюдаются в естественных условиях. Их лабораторное изучение требует чрезвычайно тщательной подготовки, ибо чем дальше находится система от положения равновесия, тем меньшие неоднородности и дефекты становятся опасны.

Взгляд с высоты

Попробуем немного отвлечься от жизненного, но чересчур конкретного примера и обобщить наши результаты. Оказывается, они имеют отношение не только к рассмотренному переходу газ — жидкость, но и практически ко всем фазовым переходам I-го рода*). По сути дела речь идет об эффектах, обусловленных дополнительной энергией на границе раздела фаз. При небольшой неравновесности фазовый переход может начаться только вблизи чужеродных дефектов, а критический размер зародыша обратно пропорционален степени отклонения от равновесия. Вот поэтому росным летним утром в воздухе нет ни пылинки, а зимой мороз украшает инеем мельчайшие веточки.

Такая чувствительность метастабильных состояний к присутствию зародышей нашла практическое применение. Долгое время для регистрации элементарных частиц применялась камера Вильсона, в которой рабочим веществом служили переохлажденные пары какой-нибудь жидкости. Прохождение сквозь камеру заряженной частицы вызывало конденсацию и делало след частицы видимым. Сейчас камеру Вильсона сменили более чувствительные пузырьковые камеры. В них используют для регистрации более плотную среду — перегретую жидкость (например жидкий водород). В ней треки частиц проявляются в виде цепочек пузырьков (водород вскипает).

---

*) Фазовыми переходами первого рода называют переходы из одного фазового состояния в другое, при которых скачком меняются такие характеристики вещества, как плотность, концентрация; в единице массы при этом выделяется или поглощается вполне определенное количество теплоты. К таким переходам относятся испарение и конденсация, плавление и затвердевание, сублимация и конденсация в твердую фазу и т. п.

Другой пример — это выращивание высококачественных монокристаллов. Небольшой монокристалл-затравку погружают в почти равновесный расплав, где он становится единственным кристаллизационным центром. (В отсутствие затравки удается охладить расплав до $T \approx 0{,}5\ T_{\text{плавления}}$, прежде чем начнется кристаллизация. Но, увы, расплачиваться за высокое качество кристалла приходится длительным временем роста. Чтобы вырастить большой монокристалл, нужно несколько недель, а то и месяцев.

Заключение, но не финал

Прежде чем поставить точку, выясним еще один вопрос. До сих пор мы обсуждали, с чего начинается образование капель. Но когда оно заканчивается? Почему утром все росинки так похожи? Что останавливает их рост? Ведь мы убедились, что чем больше радиус капли, тем охотнее она «пьет». По-видимому, существует какой-то дополнительный фактор, определяющий максимальный размер.

Слишком далеко искать не нужно. Дело в том, что мы пока нигде не учитывали действие на росинки силы тяжести. Однако сплюснутая форма крупных капель словно намекает, что это не всегда допустимо.

Попробуем оценить, до каких пор можно пренебрегать гравитационной энергией. Для сферической капли она равна

$$E_g = \frac{4}{3}\pi r^3 \varrho g r$$

и, будучи пропорциональна r^4, неминуемо должна превзойти поверхностную энергию $E_S = 4\pi r^2 \sigma$ при увеличении r.

Чтобы найти предельное значение радиуса, приравняем энергию росинки суммарной энергии двух «половинных» капель, на которые она могла бы распасться:

$$E(1) = 4\pi r^2 \sigma + \frac{4}{3}\pi r^4 \varrho g =$$
$$= 2\left(4\pi\left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^2 \sigma + \frac{4}{3}\pi\left(\frac{r}{\sqrt[3]{2}}\right)^4 \varrho g\right) = 2E\left(\frac{1}{2}\right)$$

($r/\sqrt[3]{2}$ — радиус «половинной» капли). Отсюда следует, что

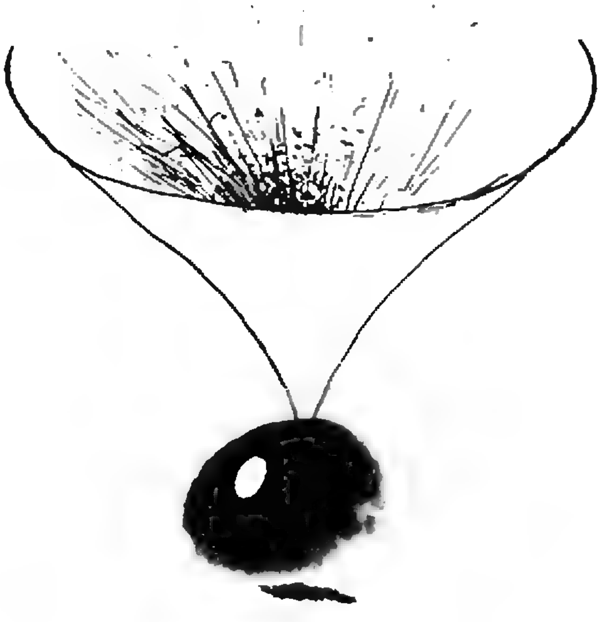
$$r_{\max} = \sqrt{\frac{3\sqrt[3]{2}\sigma}{\varrho g}} \approx 0{,}5\ \text{см}.$$

На первый взгляд — многовато для росинки. Но, разумеется, мы не учли всех факторов. В частности, размер капли зависит от того, на какой поверхности она образуется, насколько смачиваема эта поверхность водой. Да и, кроме того, слишком большие капли просто не могут удержаться на листах и травинках и скатываются с них. Однако по порядку величины приведенная оценка вполне достоверна.

Тут, пожалуй, стоит прервать наш рассказ. Не потому, что он завершен, завершилась история одной только росинки. Но даже в этой капле воды мы видим, что в науке никакой шаг не бывает последним.

За каждым ответом подстерегает вопрос: что же дальше?

У капель — тяжесть запонок,
И сад слепит, как плёс,
Обрызганный, закапанный
Мильоном синих слёз.
Б. Пастернак



Задачник „Кванта“

[redacted]

Задачи

М1111—М1115, Ф1123—Ф1127

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 октября 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1111» или «Ф1123». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1111. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, соответственно в точках M и N. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN.

Б. И. Чинин

М1112. На доске написаны два числа: 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то можно написать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить а) число 13121; б) число 12131?

Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде

в) $x+y+xy$, г) $x+y+2xy$ с натуральными x и y.

А. А. Берзиньш, В. Г. Ильичев

М1113*. В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

Д. В. Фомин

М1114. Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

И. Ф. Шарыгин

М1115*. а) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел в них равны.

б) Пусть n, m, k — натуральные числа. Докажите, что если

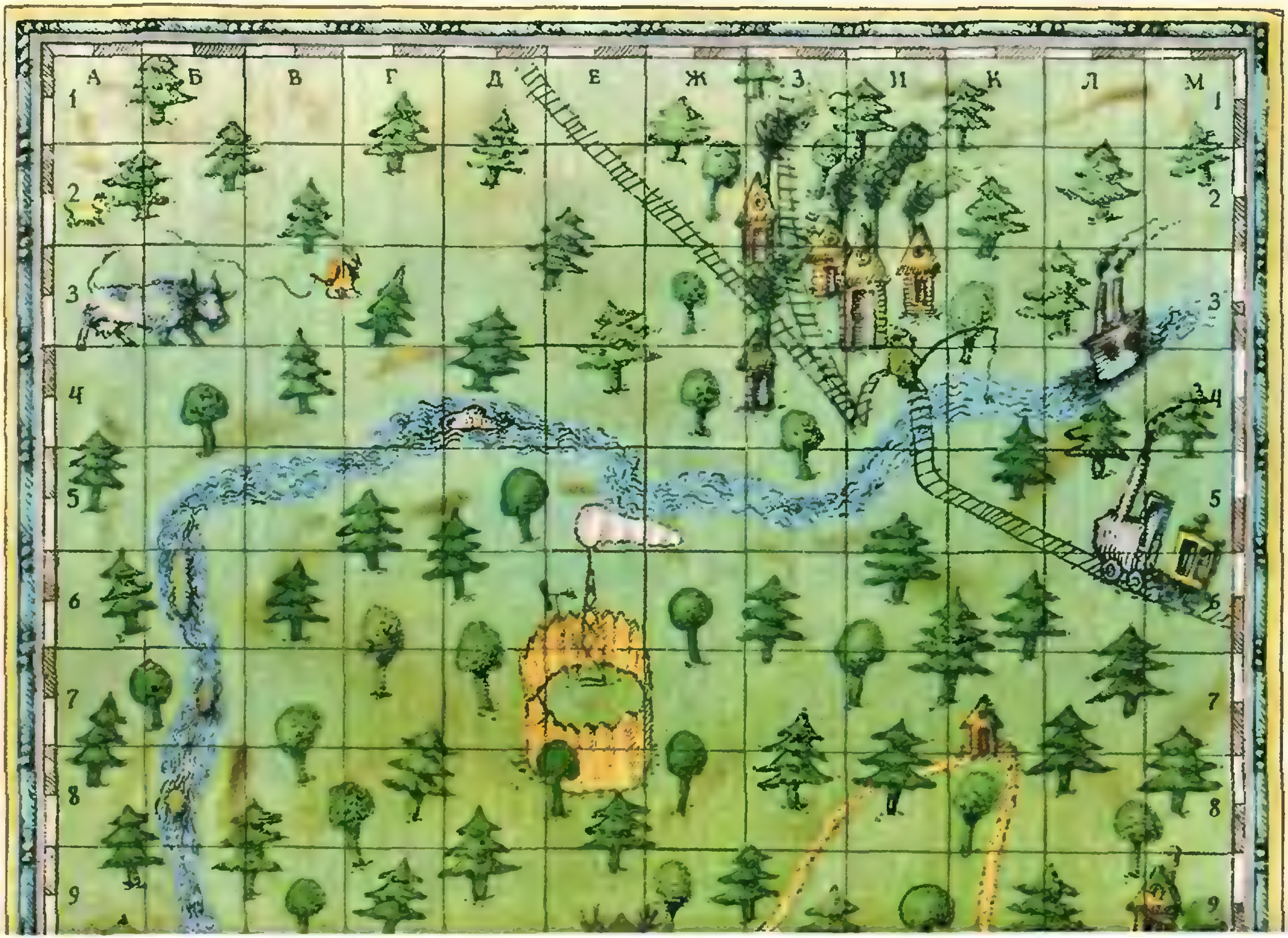
$$1+2+...+n=mk,$$

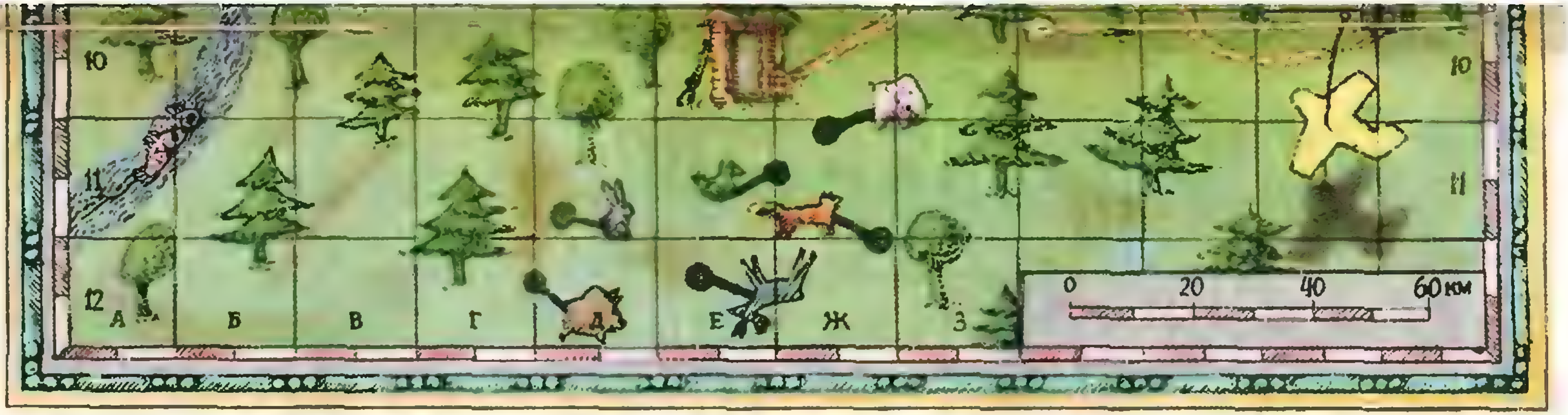
то числа 1, 2,..., n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

А. В. Анджанс

Ф1123. К концу вертикальной водопроводной трубы при помощи короткого отрезка резиновой трубки прикреплена стальная насадка массой M. При каком рас-

(Продолжение см. на с. 34)


А
Б
В
Г
Д
Е
Ж
З
И
К
Л
М
1
2
3
4
5
6
7
8
9



Самолет-разведчик пожарной авиации вылетел на дежурство. Лето было очень сухое, и лесные пожары, к сожалению, стали частым явлением. Сильная гроза в день дежурства еще увеличила вероятность возникновения пожара, поскольку сопровождалась лишь незначительными дождями. Гроза не позволяла самолету двигаться по намеченному маршруту и вносила помехи в радиосвязь с землей. Вот что записал диспетчер.

12.00. Нахожусь в центре квадрата Л—11, курс.....), скорость 200 км/ч.*
Буду держать эту скорость в течение всего полета.
12.30 Пролетаю охотничью избушку; пока все в порядке.
13.00. Выполняю поворот на .....
13.30. Слева в 15 км от меня метеорологическая вышка, все в порядке.
14.00. Выполняю поворот на 90° влево.
14.30. Выполняю поворот.......
15.00. Пересекаю реку Синяя.
15.30. Выполняю поворот на 90° ......
15.45. Выполняю поворот на 90° направо.
16.00. Пролетаю над рекой Синяя.
16.18. Подо мной лесной пожар. Высылайте помощь. Мои координаты ....

В какой квадрат диспетчер должен послать пожарников?

Калейдоскоп „Кванта"

---

*) Многоточие соответствует грозовым помехам.

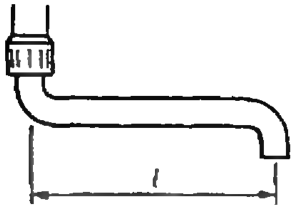


Рис. 1.

ходе воды насадка будет горизонтальной (рис. 1)? Площадь сечения трубы S, длина ее l. Трением пренебречь.

М. Г. Гаврилов

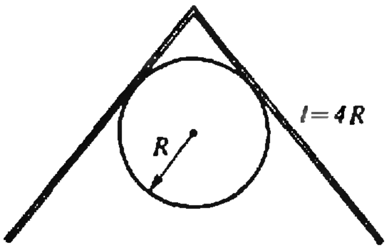


Рис. 2.

Ф1124. На гладкое горизонтальное бревно радиусом R кладут сверху «книжку», составленную из двух однородных тонких квадратных пластинок со стороной $l=4R$. Пластины скреплены при помощи невесомого шарнирного стержня. Какой угол образуют пластины в положении равновесия (рис. 2)? Будет ли это положение равновесия устойчивым?

С. С. Кротов

Ф1125. Вертикальный теплоизолированный сосуд, в котором находится одноатомный газ, закрыт поршнем массой M. В сосуде включают нагреватель мощностью N, и поршень начинает медленно двигаться вверх. За какое время он поднимется на высоту H относительно начального положения? Теплоемкостью поршня, трением и давлением атмосферы пренебречь.

А. Р. Зильберман

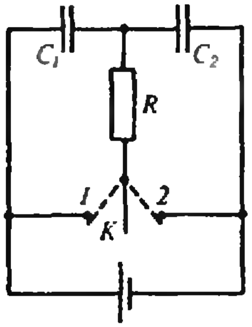


Рис. 3.

Ф1126. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K «колеблется» между положениями *1* и *2* с частотой $f=100$ Гц; в каждом положении ключ находится одинаковое время. Найти ток через резистор. $C_1=10$ мкФ, $C_2=30$ мкФ, $R=100$ кОм.

А. Р. Зильберман

Ф1127. Фонарик испускает пучок лучей, сходящихся на расстоянии $R_0=1$ м от него в маленькое пятно. На пути луча поместили два плоских зеркала квадратной формы так, что линия их соприкосновения пересекает ось пучка на расстоянии $r=70$ см от фонарика и перпендикулярна этой оси. Плоскости зеркал перпендикулярны друг другу, а одно из зеркал составляет угол $\alpha=30°$ с осью пучка. На каком расстоянии от фонарика сойдется теперь пучок?

М. М. Цыпин

Problems

M1111—M1115, P1123—P1127

M1111. The tangents to the circumcircle of triangle ABC at the points A and C intersect the tangent drawn from B at the points M and N respectively. Show that the altitude BP of triangle ABC (where P is on AC) is the bissector of angle MNP.

B. I. Chinik

M1112. The numbers 1 and 2 are written on the blackboard. Additional numbers may be written according to the following rule: if the numbars a and b are already on the board, then the number $ab+a+b$ may be added. Is it possible to obtain the numbers a) 13121; b) 12131 in this way? Prove that there are infinitely many nonnegative in tegers which cannot be represented as c) $x+y+xy$, d) $x+y+2y$ with nonnegative integers x and y.

A. A. Berzins, V. G. Il'ichev

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solu-

tions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 1st, 1988 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KWANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Задачник „Кванта"

M1113*. There are 21 cities in a certain country. Air travel between these cities is handled by several airlines, each of which has 10 (back and forth) flights directly linking 5 cities (more than one airline may have flights between two given cities). Any two cities are linked by at least one direct (two-way) flight. For what least number of airlines is this possible?

D. V. Fomin

M1114. Prove that for an arbitrary tetrahedron we have

$$r < \frac{ab}{2(a+b)},$$

where a and b are the lengths of two opposite edges and r is the radius of the insribed sphere.

I. F. Sharygin

M1115*. a) Nineteen natural numbers no greater than 88 are written in one line and 88 numbers no greater than 19 in another. By a segment we mean a sequence of successive numbers in the same line. Prove that it is possible to choose segments (one in each line) with equal sums of numbers. b) Suppose n, m, k are natural numbers $(m \geqslant n)$. Prove that if

$$1+2+\ldots+n=mk,$$

then the numbers 1, 2, ..., n can be split into k groups so that the sum of numbers in each group equals m.

A. V. Andjans

P1123. A metallic faucet of mass M is fixed to the extremity of a water supply line by means of a rubber pipe. For what intensity of water flow will the faucet be horizontal (see figure Рис. 1)? The section area of the pipe is S, its length is l. Friction is negligible.

M C Gavrilov

P1124. A „book", consisting of two homogeneous thin square plates of side $l=4R$ joined by a weightless hinge, are placed on a smooth horizontal log of radius R. What will the angle between the plates be in the equilibrium position (see figure Рис. 2)? Will the equilibrium be stable?

S. S. Krotov

P1125. A vertical heat-isolated receptacle containing monoatomic gas is closed by a piston of mass M. A heater of power N is turned on inside the receptacle, and the piston slowly begins to move up. How much time will elapse until it moves up to height H from the initial position? The piston's heat capacity, friction and atmospheric pressure are negligible.

A. R. Zilberman

P1126. In the circuit shown on figure Рис. 3, the switch K is turned back and forth between the positions *1* and *2* with frequency $f=100$ Hz, staying in each position for an equal length of time. Find the current through the resistor, if $C_1=10$ mcF, $C_2=30$ mcF, $R=100$ kOhms

A. R. Zilberman

P1127. A flashlight emits a light beam which converges to a small spot at the distance $R_0=1$ m from it. Two square plane mirrors are placed in the beam's path so that the line along which they touch intersects the beam's axis at the distance $r=70$ cm from the flashlight and is perpendicular to the axis. The planes of the mirrors are perpendicular and one of them forms the angle $\alpha=30°$ with the beam's axis. At what distance from the flashlight will the beam now converge?

M. M. Tsipin

Задачник „Кванта"

Решения задач

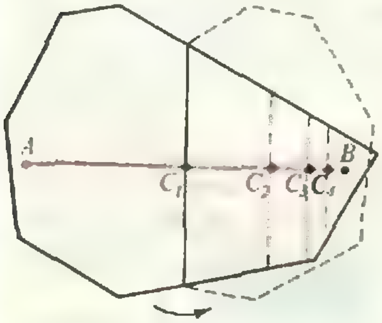
M1091 — M1095, Ф1103 — Ф1107

M1091. *Назовем натуральное число удачным, если цифры в его десятичной записи можно разбить на две группы так, что суммы цифр в этих группах равны.*
а) Найдите наименьшее число a такое, что числа a и $a+1$ — удачные.
б) Существует ли такое a, что числа a, $a+1$ и $a+2$ — удачные?

а) Ответ: $a=549$. Очевидно, сумма цифр любого удачного числа четна. Поэтому, если a и $a+1$ — удачные числа, то a оканчивается на 9 (иначе суммы цифр этих двух чисел имеют разную четность). Ясно, что a не может быть двузначным ($99+1=100$). Если число a — трехзначное, т. е. $a=\overline{xy9}$ (черта означает десятичную запись), то $y<9$ и $a+1=\overline{x(y+1)0}$. Следовательно, $x+y=9$, $x=y+1$. Отсюда $x=5$, $y=4$.
б) Ответ: не существует. Как видно из решения задачи а), оба числа — a и $a+1$ — должны оканчиваться на 9, но это невозможно.

Н. И. Зильберберг

M1092. *Вырезанный из бумаги выпуклый многоугольник 10 раз складывают (перегибая по некоторым прямым) и затем разрезают по прямой. Какое наибольшее число кусков может получиться?*



Ответ: 1025. Решим задачу сразу в общем случае для n сгибов. Проведем внутри многоугольника произвольный отрезок AB и отметим на нем точки C_1, C_2, ..., C_{n+1} такие, что $C_kB=2^{-k}\cdot AB$ (см. рисунок). Через каждую из точек C_k проведем прямую l_k перпендикулярно к AB. Последовательно перегнем многоугольник по прямым l_1, l_2, ..., l_n слева направо n раз (мы считаем, что первоначально точка A лежит левее B) и разрежем его по прямой l_{n+1}. Отрезок AB сложится в отрезок C_nB, на котором сложенная фигура имеет 2^n слоев. Слева от разреза каждый слой соединен с другим слоем через перегиб l_n, поэтому слева мы получим 2^{n-1} кусков. Справа от разреза слои также попарно соединены, за исключением двух одиночных нижних слоев — краев исходной фигуры. Поэтому справа получится $2^{n-1}+1$ кусков, а всего получится 2^n+1 кусков.

Покажем индукцией по числу перегибов n, что число кусков не может быть больше 2^n+1. При $n=0$ это утверждение очевидно. Пусть оно верно для n перегибов. Перегнем многоугольник $n+1$ раз. После первого перегиба получатся два соединенных между собой частично перекрывающихся многоугольных слоя. В дальнейшем каждый из этих слоев можно рассматривать отдельно: он будет перегнут n раз и разрезан, что по предположению индукции даст 2^n+1 кусков. Поскольку хотя бы два куска из разных слоев должны быть соединены через первый перегиб, общее число кусков не превосходит $2(2^n+1)-1=2^{n+1}+1$.

Таким образом, максимальное число кусков равно 2^n+1; в частности, при $n=10$ получится $2^{10}+1=1025$ кусков.

С. В. Казаков

M1093. *На окружности в n точках расставлены числа 0, 1, 2. Затем одновремен-*

Ответ в задаче а): $n-k+1$.
а), б) Разобьем точки на «серии», каждая из которых начинается с двойки и включает все идущие следом

но во всех точках производится следующее преобразование: каждое число 2 заменяется на 0, а затем к следующему за ним по часовой стрелке числу прибавляется 1. Пусть вначале количество двоек равнялось $k \geqslant 1$.

а) Через какое количество преобразований заведомо не останется ни одной двойки?

б) Пусть, кроме того, в $n-k$ остальных точках вначале стояли единицы. Докажите, что в конце концов останется k единиц и $n-k$ нулей.

(по часовой стрелке) единицы. Если серия начинается в точке A_1, заканчивается перед точкой A_2 (где стоит двойка или ноль — на рисунке 1 это обозначено звездочкой) и включает $m \geqslant 0$ единиц, то через $m+1$ шагов в m точках, следующих за A_1, будут стоять m нулей, а в точке A_2 — единица. На рисунках 2, *а, б, в* изображена эволюция одной серии для $m=0$, $m=1$ и $m=4$ ($\varnothing$ означает 0 или 1). Такая эволюция происходит одновременно со всеми сериями. Таким образом, если вначале было k двоек в точках $A_1, A_2, \ldots, A_k$ и самая длинная серия содержала $m \leqslant n-k$ единиц, то ровно через $m+1$ преобразований не останется ни одной двойки. Если при этом в остальных $n-k$ точках стояли единицы, то после всех преобразований на их местах будут стоять нули, а в k точках $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — единицы.

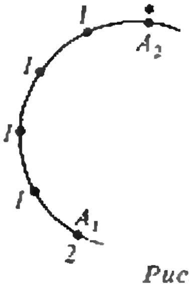


Рис. 1.

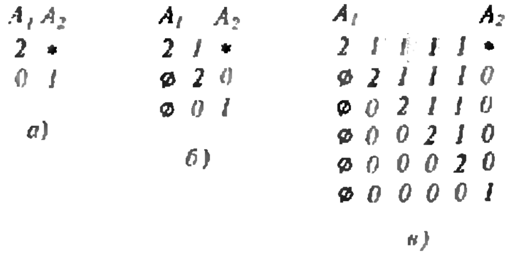


Рис. 2.

Н. Б. Васильев

М1094. *Пусть a, b, c — неотрицательные числа.*

а) Докажите, что из неравенства

$$a^4+b^4+c^4 \leqslant 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \qquad (1)$$

следует неравенство

$$a^2+b^2+c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca). \qquad (2)$$

б) Верно ли обратное: из неравенства (2) следует неравенство (1)?

а) Преобразуем разность правой и левой частей (1):

$$D=2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-(a^4+b^4+c^4)=4a^2b^2-(a^2+b^2)^2+$$
$$+2c^2(a^2+b^2)-c^4=(2ab)^2-(a^2+b^2-c^2)^2.$$

Если $D \geqslant 0$, то $2ab \geqslant |a^2+b^2-c^2|$. Поскольку буквы a, b, c входят в условие совершенно симметричным образом, можно считать $a \geqslant b \geqslant c$. Тогда

$$a^2+b^2+c^2=|a^2+b^2-c^2|+2c^2 \leqslant 2ab+2c^2 \leqslant 2(ab+bc+ca).$$

б) Ответ: не верно. (Пример: $a=4$, $b=c=1$.)

Заметим, что, продолжив преобразования разности D, можно разложить ее на линейные множители:

$$D=(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$

Здесь лишь одна скобка (в которой вычитается наибольшее из чисел a, b, c) может оказаться отрицательной. Таким образом, (1) эквивалентно условию, что каждое из чисел a, b, c не больше суммы двух других. Аналогично, (2) эквивалентно тому, что каждое из чисел $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ не больше суммы двух других. Отсюда легко получить другое решение задачи а): ведь если $b+c \geqslant a$, то $(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2 \geqslant b+c \geqslant a$ и $\sqrt{b}+\sqrt{c} \geqslant \sqrt{a}$.

Выражение D встречается в формуле Герона для площади треугольника со сторонами a, b, c (эта площадь равна $\sqrt{D}/4$); такой треугольник существует, если $D>0$.

В. А. Сендеров

М1095*. *На плоскости задана окружность с центром O и две точки A, B (отличные от O) такие, что прямая AB проходит через точку O. Постройте хорду MN этой окружности, которая видна из точки A под заданным углом α и*

а) параллельна прямой AB;

б) проходит через точку B. (Если B лежит вне окружности, то через B должно проходить продолжение хорды MN.)

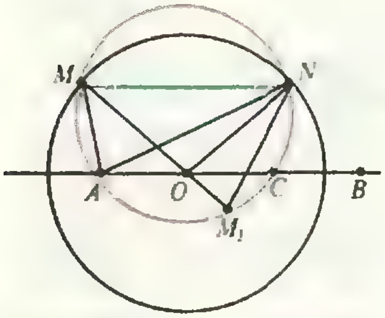


Рис. 1.

а) Пусть искомая хорда MN построена (рис. 1). Проведем окружность AMN и обозначим через C и M_1 точки ее пересечения с прямыми AB и MO ($C\neq A$, $M_1\neq M$). Согласно приведенной на рисунке 2 хорошо известной теореме,

$$OM_1\cdot OM=OA\cdot OC;$$

но, очевидно, $OC=OA$, поэтому $OM_1=OA^2/R$, где $R=OM$ — радиус исходной окружности. Таким образом, длина отрезка OM_1, а с ней и длина отрезка MM_1, *полностью определяется положением точки A относительно исходной окружности и не зависит от угла MAN.* Ввиду этого, чтобы построить отрезок длины MM_1, мы можем нарисовать произвольную хорду MN, параллельную AB (не заботясь об угле MAN), и взять точку пересечения M_1 прямой OM с окружностью AMN; по доказанному, получившийся отрезок MM_1 будет иметь нужную длину. Теперь, пользуясь тем, что для искомой хорды MN известен угол MNM_1 (он равен α) и расстояния $ON=OM=R$, мы можем построить отрезок, равный этой хорде. Для этого достаточно провести луч под углом α к уже построенному отрезку MM_1 из его конца M_1 и отметить точки пересечения этого луча с данной окружностью. Таких точек может быть 0, 1 или 2 (рис. 3). Отрезки, соединяющие эти точки с M, и дают возможные значения длины искомой хорды. Остается построить в данной окружности хорду известной длины, параллельную данной прямой AB. Поскольку эта известная длина принимает 0, 1 или 2 значения, наша задача может иметь 0, 2 или 4 решения. (Читатель самостоятельно покажет, что 4 решения задача может иметь, если точка A лежит вне данной окружности; пример такой ситуации приведен на рисунке 4.)

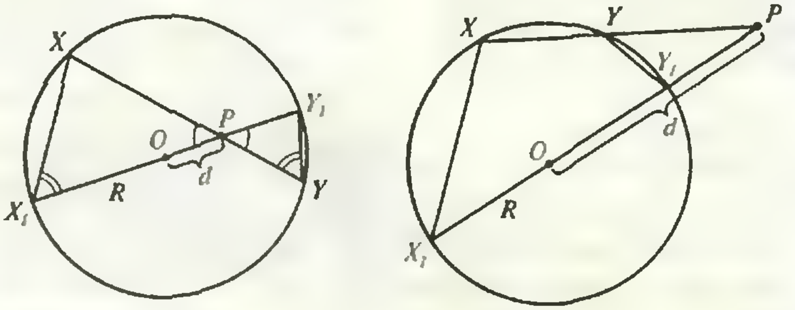


Рис. 2.

Для любой прямой, проходящей через произвольную данную точку P и пересекающей данную окружность, $PX\times PY=|d^2-R^2|$, где X и Y — точки пересечения, $d=PO$ — расстояние от P до центра O окружности, R — радиус окружности. (Из подобия треугольников PXX_1 и PY_1Y следует, что $PX\cdot PY=PX_1\times PY_1=(d+R)|d-R|$.)

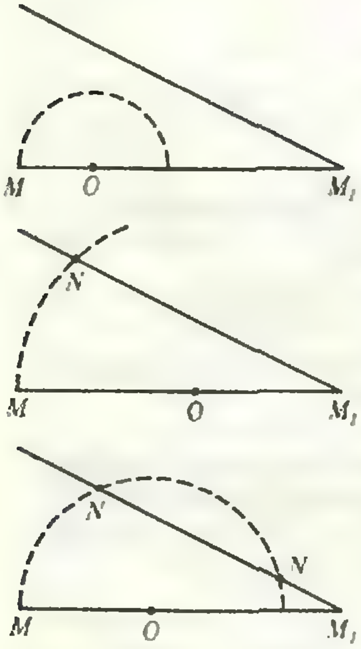


Рис. 3.

б) Снова предположим, что искомая хорда MN построена (рис. 5). Проведем окружность AMN и обозначим через C и M_1 точки ее пересечения с прямыми AB и MO ($C\neq A$, $M_1\neq M$). По-прежнему оказывается, что длина отрезка MM_1 не зависит от данного угла. Для доказательства нужно несколько раз применить теорему, приведенную выше (рис. 2):

$$BC\cdot BA=BM\cdot BN=BE\cdot BF,$$

где E и F — точки пересечения исходной окружности с AB; значит, положение точки C не зависит от данного угла, и снова

$$OM_1\cdot OM=OA\cdot OC.$$

Далее решение почти не отличается от решения задачи а), только на сей раз нужно строить не хорду данной длины, параллельную данной прямой, а хорду данной длины, продолжение которой проходит через данную точку. Нужно также отметить, что при некоторых расположениях точек A и B (см., например, рис. 6) угол MM_1N может оказаться равным $\pi-\alpha$, а не α.

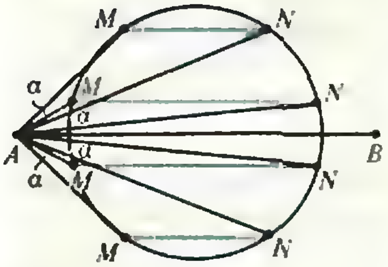


Рис. 4.

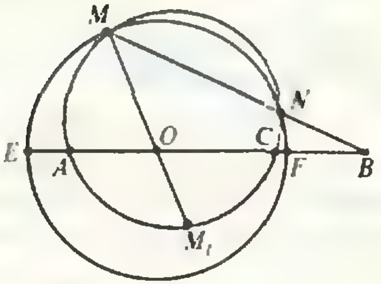


Рис. 5.

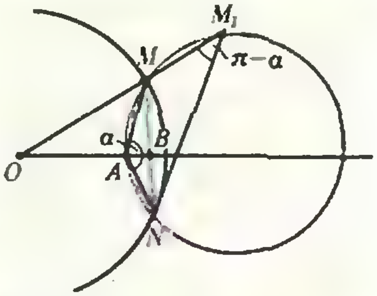


Рис. 6.

Можно избежать перебора случаев, если воспользоваться понятием «направленного угла»: угол от прямой AM до прямой AN, отсчитываемый, скажем, против часовой стрелки, всегда *будет равен* углу от M_1M до M_1N, отсчитываемому в том же направлении. По-прежнему задача имеет 0, 2 или 4 решения.

Р. О. Бурдин

Ф1103. *Математический маятник длиной l покоится в точке A на конусе с углом раствора 2β (рис. 1). Какой путь пройдет маятник до отрыва от поверхности конуса, если легким толчком маятник вывести из положения равновесия? Угол наклона конуса к поверхности земли α, поверхность конуса считается гладкой.*

Поскольку верхний конец нити закреплен, маятник до отрыва от поверхности конуса будет двигаться по окружности. Плоскость этой окружности наклонена под углом $(\pi/2-\alpha)$ к горизонту, ее радиус $r=l\sin\beta$. По мере соскальзывания с конуса скорость точки A растет, значит, должно увеличиваться и ее центростремительное ускорение. В некоторый момент действующих на маятник сил может «не хватить» для продолжения движения по окружности, и тогда произойдет отрыв точки A от поверхности конуса.

Рассмотрим силы, действующие на точку A при ее движении по конусу. Это сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$ (рис. 2). В момент отрыва сила реакции обращается в нуль. Этим и воспользуемся для ответа на вопрос задачи.

Введем систему координат так, как показано на рисунке 2: *направим ось X по радиусу к центру окружности*, ось Y — по касательной к окружности и ось Z —

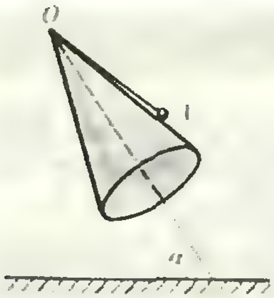


Рис. 1.

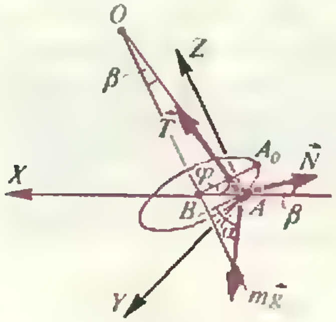


Рис. 2.

по нормали к плоскости окружности. Запишем второй закон Ньютона в проекциях на каждую ось координат:

$$ma_x = mg\cos\alpha\cos\varphi - N\cos\beta + T\sin\beta,$$

$$ma_y = mg\cos\alpha\sin\varphi,$$

$$ma_z = T\cos\beta + N\sin\beta - mg\sin\alpha = 0,$$

где $a_x = v^2/r$ — центростремительное ускорение маятника, движущегося со скоростью v, a_y — его тангенциальное ускорение. Для решения нам достаточно первого и третьего уравнений. Учитывая, что из закона сохранения энергии

$$v^2 = 2gr(1-\cos\varphi)\cos\alpha,$$

получаем

$$N = mg\,\frac{\cos\alpha(3\cos\varphi - 2) + \sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}{\cos\beta + \sin\beta\,\mathrm{tg}\,\beta}.$$

Тогда условие отрыва принимает вид:

$$\cos\varphi = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta,$$

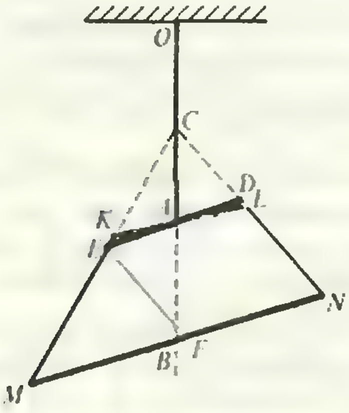
откуда находим искомый путь s, пройденный точкой A маятника до отрыва от поверхности конуса:

$$s = r\varphi = l\sin\beta\arccos\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta\right).$$

Заметим, что при $\alpha=\beta=0$ получаем известный частный случай — соскальзывание тела с вершины сферической или цилиндрической поверхности.

Л. Г. Маркович

Ф1104. *Концы двух однородных стержней привязаны друг к другу невесомыми и нерастяжимыми нитями. Один из стержней подвязали за середину к штативу. Доказать, что образованный таким образом из нитей и стержней четырехугольник является трапецией.*



Заметим, что в зависимости от длин стержней и нитей параллельными будут или стержни, или нити. Если параллельны нити, очевидно, что полученная фигура будет трапецией. Поэтому покажем, что если нити не параллельны, то параллельны стержни.

Докажем (см. рисунок), что середина стержня MN (точка B) и точка C пересечения продолжений нитей ME и DN находятся на прямой OA (A — середина стержня ED). Очевидно, что нить OA вертикальна (силы, действующие на нее, вертикальны). Далее, сила натяжения нити OA, действующая на стержень ED, и сила тяжести стержня вертикальны; поэтому из равновесия стержня следует, что силы натяжения нитей EM и DN пересекаются в точке C, лежащей на вертикали OA. Из условия равновесия стержня MN следует, что точка B также находится на вертикали OA.

Докажем теперь, что $ED \parallel MN$. Предположим, что это утверждение неверно, и проведем через точку A прямую, параллельную MN. Отрезок KL параллелен отрезку MN и в точке A делится пополам, кроме того, $\angle KAE = \angle DAL$, поэтому треугольники EKA и LAD равны. Отсюда следует, что $\angle EKA = \angle ALD$, а это неверно, так как $\angle EKA$ — внешний угол треугольника CKL, а $\angle ALD$ — внутренний. Следовательно, предположение, что ED не параллельно MN, не верно.

Найдем условие, которое позволит определить, в каком случае параллельны нити, а в каком — стержни.

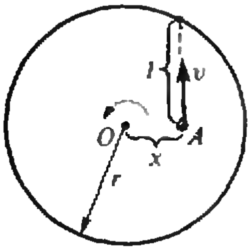
Проведем из точки E прямую $EF \parallel DN$. Условие возможности параллельности стержней эквивалентно условию возможности построения треугольника из отрезков ME и $EF = DN$ (равных длинам нитей) и отрезка $MF = |MN - ED|$ (равного разности длин стержней):

$$MF > |EM - DN|.$$

Таким образом, если разность длин стержней больше разности длин нитей, то параллельны стержни, в противном случае параллельны нити. В частности, если равны стержни, то параллельны нити, если же равны нити, то параллельны стержни. Если разности длин стержней и нитей одинаковы, то и стержни, и нити лежат на вертикали OA.

В. Т. Карапетян

Ф1105. *Металлический диск радиусом $r = 10$ см вращается в горизонтальной плоскости со скоростью $\nu = 60$ об/мин. С высоты $H = 10$ см на него падает пластмассовый брусок, масса которого много меньше массы диска. Нижняя грань бруска все время параллельна плоскости диска, коэффициент трения между металлом и пластмассой $\mu = 0{,}1$. На каком расстоянии от оси должен упасть брусок, чтобы при повторном падении он упал за пределами диска? Считать, что после отскока брусок поднимается на прежнюю высоту; размерами бруска пренебречь.*



Пусть брусок при первом падении ударяется о диск в точке A, находящейся от центра диска на расстоянии x (см. рисунок). Во время удара на брусок со стороны диска действуют две силы — направленная вертикально сила реакции опоры $\vec{N}$ и направленная горизонтально сила трения $\vec{F}_{тр}$. Предполагая, что в течение всего соударения скорость бруска относительно диска меньше линейной скорости $v_A = \omega x = 2\pi\nu x$ точки A диска, получим, что все время $F_{тр} = \mu N$. Тогда импульс, переданный диском бруску в горизонтальном направлении, связан с импульсом, переданным бруску в вертикальном направлении, соотношением

$$P_г = \mu P_в.$$

С другой стороны,

$$P_г = mv,$$

где m — масса бруска, v — его горизонтальная скорость после соударения,

$$P_в = 2mv_0,$$

где $v_0 = \sqrt{2gh}$ — вертикальная скорость бруска непосредственно перед соударением. Отсюда находим

$$v = 2\mu v_0 = 2\mu\sqrt{2gh}.$$

За промежуток времени $\tau = 2t_{пад} = 2\sqrt{2h/g}$ между первым и вторым соударениями брусок пролетит по горизонтали расстояние

$$l = v\tau = 8\mu h.$$

По условию задачи должно выполняться соотношение

$$l > \sqrt{r^2 - x^2},$$

т. е.

$$x > \sqrt{r^2 - l^2} = \sqrt{r^2 - (8\mu h)^2} = 6 \text{ см}.$$

Проверим, будет ли при этом выполняться условие $v < v_A$:

$$v = 2\mu\sqrt{2gh} \approx 28 \text{ см/с},$$
$$v_A = 2\pi\nu x \approx 38 \text{ см/с} > v.$$

Итак, брусок должен первый раз упасть на диск на расстоянии не меньшем 6 см от его центра.

Л. А. Вакревский

Задачник „Кванта"

Ф1106. *Несколько слов о сверхпроводниках. Сверхпроводники обладают свойством выталкивать магнитное поле (так называемый эффект Мейснера), благодаря чему они могут парить над магнитом. Эту особенность сверхпроводников предполагается использовать для создания сверхскоростных поездов на «магнитной подвеске», опытные образцы которых уже испытываются. А теперь сама задача. На сверхпроводящий образец массой m, парящий над постоянным магнитом, кладут груз точно такой же массы. Во сколько раз необходимо увеличить магнитную индукцию поля, создаваемого магнитом, чтобы сверхпроводник с грузом парил на прежнем расстоянии от магнита?*

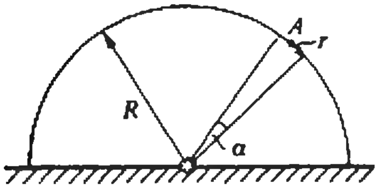
Магнитное поле, созданное постоянным магнитом, не проникает в сверхпроводящий образец. Это происходит потому, что в поверхностном слое сверхпроводника индуцируется ток, который создает свое собственное поле, компенсирующее внешнее. Таким образом, величина этого тока I должна быть пропорциональной величине магнитной индукции B внешнего поля: $I \sim B$. Согласно закону Ампера, взаимодействие электрического тока с магнитным полем характеризуется силой F, пропорциональной и току I, и магнитной индукции B. В нашем случае

$$F \sim IB \sim B^2.$$

Эта сила и уравновешивает силу тяжести сверхпроводящего образца. Если масса образца с грузом удвоилась, для сохранения равновесия магнитная индукция поля постоянного магнита должна быть увеличена в $\sqrt{2}$ раз.

А. И. Буздин

Ф1107. *Свежевыпавший пушистый снег искрится на солнце. Оцените характерное расстояние между отдельными «искринками».*



Будем считать, что снежинки в снежном покрове представляют собой случайным образом ориентированные плоские зеркала одинаковой площадью порядка 10 мм^2.

Каждая снежинка-зеркальце отражает свет в виде расходящегося пучка. Угол расходимости равен угловому размеру Солнца $\alpha \approx 0{,}5°$. Вероятность q того, что отраженный свет от случайно ориентированной снежинки попадает в данную точку A (см. рисунок), равна отношению площади основания конуса светового пучка к площади полусферы, проходящей через точку A (центр полусферы находится на снежинке). Учитывая, что высота светового конуса практически равна радиусу полусферы, находим

$$q = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{\pi R^2 \operatorname{tg}^2\alpha/2}{\pi R^2} = \operatorname{tg}^2\alpha/2 \approx \frac{\alpha^2}{4},$$

где R — радиус полусферы, или расстояние от снежинки до наблюдателя, r — радиус основания светового пучка.

На одном квадратном метре поверхности снежного покрова расположатся $n \approx 10^5$ снежинок, при этом свет от qn частиц будет попадать в точку A.

Чтобы оценить характерное расстояние между отдельными «искринками», будем считать, что светящиеся снежинки расположены на поверхности равномерно, например находятся в центрах плотноупакованных шестиугольников. Тогда площадь одного шестиугольника S_0 и характерное расстояние между искринками d связаны соотношением

$$S_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} d^2,$$

откуда находим

$$d \approx 60 \text{ см}.$$

При практическом наблюдении снежинок нужно учитывать бинокулярность человеческого зрения. При малых расстояниях наблюдения ($R < 3$ м) число отдельных искринок удваивается: диаметр светового пучка меньше расстояния между зрачками, и каждый глаз видит «свои» искринки. При большом расстоянии ($R > 30$ м) диаметр светового пучка от отдельной снежинки становится на порядок больше, чем расстояние между зрачками, и можно использовать модель «точечного наблюдателя», как сделано выше.

Заметим, что искристый снег можно наблюдать не только днем, но и ночью, например в свете фонарей уличного освещения. Вспомните А. А. Фета:

Скрип шагов вдоль улиц белых.
Огоньки вдали.
На стенах оледенелых
Блещут хрустали.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Информация

Заказы принимаются...

(Начало см. на с. 22)

Цель книги — познакомить читателя-неспециалиста с основными фактами квантовой физики и историей их открытия.

95. Тарбеев Ю. В. Физические величины. Единицы. Эталоны. Константы. 1 р. 10 к.

В краткой и доступной форме представлены основные метрологические понятия, наименования и принятые в практике обозначения физических величин, наиболее точные и надежные значения физических констант, единицы физических величин.

96. Яворский Б. М., Селезнев Ю. А. Справочное руководство по физике для поступающих в вузы и самообразования. 1 р. 90 к.

Руководство содержит сведения по всем разделам физики, которые изучаются в средней школе и средних специальных учебных заведениях.

108. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. Физика в примерах и задачах. 1 р.

Цель авторов — научить читателя рассуждать, довести его до глубокого понимания сути рассматриваемых явлений. В новом издании нашли отражение последние изменения содержания курса физики средней школы и программ конкурсных экзаменов в вузы.

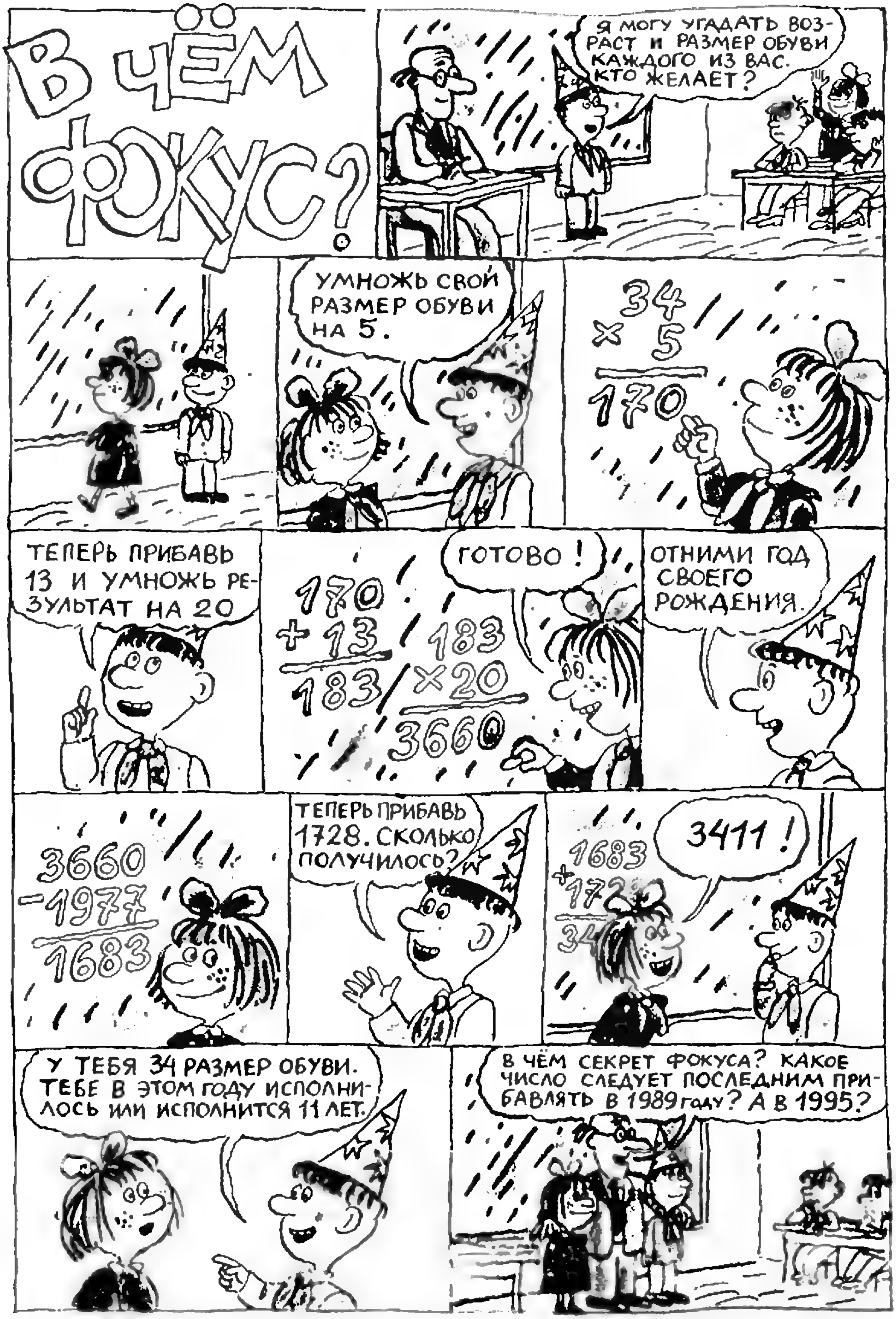
109. Гурский И. П. Элементарная физика с примерами решения задач. 1 р. 10 к.

Последовательно и кратко рассмотрен весь элементарный курс физики. Цель автора — помочь абитуриентам повторить курс физики с минимальной затратой времени.

110. Меледин Г. В. Физика в задачах: Экзаменационные задачи с решениями. 70 к.

Содержит свыше 500 задач, предлагавшихся на письменном вступительном экзамене по физике в Новосибирском государственном университете.

В ЧЁМ ФОКУС?


Я МОГУ УГАДАТЬ ВОЗРАСТ И РАЗМЕР ОБУВИ КАЖДОГО ИЗ ВАС. КТО ЖЕЛАЕТ?
УМНОЖЬ СВОЙ РАЗМЕР ОБУВИ НА 5.
34 × 5 = 170
ТЕПЕРЬ ПРИБАВЬ 13 И УМНОЖЬ РЕЗУЛЬТАТ НА 20
170 + 13 = 183
183 × 20 = 3660
ГОТОВО!
ОТНИМИ ГОД СВОЕГО РОЖДЕНИЯ.
3660 − 1977 = 1683
ТЕПЕРЬ ПРИБАВЬ 1728. СКОЛЬКО ПОЛУЧИЛОСЬ?
1683 + 172 = 34
3411!
У ТЕБЯ 34 РАЗМЕР ОБУВИ. ТЕБЕ В ЭТОМ ГОДУ ИСПОЛНИЛОСЬ ИЛИ ИСПОЛНИТСЯ 11 ЛЕТ.
В ЧЁМ СЕКРЕТ ФОКУСА? КАКОЕ ЧИСЛО СЛЕДУЕТ ПОСЛЕДНИМ ПРИБАВЛЯТЬ В 1989 году? А В 1995?

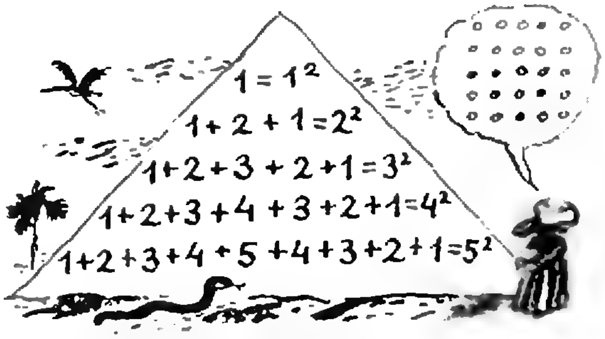
„Квант" для младших школьников.

Задачи

1. Проверьте справедливость тождеств в числовой пирамиде, изображенной на рисунке, и попробуйте доказать общее утверждение:

$$1+2+\ldots+(k-1)+k+(k-1)+$$
$$+\ldots+2+1=k^2.$$

Подсказка рядом с пирамидой.



2. Четыре подруги пришли на каток, каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре «кавалер» выше «дамы» и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании — Юра Воробьев, следующий по росту — Андрей Егоров, потом Люся Егорова, Сережа Петров, Оля Петрова, Дима Крымов, Инна Крымова и Аня Воробьева.

Кто с кем катался?

3. В большую кастрюлю, наполненную горячей водой, опустили стакан вверх дном. Через некоторое время из стакана стали выходить пузырьки воздуха. Почему?

4. Покажите, что уравнение

$$x^5y=xy^5+1987$$

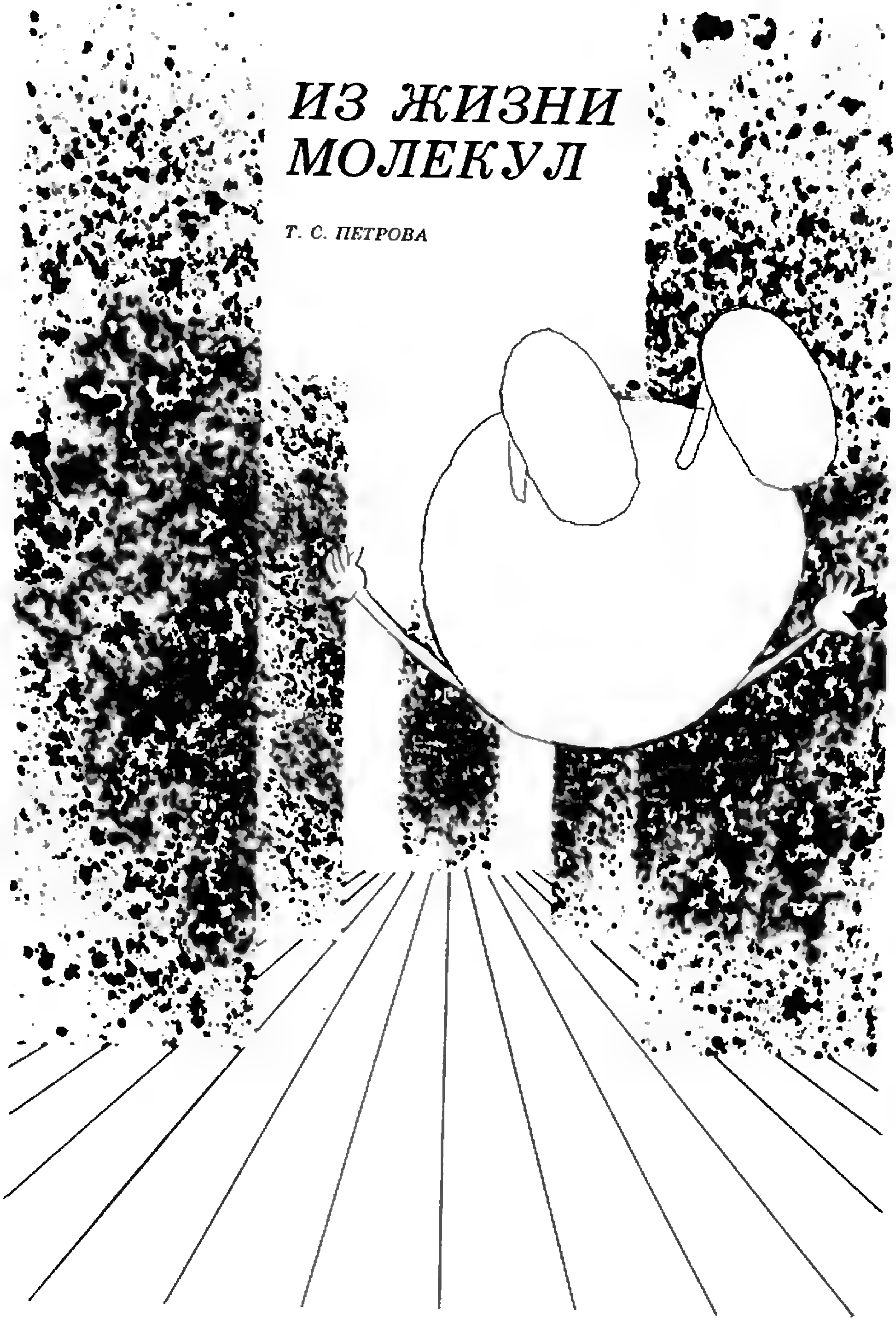
не имеет решений в целых числах.

5. Прямоугольный лист бумаги разрезали на три треугольных куска. Площадь одного из них оказалась равной полусумме площадей двух других кусков. Как относятся площади полученных кусков?

Эти задачи нам предложили *Н. И. Авилов, М. Б. Улановский, А. Г. Самосват, А. П. Тонких, В. В. Произволов.*

ИЗ ЖИЗНИ МОЛЕКУЛ

Т. С. ПЕТРОВА



Слово «молекула» появилось почти 350 лет назад. Появилось оно в книге французского философа Пьера Гассенди, изданной в 1647 году. По Гассенди молекула («массочка», от латинского «молес» — масса) — это несколько атомов, объединенных в одну группу. По-разному объединенные атомы, т. е. разные молекулы,— это «кирпичики», из которых природа строит разнообразные тела. Через сто лет М. В. Ломоносов, развивая учение о строении вещества, писал, что молекулы могут быть однородными (из одинаковых атомов) и разнородными (из разных), что молекулы взаимодействуют друг с другом и находятся в постоянном хаотическом движении.

Эти положения легли в основу молекулярно-кинетической теории строения вещества. Со временем они были подтверждены многочисленными опытами. О некоторых из них мы и хотим рассказать.

В 1911 году французский физик Дюнуайе поставил эксперимент, который показал, что в своем движении молекулы газа беспрестанно сталкиваются друг с другом, а между столкновениями их движение прямолинейно.

Схема опыта приведена на рисунке 1. Из стеклянной трубки откачан воздух. Трубка разделена двумя перегородками (*1* и *2*) на три отделения. В перегородках имеются отверстия (O_1 и O_2), расположенные на оси трубки. В отделении I помещен кусочек металлического натрия. Эту часть трубки нагревают. Натрий начинает испаряться, пары натрия заполняют отделение I и через отверстия O_1 и O_2 проникают в отделения II и III. На стенках трубки там образуется натриевый налет, при этом в отделении II он покрывает все стенки, кроме перегородки *1*, а в отделении III — только небольшую область напротив отверстия O_2.

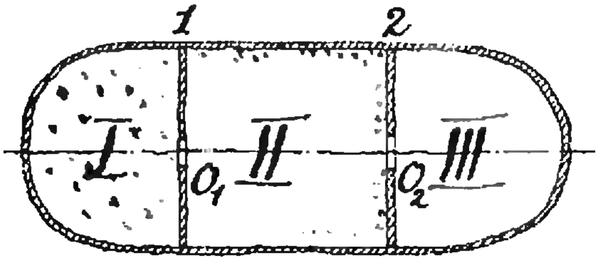


Рис. 1.

Результаты этого эксперимента объясняются достаточно очевидно. В отделение II через отверстие O_1 попадают молекулы, скорости которых имеют различные направления. Поскольку воздух из трубки откачан, молекулы натрия в отделении II движутся практически без соударений и, попав на холодные стенки, оседают на них. А в отделение III попадают лишь те молекулы, скорость которых при вылете из отделения I была направлена вдоль прямой O_1O_2, и эти молекулы оседают в отделении III на стенке трубки строго напротив отверстий O_1 и O_2.

Факт, что молекулы движутся хаотически, казалось бы, свидетельствует о том, что скорости молекул могут быть самыми различными и нельзя указать ни их преимущественного направления, ни определенной величины. Однако в 1860 году английский физик Максвелл теоретически показал, что существует точный закон, которому подчиняются скорости беспорядочного, теплового движения молекул. Согласно этому закону — его называют законом распределения молекул по скоростям (или просто распределением Максвелла), при данной температуре существует определенное значение скорости, характеризующее движение большинства молекул данного газообразного вещества. И лишь у небольшой доли молекул скорости намного больше или намного меньше этой наиболее вероятной скорости. (При этом предполагается, что все молекулы газа совершенно одинаковы и температура постоянна по всему объему.) Закон распределения молекул по скоростям позволяет определить долю молекул, скорость которых лежит вблизи данного значения. Чем ближе это значение к наиболее вероятной скорости, тем больше доля молекул, движущихся с данной скоростью.

На рисунке 2 приведен график, иллюстрирующий распределение

Максвелла. По оси абсцисс отложена скорость v, а по оси ординат — функция $f(v)$, значение которой при данном значении скорости определяет долю молекул газа, скорость которых очень близка к v.

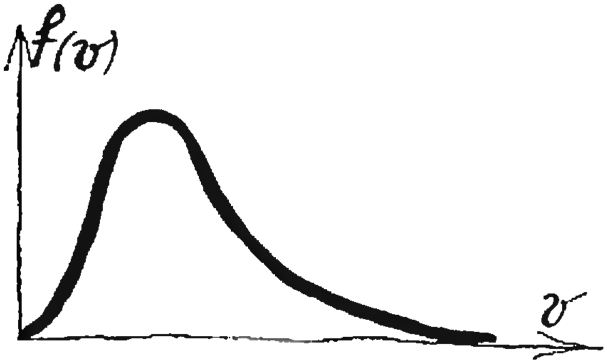


Рис. 2.

Хотя смысл сказанного понятен, надо иметь в виду, что интересоваться точным значением скорости определенной молекулы или тем, сколько молекул имеют конкретную скорость, бессмысленно. Дело в том, что рассматривая, скажем, газ в сосуде, мы имеем дело с огромным числом объектов (ведь в одном кубическом сантиметре воздуха в комнате находится примерно $2{,}5 \cdot 10^{19}$ молекул). И нет никакой возможности (да и нет необходимости) обсуждать характеристики каждого объекта — молекулы — в отдельности. В целом ряде случаев для описания поведения такого огромного числа частиц достаточно знания средних значений величин, характеризующих движение частиц,— скажем средней скорости или средней энергии.

Эксперимент по определению скорости движения молекул газа был впервые поставлен тоже только в начале XX века немецким физиком Штерном. Схема опыта представлена на рисунке 3. При нагревании тонкой посеребренной платиновой проволочки *1* (проволочка накаливается при прохождении по ней электрического тока) молекулы серебра испаряются с ее поверхности. Часть молекул через узкую щель *2* в тонком цилиндре *3*, окружающем проволочку, попадает внутрь большого цилиндра *4*, окружающего проволочку и маленький цилиндр. Из полости большого цилиндра воздух откачан, поэтому молекулы серебра движутся там практически без соударений и, попадая на стенку цилиндра, оседают на ней (температура поверхности большого цилиндра достаточно низкая). Оседающие молекулы образуют узкую полоску налета *5*. Если вся система покоится, то эта полоска образуется как раз напротив щели *2*, создавая как бы ее изображение. Но если оба цилиндра (*3* и *4*) вращаются вокруг общей оси, проходящей через проволочку *1*, то полоска налета уже не будет образовываться напротив щели *2*. Действительно, за то время, пока молекулы пролетают расстояние от щели до поверхности цилиндра *4*, цилиндр успевает повернуться, и след *6* (рис. 4), оставляемый молекулами, оказывается смещенным относительно полоски *5* в направлении, противоположном направлению вращения цилиндров.

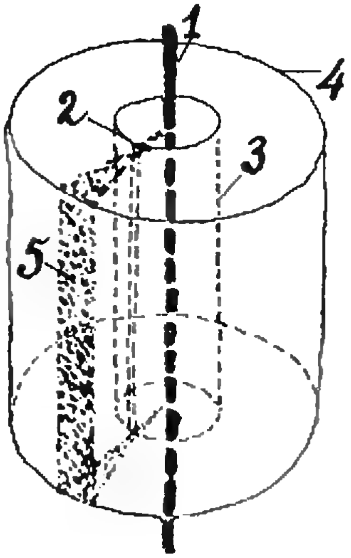


Рис. 3.

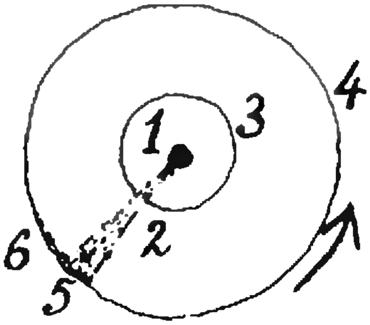


Рис. 4.

Зная скорость, с которой вращаются цилиндры *3* и *4*, можно по расстоянию между следами *5* и *6* определить время, за которое молекулы пролетают расстояние от щели *2* до поверхности цилиндра *4*. А зная это расстояние, можно определить скорость молекул.

Важно отметить, что полоска налета, образованного молекулами, оказалась не постоянной толщины. Вблизи середины полоска наиболее толстая, а на краях ее толщина уменьшается (рис. 5). Поскольку толщина серебряного слоя определяется количеством молекул, осевших на поверхности цилиндра, то по ней можно судить о количестве молекул, налетающих на стенку с той или иной скоростью. Ведь ближе к следу *5* попадают наиболее быстрые молекулы, а дальше от него оседают более медленные. (Неправда ли, «профиль» серебряного налета похож на кривую распределения Максвелла?)

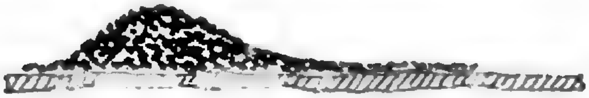


Рис. 5.

Первый опыт по определению скорости молекул Штерн поставил в 1920 году, а спустя четверть века идея опыта была использована для экспериментальной проверки закона Максвелла. В этих экспериментах измерялось число молекул, скорости которых лежат в некотором интервале скоростей. Измерения полностью подтвердили максвелловский закон распределения.

Возможно, у читателя возник вопрос: неужели столкновения молекул друг с другом никак не влияют на распределение? В опыте Штерна горячие молекулы летели, не сталкиваясь друг с другом, а может быть, если бы молекулы попадали не на холодную стенку, к которой они прилипали, а на такую же горячую, как они сами, и отскакивали от нее, то со временем в результате столкновений друг с другом они выровняли бы свои скорости?

Разумеется, столкновения сказываются на скоростях молекул. Но изменение скоростей происходит таким образом, что в любой промежуток времени число молекул, скорость которых уменьшается, равно числу молекул, скорость которых увеличивается, и распределение молекул по скоростям остается неизменным — таким, как на рисунке 2. Если, конечно, температура газа постоянна.

А если газ нагревать? Более высоким температурам соответствуют бо́льшие скорости молекул. Если во всем объеме, занимаемом газом, устанавливается более высокая температура, то кривая распределения смещается в сторону бо́льших скоростей. При этом, как нетрудно понять, площадь под кривой остается постоянной — ведь она соответствует полному числу молекул в объеме.

И в заключение предлагаем вам подумать: какие явления в жизни, в окружающей природе свидетельствуют о том, что молекулы движутся хаотично, что между столкновениями их движение прямолинейно и что скорости молекул при одной и той же температуре не одинаковы.

ОСТРОВ ПЯТИ КРАСОК

(фантастический рассказ)

М. ГАРДНЕР

Перепечатывается с сокращением из сборника «Трудная задача» (М., Мир, 1982). Перевод Ю. Данилова.

В Монровии, столице Либерии, есть только один магазин хозяйственных товаров. Когда я сказал темнокожему клерку, сколько галлонов краски мне нужно, он от удивления присвистнул:

— Не иначе, как вы собрались выкрасить гору, мистер!

— Нет,— заверил я его,— не гору, всего лишь остров.

Клерк улыбнулся. Он думал, что я шучу, но я действительно собирался выкрасить целый остров в пять цветов: красный, синий, зеленый, желтый и фиолетовый.

Для чего мне это понадобилось? Чтобы ответить на этот вопрос, мне придется вернуться на несколько лет назад.

Дело в том, что темой моей докторской диссертации была проблема четырех красок. Гипотеза о четырех красках утверждает, что для правильной раскраски любой карты, при которой любые две соседние страны, имеющие общий отрезок границы, будут выкрашены в различные цвета (две страны не считаются соседними, если их границы имеют лишь одну общую точку), достаточно четырех красок. Страны на карте могут быть любых размеров и самых причудливых очертаний. Число их также может быть произвольным. Гипотеза четырех красок была впервые высказана в 1860 году Мебиусом, и, хотя над ее решением бились лучшие математические умы, гипотезу эту не удавалось ни доказать, ни опровергнуть*).

По странному стечению обстоятельств проблема четырех красок была решена для всех поверхностей, кроме сферы и плоскости. В 1890 году Р. Дж. Хивуд доказал, что для раскраски поверхности тора (поверхности бублика) необходимо и достаточно семи красок, а в 1934 году Ф. Франклин доказал, что шести красок достаточно для раскраски карт на односторонних поверхностях типа листа Мебиуса и бутылки Клейна.

17 ноября 1947 года профессор Венского университета Станислав Сляпенарский, читавший цикл лекций в Чикагском университете, сделал сенсационное сообщение о своем открытии нульсторонних поверхностей**).Это открытие имело далеко идущие последствия для изучения свойств бутылки Клейна и произвело подлинный переворот в исследованиях по проблеме четырех красок.

Развивая некоторые идеи Сляпенарского, я опубликовал в 1950 году свою известную работу с опровержением «доказательства» Хивуда, полагавшего, что для правильной раскраски карты на плоскости необходимо и достаточно пяти красок. По всеобщему же убеждению топологов, для правильной раскраски плоскости или сферы достаточно четырех красок.

Вскоре после выхода в свет моей работы по проблеме четырех красок мне довелось завтракать в университетском клубе «Четырехугольник» с профессором Альмой Буш. Альма — один из ведущих наших антропологов и, несомненно, самая красивая женщина во всем университете.

Альма только что вернулась из экспедиции на небольшой остров, расположенный в нескольких сотнях миль от побережья Либерии у западной кромки африканского материка. Она возглавляла группу студентов-антропологов, изучавших нравы и обычаи пяти племен, населявших остров.

— Остров разделен на пять областей,— сообщила мне Альма, вставляя сигарету в длинный мундштук из черной пластмассы.— Все они граничат друг с другом. Это важно для понимания тамошних нравов. Общность границ позволяет племенам поддерживать некое единство культур. Что с тобой, Марти? Почему у тебя такой изумленный вид?

Я застыл, и, не донеся вилку до рта, медленно положил ее на стол.

---

*) Рассказ Гарднера написан в 1952 году. Положительное решение проблемы четырех красок было найдено в 1976 году. (*Примеч. ред.*)

**) Подробный рассказ об этом читатель найдет в 6-м номере «Кванта» (*Примеч. ред.*)

— Потому, что ты рассказываешь невероятные вещи. Такого просто не может быть.

Альма была уязвлена:

— Чего не может быть?

— Пяти племен, имеющих общие границы. Это противоречит знаменитой проблеме четырех красок.

— Противоречит чему?

— Проблеме четырех красок,— повторил я.— Есть такая проблема в топологии. Хотя она никем не доказана и не опровергнута, никто не сомневается, что она верна.

Я принялся концом ложки чертить на скатерти, пытаясь объяснить Альме, в чем здесь дело.

Альма быстро схватила общую идею.

— Может быть, у островных племен другая математика? — высказала она предположение, щурясь от дыма сигареты.

Я покачал головой.

— Математика, дорогая моя, едина для всех культур. Дважды два всегда четыре, даже в Африке. Если твой остров действительно разделен так, как ты говоришь — на пять областей, каждая из которых имеет общую границу с четырьмя другими областями,— то я начну верить в математические способности твоих островитян. Нет ли у тебя карты острова?

Альма отрицательно покачала головой.

— Может быть, тебе отправиться с нами? — предложила она, стряхивая пепел.— Я пробуду на острове месяц. Мне нужно проверить кое-какие данные перед тем, как опубликовать их, а ты тем временем сделаешь карту острова. Если то, о чем я тебе рассказала, не подтвердится, я возмещу твои расходы.

Что я терял? Начинались летние каникулы, а это путешествие обещало быть приятным и необычным. И я согласился.

* * *

На второй день нашего пребывания на острове Альма познакомила меня с одним из островитян по имени Агуз. Агуз был из племени хийику, составлявшего интеллектуальную элиту острова. Альма договорилась с Агузом совершить втроем пеший поход по всему острову. К счастью, остров был невелик: площадь его не превышала 25 квадратных миль. Пустившись в путь с утра пораньше, мы могли к вечеру обойти весь остров. Я прихватил с собой блокнот и коробку карандашей, чтобы набросать хотя бы грубую карту пяти областей.

Свой первый визит мы нанесли племени хийику, на территории которого был расположен наш лагерь.

На верхнем листке своего блокнота я нарисовал круг и закрасил его синим. Точная конфигурация территории, занимаемой хийику, была неизвестна, но для моих целей было вполне достаточно и этого грубого приближения. Когда мы, двигаясь на запад, оказались на территории, занимаемой племенем вольфези, я слева от синего кружка поставил загогулину и закрасил ее в зеленый цвет.

С трудом продираясь сквозь заросли какого-то кустарника, мы вышли на берег узкой тихой речки. Огромный плот из бревен едва выступал из светлой жирной грязи, устилавшей дно реки. Агуз столкнул плот в воду, взобрался на него и принялся отталкиваться длинным бамбуковым шестом. Мы перешли вброд узкую полоску топкой грязи у берега и присоединились к нему. Лавируя шестом, Агуз направил плот вниз по течению извилистой реки.

Через некоторое время Агуз сообщил о том, что мы вступаем на территорию племени гезелломо. Она была расположена к северу от вольфези.

Я согнал со своего блокнота огромную стрекозу и нанес на свою карту-схему красное пятно, расположив его над зеленым.

Проплыв с полмили по территории гезелломо, Агуз причалил к берегу, и мы сошли на сушу. Небольшой подъем по склону сквозь заросли высокой травы — и мы на краю деревни гезелломо.

Благополучно миновав эту деревню, мы побрели на юго-восток. Пройдя около мили, Агуз указал на видневшиеся вдали пальмы, аккуратно посаженные рядком, и сообщил, что перед нами граница между гезелломо и хийику. Я достал свой блокнот и продолжил красное пятно до синего круга.

Вскоре после полудня мы добрались до поселения племени беболупу. Насколько я мог понять, территория беболупу, которую я закрасил фиолетовым цветом, простиралась на юг, а затем на запад и, обогнув южный конец территории, закрашенной мною синим, доходила до зеленой. Я протянул свою карту-схему Альме.

— Посмотри: синяя территория со всех сторон окружена территориями трех других цветов. Пятая территория не может иметь с ней общую границу.

Альма показала карту Агузу, и какое-то время они о чем-то говорили между собой.

— Агуз говорит, что не знает, как выглядит их остров с неба, но ты, по его словам, где-то допустил ошибку.

Я взглянул на Агуза. На лице его не дрогнул ни один мускул, но меня не покидало неприятное чувство, что в глубине души он считает меня идиотом.

Последнюю территорию, которую мы посетили, населяло племя, решительно не поддающееся никакому описанию. По сути дела их отличительной особенностью и было то, что они не поддавались описанию. У пятого племени не было вождя, оно не ведало разделения труда, родственных уз, не было сложившихся ритуалов по случаю рождения, вступления в брак или смерти. У племени не было религиозных воззрений и полностью отсутствовали традиции и обычаи. Более того, у племени не было даже своего названия.

Пятую территорию я закрасил желтым цветом. Мы прошли участки, граничившие с зеленой, красной и фиолетовой областями. Когда Агуз, наконец, указал на противоположный берег ручейка и сообщил, что там начинается территория хийику (синяя территория), я ощутил, как у меня по спине забегали мурашки.

— Не может быть! — воскликнул я.— Иначе мы где-то должны были бы пересечь чью-то территорию!

Альма перевела мои слова Агузу. Он упрямо затряс головой.

Разумеется, я был убежден, что где-то мы допустили какую-то ошибку. Территория одного из племен могла состоять из двух несвязных кусков. Агуз мог неправильно указать границы между племенами. Какая-то ошибка непременно должна была быть! Когда мы вернулись в наш лагерь, между мной и Альмой вспыхнул спор. Альма утверждала, что я проиграл и, следовательно, должен сам платить за поездку.

Я промакнул носовым платком свою лысину. Если бы раздобыть точную карту с очертаниями пяти областей! Можно было бы, конечно, произвести топографическую съемку, но для этого требовались приборы, которых у нас не было. Внезапно мне пришла в голову потрясающая идея.

— Как ты думаешь,— спросил я у Альмы,— можно было бы в Монровии взять напрокат какой-нибудь распылитель?

Альма прищурилась от дыма сигареты и сказала, что, по ее мнению, это вполне возможно.

— Если бы нам удалось раздобыть распылитель,— продолжал я,— мы могли бы пометить каждую территорию пятнами соответствующего цвета, и на цветном аэрофотоснимке форма каждой территории была бы великолепно видна.

Альма заявила, что мой план великолепен. Ей в любом случае нужно было снять карту острова, а предложенный мною метод позволяет выполнить эту задачу быстрее, чем другие.

— Краска за мой счет,— щедро предложила она.

Тут мы и подошли к тому самому месту, с которого я начал свой рассказ. У подрядчика, принимавшего заказы на выполнение строительных работ, мы взяли напрокат дюжину распылителей краски. Я купил двадцать тысяч галлонов самой дешевой краски. Вернувшись на остров, мы без труда набрали бригаду мальчишек племени хийику и обучили их пользоваться распылителями.

Агуз был назначен бригадиром. Территорию каждого племени мы метили краской того же цвета, что и на моей «карте». Закрашивание всей территории потребовало бы слишком больших затрат, поэтому мы решили распылять краску пятнами диаметром около десяти футов с интервалами в сто футов. С самолета территория каждого племени казалась бы раскрашенной в горошек, и границы были бы легко различимы.

Каждый раз я сопровождал бригаду, чтобы проследить за работой. Все было сделано, как надо. В том, что четыре территории имели общие границы, сомнений не было: у каждой из них к какому-нибудь участку границы примыкала территория другого цвета.

Решающим должен был быть пятый цвет!

К распылению желтой краски мы приступили на двенадцатый день работы. Желтая территория уже граничила с красной, зеленой и фиолетовой. Мы приближались к синей территории. Нервы мои были напряжены до предела.

Бригада маляров медленно продвигалась сквозь подлесок. Заходившее солнце отбрасывало длинные тени. Попугай с красивым ярким оперением, получив свою порцию краски из распылителя, с шумом взлетел и скрылся, издавая пронзительные крики. Небольшая коричневая змея, обрызганная желтой краской, шипя уползла в укромное местечко. Неожиданно я схватил Альму за плечо.

— Клянусь тенью Мебиуса! — воскликнул я хрипло, не в силах унять бешено колотившееся сердце.— Я вижу отсюда синие пятна!

В прекрасных серых глазах Альмы вспыхнуло торжество.

— Так кто был прав?

Я уселся на большой пень и вытер пот, градом катившийся по лицу. Голова раскалывалась от нестерпимой боли. В висках стучало. Сквозь монотонный неумолчный гул насекомых издали доносился четкий, зажигательный ритм барабанов беболупу. Агуз стоял в ожидании дальнейших приказаний.

Я был в полной растерянности. Строго говоря, пять областей никак не могли иметь общие границы. Я знал, что проблему четырех красок удалось доказать для случая, когда число стран не превышает 35. Но что, если в эти доказательства вкралась какая-нибудь ошибка? Если остров действительно опровергает утверждение проблемы четырех красок, мое открытие станет одним из величайших поворотных пунктов в топологии!

Через несколько дней, когда очередным рейсом прилетел самолет из Монровии, мы решили произвести аэрофотосъемку острова. К сожалению, самолетик был маленьким, с двумя открытыми кабинами, поэтому лететь мог только фотограф с камерой. Как только снимки будут сделаны, пилот высадит фотографа, и возьмет меня, чтобы я мог с воздуха посмотреть на раскрашенный остров.

Я нервно наблюдал за тем, как самолет, медленно описав круг над островом, пошел на снижение. Пробежав немного, самолет остановился, и фотограф спрыгнул на землю. Я поспешно подбежал, намереваясь занять место в кабине, но пилот, грубоватый на вид африканец, великолепно говоривший по-английски, покачал головой.

— Съемки заняли больше времени, чем я рассчитывал,— сказал он твердо.— Мне необходимо через полчаса вернуться в Монровию. Жаль, но ничего не поделаешь. Вернусь через неделю. Тогда и покатаю вас.

Напрасны были мои мольбы и просьбы. Когда самолет взлетел, я обернулся к фотографу.

— На что похож остров сверху?

Фотограф нахмурился.

— Не могу вам сказать. Цвета переплелись весьма причудливо. Я пытался набросать эскиз, но задача оказалась слишком сложной, и ее пришлось оставить.

Я спросил, не состояла ли какая-нибудь область из нескольких отдельных частей, полностью окруженных другим цветом. Фотограф отрицательно покачал головой.

— Все территории были из одного куска. И все доходили до побережья.

— Гм, интересно,— пробормотал я. И тут мне в голову пришла мысль, окончательно доконавшая меня. Я стукнул себя по лбу и застонал.

Альма, думая, что мне плохо, плеснула мне в лицо холодной воды. Я сел на землю и схватился за голову обеими руками, пытаясь хоть как-то унять пульсирующую боль.

Вы спросите, что случилось? Внезапно я понял, что если территория каждого племени имеет выход к морю, то море граничит с территориями всех пяти племен. Море было шестым цветом!

Проявить цветную пленку в лагере или в Монровии было невозможно. Не оставалось ничего другого, как ждать, пока мы вернемся домой.

Через три дня хлынул тропический ливень. Он шел, не переставая, до конца недели. Когда пилот прилетел на остров очередным рейсом, он сообщил, что всю краску смыло.

Нетерпение, с которым я ожидал увидеть снимки, достигло таких размеров, что я не мог дождаться, когда Альма завершит работу на острове. Обратным рейсом я улетел в Монровию, а оттуда на теплоходе вернулся в Штаты.

* * *

В Нью-Йорке я отдал проявить снимки в фотолабораторию, и когда зашел получить их через несколько дней, глаза мои были красны от бессонницы.

— Боюсь, что ваш фотограф выбрал не тот светофильтр,— сказал лаборант, показывая мне пленку на просвет.

На всех снимках остров получился сплошным темно-красным пятном! Я взял снимки и побрел вдоль улицы, бессознательно бормоча себе под нос.

Мои академические обязанности не позволяли мне вернуться на остров раньше следующей осени. Вернувшись к себе в Чикаго, я попытался рассказать коллегам об острове с пятью племенами, но, слушая меня, они только печально качали головами и вежливо улыбались. Некий профессор из Висконсина, сообщили мне коллеги, сумел доказать гипотезу четырех красок для случая, когда число стран не превышает 83. Декан предложил мне месячный отпуск.

— Вы очень устали, вам нужно отдохнуть,— были его слова.

К концу лета я снова набрал свой обычный вес. Настроение мое начало улучшаться. Я тщательно изучил расписание авиарейсов на Монровию: во мне созрело решение вернуться на остров и выкрасить его еще раз.

* * *

На остров я попал только в конце сентября, через несколько месяцев после того, как Альма и ее студенты покинули его.

Отыскать территорию хийику оказалось довольно трудно. Наконец, я объяснил одному из хийику, что хочу видеть Агуза. Тот привел меня к большой хижине на окраине деревни. За хижиной возвышалось какое-то странное сооружение, блестевшее в ярких лучах света. По виду оно было сделано из полированных стальных пластин, скрепленных болтами.

Агуз вышел навстречу мне из хижины. Вслед за ним в дверном проеме показался белый человек плотного сложения, в котором я узнал... Ноги мои стали ватными! Не может быть! Как же так? Ведь он давно... Но это был он — профессор Станислав Сляпенарский собственной персоной!

Агуз ухмыльнулся и поспешил поддержать меня. Профессор принялся обмахивать меня своим шлемом. Он выглядел лучше, чем когда-либо. Борода осталась такой же рыжей. Лицо и лысую голову покрывал густой загар. Сляпенарский и Агуз ввели меня в хижину, и мы уселись в удобные кресла.

Не буду рассказывать во всех подробностях удивительную историю появления профессора на острове. Скажу лишь, что, после того как сенсационная весть о его открытии нульсторонних поверхностей облетела весь мир, Сляпенарский потерял покой из-за обрушившийся на него известности. Чтобы избавиться от назойливых репортеров, Сляпенарский решил скрыться. Он разослал телеграммы с сообщением о своей мнимой смерти и по подложному паспорту прибыл в Монровию.

Обследовав несколько островов, Сляпенарский, наконец, нашел, что искал. Без особого труда овладев диалектом хийику, профессор сделал Агуза, обладавшего, как оказалось, незаурядными математическими способностями, своим главным ассистентом. К тому времени между племенами возникли территориальные споры. Для ликвидации разногласий необходимо было установить демаркационные линии.

— Гипотезу четырех красок мне удалось опровергнуть еще до того, как я решил скрыться,— продолжал свой рассказ профессор.— Разделить остров на пять граничащих друг с другом областей означало установить мир. С помощью Агуза я разметил границы, и вскоре воцарился мир. Вы как раз поспели к концу нашей работы.

— Так вы знали о моем предыдущем визите на остров вместе с доктором Буш? — спросил я.

— Разумеется; но я не мог допустить, чтобы вы вернулись в Штаты с решением проблемы четырех красок. На остров хлынули бы фоторепортеры и операторы кинохроники!

— Так это вы,— спросил я с горечью,— испортили мои пленки?

— Боюсь, что я, старина. Я попросил Агуза подменить светофильтры, а вот к ливню, должен признаться, я не имею ни малейшего отношения. А вскоре после вашего отъезда я изменил границы территорий.

— Но как они проходили, эти границы? — спросил я, сгорая от любопытства.

Крохотные глазки Сляпенарского блеснули.

— Пойдемте, я покажу вам свою лабораторию,— сказал он, вставая.

Профессор вывел меня на площадку позади хижины. Он показал на стальную конструкцию, которую я видел, когда подходил к хижине.

— Перед вами плод моих трудов за два года,— сказал Сляпенарский.— Подлинная бутылка Клейна.

(Окончание см. на с. 60)

Искусство программирования

Сколько цифр в числе 100!?

В. Н. КАСАТКИН

Кажется, на этот вопрос получить ответ легко. В самом деле, ниже приводится программа — вычисление факториала числа *N*; работая по такой программе, компьютер вычислит и выведет на экран или напечатает число 100!. Нам останется только подсчитать число цифр в выведенном машиной числе.

Но попытки применить этот подход к большим числам *N* приводят к неудачам — дело в том, что персональные компьютеры в большинстве своем не могут вывести на экран число, содержащее более 15 цифр.

Вот факториалы нескольких чисел, больших 10, вычисленные на ЭВМ типа «Корвет»:

10!=3628800;
11!=39916800;
12!=479001600;
13!=6227020800;
14!=87178291200;
15!=1307674368000;
16!=20922789888000;
3.55687428096*E*+14=17!

Факториал числа 17 уже не поместился на экране — произошло переполнение разрядной сетки и компьютер вместо точного результата 355687428096000 выдал значение числа 17! в нормализованной форме. ЭВМ предложила нам считать, что

$$17!=3.55687428096E+14= \\ =3{,}55687428096\cdot 10^{14}.$$

Означает ли это, что мы в принципе не можем на компьютере получить факториал большого числа, например 100!. Ответ простой: нет, не означает. Мы можем с помощью ЭВМ получить полную запись числа 100!, не потеряв ни одной цифры.

Это достигается путем использования программистской смекалки. Задача, которую мы собираемся решить,

a_n	…	a_4	a_3	a_2	a_1	
0		0	0	0	0	
0		0	0	0	1	1!
0		0	0	0	2	2!
0		0	0	0	6	3!=6
0		0	0	2	4	4!=24
0		0	1	2	0	5!=120

Рис. 1.

весьма примечательна для программирования. Речь пойдет о том, как человек использует ЭВМ: действует ли он по шаблону или же, вникнув в особенности машины, заставляет ее работать необычно, нестандартно.

Прежде чем рассказать о практически пригодной программе нахождения всех цифр числа 100!, напомним о нескольких необходимых в дальнейшем средствах языка Бейсик.

В программе будет использована функция «целая часть от значения аргумента». В Бейсике эта функция обозначается INT(X) — для любого действительного X значение функции INT (X) равно целому значению X, не превышающему его, например:

$$\mathrm{INT}(2.5)=2,\ \mathrm{INT}(0.002)=0,$$
$$\mathrm{INT}(-6.3)=-7.$$

Условимся все цифры получаемых факториалов чисел считать значениями переменных a_i, где $i=1, 2, \ldots$ До начала вычисления N! каждая переменная a_i равна нулю; начнем вычисления (рис. 1).

В процессе вычислений значения переменных a_i изменяются.

Напомним, что если известен факториал числа ($k-1$), то легко найти факториал числа k:

$$k!=k\cdot(k-1)!.$$

Применим это правило к получению 4!, если известно, что 3!=6. Действуем так: 6 умножаем на 4 и получаем 24. Цифру 4 делаем значением переменной a_1, а цифру 2 — значением переменной a_2. Схематически все эти действия можно изобразить так, как показано на рисунке 2.

Продолжим работу: вычислим 5!. Для этого 4!=24 умножим на 5 и соответствующие цифры делаем значениями переменных (см. рисунок 3).

Присмотримся внимательнее к процессу перемножения чисел k и ($k-1$)!. Умножение одного многоразрядного числа на другое сводится к умножению и сложению цифр. При этом мы хорошо различаем цифру младшего разряда и цифры старших разрядов.

Приостановим обсуждение задачи в целом и научимся решать небольшую, но важную для дальнейшего задачу: научим вычислительную машину выполнять выделение цифры десятков и цифры единиц в двухразрядном десятичном числе.

Необходимо составить программу, работая по которой, ЭВМ, после предъявления ей двухразрядного числа, переменной a_1 присвоит значение, равное числу единиц, а переменной a_2 — значение, равное числу десятков.

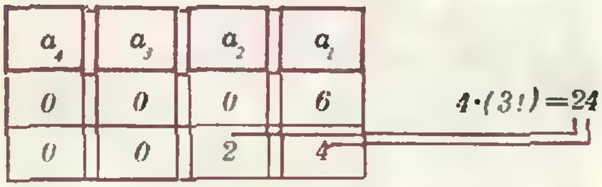
Пусть переменная A имеет значение, равное двухразрядному десятичному числу (например 73). Разделим значение A на 10 и от результата возьмем целую часть — это и будет цифра десятков:

$$\mathrm{LET}A(2)=\mathrm{INT}(A/10),$$
$$\text{т. е. } a_2=[7{,}3]=7.$$

Если теперь от значения A отнять $a_2\cdot 10$, то получится цифра единиц в исходном числе A:

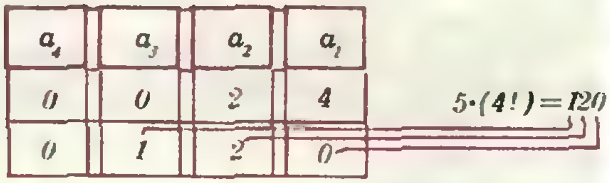
$$\mathrm{LET}A(1)=A-A(2)*10,$$
$$\text{т. е. } a_1=73-7\cdot 10=3.$$

Вернемся к задаче получения числа 5! Мы помним, что для этого придется число 4!=24 умножить на 5. Помним мы и о том, что число



a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	0	6
0	0	2	4

Рис. 2.



a_4	a_3	a_2	a_1
0	0	2	4
0	1	2	0

Рис. 3.

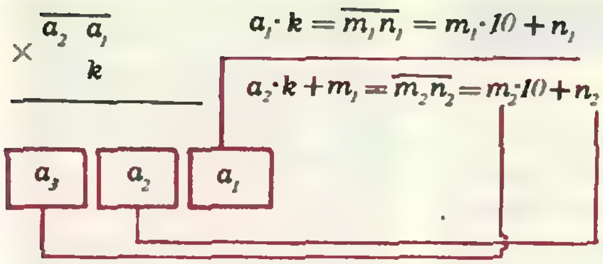

$\overline{a_2\ a_1}$
×
k
$a_1 \cdot k = \overline{m_1 n_1} = m_1 \cdot 10 + n_1$
$a_2 \cdot k + m_1 = \overline{m_2 n_2} = m_2 \cdot 10 + n_2$
a_3
a_2
a_1

Рис. 4.

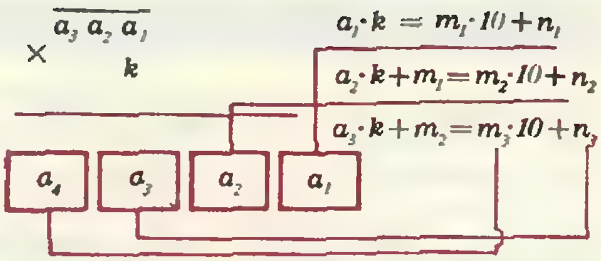

$\overline{a_3\ a_2\ a_1}$
×
k
$a_1 \cdot k = m_1 \cdot 10 + n_1$
$a_2 \cdot k + m_1 = m_2 \cdot 10 + n_2$
$a_3 \cdot k + m_2 = m_3 \cdot 10 + n_3$
a_4
a_3
a_2
a_1

Рис. 5.

4!=24 хранится необычно: цифра 4 есть значение переменной a_1, а цифра 2 — значение переменной a_2. Можно образно сказать, что цифры 2 и 4 хранятся в ячейках a_2 и a_1 соответственно.

Умножив содержимое ячейки a_1 на 5, мы получим двухразрядный результат: 4×5=20. Цифру младшего разряда (это в данном случае — ноль) будем считать новым значением переменной a_1, а цифру 2 удержим пока «в уме». После этого следует выполнить умножение цифры, хранящейся в a_2, на 5 и к полученному произведению прибавить цифру 2, предварительно взяв ее из нашей памяти. Результат действий: 5!=5 · 4!=5 · 24=120 (рис. 4). После выполнения всех действий переменные a_1, a_2 и a_3 получили новые значения $a_1=0$, $a_2=2$ и $a_3=1$.

Если даже число (k—1)! содержит не две, а три и более цифр, схема получения цифр числа k! останется прежней (рис. 5).

Естественно, что число k может быть не только одноразрядным, а и двухразрядным. В этом случае коэффициенты m_i могут быть многоразрядными числами.

Используя высказанные идеи, можно предложить следующий текст программы:

```
1 REM ВЫЧИСЛЕНИЕ ФАКТОРИАЛА ЧИСЛА N
5 DIM A(100)
10 INPUT N
15 FOR I=2 TO 100
20 A(I)=0:NEXT I
25 A(1)=1:L=1
30 FOR K=1 TO N
35 R2=0:R1=0:I=1
40 IF R2=0 THEN IF I>L THEN 80
45 R=A(I)*K+R2
55 R2=INT(R/(10000!))
60 R1=R-R2*(10000!)
65 A(I)=R1
70 I=I+1
75 GOTO 40
80 L=I-1
85 NEXT K
86 FOR J=1 TO I-1
87 PRINT A(I-J);
88 NEXT J
93 END
```

В результате применения программы получим*):

```
100!=93  326215  443944  152681  699238  856266  700490  715968  264381  6214
    963  895217  599993  229915  608941  463976  156518  286253  697920  8272
    251  185210  916864  0   0   0   0
```

Итак, у числа 100! имеется 158 цифр — поистине гигантское число!

---

*) *Машина, распечатывая число, записывает его группами по 6 цифр, пропуская при этом начальные нули. Так, в приведенной распечатке группу цифр 6214 нужно воспринимать как группу 006214, группу 963 — как 000963, 8272 — как 008272, 251 — как 000251 и каждый 0 — как группу 000000.*

Информация

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы отдельных учащихся проверяют в ЗШ, а работы членов кружков — его руководители (по желанию

(Начало см на с 50)

Наверх вели две веревочные лестницы. Мы взобрались по ним и осторожно уселись на закругленный край. Из отверстия вырывался поток холодного воздуха.

— Как вам известно,— заметил Сляпенарский,— горлышко настоящей бутылки Клейна открывается в четвертое измерение.

Я осторожно наклонился вперед и заглянул внутрь бутылки — холодный ветер дунул мне в лицо. Из головы у меня никак не выходила гипотеза четырех красок. Я снова спросил об этом Сляпенарского.

— Что проблема четырех красок? — сказал он пренебрежительно.— Пустячок, сущая безделица. Дайте-ка мне карандаш и блокнот.

Я вынул блокнот из кармана и протянул Сляпенарскому. Он набросал несколько причудливых геометрических фигур.

— Если карта не содержит конфигураций, допускающих приведение к более простым формам, например не содержит нетройных вершин, многосвязанных областей или колец, состоящих из четного числа шестиугольников и пар смежных пятиугольников, то...

По сей день не могу без содрагания вспомнить о том, что затем произошло. Из темных глубин бутылки Клейна внезапно высунулся длинный черный крючок, который охватил Сляпенарского за талию. Тот не успел даже позвать на помощь, как был увлечен в туманные глубины бутылки Клейна.

Должно быть, я находился в шоковом состоянии.

— Сляпенарский! Где вы, Сляпенарский? — отчаянно взывал я, но тщетно. Ответом мне было лишь эхо, доносившееся, как из глубокого колодца.

Все остальное можно рассказать кратко. Молва о случившемся с быстротой молнии распространилась среди хийику. Ночью несколько хийику проникли на участок профессора, унесли бутылку Клейна и сбросили ее со скалы. Они считали, что в бутылке были злые духи, и хотели навсегда покончить с источником зла.

руководителя часть работ может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 8—9 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ, которая работает с 1 по 22 августа. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, посещают с экскурсиями университет и научно-исследовательские институты Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. Необходимо указать также следующие данные о себе (см. образец):

Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два)	математическое и физическое
индекс почтового отделения и подробный домашний адрес	632148 Новосибирская обл., с. Мозениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5, Николаеву Игорю Ивановичу

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября.*

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы вместе с заявлением отсылайте только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090 Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по математике

8 класс

1. 80 % пути турист проехал на велосипеде, 40 % оставшегося пути прошел пешком и 12 км проплыл на плоту. Найдите весь путь туриста.

2. Нарисуйте график функции

$$y=|x-1|+|x+1|$$

3. Докажите, что девятизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 37.

4. Высоты треугольника равны 3 см, 4 см и 5 см. Какой это треугольник: остроугольный, прямоугольный или тупоугольный?

5. Найдите сумму всех трехзначных чисел, в записи которых все цифры — нечетные.

6. Как с помощью циркуля и линейки построить треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону? Сколько различных треугольников может получиться?

9 класс

1. Поезд проходит мост длиной 800 метров за 1 минуту, а мимо наблюдателя — за 15 секунд. Какова длина поезда и его скорость?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$y^2+y\geqslant x+|x|-1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+xy=11, \\ x^2+y^2+xy=19. \end{cases}$$

4. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Выразите вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

5. Докажите, что двенадцатизначное число, все цифры которого одинаковы, делится на 13.

6. На плоскости заданы две точки. Как с помощью циркуля и линейки построить квадрат, у которого эти точки были бы серединами смежных сторон?

10 класс

1. В гараже стоят 40 автомобилей трех типов: легковые, грузовые и автобусы. Автобусов меньше, чем легковых. Сколько в гараже автобусов, если легковых автомобилей в 12 раз меньше, чем грузовых автомобилей?

2. На координатной плоскости изобразите множество точек (x, y), чьи координаты удовлетворяют условию

$$[x+y]=[x-y].$$

Здесь $[a]$ — целая часть числа a — наибольшее целое число, не превосходящее a.

3. Имеются две линейки без делений. Длина одной из них — 48 см, а длина другой — 78 см. Можно ли с их помощью построить отрезок длины 54 см? а длины 56 см?

4. Исследуйте функцию $f(x)=x^3-x^2-x+1$.

5. Можно ли в квадрат со стороной 5 см поместить два непересекающихся правильных треугольника со стороной 4 см?

6. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ найдите угол между диагональю AB' грани $ABB'A'$ и диагональю BC' грани $BCC'B'$.

Первое задание по физике

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным хорошо решить одну-две задачи. Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами для других классов, а понравившиеся вам задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше). При поступлении в ЗШ вам будут высланы решения всех задач. Познакомьтесь с ними, даже если вы их все решили.

Экспериментальная задача, предназначенная для учащихся всех классов.

1. Налейте в блюдечко немного воды, имеющей комнатную температуру, и аккуратно поставьте в него вверх дном ополоснутый снаружи очень горячей водой тонкостенный стакан. После того как стакан остынет, в него окажется втянутой часть воды (или вся вода) из блюдца. Измерьте относительный перепад давлений вне и внутри стакана $\Delta p/p=(p_a-p)/p_a$, где p_a — атмосферное давление воздуха в комнате. Проделайте измерения несколько раз, подумайте над причинами возможного небольшого расхождения результатов измерений.

8 класс

2. Велосипедист пересекает полосу мокрого асфальта шириной l. Колесо велосипеда имеет радиус R. Найдите расстояние между полосой и мокрым следом от колеса.

3. Вес тела в воде в два раза меньше, чем в масле, и в три раза меньше, чем в воздухе. Определите плотность масла.

4. С плавучей платформы поднимают на тросе батискаф объемом $V=4$ м^3. Площадь горизонтального сечения платформы на уровне поверхности воды $S=100$ м^2. На сколько погрузится платформа при полном выходе батискафа из воды?

5. Одна из четырех электроплиток, соединенных так, как показано на рисунке 1, перегорает. Во сколько раз изменится после этого мощность каждой плитки?

6. В весах для измерения массы сыпучих тел на концах легкой линейки длиной $2L$ закреплены чашка и противовес, их массы одинаковы и в сумме дают m_0. Скругленная снизу опора может сдвигаться относительно линейки, пока весы с грузом не окажутся в равновесии при горизонтальном положении линейки. Найдите массу груза, если середина опоры сместится при этом на расстояние l от середины линейки.

9 класс

2. Сосулька падает с крыши дома. Первую половину пути она пролетела за 1 секунду. Сколько времени ей осталось лететь?

3. Для контроля толщины металлической ленты измеряют сопротивление R ее квадратного участка, подсоединяя толстые медные контакты к противоположным сторонам участка. Какова толщина ленты, если удельное сопротивление ее материала ϱ?

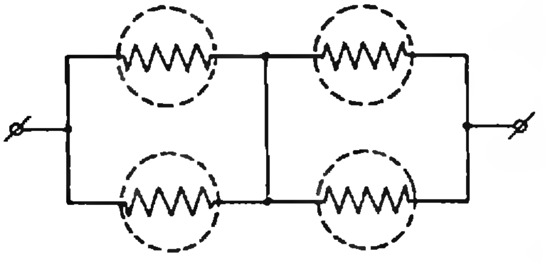


Рис. 1.

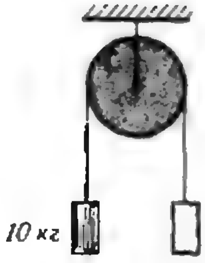


Рис. 2.

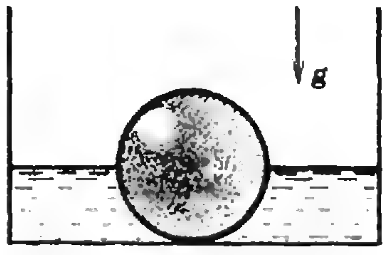


Рис. 3.

4. На какую предельную прочность на разрыв должна быть рассчитана переброшенная через блок веревка, которой поднимают груз массой $m=10$ кг, подвешивая к свободному концу различные грузы (рис. 2)? Массу блока и веревки считайте пренебрежимо малыми.

5. Сила давления шара на дно бассейна при заполнении бассейна водой уменьшилась в два раза, когда уровень воды достиг центра шара (рис. 3). Определите плотность материала, из которого сделан шар.

6. Автомобили движутся колонной со скоростью v_0. На одном и том же участке дороги каждый автомобиль уменьшает скорость от v_0 до v, после чего продолжает двигаться с неизменной скоростью v. При какой наименьшей дистанции между автомобилями они не будут сталкиваться при торможении? Длина каждого автомобиля L.

7. Наполовину закрашенный диск совершает 25 оборотов в секунду. Его снимают кинокамерой, делающей 24 кадра в секунду. С какой частотой будет вращаться диск на киноэкране?

10 класс

2. Горизонтальный ствол винтовки направлен прямо в центр мишени радиусом $r=5$ см. При какой наименьшей скорости вылета пуля попадает в мишень с расстояния $L=100$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Решите задачу 3 для 9 класса.

4. Решите задачу 4 для 9 класса.

5. Два одинаковых конденсатора заряжены и соединены между собой. Пластины одного из них раздвигают на большое расстояние. Во сколько раз изменится напряжение на другом конденсаторе?

6. Для определения собственного объема сыпучего материала его помещают в цилиндр, который герметически закрывают поршнем. Затем измеряют давления воздуха в цилиндре p_1 и p_2 при одной и той же температуре, но разных положениях поршня, когда суммарный объем воздуха и исследуемого материала равен соответственно V_1 и V_2. Определите объем сыпучего материала по этим данным.

7. Решите задачу 6 для 9 класса.

Ответы, указания, решения

Числа и функции
(см. «Квант» № 6)

3б). Пусть $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}$, $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$.
Докажите, что $n=m$, перепишите f в виде

$$f(x)=\frac{a_0+a_1x^{-1}+\ldots}{b_0+b_1x^{-1}+\ldots}$$

и нарисуйте эскиз графика.

5а). $y=1-x$; $y=2/x$.

5г). Найдите алгебраические уравнения, решениями которых являются рассматриваемые функции, и воспользуйтесь леммой 2.

8. Продифференцировав равенство $a^n(x)+b^n(x)=c^n(x)$, выразите из полученной системы $a^{n-1}(x)$ и $b^{n-1}(x)$. Рассмотрите степени многочленов.

11а). Если функция y является решением алгебраического уравнения, то функция $z=y^2-1$ также удовлетворяет алгебраическому уравнению. Но по условию функция $y^2-1=e^x$ — трансцендентна.

б). Функции $y_1=e^x$ и $y_2=-e^x$ — трансцендентны, а $y_1+y_2=0$ — нет. Функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{-x}$ — трансцендентны, а их произведение $y_1y_2=1$ — нет.

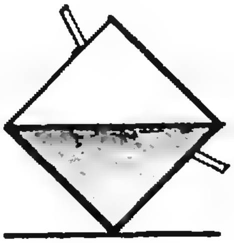
в). Если $y_1=f+g$ и $y_2=fg$ являются обе решениями алгебраических уравнений, то $f, g=(-y_1\pm\sqrt{y_1^2-4y_2})$ также являются решениями алгебраических уравнений.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 6)

Вопросы и задачи

1. Если раскачивание сильное, то сук заметно прогнется, и в нижней точке траектории сиденье качелей станет задевать землю.

2. См. рисунок.



3. Вода, находящаяся в зазоре между склеившимися стеклами, смачивает стекло, и по краям стекол свободная (боковая) поверхность воды вогнута. Силы поверхностного натяжения не дают оторвать стекла друг от друга. Если опустить стекла в воду, то исчезнет вогнутая боковая поверхность водяной прослойки, а вместе с ней — и стягивающие силы поверхностного натяжения.

4. Если пузырек смещен относительно центра, то шарик, положенный на поверхность воды, всегда будет поворачиваться так, чтобы полость находилась в наивысшем положении.

5. Скорость воздуха в струйке тем больше, чем больше давление в матрасе. Но давление во втором случае уменьшается.

6. При одинаковой силе ударов дверь больше деформируется, поэтому амплитуда ее колебаний больше и стук громче.

7. Прокатите смоченный водой мяч по полу и измерьте длину l влажного следа за один оборот. Диаметр мяча равен $d=l/\pi$.

8. Раствор сахара в воде имеет большее поверхностное натяжение, чем чистая вода, и силы поверхностного натяжения «стягивают» спички. При растворении мыла натяжение воды уменьшается.

9. Яркость ткани зависит от ее освещенности, т. е. от угла падения лучей; этот угол различен для разных частей развевающегося флага.

10. Держа в руке кофемолку, вы в момент включения ощутите толчок, стремящийся повернуть ее в сторону, противоположную направлению вращения ротора.

11. Поверхность лужи отражает свет зеркально, поэтому свет фар практически полностью устремляется от водителя; асфальт же рассеивает свет, и часть его попадает в глаз водителя.

12. При переменном токе поднесенный к лампе магнит приведет ее нить в колебательное движение, и очертания нити станут расплывчатыми. При постоянном токе нить будет видна отчетливо, так как она лишь отклонится от начального положения.

13. До закрытия термоса освободившаяся часть его объема заполнилась холодным воздухом; затем, когда термос закрыли, воздух нагрелся, давление его увеличилось, и сила давления вытолкнула пробку.

Поправка

В статье «Основной принцип дифференциального исчисления. Часть II: Свойства производной», опубликованной в № 4 за 1988 год (с. 48—53), пропущена часть текста, и этот пропуск делает текст непонятным. На с. 51 (последняя строка) после слов «из-за уничтожения значащих» должен следовать текст: «цифр. Такие вычислительные задачи называются плохо обусловленными. Рассмотрим такого рода ситуацию в общем виде с привлечением графической иллюстрации (рис. 4). Требуется выяснить, к какому числу приближается отношение», а далее — текст на с. 52.

Кроме того, в формулировке Теоремы на с. 52 должно быть: «Если в каждой точке интервала угловой коэффициент касательной к графику функции (производная) в этой точке», и далее — по тексту.

Редакция приносит извинения читателям и авторам статьи.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. И. Дубах, С. В. Иванов, Н. С. Кузьмина,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор О. М. Березина

Сдано в набор 18.05.88. Подписано к печати 24.06.88.
Т-15701. Бумага 70×100/16. Печать офсетная.
Усл. кр.-отт. 22,10. Усл. печ. л. 5,2. Уч.-изд. л. 6,39.
Тираж 188 620 экз. Цена 40 коп. Заказ 1229

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

ЧЕМПИОН МИРА ЗА КОМПЬЮТЕРОМ

Несколько лет назад в вычислительном центре АН СССР два молодых сотрудника А. Дудоладов и Г. Сенин разработали на компьютере информационно - поисковую систему (ИПС), обладающую многими ценными качествами: компактным хранением текстов партий, удобным способом их ввода, накопления и извлечения по различным запросам, быстрой печатью, возможностью анализа партии с мгновенным возвратом к нужной позиции и т. д. К сожалению, работа не нашла достаточной поддержки. Вскоре в ФРГ была создана более мощная ИПС «Чесс Бейс», реализованная на персональной ЭВМ «Атари». Эту систему можно соединить с шахматным микрокомпьютером, что позволяет вводить тексты партий как с клавиатуры «Атари», так и путем их проигрывания на доске.

Остроумно решаются вопросы поддержки, обновления и сопровождения «Чесс Бейс». Раз в два месяца выходит «журнал»-дискета с доработками программ, инструкциями по их включению в систему и текстами партий важнейших состязаний. На одной дискете помещается до 6 тысяч партий, но в «Чесс Бейс» записываются 2—3 тысячи — оставлено место для комментариев, вариантов и т. д.

В прошлом году создатель «Чесс Бейс» М. Вюлленвебер приезжал в Москву и демонстрировал свое детище в Центральном шахматном клубе. «Можно ли использовать систему для выпуска информационных бюллетеней?» — спросили его на встрече. «Никаких проблем,— улыбнулся автор системы,— возьмем партию, которую все помнят.— На экране во всю ширину появилась запись 24-го, решающего поединка Каспаров — Карпов в Севилье.— Хотите получить текст на английском или немецком языке или же в виде фигурок-пиктограмм?» Присутствующие решили в пользу фигурок; после нажатия пары клавиш на дисплее вместо букв появились изображения фигур.

«Какую ширину текста выбрать?» — и он ограничил столбец с помощью прибора, называемого «мышью». В результате запись автоматически перестроилась на нужную ширину.

«Здесь,— Вюлленвебер показал с помощью «мыши» стрелочкой, — вам нужно вставить комментарий. В записи делаем разрыв и заполняем нужными комментариями. А в этом месте,— стрелочка опять поплыла,— разместим диаграмму...» Запись снова разорвалась, и перед собравшимися появилась диаграмма с позицией после соответствующего хода. В результате была набрана страничка шахматного текста, и спустя двадцать секунд она уже появилась в отпечатанном виде. Если речь идет о турнирном пресс-бюллетене, то с нее можно снять нужное количество копий.

Об этой системе высоко отозвался чемпион мира Г. Каспаров. Подготовка к турнирам и матчам, по его мнению, с помощью «Чесс Бейс» занимает намного меньше времени и может быть проведена более глубоко и основательно. Каспаров и сам несколько раз пользовался этой системой.

В 1986 году в Гамбурге чемпион мира давал сеанс одновременной игры с часами восьми сильнейшим немецким мастерам и проиграл — 3,5:4,5. В следующем году он решил взять реванш у той же «команды». Но предварительно попросил подобрать ему партии соперников за последние два года. Каспаров просидел за «Атари» около трех часов, изучая с помощью «Чесс Бейс» индивидуальность партнеров, их наклонности и стиль игры. Сеанс-реванш принес победу чемпиону мира со счетом 7:1. «Каждого из соперников я знал теперь как своих старых знакомых, знал их и сильные, и слабые стороны»,— так прокомментировал Каспаров свой успех.

Любопытно, что спустя месяц Каспаров дал аналогичный сеанс в Базеле сборной Швейцарии. На сей раз он провел за компьютером около 6 часов и в быстром темпе просмотрел 700 партий будущих противников. Сеанс завершился со счетом 5,5:0,5 в его пользу. И вновь столь убедительный результат чемпион мира объяснил своей прекрасной подготовкой. «Это революция шахматной игры!» — сказал Каспаров, когда он оценил все достоинства «Чесс Бейс».

Заметим, что чемпион мира вообще горячий энтузиаст персональных компьютеров. Не случайно он — президент первого компьютерного клуба в Москве на Рождественском бульваре. А совсем недавно Каспаров провел уникальный сеанс одновременной игры при помощи спутниковой связи и компьютеров. Сам сеансер находился во Франции, в Каннах, а десять его соперников — в разных странах, даже на разных материках. В Москве в компьютерном клубе с чемпионом мира сражался советский участник сеанса — чемпион страны среди юношей М. Улыбин. Он и сделал единственную ничью в этом межконтинентальном представлении. Одну партию Каспаров проиграл, общий результат сеанса — 8,5:1,5 в его пользу. Блестящий результат, если учесть, что все участники сеанса — мастера, а двое — даже международные.

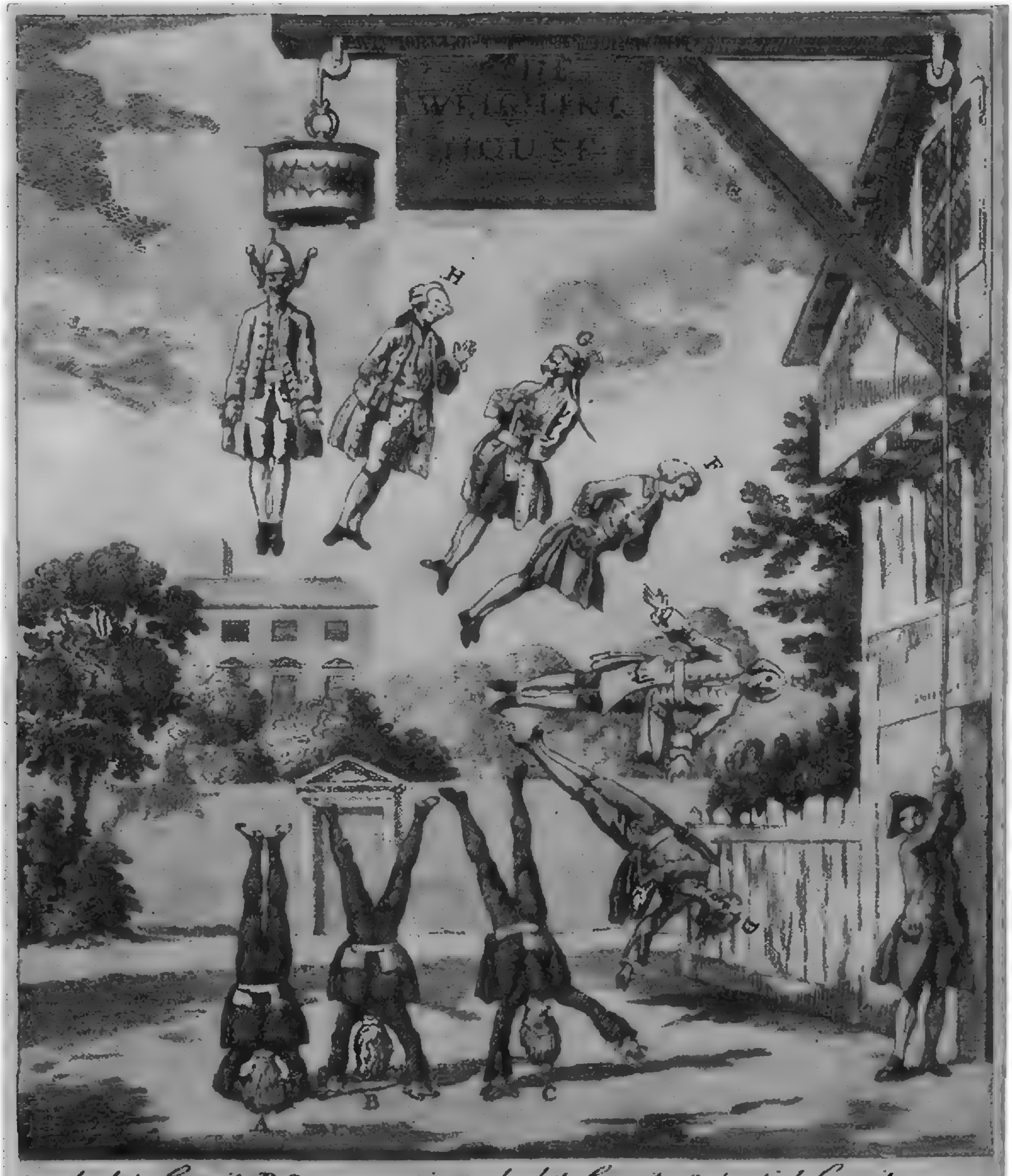
Вот одна из партий этого сеанса, которую чемпион мира быстро выиграл у итальянского мастера из Милана.

Г. Каспаров — Э. Арланди

Английское начало

1. c4 c5 2. Kf3 Kc6 3. d4 cd 4. K:d4 Kf6 5. Kc3 e6 6. g3 Cb4 7. Cg2 0—0 8. 0—0 d5 9. cd ed 10. Cg5 C:c3 11. bc Ce6 12. Лb1 Ka5 13. Лb5 a6 14. C:f6 gf 15. Лb4 Лc8 16. e4 de 17. C:e4 f5 18. C:f5 C:f5 19. K:f5 Ф:d1 20. Л:d1 Л:c3 21. Лd7 Лf3 22. Лd5 b5 23. a4 Лb3 24. Лg4+ Kph8 25. Kh6 Kc6 26. Лf5. Черные сдались.

Е. Я. Гик

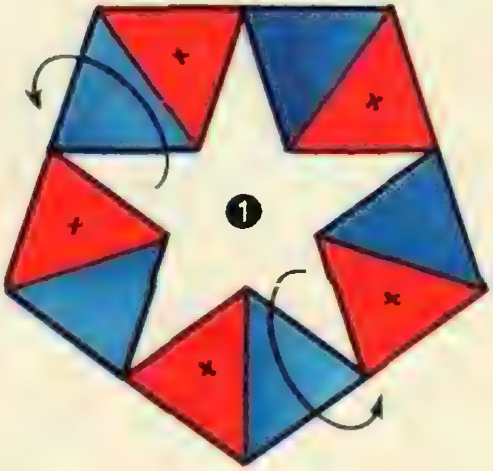

THE WEIGHING HOUSE
H
G
F
D
A
B
C

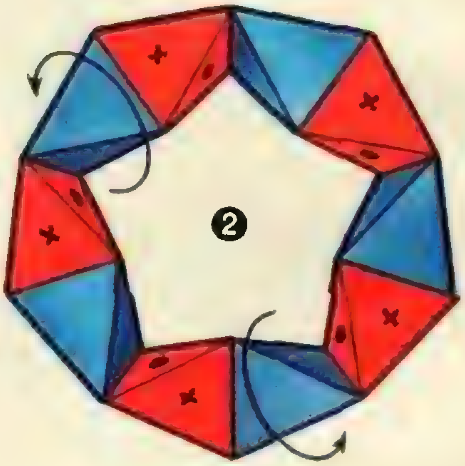
A. *absolute Gravity.* B. Conatus *against absolute Gravity.* C. *partial Gravity.*
D. *comparative Gravity* E. *horizontal, or good Sense.* F. *Wit.* G. *comparative Levity or Coxcomb.* H. *partial Levity, or pert Fool.* I. *absolute Levity, or Stark Fool.*

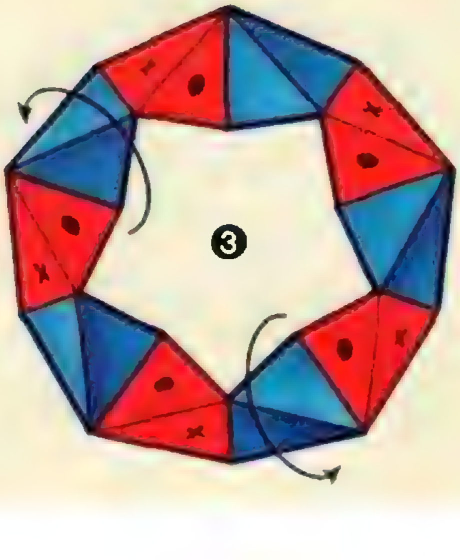
Цена 40 коп.

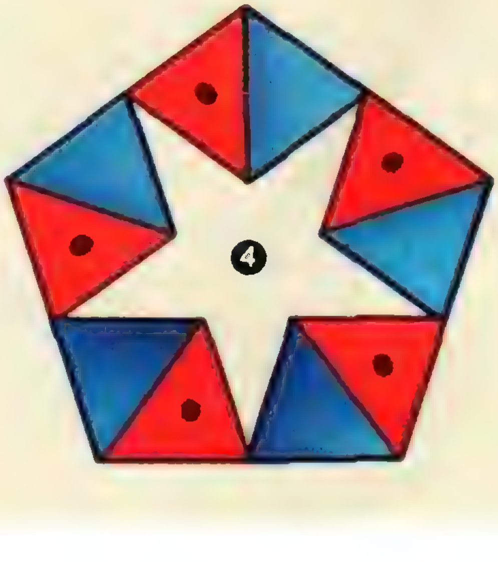
Индекс 70465

Перед вами кольцо, состоящее из десяти правильных тетраэдров. Оно склеено из плотной бумаги и может изгибаться и выворачиваться до бесконечности, все время меняя свою форму. Здесь изображены четыре последовательные фазы его вращения. Обратите внимание на то, что каждая пара соседних тетраэдров имеет общее ребро, и при выворачивании кольца тетраэдры совершают колебания вокруг этого ребра. И пятиугольная звезда, периодически возникающая внутри кольца, при каждом последующем появлении оказывается повернутой на 36°. О том, как сделать такое кольцо, вы можете прочитать в статье «Флексагоны, флексоры, флексманы». Развертка кольца представлена там на рисунке 15. Рекомендуемый размер ребер тетраэдров — 3,5 см. Не пожалев времени, тщательно разметьте развертку и раскрасьте ее в два своих самых любимых цвета. После этого вырежьте ее и, следуя указаниям, данным в статье, аккуратно склейте. Проделав все это, вы станете обладателем игрушки, которая, попав в ваши руки, мгновенно оживает.









НОМЕР
8

Квант

Основан в 1970 году

1988

8

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 Памяти Ландау
8 *А. А. Кремер.* О рассеянии, или Как измерить жирность молока
15 *Ю. П. Чукова.* Распределение Пуассона
19 *А. П. Винниченко.* Простые числа, математическая статистика и... ЭВМ
23 *В. Н. Дубровский.* Как возникает распределение Пуассона
26 *А. В. Митрофанов.* Поговорим про вчерашний снег

Задачник «Кванта»

30 Задачи М1116—М1120, Ф1128—Ф1132
34 Problems M1116—M1120, P1128—P1132
35 Решения задач М1096—М1098, М1100, Ф1108—Ф1112
32 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

43 Задачи
44 *А. С. Штейнберг.* Коротко о тепловом расширении

Лаборатория «Кванта»

48 *И. И. Мазин.* Простые опыты с кипятком

Математический кружок

51 *М. В. Волков, Н. Н. Силкин.* Кого послать на Марс?
57 Избранные школьные задачи

Практикум абитуриента

58 А. Р. Зильберман. Расчет электрических цепей

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ (*14*)
18 Заказы принимаются...
XI Турнир юных физиков (*61*)
64 **Ответы, указания, решения**
Смесь (*47, 50*)

Наша обложка

1 *Какое отношение эта электронная микрофотография (увеличение 10^4) поверхности полипропиленовой пленки имеет ко вчерашнему снегу, вы узнаете из статьи А. В. Митрофанова.*

2 *Рисунок из старинной гадательной книжки. На круг с цифрами бросали зернышко и под номером, на который оно падало, в специальном списке вычитывали свою судьбу. Количество появлений заданного номера в длинной серии гаданий случайно, но подчиняется так называемому закону Пуассона. Две статьи в этом номере журнала — Ю. П. Чуковой и В. Н. Дубровского — посвящены вероятностному распределению Пуассона.*
И еще раз вы встретитесь с этим распределением, а лучше сказать — с его «призраком», в статье А. П. Винниченко о последовательности простых чисел, где случайности, казалось бы, места нет.

3 **Шахматная страничка**

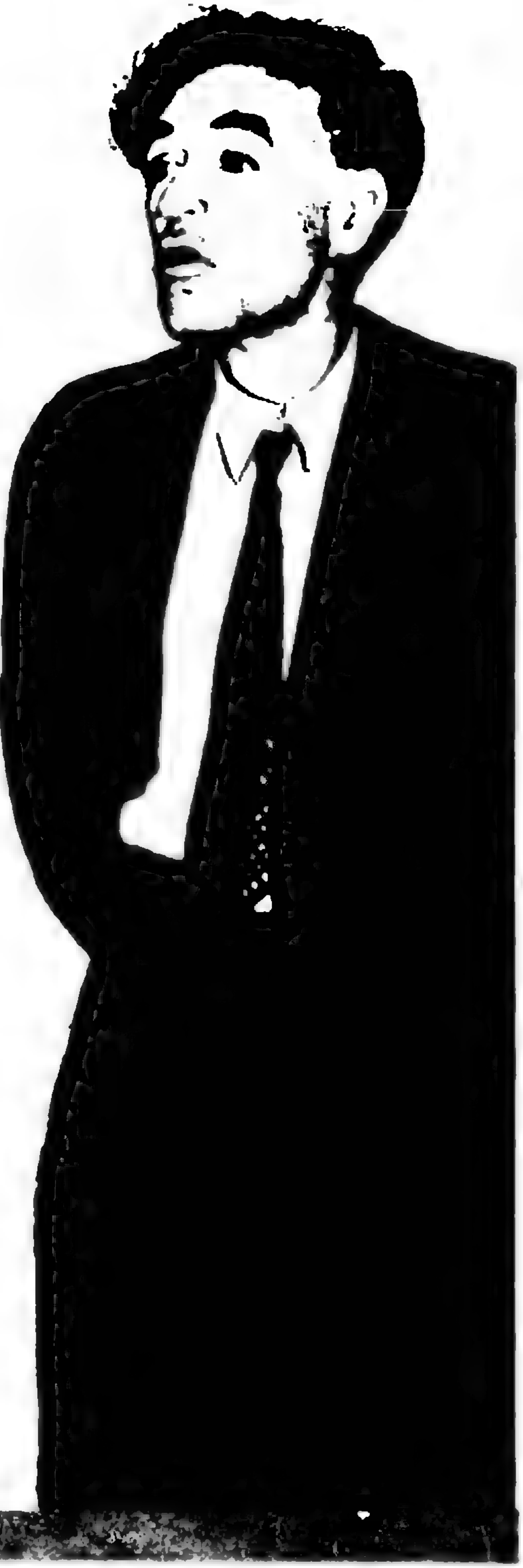
4 *Головоломка «Змейка Генеля».*

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

Памяти Ландау

(к 80-летию со дня рождения)

«По крайней мере один из представителей Советской России войдет в список десяти лучших физиков-теоретиков мира — речь идет о Л. Д. Ландау, сорока девяти лет, который... является авторитетом в области физики высоких энергий, низких температур, твердого тела и даже в области гидродинамики...» Так писал о Ландау в феврале 1957 года американский журнал «Fortune». Двадцать второго января нынешнего года Льву Давидовичу исполнилось бы восемьдесят лет. Идеи этого выдающегося ученого лежат в основе нашего понимания очень широкого круга физических явлений. Ландау создал всемирно известную школу теоретиков, которая и сегодня продолжает развиваться и сохраняет высочайший научный уровень. Ландау был одним из инициаторов создания Московского физико-технического института и многие годы читал там лекции. В феврале в МФТИ состоялась конференция, посвященная памяти Л. Д. Ландау. В ней приняли участие ученики и близкие друзья Ландау — Игорь Ехиельевич Дзялошинский, Моисей Исаакович Каганов, Лев Петрович Питаевский и Исаак Маркович Халатников. О Ландау рассказывали те, кому довелось в течение многих лет общаться и работать с ним. Мы предлагаем читателям записи, сделанные на этой встрече.



И. М. Халатников.— Родился Лев Давидович Ландау в 1908 году в Баку. Интерес и способности к точным наукам проявил очень рано. Сейчас об этом все знают, а сам Дау говорил так: «Интегрировать я научился в тринадцать лет, а времени, когда бы не умел дифференцировать, не помню». Как раз в тринадцать лет он окончил школу и поступил в экономический техникум. Проучился там год, и в 1922 году стал студентом Бакинского университета, причем двух факультетов сразу — физико-математического и химического. Вскоре ректор рекомендовал замечательного студента в Ленинградский университет. В 1927 году, девятнадцати лет, Дау закончил ЛГУ. Работать он начал в Ленинградском физико-техническом институте, который возглавлял тогда Абрам Федорович Иоффе — «папа Иоффе», отец советской физики. В 1929 году в числе лучших аспирантов института Ландау был командирован за границу и посетил крупнейшие европейские центры теоретической физики. Побывал он и в Кембридже, где работал тогда Петр Леонидович Капица. Спустя девять лет, в тяжелый для Ландау год, Капица придет к нему на помощь, рискуя, быть может, даже жизнью.

Мы не видели Дау за границей, но слышали рассказы тех, кто был тогда рядом с ним. Говорили, что он ходил в красном пиджаке...

Л. П. Питаевский.— Он был, как говорил сам, крайне левых убеждений...

И. М.— Да, ему нравилось поддразнивать буржуазное мещанство, и в этом он чем-то походил на Маяковского. Говорил, что вот эту семью следует развести, а ту, напротив, образовать. Но его там все любили.

В это время было решено создавать в стране новые физические центры. Так возникли физико-технические институты в Харькове, Томске и Днепропетровске. В тридцать втором году Ландау уехал в Харьков. Мощь интеллекта, обаяние этой личности произвели огромное впечатление на студентов. Он был замечательным лектором — и, естественно, все захотели стать теоретиками и работать с Ландау. Поэтому он решил построить вокруг себя небольшой «забор» и придумал теоретический минимум. Только те, кому удавалось сдать все экзамены этого минимума, получали право работать с Дау. Он относился к воспитанию молодежи необыкновенно серьезно и считал, что если кто-то затратил такой труд и смог сдать все экзамены минимума, то его, Ландау, долг (долг!) — заботиться о таком человеке. Но его забота не имела ничего общего с мелочной опекой или всесторонним покровительством. Ландау помогал ученику вырасти в мастера, «расправить крылья».

Дау был учителем от природы. Учить для него было удовольствием. Поэтому он начинает думать о написании курса теоретической физики, по которому могли бы заниматься будущие теоретики. Знаменитый «Курс теоретической физики» Ландау и Лифшица зародился, таким образом, еще в Харькове.

Нужно сказать, что Ландау обладал очень колючим характером и острым языком. Поэтому он не только находил друзей, но и наживал врагов самым основательным образом. Времена были скверные. Анонимный донос мог лишить честного человека имени, свободы, нередко — жизни. Такое едва не произошло и с Ландау. В 1937 году он заведовал кафедрой теоретической физики в Харьковском университете и возглавлял теоретический отдел Украинского физико-технического института (УФТИ). Вдруг — без всяких объяснений — его уволили из университета. Тучи над головой Дау сгущались. И тогда вся его кафедра подала заявления об уходе. Это был шаг чрезвычайно отважный и опасный. К нему отнеслись серьезно. Нарком просвещения Украины В. П. Затонский пригласил всех в Киев и пообещал, что Ландау будет возвращен. Так проявились дружеские отношения и любовь к Дау его сотрудников.

...В 1935 году Петр Леонидович Капица организовал в Москве Институт физических проблем (ИФП) и искал физика, который возглавил бы теоретический отдел института. Он предложил эту должность знаменитому Максу Борну, бежавшему из нацистской Германии, но к тому времени Борн уже работал в Эдинбурге. И тогда Капица пригласил Ландау. Это был счастливый момент в биографии Льва Давидовича. Неизвестно, чем бы все кончилось, останься он в Харькове. Достаточно сказать, что после отъезда Дау в Москву его любимый ученик Исаак Яковлевич Померанчук был исключен из комсомола «за связь с Ландау».

* * *

И. М.— Необходимо сказать несколько слов об отношении Ландау к науке. Он действительно любил физику и готов был обсуждать любую физическую проблему или задачу с каждым, кто приходил к нему за советом. Нужно было лишь заинтересовать его. Дау был необыкновенно щедр и, если увлекался, мог начать «играть с листа» — брал номер «Physical Review», клал сверху чистый лист бумаги (он обычно занимался, лежа на диване) и начинал импровизировать — решать задачу.

Ландау считал себя чемпионом мира по технике решения физических задач. Он говорил, что если четко сформулировать задачу и предложить ее всем лучшим физикам мира, то он решит ее быстрее всех. Дело было вовсе не в том, что Ландау блестяще умел вычислять. В решении он всегда находил тот подход, который подсказывала ему физика происходящего. Часто, читая статьи, он заглядывал лишь в результат, после чего воспроизводил его сам и, как правило, короче, чем автор. Именно такому подходу к теоретической физике — позволяющему очень эффективно решать самые разнообразные задачи — обязан своей популярностью во всем мире курс Ландау — Лифшица.

И. Е. Дзялошинский.— Он любил все классифицировать: физиков вообще, физиков-теоретиков, женщин, дураков и подхалимов... И всегда — с изрядной долей юмора, шутки, хотя подчас весьма язвительной и небезобидной.

И. М.— Ландау любил шутку. И мы тоже очень любили всевозможные розыгрыши. Но Дау всегда следил за тем, чтобы соблюдалось неписаное правило: нельзя было, чтобы в розыгрыше «участвовали» пресса и органы Советской власти.

Л. П.— И еще — розыгрыш не должен был наносить разыгрываемому материальный ущерб.

И. М.— Придумывайте шутки, разыгрывайте друг друга! Это украшает жизнь!

Теперь еще скажу вам, как Ландау относился к математике. Техникой вычислений он владел виртуозно и признавал только «реальную» математи-

ку — ту, что нужна физикам. Постоянным объектом его шуток были теоремы существования.

Л. П.— Да. И вместе с тем сам он интересовался математикой не только конструктивной. Я однажды заговорил с ним о том, как увлекательна проблема простых чисел. Он сказал: «Да, это интересно»,— и тут же, без подготовки, показал, как растет количество простых чисел, меньших данного числа n, при больших значениях n.

И. Е.— О том, как появились экзамены теоретического минимума, здесь уже говорили. Хотелось бы рассказать, как это развивалось и чем, к сожалению, кончилось. Поначалу не было известно, какие задачи дает Ландау, так что списывать было просто неоткуда. Кроме того, все мы относились к этим экзаменам очень серьезно, и сама мысль о том, что можно списать, просто не приходила в голову. Потом сдающих стало очень много, и Ландау не мог уже лично экзаменовать всех желающих. Тогда экзамены были розданы нам по одному на каждого. Круг задач становился известен, и я уже начал ловить людей, которые списывали ... Однажды я даже поймал человека, который теперь уже член-корреспондент. Он настолько обиделся, что перестал сдавать теорминимум вообще. Так что происходило и такое. Для нас все это было немножко чудно́, потому что Ландау считал, что экзамены должны приниматься абсолютно бесхитростно: все вопросы на экзамене должны быть задачами из курса Ландау — Лифшица. Вы их должны были просто знать. Если же вы обладали какой-то жуткой способностью и вам удавалось запомнить все, что там есть, то, по-видимому, вы и так гений.

Сам по себе дух экзаменов стал меняться в том смысле, что экзаменаторы начинали исхитряться, задавать вопросы, которые со школы принято называть «задачами на соображение». И это плохо, но вина в этом отнюдь не наша. К сожалению, тенденция списывать сильно извратила высшее образование, и теперь списывать уже не считается постыдным. Я напомню, что восемь лет назад в американской военной академии в Аннаполисе весь выпускной курс

Участники конференции (слева направо): кандидат физико-математических наук Ф. Ф. Каменец, декан факультета общей и прикладной физики МФТИ; член-корреспондент АН СССР Н. В. Карлов, ректор МФТИ; член-корреспондент АН СССР Л. П. Питаевский; доктор физико-математических наук М. И. Каганов; академик И. М. Халатников; член-корреспондент АН СССР И. Е. Дзялошинский; кандидат физико-математических наук С. А. Гордюнин, доцент кафедры теоретической физики МФТИ.

списал и их всех раскассировали (никому звание присвоено не было).

Л. П.— Знаете, а здесь, на физтехе, во время письменных экзаменов по физике студентам разрешено пользоваться любой литературой.

И. Е.— По-моему, это неправильно. Нужно запирать человека в пустой комнате наедине с чистым листом бумаги и смотреть, на что он способен.

Л. П.— Не поможет. При нынешней всеобщей радиообразованности! Я сам берусь изготовить такой прибор...

* * *

М. И. Каганов.— Об универсализме Ландау пишут многие — физику он знал действительно всю. Году в пятьдесят шестом, впервые после очень долгого перерыва, он приехал в УФТИ. Надо сказать, что УФТИ — огромный институт с тысячами сотрудников. В его лабораториях занимались буквально всем — от элементарных частиц до порошковой металлургии... Я очень хорошо помню тот день. Директор института Кирилл Дмитриевич Синельников уступил Дау свой кабинет (сам он тогда был болен). И вот ведущие физики института проходят через этот кабинет и рассказывают свои работы. Доска, стол, все теоретики сидят вокруг, и Ландау слушает. Через пять минут возникало ощущение, что Дау лучше знает работу, чем экспериментатор, который эту работу выполнил. Это было совершенно фантастическое зрелище, его можно было показывать в цирке, как фокус. Ничего подобного я в своей жизни не видел.

Л. П.— И всегда казалось, что Ландау уже продумал все, о чем говорят физики. Когда вы подходили к нему и говорили: «Лев Давидович, я вот такой-то проблемой занимаюсь, хочу вам показать, что получилось»,— и начинали рассказывать, он говорил обычно: «Да, есть такая проблема...» И тут выяснялось, что он уже над этой проблемой думал и имеет массу соображений. «Да, есть такая проблема. А в ней имеется вот такая трудность. И как же вы ее преодолеваете?» Очень часто оказывалось, что вы в своих занятиях до этой трудности еще не добрались и поэтому даже не подозреваете о ее существовании, а значит, никак ее не разрешаете. Правильным в такой ситуации было уйти, пообещав подумать. Но обычно человек был на это не способен, поскольку он-то работу делал, а Ландау, казалось бы, не делал ничего. Человек начинал «лезть в бутылку», говоря, что никакой такой трудности вовсе нет и все в его работе хорошо. В таких случаях Ландау его, что называется, гнал метлой.

Людям посторонним в этом отношении было проще — не хочешь, не разговаривай. А нам, ученикам, нужно было, как мы тогда не очень вежливо выражались, «пропихнуть» работу через Ландау, т. е. получить разрешение на ее публикацию. Начиналось обычно с того, что человеку очень хотелось подробно рассказать, как он все это получил. Дау всегда говорил: «Как вы это сделали — факт вашей биографии». Его интересовала не работа сама по себе, а физика. Окончательная формула выписывалась на доске, и учинялось тщательное «расследование». В общем-то, это был доступный каждому стандартный набор приемов: помимо элементарной проверки размерности нужно было убедиться, что результат не противоречит основным законам природы (законам сохранения, всевозможным принципам симметрии...). Поскольку работа делалась не на пустом месте, должны были совпасть все предельные случаи с известными ранее работами. Наконец, проверялось своеобразное соответствие здравому смыслу (подчас весьма туманное понятие). И все возражения надо было уметь с ходу отвергнуть, иначе автор отправлялся домой «додумывать». Такое обсуждение могло продолжаться несколько месяцев.

Вообще, в смысле въедливости и желания разобраться в работе до конца Ландау не имел себе равных. Когда на семинаре шло обсуждение какой-нибудь работы из текущей литературы, часто происходило следующее. Докладчик с самого начала считал, что понимает в этой работе все. Потом постепенно уясняли ее остальные. Вплоть до самого конца не понимал только Ландау. Он был «тупее всех» и, когда все уже считали себя полностью удовлетворенными, продолжал задавать самые, казалось, не относящиеся к существу дела вопросы. И нередко в результате оказывалось, что статья ошибочная. Но в то же время Дау всегда очень уважал чужую работу. Докладчик, начинавший со слов «Вот, взял статью, оказалась совершенно чепуховой», получал нагоняй: «Не делайте из автора дурака, поскольку он этим вопросом занимался, а вы, докладчик, нет!».

Еще Ландау очень не любил лентяев. Вставал он не очень рано и утром, часов в одиннадцать, приходил в аспирантскую комнату и заводил разговор на общие темы. Но все это было довольно опасно. Если вы не переходили на темы научные, то он либо начинал скучать и уходил, либо злился, что разговор идет впустую, и тогда уже придирался с нехорошими намеками ... Намеки эти часто бывали небезобидны, но всегда очень остроумны.

М. И.— Я хотел бы сказать вот о чем. Совсем недавно в романе Бориса Ямпольского «Московская улица» я прочитал отрывок, где герой размышляет, «...как бы все могло сложиться... если бы в самом начале жизни на твоем пути встретился человек, который все знает, и в самом начале пути научил тебя закалке и читать лучшие книги, и дорожить временем, и не терять на чепуху, на безделье, на бедлам ни минуты, и ценить то, что действительно ценно, этот мифический, небывалый, добрый и великий человек, учитель, который на самом деле никогда и никому в жизни еще не попадался, и каждый доходил до всего сам, и делал все ошибки». Но мне кажется, что есть большая группа людей (и все мы, пришедшие к вам сегодня в гости,— в том числе), которым в жизни необычайно повезло. Потому что у нас был Учитель, который научил очень многому. Сейчас это трудно передать — мы все уже старые, взрослые. Мы уже не можем объяснить, какую роль играли разговоры с Ландау.

Ощущение того, что физика — главное дело жизни, что ничего важнее этого нет, он умел передавать своим близким.

«Не бывает сложных проблем (речь идет о человеческих взаимоотношениях), бывают трудные проблемы». Вдумайтесь, и вы поймете, насколько глубок смысл этих слов.

И главное: «Человек рожден, чтобы быть счастливым».

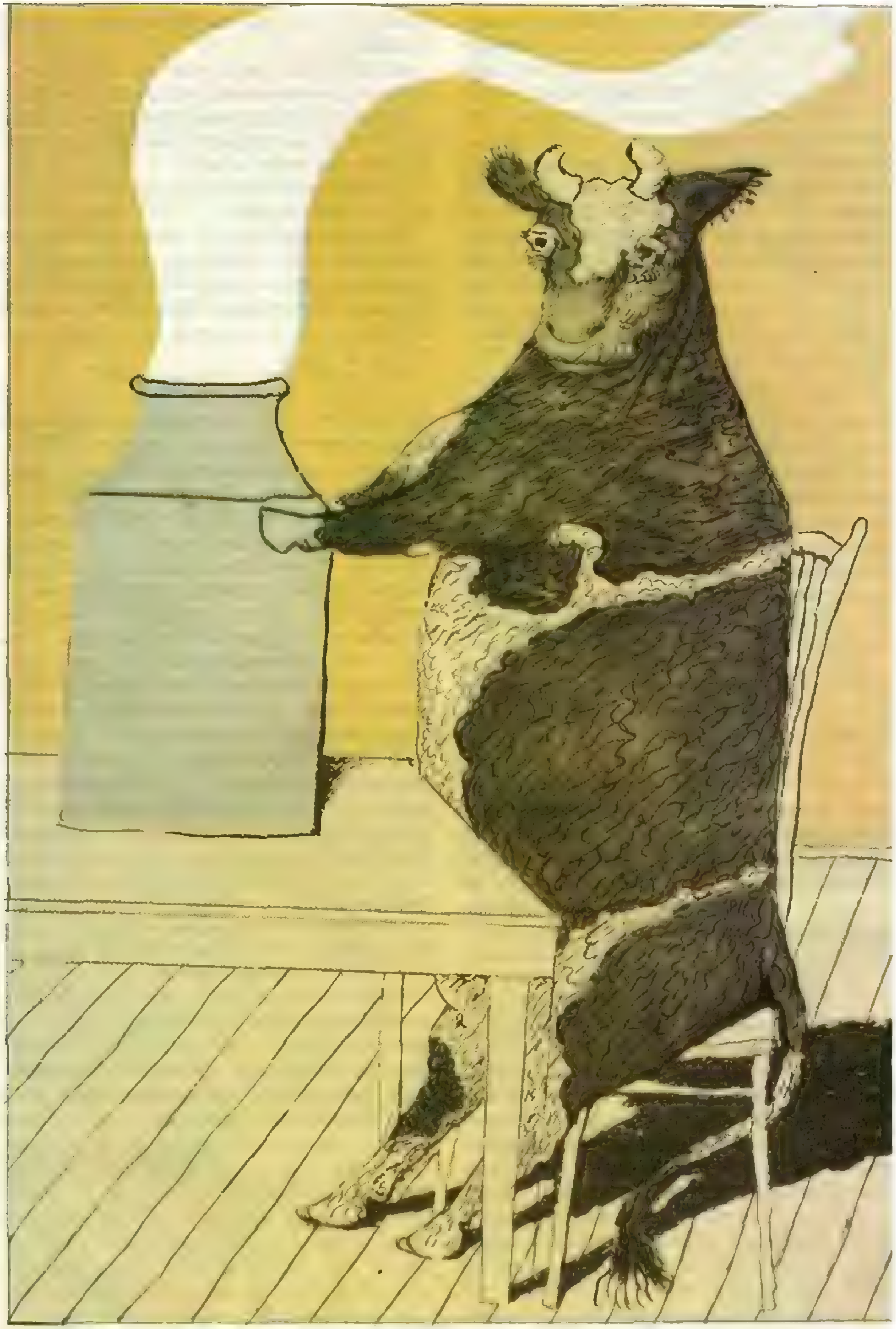
Он оставил после себя книги, по которым еще очень долго многие и многие будут постигать физику. Он оставил после себя Школу. И — идеи и результаты, которые навсегда останутся в науке.

* * *

В заключение — реплика Николая Васильевича Карлова, ректора МФТИ.

— Если можно, я хотел бы добавить несколько слов. Я учился в физтехе с сорок седьмого по пятьдесят первый год, и общий курс физики — с первого года — читался Ландау и Капицей. Первой я услышал лекцию Ландау и, признаюсь, сразу подумал, что, кажется, не туда попал. Уровень был таков, что одаренные молодые люди, ценившие себя высоко, участвовавшие в олимпиадах, прошедшие через два непростых тура вступительных экзаменов, были ошарашены. Однако постепенно мы осознали, что нам предоставилась счастливая возможность увидеть физику глазами этого замечательного ученого, с его глубиной понимания, широтой охвата, неожиданностью сравнений. Неоднократно, в разных лабораториях мира — от Стэнфордского университета до Нормальной Школы в Париже — я слышал от коллег, студентов, аспирантов слова о том, как нам повезло, что у нас есть такой курс — курс Ландау и Лифшица. И физтех должен гордиться тем, что среди его профессоров был Лев Давидович Ландау.

Публикацию подготовили
Д. Кашинцев и Р. Рамазашвили



О РАССЕЯНИИ,

или Как измерить жирность молока

А. А. КРЕМЕР

Во все времена молоко было одним из основных продуктов питания человека. Все компоненты, содержащиеся в молоке,— жиры, белки, сахара, витамины — прекрасно усваиваются организмом. Однако признано, что основная питательная ценность молока определяется жиром. Поэтому пакет 6 %-го молока стоит дороже, чем пакет, на котором написано «жирность 3,5 %». Но как появились эти цифры на пакете? Каким образом определяют процентное содержание жира в молоке?

Для этого разработаны химические методы. Они связаны с применением концентрированных кислот и других агрессивных реактивов, и длится один анализ — ни много ни мало — полчаса. А общая потребность в таких анализах составляет более полумиллиарда (!) в год. При таких масштабах уже не обойтись без физических методов с их простотой и высокой производительностью.

Слово «молочный» всегда было синонимом слова «мутный»: молоко тумана, молочное стекло и т. д. Мутная среда — это среда, непрозрачная для света не за счет поглощения (как, например, лист металла), а за счет рассеяния. Мутность молока обусловлена в основном наличием жира, который содержится в виде огромного количества шариков, диаметр которых колеблется от 0,5 до 10 мкм. Чем жирнее молоко, тем больше в нем жировых шариков, тем менее оно прозрачно. Значит, измеряя прозрачность молока, можно определить его жирность. Это пока что только идея. Не надо забывать, что мы собираемся конкурировать с химическими методами, позволяющими измерять жирность молока с точностью до 0,1 %. Именно такая точность и нужна на практике. Ухудшение точности грозит миллионными убытками: либо вы купите молоко, не имеющее той пищевой ценности, за которую вы заплатили, либо внакладе окажется колхоз, который недополучит часть своей прибыли, зоотехник не будет знать истинной ценности своих коров, и т. д. Так что для практического воплощения идеи нам придется всерьез заняться теорией рассеяния света, какой бы сухой она нам ни показалась.

Рассмотрим параллельный пучок света с длиной волны λ, падающий на собирающую линзу (рис. 1). Линза соберет весь пучок в фокусе. Правда, из-за дифракции на экране, установленном в фокальной плоскости, будет наблюдаться яркое пятнышко конечного размера и менее яркие кольца вокруг него. Однако при очень большом диаметре пучка (и, соответственно, линзы) всей этой структурой можно пренебречь и считать, что в идеале линза собирает всю световую энергию Φ, которую несет пучок, в бесконечно малом фокальном пятне. Внесем теперь в пучок прозрачную сферическую частицу с радиусом r.

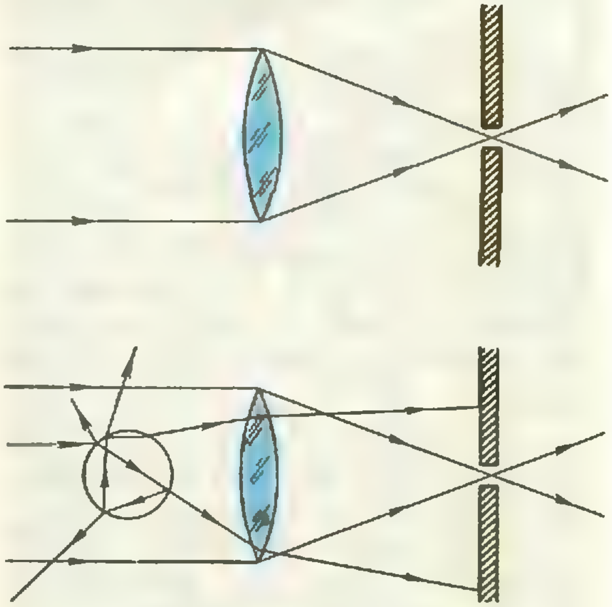


Рис. 1.

Часть пучка провзаимодействует с частицей: отразится от поверхности, преломится внутри и т. д. Лучи из этой части пучка уже не сохранят первоначального направления и либо совсем уйдут в сторону, либо, пройдя линзу, попадут в фокальную плоскость, но не в фокус. В результате полная световая энергия, собирающаяся в фокусе, уменьшится на $\Delta\Phi$. На первый взгляд представляется очевидным, что световая энергия, унесенная рассеянной частью пучка, равна

$$\Delta\Phi' = E_0 S, \qquad (1)$$

где E_0 — освещенность единичной площадки в падающем пучке, а $S = \pi r^2$ — площадь контура частицы. Однако мы увидим, что в действительности все обстоит не так просто, и полная световая энергия, рассеиваемая частицей, отличается от $\Delta\Phi'$.

Для характеристики рассеивающих свойств частицы мы воспользуемся безразмерной величиной

$$Q = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Phi'}, \qquad (2)$$

где $\Delta\Phi$ — энергия, «теряющаяся» в результате рассеяния. Отыскание зависимостей Q от r и от λ и изучение распределения рассеянного излучения в пространстве — это основная задача теории рассеяния, с решением которой связаны такие блестящие имена, как Р. Декарт, Дж. Тиндаль, У. Рэлей, Л. И. Мандельштам и другие. А возник интерес к этой задаче... из детского любопытства. Над нами простирается грандиозный природный «полигон» различных явлений светорассеяния — атмосфера, представляющая собой воздух, насыщенный водяными каплями и пылевыми частицами. Десятки вопросов занимают нас с детства. Почему облака белые, а тучи черные? Почему солнце желтое, а небо голубое? Что такое радуга? Почему в тумане все выглядит таким странным? Из таких вопросов и рождается серьезная физика.

Полная теория рассеяния электромагнитной волны на сферической частице оказалась «крепким орешком», который поддался усилиям ученых лишь в начале нашего века. Но некоторые ее результаты можно получить из простых физических соображений. Прежде всего, физическая интуиция подсказывает нам, что вся картина рассеяния определяется не длиной волны и радиусом частицы в отдельности, а соотношением между ними. Другими словами, безразмерная величина Q должна зависеть от безразмерной комбинации r и λ, а именно — от параметра $\rho = r/\lambda$.

Хотя явного вида $Q(\rho)$ мы пока не знаем, попытаемся все же проследить ее поведение в предельных случаях. Если размер частиц бесконечно мал по сравнению с длиной волны ($\rho \to 0$), то нет смысла говорить о световых лучах, которые попадают на частицу и рассеиваются ею. Волна просто «не замечает» частицу, $\Delta\Phi \to 0$ и $Q \to 0$. Задачу о рассеянии бесконечно малой частицей рассматривал знаменитый английский физик лорд Рэлей, который показал в 1892 году, что, во-первых, свет рассеивается во все стороны равномерно, а во-вторых —

$$Q \sim \rho^4 \sim \frac{1}{\lambda^4}. \qquad (3)$$

С помощью этой зависимости впервые был объяснен цвет неба. Ведь он определяется цветом солнечных лучей, рассеянных атмосферой. Из (3) следует, что коротковолновая часть спектра (синий цвет с $\lambda_1 \approx 0{,}4$ мкм) рассеивается гораздо сильнее, чем длинноволновая часть (красный цвет с $\lambda_2 \approx 0{,}7$ мкм):

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^4 \approx 9.$$

Поэтому мы и видим над собой бездонную синеву небес.

Теперь обратимся к случаю, когда частица бесконечно большая по сравнению с длиной волны ($\rho \to \infty$). Здесь мы находимся во владениях геометрической оптики, и представляется очевидным, что рассеянные лучи — это те лучи, которые попадают в контур частицы. Так что $\Delta\Phi = \Delta\Phi' = E_0 S$, и, казалось бы, $Q = 1$. Однако мы забыли о том, что волновые свойства света проявляются и здесь. На контуре

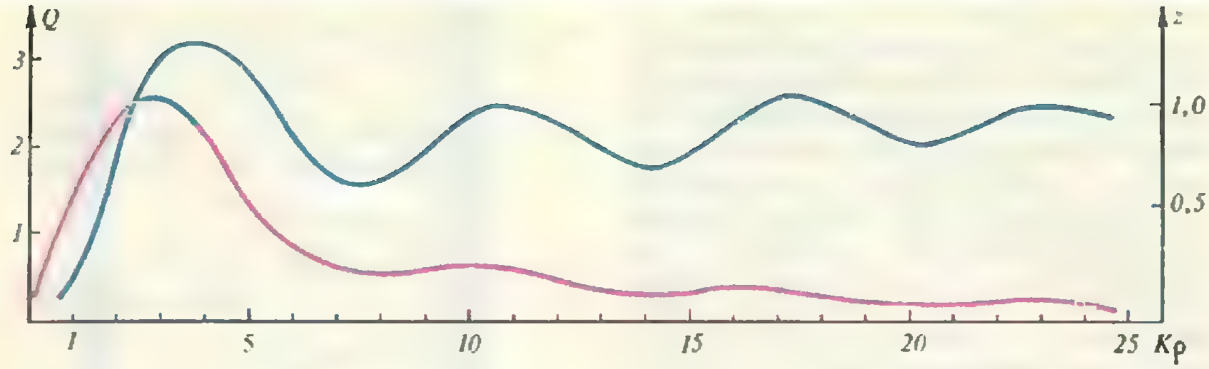


Рис. 2.

частицы всегда происходит дифракция. Лучи света, претерпевшего дифракцию, распространяются вперед, по ходу падающих лучей, но все же слегка отклоняются от своего первоначального направления. А раз так, то в нашем строгом эксперименте с линзой эти лучи уже не соберутся в фокальном пятне. И при этом оказывается, что энергия, которую уносят эти лучи, в точности равна $\Delta\Phi'$! Так возникает удвоение количества рассеянной световой энергии:

$$\Delta\Phi = 2\Delta\Phi', \text{ и } Q = 2.$$

Обратим внимание на то, что бесконечно большая (по сравнению с λ) частица, в отличие от бесконечно малой, рассеивает свет в окружающее пространство уже не равномерно: ведь в одном только направленном вперед дифракционном «языке» оказывается заключенной половина $\Delta\Phi$.

Наблюдать асимметрию пространственного распределения рассеянного света можно вечером во время густого тумана. Вот идет автомобиль. Свет его фар как бы заставляет туман светиться. Но это свечение не отовсюду видно достаточно хорошо. Водитель видит довольно тусклый конус света. Зато пешеход, смотрящий спереди (не в упор, конечно, на фару, а под небольшим углом к направлению света), видит яркий светящийся столб тумана. Дело в том, что относительно крупные капли тумана рассеивают свет преимущественно в направлении распространения падающего светового пучка. Этот эффект известен и астрономам: недавно открытые кольца Юпитера, состоящие из частиц пыли, хорошо видны при освещении их Солнцем сзади, из-за Юпитера. В этом случае рассеянный свет доходит до земного наблюдателя.

Итак, мы получили:

$$\lim_{\varrho \to 0} Q(\varrho) = 0, \quad \lim_{\varrho \to \infty} Q(\varrho) = 2.$$

Общий вид кривой Q, рассчитанной по точным формулам, изображен на рисунке 2 (синяя кривая). Здесь по оси абсцисс отложена величина $X = K\varrho$, где K зависит от относительного коэффициента преломления частицы и окружающей среды. Так, для частиц воды в воздухе (туман) $K = 4{,}1$, а для частиц жира в воде (молоко) $K = 1{,}5$. Первое, что бросается в глаза при взгляде на кривую $Q(X)$,— ее немонотонность. Наряду с «нормальными» участками возрастания есть и аномальные участки убывания $Q(X)$. Вообще наличие пиков в различных зависимостях, описывающих колебательный процесс, связано, как правило, с хорошо всем знакомым явлением резонанса. В нашем случае колебательный процесс — это распространение электромагнитной волны, а резонирует она с частицей: когда $\lambda \approx nr$, где n — целое число, рассеяние резко увеличивается.

Если бы атмосфера рассеивала аномально, то Солнце выглядело бы весьма необычно: оно имело бы... синий цвет. Понять причину этого нетрудно: красная часть солнечного спектра, которая рассеивалась бы сильнее, выходила из поля зрения, а синяя, слабо рассеивающаяся, доходила бы до наблюдателя. Мы можем даже оценить размер водяных капель, которые давали бы такой эффект. Из определения ϱ и X следует, что $r = X\lambda/K$. Подберем r так, чтобы $\lambda_1 \approx 0{,}4$ мкм соответствовала главному минимуму $Q(X)$ при $X_1 = 7{,}6$, а $\lambda_2 \approx$ $\approx 0{,}7$ мкм — главному максимуму $Q(X)$ при $X_2 = 4{,}1$ (имеет смысл говорить лишь об этом первом пике $Q(X)$, поскольку достаточно небольшого разброса по размерам в коллективе рассеивающих частиц, чтобы остальные пики в их суммарной Q-функции сгладились). Обоим условиям удовлетворяет $r \approx 0{,}7$ мкм. Таким образом, водяные капли, радиус которых лежит вблизи 0,7 мкм, рассеивают аномально. Меньшие капли рассеивают нормально, а для бо́льших величина Q уже практически не зависит от ϱ.

В атмосфере наиболее мелкие водяные капли содержатся в облаках: $r = 3 \div 5$ мкм при среднем расстоянии между каплями $1 \div 1{,}5$ мм. В тумане капли имеют размер $5 \div 50$ мкм, а в дожде (в зависимости от силы) $r = 0{,}1 \div 2{,}5$ мм. Капель с радиусом $r \approx 0{,}7$ мкм, как мы видим, нет, и становится понятно, почему никто из нас не видел синего Солнца. Однако...

26 сентября 1951 года жители западной Европы были потрясены фантастическим зрелищем: Солнце имело густой ультрамариновый цвет, а вечером такого же цвета была и Луна.

Еще лет 200 назад это явление было бы воспринято как страшное предзнаменование. Мы же с вами, вооруженные теорией рассеяния, сразу понимаем, что наблюдалось аномальное рассеяние солнечного света. Но на чем? Виновника происшествия вскоре нашли. Ветер принес из Канады огромное облако капель древесной смолы, поднявшихся в воздух из-за сильных лесных пожаров в провинции Альберта. Размеры капель и параметр K оказались таковы, что капли *рассеивали аномально.*

Можно было бы привести еще множество примеров, иллюстрирующих различные проявления светорассеяния, но пора вернуться к объекту, ради которого был затеян этот теоретический экскурс,— к молоку. Мы уже готовы к тому, чтобы описать процесс прохождения параллельного светового пучка через тонкий слой молока. Пусть молоко налито в кювету и свет падает на стенку кюветы перпендикулярно. Удобно представить себе, что жировые шарики расположены в молоке слоями, параллельными стенкам кюветы (рис. 3). Каждая частица в первом слое рассеет световую энергию $\Delta\Phi_1$. Согласно (1) и (2),

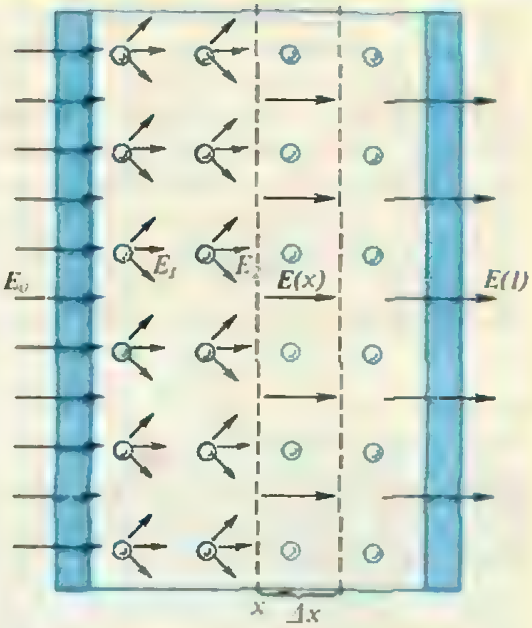


Рис. 3.

$$\Delta\Phi_1 = QSE_0 = Q\pi r^2 E_0$$

(r — средний радиус частиц). Рассеянные лучи уходят в разные стороны, и освещенность, создаваемая первоначальным пучком, после прохождения светом первого слоя частиц падает от E_0 до $E_1 < E_0$. Поэтому каждая частица во втором слое рассеет световую энергию

$$\Delta\Phi_2 = QSE_1 = Q\pi r^2 E_1.$$

И так далее. Наша задача — найти освещенность, создаваемую параллельным пучком на выходе из кюветы. Для этого рассмотрим внутри кюветы слой молока толщиной Δx. *Пусть освещенность в месте расположения этого слоя* $E(x)$. Изменение освещенности в слое определяется энергией, рассеиваемой всеми частицами этого слоя, и если в единице объема имеется N шариков жира, то

$$\Delta E = -Q\pi r^2 E(x)\cdot N\cdot \Delta x.$$

Отсюда при $\Delta x \to 0$ перейдем к дифференциальному уравнению:

$$E' = -Q\pi r^2 N E(x).$$

Как известно, дифференциальное уравнение вида

$$y'(x) = a y(x)$$

имеет своим решением экспоненциальную функцию

$$y(x) = c e^{ax}.$$

Применительно к нашему случаю получаем, что на выходе из кюветы длиной l параллельный пучок света будет создавать освещенность

$$E(l) = E_0 e^{-Q\pi r^2 N l}.$$

Реальные приборы построены так, что измеряется не освещенность, а величина $D = -\ln(E(l)/E_0)$, называемая оптической плотностью:

$$D = -\ln\frac{E(l)}{E_0} = Q\pi r^2 N l.$$

Преобразуем эту формулу следующим образом:

$$D = \frac{Q\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 N l}{\frac{4}{3}r} = \frac{QVlK\frac{1}{\lambda}}{\frac{4}{3}K\frac{r}{\lambda}} = \frac{Q}{X}\frac{3}{4\lambda}KlV. \quad (4)$$

Здесь $V = \frac{4}{3}\pi r^3 N$ — суммарный объем жировых шариков в единице объема молока. А $V\cdot 100\,\%$ и есть процентное содержание жира в молоке.

Итак, D пропорционально V. Значит, измеряя оптическую плотность, можно вычислить жирность молока. Но увы! Точность определения V будет низкой. Как видно из (4), в коэффициент пропорциональности между D и V входит функция $z = Q/X$ (красная кривая на рисунке 2). В натуральном молоке, независимо от содержания жира, средний радиус жировых частиц может быть разным — от 0,5 до 1,5 мкм. При $K = 1{,}5$ величина X (для видимого света) может меняться, соответственно, от примерно 1 до 3. Такому изменению X, как видно из рисунка 2, соответствует изменение z приблизительно в два раза. Теперь представьте, что мы взяли две пробы молока одинаковой жирности (одинаковые V), но в силу каких-либо физиологических особенностей коров размер частиц в одной пробе 0,5 мкм, а в другой — 1,5 мкм. Тогда D будут отличаться вдвое. Это же громадная ошибка. Чтобы избежать ее, перед измерением производят стандартизацию размеров жировых шариков в пробе молока. Прибор снабжается гомогенизатором — устройством, в котором молоко продавливается через систему клапанов, где жировые шарики дробятся и приводятся все к среднему размеру примерно 0,5 мкм. Тем самым достигается однозначная зависимость между D и V. (Гомогенизацию молока, кстати, часто проводят и на молокозаводах. *Такое молоко более устойчиво* к расслаиванию, к скисанию и лучше усваивается.)

Проблемы на этом, однако, не кончаются. Дело в том, что в молоке имеется еще один нерастворимый компонент — белок. Частицы белка имеют средний радиус ~ 0,05 мкм, и рассеяние света на них может достигать 20 % от рассеяния на частицах жира. Для того чтобы устранить этот мешающий фактор, молоко разводят слабым раствором щелочи.

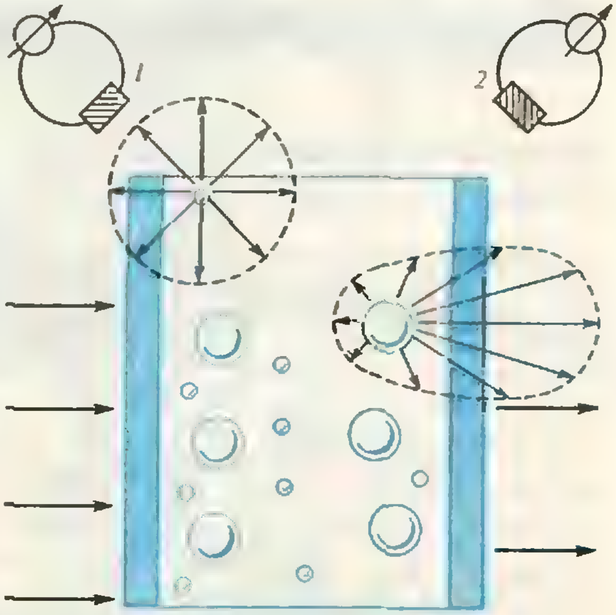


Рис. 4.

Щелочь, никак не действуя на жир, дробит частицы белка на более мелкие — до 0,005 мкм. Вспомним, что при $r \to 0$ значение Q падает стремительно: как r^4. Так что при таком дроблении рассеяние на частицах белка уменьшается на несколько порядков. Мысль исследователей пошла еще дальше. Ввиду большой пищевой ценности белка измерение содержания белка в молоке — не менее важная задача, чем измерение содержания жира. Можно попытаться «обратить вред в пользу»: не устранять рассеяние на частицах белка, а использовать его для измерения содержания белка в молоке. Вспомним о том, что крупные частицы (это жировые шарики) рассеивают свет преимущественно вперед, а мелкие (это частицы белка) — равномерно во все стороны. Может быть, попытаться «сыграть» на этом эффекте? Например, сделаем так. Расположим вокруг кюветы приемники света так, как показано на рисунке 4. Приемник *1*, расположенный у передней стенки кюветы, улавливает свет, рассеянный назад, т. е. рассеянный преимущественно частицами белка. Приемник *2* улавливает свет, рассеянный вперед. Здесь в рассеянии участвуют как частицы белка, так и частицы жира.

В результате сигнал с фотоприемника *1* будет связан с концентрацией белка, а разность сигналов с приемников *2* и *1* — с концентрацией жира.

При этом, конечно, для точных измерений необходимо стандартизовать размеры частиц белка (также как и жира). Однако оказалось, что механическая гомогенизация на частицы белка никакого влияния не оказывает, а химическая стандартизация размеров частиц белка (дробление щелочью) уменьшает их настолько, что они практически перестают рассеивать свет. Так красивая идея одновременного измерения содержания жира и белка в молоке по светорассеянию осталась по сей день неосуществленной. Но наука не стоит на месте, а технические возможности все время расширяются. Быть может, кто-то из молодых читателей, став специалистом по светорассеянию, решит в будущем эту задачу?

Информация

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в вечернее время в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными направлениями современной физики. Для желающих организованы факультативные занятия по математике и основам информатики.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться начиная с 26 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 6 по 22 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Адрес: *119899 Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ.*
Телефон: 939-26-56.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. ЧУКОВА

1837 год. Париж. По бульвару Сен-Мишель идет профессор Сорбонны, член всех научных обществ и академий Европы и Америки Симеон Дени Пуассон. Он думает о своей последней работе. Нужно ли докладывать ее юристам? или ограничиться математиками? Работа называлась «Исследование о вероятности приговоров в уголовных и гражданских процессах». Материал был юридический, а закон математический... Закон описывал роль счастливого случая в судебных процессах Франции XIX века.

Пуассон знал великую обобщающую силу математических законов. Но и он не подозревал, что полученный им закон, который назовут распределением Пуассона, через полтора века станет орудием исследования у ученых самых разных специальностей.

Мы познакомимся с распределением Пуассона на простом и всем понятном примере.

В столовой сварили компот из N вишен и разлили его по n стаканам (тщательно размешивая для чистоты эксперимента). Вопрос: какова вероятность того, что в данном стакане вишен нет?

Будем считать, что все варианты распределения вишен по стаканам равноправны. Поскольку каждая из N вишен может попасть в любой из n стаканов, общее число вариантов равно n^N (n вариантов для 1-й вишни, n — для 2-й и т. д.). Число вариантов, когда в данный стакан вишни не попали, равно $(n-1)^N$ (каждая вишня «выбирает» любой из остальных $n-1$ стаканов). Поэтому искомая вероятность R_0 того, что в стакане не будет вишен, равна $(n-1)^N/n^N$, т. е.

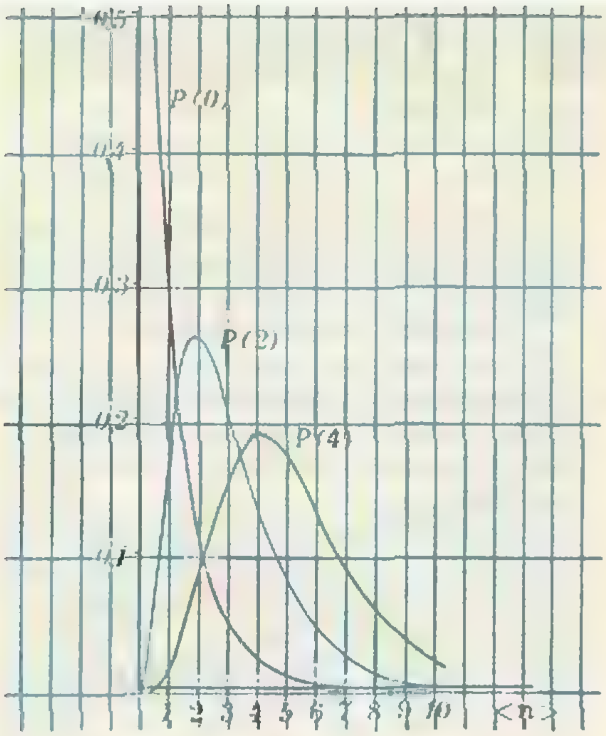


Рис. 1.

$$P_0=\left(1-\frac{1}{n}\right)^N.$$

Пусть $\lambda=\frac{N}{n}$ — среднее число вишен в стакане, тогда

$$P_0=\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N.$$

При больших N (и фиксированном λ) эта величина примерно равна $e^{-\lambda}$ *). Итак,

$$P_0\approx e^{-\lambda}. \qquad (1)$$

Аналогично можно подсчитать и вероятность P_1 того, что в стакане окажется ровно одна вишня: эту вишню можно выбрать N способами, а остальные $N-1$ вишен надо распределить по $n-1$ стаканам, следовательно,

$$P_1=\frac{N(n-1)^{N-1}}{n^N}=\frac{N}{n-1}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N\approx$$

$$\approx\lambda e^{-\lambda}.$$

Можно вывести и общую формулу для предельной (при больших N) вероятности P_k обнаружить в стакане k вишен ($k=0, 1, 2, \dots$):

$$P_k\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad (2)$$

где $k!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$ при $k\geqslant 1$ и, по определению, $0!=1$.

Вообще, пусть в эксперименте со случайными исходами измеряется какая-то величина, принимающая целые неотрицательные значения. Говорят, что она имеет *распределение Пуассона*, если значение k она принимает с вероятностью $p(k;\lambda)=\lambda^k e^{-\lambda}/k!$ (см. (2)). На рисунке 1 показаны графики вероятностей $p(0;\lambda)$, $p(2;\lambda)$ и $p(4;\lambda)$ как функций λ. При фиксированном λ значения $p(k;\lambda)$ изображаются как на рисунке 2 (для $\lambda=10$).

Распределение Пуассона возникает в самых разнообразных ситуациях. Мы приведем только два характерных примера его использования. Первый — из физики. Эксперименты показывают, что при распаде радиактивного вещества число α-частиц, излученных за определенный промежуток времени t, с очень высокой точностью подчиняется распределению Пуассона со средним значением λt, где λ — параметр, характеризующий интенсивность излучения. Этот пример позволяет продемонстрировать, как опасно передоверяться здравому смыслу. Действительно, на первый взгляд кажется, что вероятности зарегистриро-

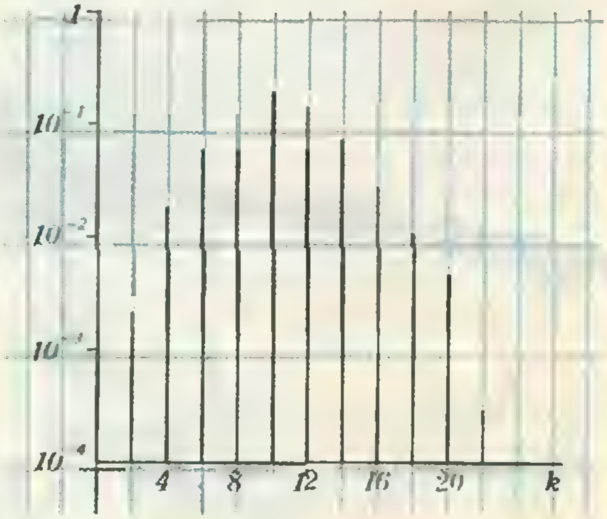


Рис. 2.

---

*) В самом деле,

$$\lim_{N\to\infty}\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)^N=e^{\lim\limits_{N\to\infty}N\ln(1-\lambda/N)},$$

а предел в показателе равен

$$\lim_{N\to\infty}N\ln\left(1-\frac{\lambda}{N}\right)=\lim_{N\to\infty}\lambda\frac{\ln(1-\lambda/N)-\ln 1}{\lambda/N}=$$

$$=-\lambda\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h}=-\lambda,$$

т. к. последний предел равен производной функции $\ln x$ при $x=1$, т. е. 1.

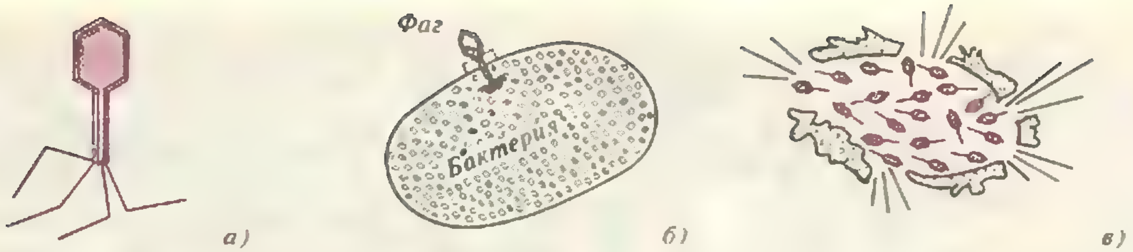


Рис. 3.

вать 10 α-частиц за 5 секунд или 2 α-частицы за 1 секунду должны совпадать. Однако это не так. Допустим, например, что счетчик регистрирует частицы со средней частотой $\lambda=1$ частица в секунду. Тогда число частиц, регистрируемых за 1 секунду, подчиняется распределению Пуассона с параметром 1, а за 5 секунд — с параметром 5. Поэтому первая вероятность равна

$$p(10;\,5)=\frac{5^{10}e^{-5}}{10!}\approx 0{,}018,$$

а вторая —

$$p(2;\,1)=\frac{1^2\cdot e^{-1}}{2!}\approx 0{,}18.$$

Мы видим, что эти вероятности не *только не равны, но различаются в* 10 раз!

Второй пример — из жизни вирусов, точнее бактериальных вирусов, называемых бактериофагами, которые были открыты в 1915 году. Бактериофаги — это паразиты бактерий. Они размножаются только в бактериальных клетках. Один из наиболее изученных фагов — фаг Т2 — размножается в кишечной палочке *Escherichia coli*. Процесс заражения происходит следующим образом. Фаг при броуновском движении встречается с бактерией и прикрепляется к ней концом своего «хвоста» (рис. 3). После прикрепления оболочка вируса сокращается, сердцевина проникает через поверхность клетки и ДНК фага попадает в бактерию. Спустя примерно 20 минут при температуре 37° бактерия разрушается, и вместо одного фага появляется почти сотня фагов. Редкостный урожай!

Гибель бактерий под действием фагов можно наблюдать почти визуально. Дело в том, что питательный раствор с бактериями *E. coli* кажется мутным — бактерии имеют размер около 1 мкм, а этого достаточно для рассеивания видимого света. Но если в пробирку с *E. coli* добавить один-единственный фаг Т2 и подождать часов 6—8, то раствор в пробирке станет из мутного прозрачным. Объяснение единственное. Фаг Т2, быстро размножаясь, разрушил все бактерии *E. coli*, и в пробирке не осталось объектов, способных рассеивать свет, т. к. размер самих фагов (около 200 нм) слишком мал для этого. Все это интересно, но вы вправе спросить, причем тут распределение Пуассона.

Оказывается, оно неожиданным образом помогает решить важную для молекулярной биологии задачу — *определить концентрацию вирусных* частиц в растворе. В нашем первом примере с компотом аналогичная задача (найти среднее число вишен в стакане) решается просто: можно пересчитать вишни в нескольких стаканах и поделить их число на число стаканов. Но вирусы не пересчитаешь как вишни! И вот тут-то мы вспомним формулу (1), которая связывает вероятность отсутствия частиц (будь то вишни или вирусы) в определенном объеме содержащего их состава (в стакане или в пробирке) с их средним числом. Возьмем, скажем, 100 пробирок с бактериями в питательной среде и добавим в каждую 1 мл раствора с вирусами. По истечении некоторого времени инкубации подсчитаем число пробирок, оставшихся мутными. Допустим, их оказалось 38, а другие 62 стали прозрачными. Это означает, что в 38 пробирок не попало ни одного фага, ибо фаги размножаются гораздо быстрее бактерий (за истекшее время они разрушили все бактерии в 62 пробирках). Доля мутных пробирок дает приблизительное значение вероятности P_0 того, что в пробирку не попал ни один фаг, т. е. $P_0 \approx 0{,}38$. Смотрим на рисунок 1 и видим, что такая вероятность реализуется при среднем значении $\lambda = 1$. Ответ задачи таков: в 1 мл взвеси содержится в среднем 1 фаг.

Распределение Пуассона — одно из важнейших в теории вероятностей, оно встречается во множестве задач. Если не вдаваться в детали, можно сказать, что оно появляется там, где рассматриваются случайно разбросанные точки, и мы интересуемся числом точек, попавших в заданную область. Такими точками могут служить изюминки в хорошо перемешанном тесте (или вишни в компоте), опечатки в книге, моменты поступления телефонных вызовов, капли дождя на сухом асфальте, мутации в хромосомах, подвергаемых облучению, и т. д., и т. д. Но, разумеется, чтобы закон Пуассона вступил в силу, требуется соблюдение некоторых условий, впрочем вполне естественных и достаточно общих. Если, например, рассматривается испускание α-частиц, нужно позаботиться, чтобы интенсивность излучения за время наблюдений существенно не менялась; если регистрируются телефонные звонки, нужно, чтобы звонящие не договаривались между собой или с хозяином телефона о времени разговора, и т. п. Более подробно об этих условиях и следствиях, из них вытекающих, рассказывается в статье «Как возникает распределение Пуассона».

Информация

Заказы принимаются...

Мы продолжаем список книг, которые будут выпущены издательством «Наука» в 1989 году и которые могут заинтересовать наших читателей (нумерация соответствует тематическому плану; цена указана ориентировочная; начало см. в № 7).

Астрономия

120. Бронштэн В. А. Как движется Луна? 70 к.

Даже для астрономов XVIII—XX вв., вооруженных методами небесной механики, теория движения Луны оказалась «крепким орешком». Трудности, встретившие ученых на этом пути, и методы их преодоления подробно описаны в книге.

121. Голуб И. Я., Хренов Л. С. Время и календарь. 25 к.

Описываются существовавшие ранее и действующие теперь календари и приводятся сведения о предполагаемой календарной реформе.

122. Гурштейн А. А. Извечные тайны неба. 1 р. 20 к.

В увлекательной, доходчивой форме с широким привлечением исторического материала рассказывается о достижениях современной астрономии и космонавтики, о методах астрономических исследований, о тесных связях астрономии с механикой, математикой, физикой, науками о Земле.

123. Климишин И. А. Релятивистская астрономия: Пер. с укр. 1 р. 20 к.

В популярной форме излагаются идеи специальной и общей теории относительности.

124. Сикорук Л. Л. Телескопы для любителей астрономии. 70 к.

Популярно рассказывается о конструировании и постройке любительских телескопов.

125. Шаров А. С., Новиков И. Д. Хаббл — выдающийся астроном двадцатого столетия. 50 к.

Описание жизни, научной и общественной деятельности выдающегося астронома XX века — Э. Хаббла, сто лет со дня рождения которого исполняется в 1989 г. Самым выдающимся открытием Хаббла, обессмертившим его имя, является открытие расширения Вселенной. Многие материалы о Хаббле в книге публикуются впервые.

126. Астрономический календарь на 1990 г. 1 р. 20 к.

Ежегодник содержит сведения об астрономических явлениях в 1990 г., статьи, посвященные достижениям космонавтики и различных отделов астрономии, инструкции для наблюдений, материалы, посвященные юбилейным астрономическим датам.

(Окончание см. на с. 22)

ПРОСТЫЕ ЧИСЛА, МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И... ЭВМ

Кандидат физико-математических наук
А. П. ВИННИЧЕНКО

От редакции. *В последние годы с ростом мощности и доступности ЭВМ все бо́льшую роль в работе математиков стал играть эксперимент, бывший до недавнего времени почти безраздельной вотчиной физики, химии и других естественных наук. Математики получили возможность выдвигать новые гипотезы на основе результатов быстрой компьютерной обработки огромных массивов. Порой при этом проявляются закономерности, которые вряд ли можно было обнаружить в «добрые старые времена».*

В предлагаемой заметке вы не найдете ни одной теоремы и ни одного доказательства. Здесь рассказано об эксперименте на простых числах, позволившем сформулировать интересное предположение об их распределении. Быть может, кто-то из наших читателей сумеет доказать или опровергнуть его.

Еще древние греки выделили среди множества целых положительных чисел «неделимые атомы», т. е. числа, которые не раскладываются на более мелкие множители, и назвали их «простыми». Простое число делится только на единицу да на само себя, а все остальные числа получаются из этих элементарных кирпичиков мира

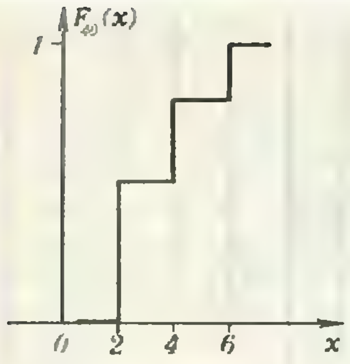


Рис. 1.

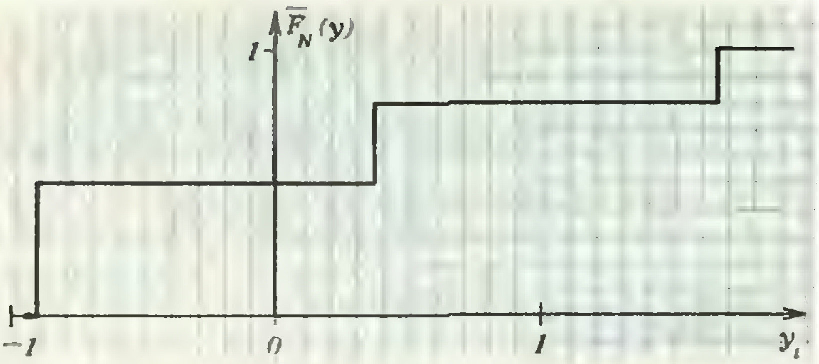


Рис. 2.

чисел умножением. Начало ряда простых чисел — это 2, 3, 5, 7, а конца ему нет — наибольшего простого числа не существует. Будем считать единственное четное простое число 2 «ошибкой природы» и рассмотрим ряд, начиная с 3. Подвергнем этот ряд процедуре разностного анализа*) — будем брать разности двух соседних членов:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 3, & 5, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, & 37 \\ & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 6 & 2 & 6 \end{array} \qquad (1)$$

Разности повторяются — много двоек, есть четверки, появились и шестерки. Как будто на игральной кости выпадают очки: двойка, двойка, четверка, опять двойка... Еретическая мысль — взглянуть на этот строго детерминированный ряд как на результаты измерений некой случайной величины и попробовать обработать их методом математической статистики.

Пусть для обработки взяты простые числа, не превосходящие N; в примере (1) $N=40$. Прежде всего выпишем в порядке возрастания все наблюденные значения $x_1=2$, $x_2=4$, ... нашей «случайной величины» (в примере (1) число этих значений $n=3$), а под ними — частоты $\omega_1, \omega_2, \ldots$, с которыми они появляются (т. е. отношения числа появлений x_i к общему числу наблюдений, которое у нас равно 10):

x_i	2	4	6
ω_i	0,5	0,3	0,2

Далее составим таблицу «накопленных частот» $v_i=\omega_1+\omega_2+\ldots+\omega_i$, т. е. запишем под каждым значением x_i сумму частот всех значений, не превосходящих x_i:

x_i	2	4	6
v_i	0,5	0,8	1

Изобразим результаты этих расчетов в виде графика ступенчатой функции $F_N(x)$ (рис. 1), называемой *эмпирической функцией распределения*: $F_N(x)$ равно сумме ω_i по всем i, таким что $x_i \leqslant x$. Наша цель — сравнить графики $F_N(x)$ при разных N и попытаться уловить какую-нибудь закономерность в их поведении при $N \to \infty$. Правда, если взяться за это без соответствующей подготовки, ничего хорошего не получится. Дело в том, что чем дальше, тем реже встречаются простые числа и тем больше в среднем будут промежутки между ними. Поэтому графики F_N с ростом N будут расплываться вправо. Чтобы компенсировать это расплывание, применим к ним процедуру, знакомую нам по детективным романам. При сличении фотографий с целью выяснить, изображен ли на них один и тот же человек, криминалисты увеличивают или уменьшают их так, чтобы расстояния между зрачками на обоих портретах стало одинаковым, а затем совмещают их по зрачкам. Нечто подобное мы проделаем с эмпирическими функциями распределения.

---

*) Разностный анализ играет ту же роль при изучении числовых последовательностей, что и дифференцирование при изучении функций. Например, дважды составляя разности для последовательности $a_n = n^2$, получим постоянную последовательность:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36\ldots \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & \ldots \\ 2 & 2 & 2 & 2 & & \ldots; \end{array}$$

соответственно, $(x^2)''=2=\mathrm{const}$.

Вычислим при каждом N среднее арифметическое $\bar{x}$ всех наблюденных значений x_i, называемое *средним значением*. Легко видеть, что $\bar{x}=\sum_{i=1}^{n} x_i\omega_i$. Эта величина характеризует сдвиг функции распределения по горизонтали. Вторая нужная нам величина —

$$\sigma_x=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\omega_i}$$

— называется *среднеквадратичным отклонением*. Она служит мерой рассеивания наблюденных значений относительно среднего значения $\bar{x}$ — чем меньше σ_x, тем теснее расположены значения x_i. В нашей детективной аналогии величине σ_x отвечает размер фотографии. Приведем значения $\bar{x}$ и σ_x для различных N.

N	40	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6
$\bar{x}$	3,40	4,10	5,98	8,12	10,42	12,73
σ_x	1,56	1,84	3,54	5,86	8,02	10,28

Как и следовало ожидать, обе эти характеристики растут с ростом N, что свидетельствует о расползании графиков F_N. Чтобы помешать расползанию, сдвинем каждый график на $\bar{x}$ влево и сожмем в σ_x раз к оси ординат. Для этого заменим величины x_i новыми величинами $y_i=(x_i-\bar{x})/\sigma_x$ и пересчитаем таблицу накопленных частот:

y_i	−0,90	0,38	1,67
v_i	0,50	0,80	1

По этой таблице нарисуем график функции распределения $\bar{F}_N(y)$ величин y_i (рис. 2). Легко видеть, что среднее значение и среднеквадратичное отклонение величин y_i при всех N будут равны 0 и 1. Вот эти графики $\bar{F}_N$ мы и будем сравнивать. Конечно, при больших N эту работу надо поручить ЭВМ. За 20 минут работы машина с быстродействием 300 тыс. операций в секунду выдала графики, изображенные на рисунке 3 (для $N=10^3$, 10^4, 10^5 и 10^6). Правда, похоже, что эти ступенчатые графики приближаются к пологому графику, нарисованному черным цветом? Это — график так называемого показательного распределения

$$F(y)=\begin{cases}1-e^{-y-1} & \text{при } y\geqslant -1,\\ 0 & \text{при } y<-1\end{cases} \quad (2)$$

с нулевым средним и единичным среднеквадратичным отклонением. Расчет, проведенный на ЭВМ, подтверждает наше зрительное впечатление. Верно ли, что при $N\to\infty$ графики $\bar{F}_N(y)$ стремятся к $F(y)$ — неизвестно. Пока это только гипотеза. Однако гипотеза, подтвержденная на множестве из 78 497 первых простых чисел. И эта огромная работа выполнена всего за 20 минут!

Интересно отметить, что такое же распределение дают и интервалы между соседними сигналами в пуассоновском потоке (см. конец статьи «Как возникает распределение Пуассона»). Можно пояснить это, вспомнив, что, как было показано в этой статье, вероятность $P_0(t)$ того, что в течение времени t не поступит ни одного сигнала, равна $e^{-\lambda t}$. Следовательно, вероятность того, что очередной сигнал, на-

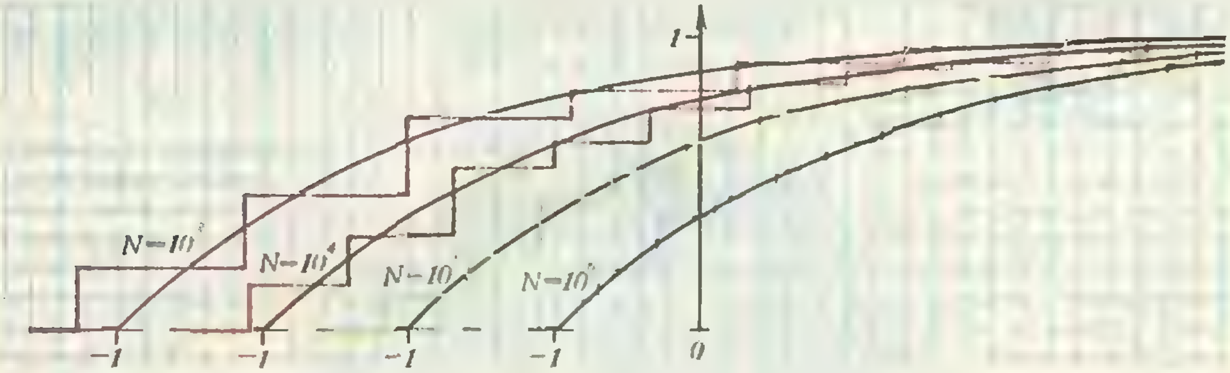


Рис. 3.

чиная с произвольного момента t_0, появится до момента t_0+t, равна $1-e^{-\lambda t}$. После соответствующего сдвига и сжатия получится функция распределения, задаваемая равенством (2).

Можно попытаться объяснить обнаруженное свойство расстояний между соседними простыми числами какими-нибудь известными их свойствами. Например, имеется оценка количества $\pi(N)$ простых чисел, не превышающих N, впервые доказанная французским математиком Ж. Адамаром и бельгийским математиком Ш.-Ж. Валле Пуссеном в 1896 году: $\pi(N)\approx\approx N/\ln N$. Рассмотрим так называемые квазипростые числа: корни уравнений $n_i/\ln n_i=i+3$, $i=1, 2, 3...$, число которых на отрезке от 1 до N, очевидно, также примерно равно $N/\ln N$. Выпишем $n_1, n_2, ..., n_6$ и применим разностный анализ:

8,61 12,71 17,00 21,47 26,10 30,87
4,10 4,29 4,47 4,63 4,77
0,19 0,18 0,16 0,14

Видно, что расстояния между соседними квазипростыми числами n_i и n_{i+1} возрастают, однако все медленнее с ростом i. Попробуйте, опираясь на это наблюдение, доказать, что для квазипростых чисел эмпирическая функция распределения выпукла вниз и поэтому не может совпадать с показательной функцией распределения. Следовательно, наша гипотеза не может быть обоснована просто оценкой числа $\pi(N)$. Если она верна, то ее доказательство должно использовать какие-то более глубокие факты.

Информация

Заказы принимаются...

(Начало см. на с. 18)

Информатика, программирование

52. Самарский А. А., Гулин А. В. Численные методы. 1 р. 90 к.

Излагаются современные численные методы решений прикладных задач, рассчитанные на применение быстродействующих ЭВМ. Рассматривается теория интерполяции, квадратурные формулы, аппроксимация функций, численные методы алгебры и т. д.

90. Знакомьтесь с персональной ЭВМ «Корвет». 95 к.

Содержит описание одной из первых в нашей стране персональных ЭВМ «Корвет». Рассмотрены особенности архитектуры ЭВМ, правила пользования, программное обеспечение.

128. Абрамов С. А., Зима Е. В. Основы информатики. 1 р.

Содержит систематизированное изложение основных понятий и методов информатики (вычислительной техники, программирования, численных методов, сортировки и поиска). Изложение основ программирования проводится на языке Паскаль.

129. Арсак Ж. Программирование игр и головоломок. Пер. с фр. 90 к.

Рассматриваются способы программирования различных занимательных игр и головоломок с числами, геометрическими фигурами и др.

154. Новосельцев В. Н. Организм в мире техники: кибернетический аспект. 70 к.

Рассказывается о том, как сегодняшняя кибернетика позволяет во многом дать полную картину жизненных процессов в организме.

155. Дьяконов В. П. Справочник по расчетам на микрокалькуляторах. 1 р. 20 к.

Содержит описание современных отечественных и зарубежных микрокалькуляторов, языков и основ их программирования.

156. Пильщиков В. Н. Сборник упражнений по языку Паскаль. 40 к.

В основу сборника положено пособие «Упражнения по языку Паскаль», используемое при обучении программированию студентов факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета.

159. Николов Р., Сендова Е. Начала информатики: Пер. с болг. 60 к.

Отражен опыт обучения детей работе с персональными компьютерами. Даются основы общения с компьютером в режиме диалога на языке ЛОГО.

КАК ВОЗНИКАЕТ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Каждому случалось застать начало летнего дождика, когда земля еще сухая и только тут и там видны редкие темные пятнышки от первых капель. Эти пятнышки — почти идеальная модель «случайно разбросанных точек», о которых упоминалось в статье «Распределение Пуассона». Попробуем с помощью этой наглядной модели сформулировать математические гипотезы, описывающие случайно разбросанные точки, и вывести из них, что число точек, попавших за определенное время на заданный участок, подчиняется распределению Пуассона.

Пусть P_k — вероятность*) того, что на выбранный нами участок попадет k капель. Прежде всего, ясно, что

1) вероятность P_k определяется только площадью s этого участка и не зависит от его формы и расположения.

Поэтому будем искать P_k в виде функции от площади участка, т. е. в виде $P_k(s)$. Вторая естественная гипотеза состоит в том, что

2) количество капель, выпавших на данный участок, не зависит от количества капель, выпавших на любой другой участок, не пересекающийся с первым.

---

*) Поневоле мы вынуждены обходиться без определения понятия вероятности — желающие могут найти его, например, в книге А. Н. Колмогорова, И. Г. Журбенко, А. В. Прохорова «Введение в теорию вероятностей» (М., Наука, 1978). Надеемся, что для понимания статьи будет достаточно небольшой доли здравого смысла.

Другими словами, вероятности $P_0, P_1, P_2, \ldots$ для данного участка никак не зависят от того, сколько капель оказалось на каком-то другом участке. Математическим выражением условия независимости служит правило умножения вероятностей: *вероятность одновременного осуществления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.* Например, если S и T — два непересекающихся участка площадей s и t, то событие «на каждом из участков S и T выпало по 1 капле» происходит с вероятностью $P_1(s)\cdot P_1(t)$. Аналогично, событие «на участки S и T попало 2 капли» имеет вероятность $P_2(s)\cdot P_0(t)+P_1(s)\cdot P_1(t)+$ $+P_0(s)\cdot P_2(t)$ (это событие разбивается на три: на участке S выпало 2 капли, а на T — ни одной; на участок S выпала 1 капля и на T — 1 капля; на участок S выпало 0 капель, а на T — 2 капли; и его вероятность равна сумме вероятностей этих трех составляющих). Подчеркнем, что правило умножения вероятностей не доказывается — это определение независимости, но нетрудно объяснить, почему принимают именно такое определение.

Один из основополагающих принципов теории вероятности (закон больших чисел) утверждает, что частота, с которой происходит некоторое событие в достаточно длинной серии опытов, приближается к его вероятности. Пусть в серии из n опытов наблюдались события A и B, причем событие B осуществилось m раз и оба события одновременно осуществились k раз; тогда частота m/n события B примерно равна его вероятности $P(B)$, а частота k/n одновременного осуществления событий A и B — соответствующей вероятности $P(AB)$. Независимость событий A и B должна проявиться в том, что сведения о реализации события B не могут влиять на вероятность осуществления события A. Следовательно, частота k/m опытов, в которых произошло событие A, среди тех опытов, в которых зафиксировано событие B, должна быть такой же, как и в ряду всех вообще опытов: $k/m\approx P(A)$. Таким образом,

$$P(AB)\approx \frac{k}{n}=\frac{k}{m}\cdot\frac{m}{n}\approx P(A)\cdot P(B).$$

В пределе (при $n\to\infty$) эти приближенные равенства превращаются в точные. Мы получаем подтверждение того, что «правило умножения вероятностей» верно отражает наше интуитивное представление о независимости событий.

Вернемся, однако, к каплям дождя. Третья гипотеза, описывающая их выпадение, такова:

3) вероятность $P_{>1}(h)$ того, что на участке малой площади h выпадет не менее 2 капель, пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью $P_1(h)$ того, что на этот участок попадет 1 капля, т. е. $P_{>1}(h)/P_1(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Иначе говоря, дважды в одно и то же место капли не попадают. Теперь условия сформулированы полностью и можно заняться получением следствий.

Первым делом найдем $P_0(s)$. Рассмотрим участок площадью $s+t$ и разобьем его на два участка — площадью s и площадью t. Если большой участок $(s+t)$ остался сухим, то и на оба его куска s и t капли не попали, и в силу условия 2) независимости участков при любых $s, t\geqslant 0$ получаем

$$P_0(s+t)=P_0(s)\,P_0(t).$$

Из этого уравнения нам надо найти функцию P_0, о которой дополнительно известно, что $0\leqslant P_0(s)\leqslant 1$ и $P_0(s)$ — убывающая функция. Докажем, что

$$P_0(s)=e^{-\lambda s}$$

при некотором $\lambda>0$. Пусть f — убывающая функция, удовлетворяющая уравнению $f(s+t)=f(s)\cdot f(t)$. Для любого $s>0$ и любого натурального n

$$f(ns)=f(s+(n-1)\,s)=$$
$$=f(s)\,f((n-1)\,s)=\ldots=(f(s))^n.$$

Подставляя сюда $s=\frac{1}{n}$ и полагая $f(1)=e^{-\lambda}$, получим $f(1/n)=e^{-\lambda/n}$. Подставим теперь $s=1/m$ — получим

$$f(n/m)=(f(1/m))^n=e^{-\lambda n/m},$$

т. е. для любого рационального $s>0$ имеем $f(s)=e^{-\lambda s}$. Теперь, пользуясь монотонностью функций $f(s)$

и $e^{-\lambda s}$, легко доказать, что последнее равенство выполняется при всех $s>0$.

Заметим, что $P_0(h)\approx 1-\lambda h$ при малых h (запись $u(h)\approx v(h)$ будет у нас означать, что $(u(h)-v(h))/h\to 0$ при $h\to 0$). Действительно, производная функции $e^{-\lambda s}$ при $s=0$ равна $-\lambda e^{-\lambda\cdot 0}=-\lambda$, т. е. $(P_0(h)-1)/h=(e^{-\lambda h}-1)/h\to-\lambda$ при $h\to 0$. Следовательно, $P_1(h)+P_{>1}(h)=1-P_0(h)\approx\lambda h$ при малых h. А так как, в силу условия 3, $P_{>1}(h)$ пренебрежимо мало по сравнению с $P_1(h)$, при малых h

$$P_1(h)\approx\lambda h,\ P_k(h)\approx 0 \text{ при } k>1.$$

Теперь можно составить дифференциальные уравнения, из которых мы найдем $P_k(s)$. Рассмотрим участок площадью s и добавим к нему участочек малой площадью h. Повторяя приведенное раньше рассуждение, получим

$$P_k(s+h)=P_k(s)P_0(h)+P_{k-1}(s)P_1(h)+ +(P_{k-2}(s)P_2(h)+\ldots+P_0(s)P_k(h)).$$

Поскольку $P_0(h)\approx 1-\lambda h$, $P_1(h)\approx\lambda h$, а все выражение в скобках пренебрежимо мало по сравнению с h,

$$P_k(s+h)\approx P_k(s)(1-\lambda h)+\lambda hP_{k-1}(s);$$

следовательно,

$$P_k'(s)=\lim_{h\to 0}\frac{P_k(s+h)-P_k(s)}{h}= =-\lambda P_k(s)+\lambda P_{k-1}(s),$$

или

$$P_k'(s)+\lambda P_k(s)=\lambda P_{k-1}(s),\quad k=1,2,\ldots \qquad (*)$$

Чтобы решить это уравнение, рассмотрим функцию $f_k(s)=P_k(s)e^{\lambda s}$. Найдем ее производную: $f_k'=P_k'(s)e^{\lambda s}+\lambda P_k(s)e^{\lambda s}$. Умножая уравнение (*) на $e^{\lambda s}$, получаем

$$f_k'(s)=\lambda f_{k-1}(s),$$

причем $f_k(0)=P_k(0)=0$ при $k>1$. Теперь легко найти одну за другой все функции f_k: $f_1'(s)=\lambda P_0(s)e^{\lambda s}=\lambda$, следовательно, $f_1(s)=\lambda s$ (мы учли, что $f_1(0)=0$); $f_2'(s)=\lambda f_1(s)=\lambda^2 s$, следовательно, $f_2(s)=\lambda^2 s^2/2$, ..., $f_k(s)=\lambda^k s^k/k!$. И наконец, мы можем выписать искомое выражение

$$P_k(s)=\frac{(\lambda s)^k}{k!}e^{-\lambda s},$$

справедливое для всех $k=0, 1, 2, \ldots$

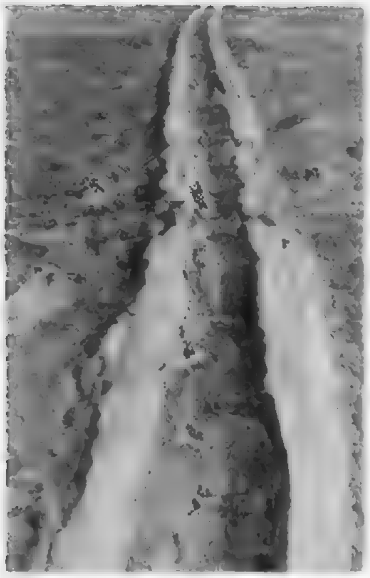
Подведем итог. Если на плоскости случайно выбираются точки так, что выполнены условия 1—3, то число точек, попавших на участок площадью s, имеет *распределение Пуассона* с параметром λs, где $\lambda>0$ — параметр, характеризующий среднюю плотность точек (ср. с формулой (2) в статье «Распределение Пуассона»).

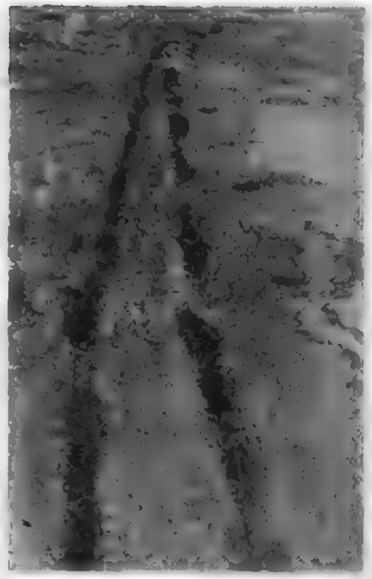
Разумеется, все сказанное почти дословно переносится на случай точек в пространстве или на прямой. О последнем случае надо сказать особо, потому что он чаще всего встречается на практике. При этом прямой, на которой расположены точки, служит ось времени, а сами точки — это моменты поступления каких-то случайных сигналов, подчиняющиеся условиям, аналогичным условиям 1—3. Стандартными примерами таких «потоков сигналов», называемых в теории вероятностей *простейшими* или *пуассоновскими потоками*, являются, например, испускаемые радиоактивным веществом частицы, вызовы, поступающие на телефонную станцию.

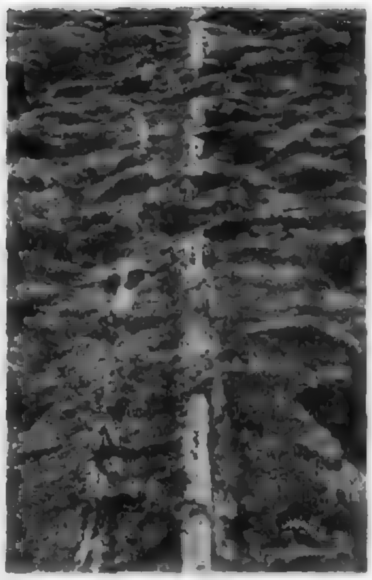
Мы затронули только одну сторону вопроса, вынесенного в заголовок статьи. С другими читатель познакомится, если ему доведется всерьез заняться теорией вероятностей и случайных процессов.

Дорогие читатели!

В будущем, 1989 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. Оформить годовую подписку можно до 1 ноября 1988 года. Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.







В февральском номере нашего журнала были помещены три фотографии лыжных следов. Фотографии были сделаны в одно и то же время, и лыжни были расположены рядом. Но они так не похожи друг на друга... Мы предлагали читателям подумать, чем объясняется такое разнообразие видов лыжных следов.

Наверное, каждый, кто заинтересовался этим вопросом, понял, что без физики здесь не обойтись. А физика — она всегда физика, и в марте, и в августе. Поэтому разговор о лыжных следах мы продолжаем сегодня, когда вчерашний снег уже растаял, а до нового еще далеко.

ПОГОВОРИМ ПРО ВЧЕРАШНИЙ СНЕГ

Кандидат физико-математических наук
А. В. МИТРОФАНОВ

Возможно, кое-кто из вас, пока читал условие задачи, уже догадался, в чем суть дела. Ответ таков: лыжни сильно отличаются друг от друга потому, что по ним проехало разное количество лыжников и в разное время. Почему это так сильно повлияло на вид лыжни? Попробуем разобраться.

Выпавший на землю снег — очень сложный физический объект, непрерывно изменяющийся во времени. Вы знаете, что задолго до весеннего таяния снег оседает, уминается, может стать более плотным или, наоборот, более рыхлым, потерять в весе, «выветриться». При этом изменяются многие физические характеристики снега, например коэффициент теплопроводности, пористость, влажность и т. д. Вмешательство человека — скажем, уплотнение снега при прокладывании лыжни или пешеходной дорожки — также изменяет вид снежного покрова, придает снегу свойства, которые отличают его в чем-то от нетронутых сугробов.

Поразительная изменчивость состояния снега в природе связана с тем, что снег не просто существует сам по себе, а участвует в прямых и обратных фазовых переходах лед — пар и лед — вода. Особенно активно эти процессы протекают весной, когда снег находится в условиях, близких к так называемой тройной точке воды. Напомним, что в тройной точке три формы вещества — газообразная (в данном случае водяной пар), жидкая (вода) и твердая (лед) — сосуществуют в равновесии. Для воды тройная точка (рис. 1) находится по температуре вблизи 0 °С (точнее при $t_0 = 0{,}0078$ °С); давление насыщенных водяных паров, соответствующее тройной точке, $p_0 = 610{,}6$ Па (или, в других единицах, 0,006 атм, или 4,58 мм рт. ст.).

Скорость протекания фазовых переходов для снега зависит от целого ряда факторов, например от того, как светит солнце, тепло или морозно на улице, какова влажность, дует ли теплый ветер и т. д. Небольшие, совсем ничтожные изменения в начальном состоянии снега могут привести к значительному отклонению скорости того или иного процесса и в конце концов оказать сильное влияние на характеристики снежного покрова. Именно это и происходит на лыжной трассе.

На правой фотографии видны две параллельные ледяные полоски, как бы висящие над выветренным, крупнозернистым весенним снегом. Это старая лыжня. По лыжне проехало, должно быть, много лыжников. Когда лыжня уплотнилась настолько, что на ней образовалась ледяная корка, лыжники перестали пользоваться этой лыжней и проложили рядом новую. Отчего образуется лед на лыжне при температуре ниже 0 °С? Ведь снег еще не тает при такой температуре. Это очень любопытное обстоятельство, на которое следует обратить внимание.

В 1814—1816 годах, исследуя свойства снега и льда, знаменитый русский физик-электротехник В. В. Петров открыл явление возгонки, или сублимации, твердой фазы воды. Сублимация — это разновидность парообразования вещества. Сейчас хорошо известно, как испаряются снежинки. По фазовой диаграмме (см. рис. 1) можно определить давление насыщенных водяных паров; считается, что температура воздуха ниже 0 °С. Если в воздухе давление паров меньше, чем эта величина, то снег испаряется (переход твердое тело — пар), и чем суше воздух, тем интенсивнее происходит возгонка снега. Снег может исчезнуть, не начав еще таять! И вот что интересно. Давление насыщенного пара над кривой поверхностью жидкости отличается от давления над плоской поверхностью.*) То же самое справедливо и для твердого тела, находящегося в равновесии с паром. Мелкие частицы снега сублимируют быстрее крупных. Чем тоньше грань луча снежинки, тем больше ее кривизна, и, следовательно, тем быстрее она испаряется. На вогнутых поверхностях снежинок кривизна обратная, и там испарение может замениться кристаллизацией влаги, если температура снега достаточно низка. Этот процесс похож на конденсацию жидкости в узких порах или капиллярах, только в данном случае фазовый переход осуществляется минуя жидкое состояние.

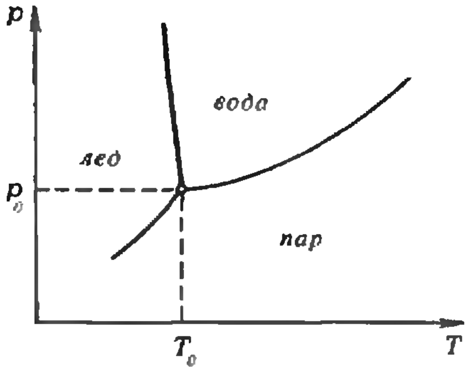


Рис. 1.

В результате пар кристаллизуется в местах пересечения лучей снежинок или там, где соприкасаются разные снежинки. Изменяется не только форма снежинок (вспомните снежные льдинки в виде крупы на дорожках в конце зимы), но и отдельные снежинки смерзаются. Более плотные участки предварительно утрамбованного снега смерзаются быстрее. Снег твердеет и может превратиться в лед в тех местах, где он уже успел стать твердым. Образование твердого наста «охотнее всего» протекает зимой, в морозы, когда внизу под снегом теплее, чем на поверхности. При этом в глубине снежного покрова давление насыщенных паров, а следовательно, и их концентрация больше, чем на поверхности. Из-за разницы концентраций пар диффундирует к поверхности снега, и лыжня леденеет от глубинного водяного пара, а не от воды, образованной из снега вследствие чрезмерного давления лыж на снег, как кто-либо из вас мог ошибочно подумать.

---

*) Этот вопрос подробно обсуждался в статье А. А. Абрикосова «История росинки» в июльском выпуске «Кванта».

В дальнейшем судьба ледяной лыжни иная, нежели соседних с ней сугробов, где снег под действием солнца и ветра быстрее сублимирует. Забавно, что имеет место своеобразный парниковый эффект: лед прозрачен для солнечных лучей, а теплообмен снега подо льдом с внешним пространством мал — ветер и конвекция под ледяной коркой практически отсутствуют. В солнечный морозный день снег нагревается подо льдом, быстрее сублимирует и может даже начать таять. Подо льдом снег начинает исчезать! Именно об этом в погожий весенний день «сообщает» нам шорох опадающих льдинок лыжни.

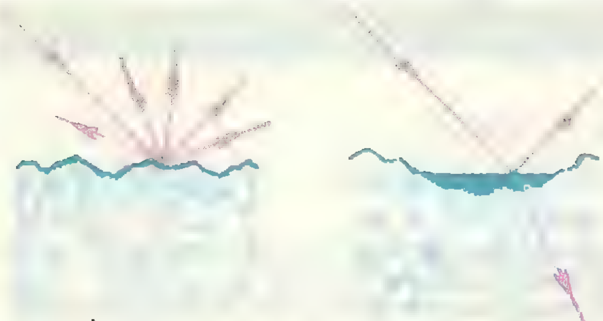
Обратимся теперь к левой фотографии, на которой показана светлая лыжня. Эта лыжня сравнительно новая. В феврале или в начале марта, незадолго до съемки, по лыжне проехало много лыжников. Они основательно утрамбовали снег, которого метели подсыпали немало. Снег на лыжне сравнительно свежий, светлый. Но почему лыжня светлее фона и почему она выше общего уровня снега?

Можно было бы предположить, что накануне выпал снег, и ветром его намело на лыжню побольше, чем рядом на открытом месте; на следующий день снег вокруг стаял или испарился, а на лыжне он остался, поэтому лыжня и белая. Но лыжня, подобная той, которая была сфотографирована, бывает светлой на фоне снега независимо от того, прошел накануне снег или нет. Светлые лыжни часто попадаются вблизи городов весной, когда вовсю тает снег; бывает так, что почти весь снег на земле растаял, а следы от лыжни еще тянутся белыми полосами по земле ...

Предложим другое объяснение. Светлая лыжня на более темном снежном фоне — это «автограф» интересного физического процесса, который можно было бы назвать радиационной неустойчивостью границы грязного снега, если пользоваться научной терминологией. Под словом «грязь» подразумевается пыль, сажа, пепел, словом загрязнения, которые поступают в снег из атмосферы. Грязь, в отличие от снега, хорошо поглощает видимое излучение: она черная! Частицы грязи находятся в контакте со снегом. Поэтому грязный снег лучше прогревается солнцем, чем чистый, и, следовательно, быстрее испаряется (или тает). Но чем больший слой снега испарится, тем грязнее станет его поверхность: грязь не испаряется, а накапливается на «подвижной» границе снежного покрова. А грязная поверхность еще больше будет прогреваться солнцем и т. д. Поэтому если в каком-либо месте снежного покрова снег испарится быстрее, то это место будет «чернее» соседних с ним участков, и в дальнейшем с этого места снег будет испаряться быстрее. Под действием солнечных лучей первоначально плоская снежная поверхность становится рельефной со светлыми (высокими) и темными (низкими) участками.

Теперь обратимся к «черным» следам (средняя фотография). Похоже, что эта лыжня никогда не была «наезженной». Скорее всего, здесь когда-то проехали два-три лыжника и оставили примятый, но еще не слишком плотный след. В дальнейшем под действием солнца снег на такой лыжне испаряется быстрее, чем окружающий (утопленная лыжня лучше защищена от холодного ветра, чем снег на открытом месте). Став темной, лыжня далее испаряется еще быстрее. И в конечном счете она выделяется на окружающем фоне благодаря тем же процессам, которые «виноваты» в существовании белой лыжни на грязном снегу.

У «черной» лыжни есть одна интересная особенность, на которую не всякий наблюдатель обратит внимание. Чем сильнее припекает солнце, тем более темной становится лыжня. Снег, пропитанный водой, отражает видимое излучение намного хуже, чем сухой снежный наст. В момент фотографирования (это было около полудня) темная лыжня как раз стала «набухать» под солнечными лучами и



а) б)

Рис. 2.

потемнела еще больше. Если подойти к такой лыжне поближе, то можно заметить, что снег на лыжне пропитался водой.

Сказанное выше можно сформулировать на языке физики, воспользовавшись определением альбедо и оптическими постоянными воды и снега.

Альбедо матовой поверхности — это полный, или, как говорят, интегральный, коэффициент отражения или рассеяния света, т. е. отношение отраженного (или рассеянного) светового потока к падающему. Чистый снег почти полностью рассеивает падающий на него свет. Альбедо снега обычно около 0,9, а иногда (для самого чистого снега) оно достигает даже величины 0,98.

Снег, покрытый или смоченный водой,— это уже не матовая поверхность, а гладкая в оптическом смысле. Такая поверхность отражает свет по известным нам законам геометрической оптики: от гладкой поверхности воды отражается малая часть падающего потока света (рис. 2). При нормальном падении коэффициент отражения света от поверхности воды близок к 2 %.

Качественно то, что происходит с темной лыжней, похоже на простой опыт, когда в стакан с сахарным песком наливают немного чистой воды: при подходящем освещении содержимое стакана сразу же темнеет.

Не надо думать, что образование рельефа на снежной или ледяной поверхности связано только с наличием грязи. Представим себе, что поверхность чистого снега по какой-то причине стала немного неровной, с выступами или углублениями, пусть даже небольшими. Тогда разные участки поверхности по-разному наклонены по отношению к падающим солнечным лучам. Поэтому поверхность снега в разных местах будет не одинаково освещаться солнцем. И если таяние или возгонка снега определяются в основном уровнем солнечной радиации, а не другими причинами (скажем, теплым ветром), то более остроконечные снежные выступы, направленные в сторону солнца, будут «стравливаться» под солнцем медленнее, чем плоские ямки около выступов, т. е. рельеф поверхности снега станет более ярко выраженным, чем было первоначально. На чистом снегу образуются снежные конусы или острые языки. Обычно это случается, когда ярко светит солнце, но нет теплого ветра. Такие условия нередко бывают высоко в горах, и весной под ярким солнцем на ледниках «вырастают» изумительной красоты ледяные зубья — кальгоспоры, достигающие высоты около метра.

Подобное образование рельефа поверхности знакомо специалистам по радиационной физике полимеров. В полимерных пленках, облучаемых жестким ультрафиолетовым излучением, наблюдается эффект фототравления поверхности, причем фототравление первоначально гладких поверхностей сопровождается ростом своеобразных «кальгоспор» — неровных выступов, иногда конической формы (микрофотография такой поверхности помещена на первой странице обложки). Разумеется, для полимеров масштаб явления более мелкий: размеры неровностей порядка микрометров. В данном случае, как и для снега, имеет место радиационная неустойчивость границы твердой фазы.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1116—М1120, Ф1128—Ф1132

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 ноября 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1116» или «Ф1128». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М1116. Какое наибольшее число узлов клетчатой бумаги может содержать прямоугольник площадью а) 36; б) S, стороны которого идут по линиям сетки? (Считаются узлы, лежащие внутри и на границе прямоугольника. Площадь клетки принята за 1.)

М1117. Дан произвольный треугольник. Докажите, что а) можно построить три окружности с центрами в его вершинах, попарно касающиеся друг друга (в точках K, L, M — см. рис. 1);
б) если через середину каждой дуги KL, LM, MK, лежащей внутри треугольника, провести касательную к ней, то образуется четыре треугольника, площадь одного из которых (центрального) равна сумме площадей трех других.

А. А. Горбачев

М1118. а) Докажите, что уравнение

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.
б) Сколько имеется таких решений, у которых $z=1988$?

С. Г. Мамиконян

М1119. Назовем *k-звездой* фигуру на плоскости, состоящую из k лучей с общим началом, разбивающих плоскость на k равных углов (по $360°/k$). При каких $k>2$ верно следующее утверждение: для любых k точек плоскости общего положения (никакие три из которых не лежат на одной прямой) существует k-звезда, в каждом из k углов которой содержится ровно одна из этих k точек?

М. Хованов, ученик 10 кл., Москва

М1120. а) Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ задана соотношениями $a_0=0$, $a_n=P(a_{n-1})$, $n=1, 2, \ldots$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, $P(x)>0$ при $x\geqslant 0$. Докажите, что для любых натуральных m и k

$$\text{НОД}(a_m, a_k)=a_{\text{НОД}(m, k)}$$

б) Докажите аналогичное утверждение для последовательности Фибоначчи $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2, \ldots$, задаваемой условием $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$

В. Ф. Лев

Ф1128. На горизонтальной поверхности покоится однородный тонкий обруч массой M и радиусом R. Горизонтальный диаметр обруча представляет собой легкую гладкую трубку, в которую помещен шарик массы m, прикрепленный к обручу двумя пружинами жесткостью k каждая (рис. 2). Удерживая обруч неподвижным, шарик отклонили влево на величину x, после чего предоставили систему себе. Найти ускорение центра обруча в начальный момент времени. Проскальзывание обруча отсутствует.

С. С. Кротов

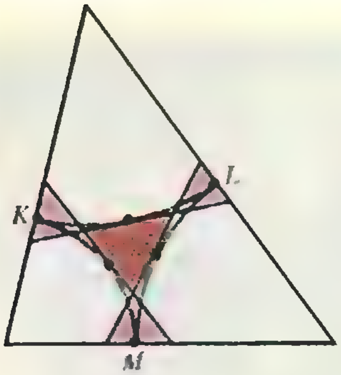


Рис. 1.

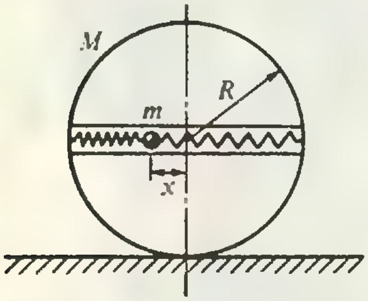


Рис. 2.

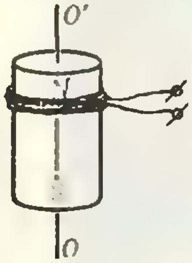


Рис. 3.

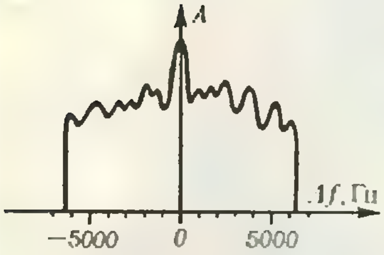


Рис. 4.

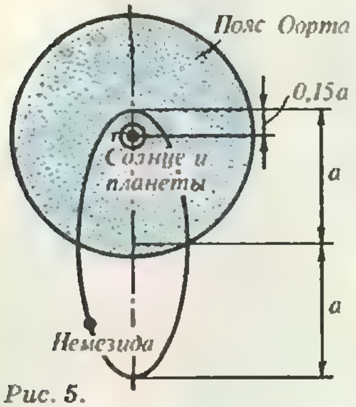


Рис. 5.

Задачник «Кванта»

Ф1129. На цилиндрический постоянный магнит вблизи его полюса надета катушка, имеющая вид узкого кольца (рис. 3). Если трясти катушку так, чтобы она совершала гармонические колебания вдоль оси OO' с амплитудой $A=1$ мм (которая много меньше размеров магнита и катушки) и частотой $f=1000$ Гц, то в ней наводится ЭДС индукции с амплитудой $\mathscr{E}_0=5$ В. Какая сила будет действовать на неподвижную катушку, если пропустить по ней ток $I=200$ мА?

М. М. Цыпин

Ф1130. Колебательный контур состоит из вакуумного конденсатора емкостью C, расстояние между пластинами которого d, и катушки индуктивности. Собственная частота колебаний контура равна ω_0. Какой будет собственная частота, если между пластинами конденсатора поместить свободную точечную частицу массой m, имеющую заряд q? Сила тяжести отсутствует. Краевыми эффектами и силой «электростатического изображения» пренебречь.

Д. А. Купцов

Ф1131. Определить скорость ветра в смерче обычными метеорологическими приборами трудно (поскольку смерч невелик по размеру и движется) и небезопасно. Предложено измерять ее издали с помощью портативного радара (так как внутри смерча много пыли и мелких предметов, он отражает радиоволны). Радар излучает радиоволны на частоте $f_0=10^{10}$ Гц. Спектр отраженного от смерча сигнала приведен на рисунке 4 ($\Delta f=f-f_0$). Найти максимальную скорость ветра в смерче.

Д. А. Купцов

Ф1132. Недавно установлено, что вымирание видов животных на Земле идет особенно интенсивно в течение периодически повторяющихся промежутков времени длительностью $T=6{,}2$ млн лет. Такая закономерность объясняется гипотезой, предполагающей существование звезды Немезиды, являющейся спутником Солнца. Эта слабая и потому невидимая звезда движется по орбите, половина которой расположена внутри так называемого «пояса Оорта», содержащего запас комет (рис. 5). Возмущая движение комет, Немезида вызывает на Земле «кометный дождь», продолжительность которого практически совпадает со временем пребывания Немезиды внутри пояса Оорта.

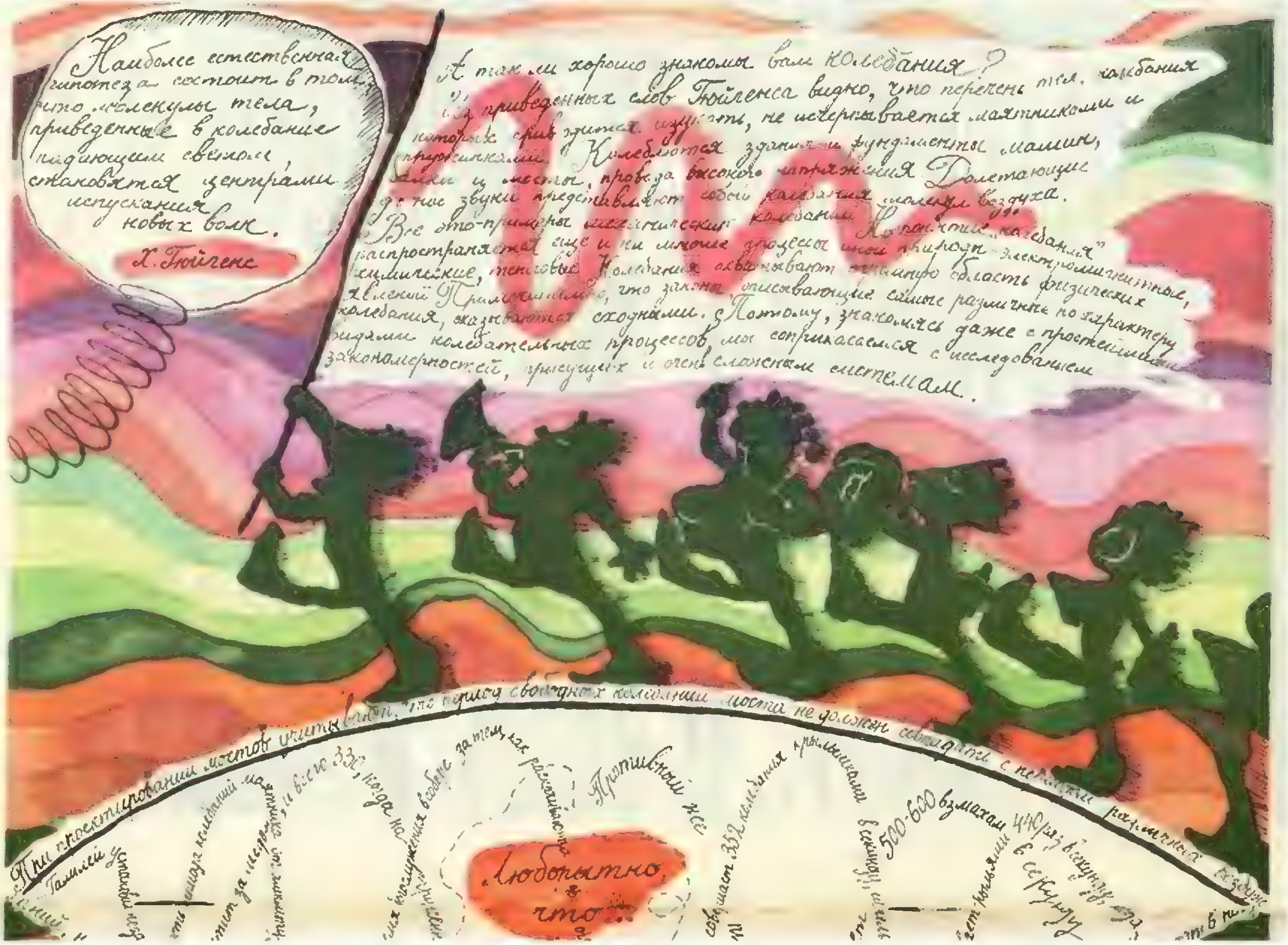
Определите большую полуось a орбиты Немезиды и период ее обращения вокруг Солнца, если предполагается, что перигелий орбиты находится на расстоянии $0{,}15a$ от Солнца. Площадь эллипса $S=\pi ab$, где a и b — полуоси эллипса.

В. Е. Белонучкин

(Продолжение см. на с. 34)

Поправка

В условии задачи М1115, б) (см. «Квант», № 7) пропущено условие $m\geqslant n$.



Наиболее естественная гипотеза состоит в том, что молекулы тела, приведенные в колебание падающим светом, становятся центрами испускания новых волн.

Х. Гюйгенс

А так ли хорошо знакомы вам колебания? Из приведенных слов Гюйгенса видно, что перечень тел, колебания которых приходится изучать, не исчерпывается маятниками и пружинками. Колеблются здания и фундаменты машин, балки и мосты, провода высокого напряжения. Долетающие до нас звуки представляют собой колебания молекул воздуха. Все это — примеры механических колебаний. Но понятие „колебания" распространяется еще и на многие процессы иной природы — электромагнитные, химические, тепловые. Колебания охватывают широкую область физических явлений. Примечательно, что законы, описывающие самые различные по характеру колебания, оказываются сходными. Поэтому, знакомясь даже с простейшими видами колебательных процессов, мы соприкасаемся с исследованием закономерностей, присущих и очень сложным системам.

При проектировании мостов учитывают, что период свободных колебаний моста не должен совпадать с периодом различных воздейс

Любопытно, что...

Галилей установил
…ость колебаний маятника от
…наблюдая за качанием
…когда на
…за тем, как раскачивается
Противный же
совершает 352 колебания крылышками в секунду, шмель
500-600 взмахам
440 раз в секунду
в секунду

...ний, например,— строевого шага, поскольку известен факт, когда рухнул мост при прохождении по нему роты [illegible] в ногу.

..Обыкновенная муха совершает

писк комара соответствует

220. Пчела взмахивает кры-

1. В каком положении шарика нити маятника испытывают наибольшее натяжение?

2. Изменится ли период колебаний маятника обтекаемой формы от того, что мы поместим его в воду? Трением о воду пренебречь.

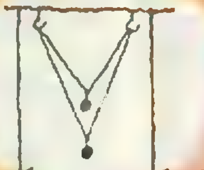
3. Отразится ли на периоде колебаний качелей то, что вместо одного человека на них сядут двое?

4. Сохранятся ли колебания шарика, закрепленного на пружине, если вся система придет в состояние полной невесомости?

5. Шарик, закрепленный на пружине с жесткостью k, совершает колебания с амплитудой A. Чему равна кинетическая энергия шарика в момент прохождения положения равновесия?

6. Маятниковые часы спешат. Что нужно сделать, чтобы эти часы шли верно,— опустить их или поднять на определенную высоту?

7. На штативе подвешены два маятника, как показано на рисунке. Можно ли, не дотрагиваясь до маятников, привести в колебательное движение лишь один из них?



8. Вода, которую несут в ведре, начинает сильно расплескиваться. Можно ли прекратить расплескивание, не останавливаясь?

9. Изменится ли период колебаний заряженного шарика, если в точке закрепления нити поместить точно такой же заряд?

10. Скажется ли на частоте колебаний железного шарика, подвешенного на нити, помещенный под ним электромагнит?

11. Как изменится частота электромагнитных колебаний в контуре, если а) в катушку ввести железный сердечник? б) раздвинуть пластины конденсатора?

12. За счет чего поддерживается ток в колебательном контуре, когда появляющаяся на конденсаторе разность потенциалов препятствует его протеканию?

Микроопыт

Перекиньте через крючок в потолке шнур, привяжите к одному его концу небольшой груз и, слегка раскачав, понемногу „выбирайте" другой конец шнура.

Как при этом изменится период колебаний?

Что читать в «Кванте» о колебаниях
(публикации последних лет)

1. «О музыкальных звуках и их источниках» — 1985, № 9, с. 26;
2. «Повторим колебания» — 1985, № 10, с. 48;
3. «Физика музыкальной гармонии» — 1987, № 5, с. 41;
4. «Гармонические колебания и равновесие» — 1987, № 9, с. 42.

Задачник „Кванта"

[redacted]

Problems

M1116 — M1120, P1128 — P1132

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 1st, 1988 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

M1116. What maximal number of vertices of square lined paper can be contained in a rectangle of area a) 36; b) S, whose sides are parts of the lines of the lined paper? (Both the vertices lying inside the rectangle and those on its boundary are counted. The area of the little squares is assumed equal to 1)

M1117. Given an arbitrary triangle, prove that a) it is possible to construct three circles with centres at the triangle's vertices, pairwise tangent at the points K, L, M (see figure Рис. 1);
b) if tangents to the arcs KL, LM, MK contained in the triangle are drawn from their midpoints, then four triangles are formed and the area of one of them (the central one) equals to the sum of that of the three others.

A. A. Gorbachev

M1118. a) Prove that the equation

$$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2 \qquad (*)$$

has infinitely many integer solutions.
b) How many such molutions are there with $z=1988$?

S. G. Mamikonyan

M1119. A plane set, consisting of k rays with common origin dividing the plane into k equal angles (of $360°/k$ each) will be called a *k-star*. For what $k>2$ is the following statement true: for any k points in general position (no three of which are collinear) there exists a k-star containing precisely one of these points in each of its k angles.

M. Khovanov, 10th form pupil, Moscow

M1120. a) The sequence a_0, a_1, a_2... is given by the relations $a_0=0$, $a_n=P(a_{n-1})$, $n=1,2,...$ where $P(x)$ is a polynomial with integer coefficients, $P(x)>0$ if $x\geqslant 0$. Prove that for positive integers m and k

$$GCD(a_m, a_k)=a_{GCD(m,k)},$$

where *GCD* means greater common divisor.
b) Prove a similar statement for the Fibonacci sequence $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=1$, $a_3=2$,..., given by the condition $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$, $n=1,2,...$

V. F. Lev

P1128. A thin uniform hoop of mass M and radius R is placed on a plane horizontal surface. The hoop has a horizontal diameter made out of a light smooth pipe containing a small ball of mass m connected to the hoop by two springs of elasticity k each (see figure Рис. 2). Holding the hoop in place, the ball is moved ot the left to a distance x from the centre, and then system is left to itself. Find the acceleration of the hoop's centre at the initial moment. The hoop does not slip or slide.

S. S. Krotov

P1129. A coil shaped like a thin ring is put on a constant cylindrical magnet near the latter's pole as shown on figure Рис. 3. If the coil shakes so that it effects harmonic oscillations along the OO' axis with amplitude A- 1 mm (which is much less than the size of the magnet or of the coil) and frequency f-1000Hz, then the EMF $\mathcal{E}$-5V is induced in the coil. What force will act on the motionless coil if a current of I-200mA is sent through it?

M. M. Tsypin

P1130. An oscillation circuit consists of a vacuum capacitor of capacity C with plates located at the distance d and an inductive

coil. The self oscillation frequency of the circuit is W_0. Now will it change if a free particle of mass m and charge q is placed between the plates? There is no force of gravity, boundary effects and the force of "electrostatic representation" are negligible.

D. A. Kuptsov

P1131. It is difficult and dangerous to measure wind velocity in a cyclone with ordinary meteorological instruments (since cyclones are small and move rapidly). It was proposed to measure it from a distance using radar (since the inside of the cyclone contains a lot of dust and small objects which reflect radiowaves). The radar emits waves of frequency f_0. The spectrum of the reflected radio signal is shown on figure Рис. 4. ($\Delta f = f - f_0$). Find the maximal wind velocity in the cyclone.

D. A. Kuptsov

P1132. It was recently established that the extinction of animal species takes place especially rapidly during periodically repeated time intervals of T- 6.2 million years. This regularity is explained by a hypothesis, according to which the Sun has a satellite, called Nemesidis. This weak and hence invisible star moves along an orbit, half of which is located within the so-called "Oort belt", containing a reserve of comets (see figure Рис. 5). Perturbing the motion of comets, Nemesidis generates a "star rain" on Earth, whose duration practically coincides with period of time when Nemesidis is within the Oort belt. Determine the larger semiaxis a of Nemesidis' orbit and its period of revolution about the Sun if it is known that the perihelion of the orbit is $0.15a$ from the Sun. The area of an ellipse is $S = \pi ab$, where a and b are the semiaxes.

V. E. Belonuchkin

Решения задач

M1096—M1098, M1100*), Ф1108—Ф1112

M1096. *Диаметр d окружности разбит на k равных частей и через каждую точку деления проведена хорда, перпендикулярная диаметру. Докажите, что сумма длин всех проведенных хорд не меньше $0,5\,kd$ и не больше $0,8\,kd$.*

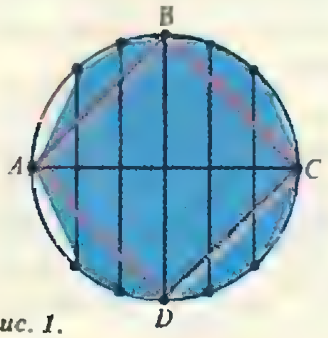


Рис. 1.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$ — хорды, перпендикулярные диаметру $AC = d$ и делящие его на k равных частей. Выпуклый $2k$-угольник с вершинами в концах этих хорд и диаметра (на рисунке 1 — голубой) состоит из треугольников и $k-2$ трапеций с одинаковыми высотами d/k и основаниями $a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}$; его площадь равна

$$S = \frac{d}{k}\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + \ldots + \frac{a_{k-1}+a_k}{2} + \frac{a_k}{2}\right) = \frac{d(a_1+a_2+\ldots+a_k)}{k}.$$

Таким образом, интересующая нас сумма длин хорд равна Sk/d. Поскольку голубой треугольник лежит в круге диаметром d, его площадь меньше $\pi d^2/4$, откуда получаем оценку сверху: $Sk/d < \pi d/4 < 0,8kd$. С другой стороны, площадь голубого многоугольника не меньше площади красного квадрата $ABCD$; отсюда получается оценка снизу: $Sk/d \geqslant 0,5kd$. Правда, при нечетном $k = 2m+1 \geqslant 3$ красный квадрат двумя уголками при вершинах B и D слегка вылезает за пределы голубого многоугольника, но эти уголки

---

*) Решение задачи M1099 содержится в статье М. В. Волкова, Н. Н. Силкина «Кого послать на Марс?» (см. с. 51)

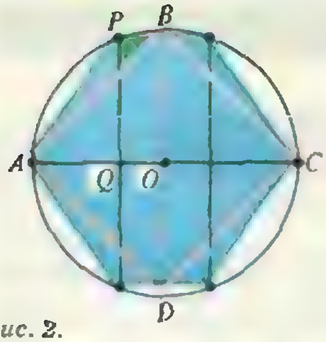


Рис. 2.

оценку не портят. Например, можно показать, что красный треугольник на рисунке 2 меньше подобного ему зеленого: поскольку

$$OQ=\frac{d}{2(2m+1)} \text{ и } PQ=\sqrt{QA\cdot QC}=\frac{d\sqrt{m(m+1)}}{2m+1},$$

получаем, что катет красного треугольника

$$BO-PQ=\frac{d}{2}\left(1-\frac{2\sqrt{m(m+1)}}{2m+1}\right)=\frac{d(2m+1-2\sqrt{m(m+1)})}{2(2m+1)}=$$

$$=\frac{OQ}{2m+1+2\sqrt{m(m+1)}}\leqslant\frac{OQ}{3+2\sqrt{2}}<\frac{OQ}{2}.$$

Заметим, что при больших k сумма длин хорд, как ясно из решения, почти равна $\pi dk/4$ (предел отношения этой суммы к k равен $\pi d/4$). Те, кто знаком с понятиями интеграла и интегральной суммы, несомненно, увидят в сюжете нашего решения вычисление интеграла от функции $f(x)=\sqrt{x^2-d^2}$ на отрезке $-d\leqslant x\leqslant d$ с помощью интегральных сумм (точнее, «методом трапеций»).

А. Чагиров, Р. Харитонов

М1097. *Координаты вершин равнобедренного треугольника — целые числа. Докажите, что квадрат основания — четное число.*

Параллельно перенесем данный треугольник ABC, в котором $AB=BC$, так, чтобы вершина A попала в начало координат. Тогда координаты (b_1, b_2) и (c_1, c_2) вершин B и C останутся целыми. Из равенства $AB^2=BC^2$, записанного в координатах:

$$b_1^2+b_2^2=(b_1-c_1)^2+(b_2-c_2)^2,$$

вытекает, что $AC^2=c_1^2+c_2^2=2(b_1c_1+b_2c_2)$ — четное число.

В. В. Произволов

М1098. *На окружности расставлено n точек, занумерованных подряд числами $1, 2, \ldots, n$. Двое играют в следующую игру. Каждый по очереди проводит хорду, соединяющую точки с номерами одной четности. Каждая хорда не должна иметь общих точек (даже концов) с проведенными ранее. Побеждает тот, кто сделал последний ход. Выясните, кто из игроков — начинающий или его партнер — имеет выигрышную стратегию (при каждом $n=4, 5, 6, 7, \ldots$).*

Ответ: при n кратном 4, а также при нечетном n выигрывает первый (начинающий) игрок, а при $n=4k+2$ (k целое) — второй.

Удобно считать, что точки с четными и нечетными номерами изображены разными цветами — скажем, белым и черным,— и что точки делят окружность на равные части.

Во всех случаях основная идея выигрышной стратегии — использовать симметрию.

Стратегия 1-го игрока при $n=4k$ — провести первым ходом диаметр, а затем на каждый ход 2-го отвечать проведением симметричной относительно этого диаметра хорды — см. рис. 1. (Такой ход возможен, поскольку после каждого хода 1-го игрока позиция будет симметрична относительно диаметра. Здесь важно, что диаметрально противоположные точки имеют один и тот же цвет, и симметричные относительно диаметра точки — тоже.)

При $n=4k+2$ выигрышная стратегия 2-го игрока — на каждый ход 1-го игрока отвечать проведением хорды, симметричной относительно центра ок-

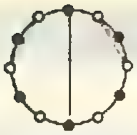


Рис. 1.

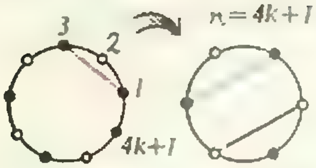


Рис. 2.

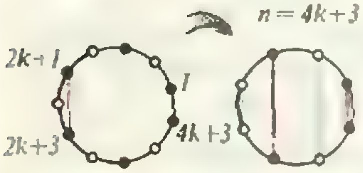


Рис. 3.

ружности. Здесь существенно, что диаметрально противоположные точки имеют разный цвет — ниже мы воспользуемся тем, что уже при одном этом условии игра проигрышна для начинающего.

Пусть n — нечетно (тогда на окружности оказываются две соседние черные точки, с номерами 1 и n). При $n=4k+1$ 1-й игрок обеспечит себе выигрыш, если первым ходом соединит, например, черные точки с номерами 1 и 3 (рис. 2), тем самым сведя дело к аналогичной игре с $n=4(k-1)+2$, где начинающий проигрывает. Похожий, но еще более хитрый ход есть у 1-го игрока и при $n=4k+3$. Здесь он может отрезать три точки так, чтобы сохранилась симметрия относительно оси — для этого достаточно соединить черные точки с номерами $2k+1$ и $2k+3$ (рис. 3).

Если мысленно сдвинуть оставшиеся $4k$ точек так, чтобы они расположились по окружности на равных расстояниях, то *диаметрально противоположные точки будут разного цвета* (хотя белые и черные точки и не чередуются), и потому начинающий здесь (т. е. 2-й игрок) проигрывает.

Более тонких соображений требует тот вариант игры, в котором игрок, делающий последний ход, проигрывает. Разбор этого варианта мы предоставляем читателям.

В. Г. Чванов

М1100*. *На берегу прямолинейной реки лежат бревна, каждое из которых составляет с линией берега угол меньше 45° (бревна — не пересекающие друг друга отрезки; их число конечно). Докажите, что хотя бы одно из бревен можно закатить в реку, не задевая остальных. (Бревно можно катить лишь в перпендикулярном ему направлении, не поворачивая.)*

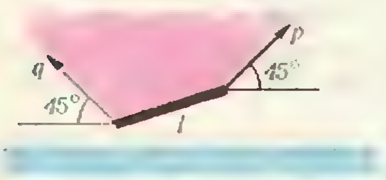


Рис. 1.

Пусть берег — верхняя полуплоскость, линия берега — горизонтальная прямая b. Рассмотрим некоторое бревно l (составляющее с прямой b угол меньше 45°). Проведем из его концов лучи, составляющие углы по 45° с прямой b: из правого конца — в направлении p «вправо — вверх», из левого конца — в направлении q «влево — вверх» (рис. 1), и рассмотрим множество точек, лежащих выше ломаной, состоящей из бревна l и этих двух лучей. Ясно, что выкатывая любое бревно, удовлетворяющее условию задачи и не имеющее общих точек с этим множеством, мы не можем задеть бревно l.

Удобно рассмотреть несколько большее множество, связанное с бревном l,— назовем его «тенью l» и обозначим U_l (рис. 2): его граница — ломаная, которая идет от правого конца бревна l в направлении p; затем, если ломаная упирается во внутреннюю точку какого-то бревна — по этому бревну вправо, от его правого конца — вновь по направлению p, и т. д., и также аналогично — от левого конца бревна l (здесь отрезки ломаной идут, чередуясь, по бревнам в направлении q). Очевидно, для разных бревен l_1 и l_2 их тени не совпадают. При этом, если $l_1 \subset U_{l_2}$ (l_1 лежит в тени l_2), то $U_{l_1} \subset U_{l_2}$. Теперь ясно, что в цепочке бревен $l_1, l_2, l_3, \ldots$, в которой каждое бревно мешает выкатить предыдущее, никакое бревно не встретится дважды: для нее $U_{l_1} \subset U_{l_2} \subset U_{l_3} \subset \ldots$

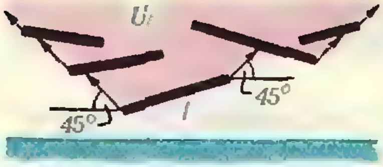


Рис. 2.

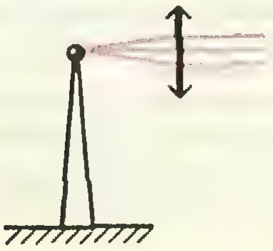
Поэтому, начав строить такую цепочку, мы непременно придем к последнему бревну — его заведомо можно выкатить, не задевая остальные.

В. Г. Ильичев

Ф1108. *Для наглядной демонстрации воздействия лазерного излучения на вещество изготовлена мишень в виде маленького серебряного шарика, закрепленного в вершине легкого пустотелого конуса (см. рисунок). Одна сторона шарика отполирована, а другая зачернена. Мишень устанавливают основанием конуса на шероховатую горизонтальную плоскость и на поверхности шарика-мишени фокусируют излучение от мощного импульсного лазера.*

Оцените, при какой минимальной энергии светового импульса произойдет опрокидывание мишени. На какую из сторон шарика (отражающую или поглощающую) следует направить излучение?

Считайте, что масса шарика $m=3$ г и много больше массы конической подставки; высота конуса $h=6$ см, диаметр основания $d=3$ мм; коэффициент отражения отполированной поверхности $r=0{,}99$; коэффициент поглощения зачерненной поверхности $a=0{,}99$; длительность лазерного импульса $\tau=10$ нс.



Эта задача возникла из реально существующего демонстрационного эксперимента. Световой пучок неодимового импульсного лазера с энергией в импульсе 2 Дж и длительностью импульса 10 нс направляется на верхний край вертикально стоящей мишени — деревянного клина; при этом если световой пучок сфокусирован с помощью линзы и падает на зачерненную поверхность клина, то мишень опрокидывается. Если же пучок не сфокусирован или же попадает на незачерненную поверхность, мишень не опрокидывается. Для простоты расчетов в условии задачи деревянная клинообразная мишень заменена на серебряный шарик.

Для того чтобы мишень опрокинулась, необходимо, чтобы под воздействием светового пучка шарик приобрел кинетическую энергию, достаточную для подъема центра тяжести шарика на высоту

$$H=\sqrt{h^2+\frac{d^2}{4}}-h\approx\frac{d^2}{8h},$$

т. е. необходимо выполнение условия

$$\frac{mv^2}{2}=mgH.$$

Это означает, что импульс, сообщенный шарику, должен быть равен

$$P=mv\approx\frac{md}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\approx 6\cdot 10^{-5}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}.$$

Предположим, что опрокидывание мишени происходит за счет светового давления. В самом деле, каждый поглощенный фотон передает шарику импульс $P_0=E_0/c=h\nu/c$, где $E_0=h\nu$ — энергия фотона, c — скорость света. Умножив это выражение на число фотонов в излучении, мы получим полный импульс P, переданный шарику фотонами, откуда найдем полную энергию E светового пучка, необходимую для опрокидывания мишени:

$$E=Pc\approx 2\cdot 10^4\ \text{Дж}.$$

Для опрокидывания мишени не хватает 4-х порядков! Значит, в этом эксперименте световое давление не играет главной роли.

Разгадка эффекта состоит в том, что энергия лазерного пучка, поглощаясь зачерненной поверхностью, производит быстрый локальный разогрев и испарение вещества мишени в области фокусировки пучка. Струя паров и создает ту реактивную силу, которая опрокидывает мишень. Сделаем соответствующие расчеты.

Пусть вся световая энергия поглотилась и пошла на испарение массы Δm вещества. Тогда

$$\Delta m \approx \frac{E}{L},$$

где L — удельная теплота парообразования (здесь мы не учитываем энергию, необходимую для разогрева вещества до температуры плавления, для плавления и для дальнейшего разогрева до температуры кипения, так как она в несколько раз меньше энергии, необходимой для испарения). Средняя квадратичная скорость теплового движения молекул пара равна

$$u = \sqrt{\frac{3RT}{M}},$$

где R — универсальная газовая постоянная, T — температура кипения, М — молярная масса вещества. Для серебра эта скорость составляет

$$u = 0{,}7 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Максимальный импульс, уносимый парами и, по закону сохранения импульса, передаваемый шарику, равен $\Delta m u$. Для опрокидывания мишени необходимо, чтобы этот импульс был равен найденному нами значению P:

$$\Delta m u = P.$$

Тогда необходимая энергия излучения

$$E = \Delta m L = \frac{PL}{u} \approx 0{,}2 \text{ Дж},$$

где $L = 2{,}2 \cdot 10^6$ Дж/кг. А это на порядок меньше энергии излучения нашего лазера.

При получении этой оценки мы не учитывали, что часть световой энергии отразится мишенью, часть пойдет на ее нагрев (а не только на частичное испарение) и, наконец, что струя паров будет истекать расходящимся пучком и, следовательно, сообщит шарику несколько меньший импульс. Все это, конечно, означает, что оценка занижена, но, как оказывается, не более, чем на порядок.

И последнее. При облучении не поглощающей, а отражающей поверхности шарика для опрокидывания мишени потребуется энергия по крайней мере в $1/(1-r) = 100$ раз бо́льшая.

Следовательно, если мишень при облучении ее зачерненной поверхности опрокидывается при энергии светового импульса

$$E > 0{,}2 \text{ Дж},$$

то при облучении отражающей поверхности для опрокидывания потребуется энергия

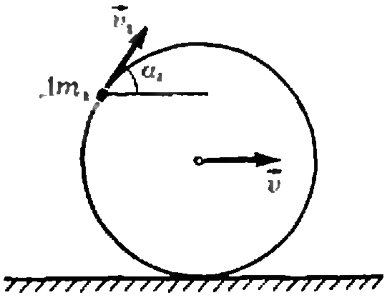
$$E > 20 \text{ Дж},$$

что на порядок больше энергии неодимового импульсного лазера.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф1109. *С наклонной плоскости скатываются две бутылки: одна — пустая,*

Нестрогий, качественный ответ на первый вопрос можно дать сразу. При скатывании пустой бутылки ее потенциальная энергия переходит в кинетическую *другая — заполненная водой. Какая из них скатится быстрее? Какая из этих бутылок поднимется на бо́льшую высоту, если их пустить вверх по наклонной плоскости с одинаковыми начальными скоростями? Считать, что проскальзывания нет.*



энергию как поступательного, так и вращательного движения. Если внутри бутылки имеется вода, то она, благодаря малой вязкости, во вращении практически не участвует. В результате во втором случае бо́льшая часть начальной потенциальной энергии переходит в кинетическую энергию поступательного движения, и бутылка с водой скатится быстрее пустой бутылки.

Теперь приведем более строгое решение. Найдем, чему равна кинетическая энергия пустой бутылки массой m, которая катится по горизонтальной поверхности без проскальзывания со скоростью v. Для простоты заменим бутылку пустотелым цилиндром и будем считать, что вся его масса сосредоточена в тонких стенках.

Все точки цилиндра участвуют в сложном движении: это поступательное движение со скоростью центра масс v и вращение с линейной скоростью v в системе отсчета, связанной с центром масс.

Рассмотрим небольшой участок «обода» массой Δm_i. Его скорость складывается из скорости v_i в системе центра масс и скорости v самого центра масс (см. рисунок). Кинетическая энергия этого участка равна

$$\Delta E_{ki} = \frac{\Delta m_i(|\vec{v}_i + \vec{v}|)^2}{2} = \frac{\Delta m_i(v_i^2 + v^2 + 2v_i v \cos\alpha_i)}{2},$$

где угол α_i для разных участков принимает значения от 0 до 2π. Полная кинетическая энергия цилиндра складывается из кинетических энергий всех его участков:

$$E_k = \sum_i \Delta E_{ki} = \sum_i \frac{\Delta m_i(v_i^2 + v^2)}{2} = \sum_i \Delta m_i v^2 = mv^2$$

(здесь мы учли, что для всех участков $v_i = v$, а $\cos\alpha_i$ принимает все возможные значения — и положительные, и отрицательные, так что $\sum\limits_i \cos\alpha_i = 0$.)

Если цилиндр скатывается по наклонной плоскости, то, спустившись с высоты h, он приобретет скорость v, которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$mgh = mv^2,$$

и

$$v = \sqrt{gh}. \qquad (1)$$

Отсюда видно, что эта скорость в $\sqrt{2}$ раз меньше скорости для случая скатывания без вращения. Это связано с тем, что потенциальная энергия цилиндра переходит в кинетическую энергию как поступательного движения, так и вращательного.

Когда внутри цилиндра находится вода (наш случай бутылки с водой), которая из-за незначительной вязкости во вращение практически не вовлекается, полная кинетическая энергия равномерно катящегося цилиндра массой m, заполненного водой массой M, будет равна

$$E_k = mv^2 + \frac{Mv^2}{2} = \left(m + \frac{M}{2}\right)v^2.$$

После спуска с высоты h по наклонной плоскости такой цилиндр за счет потенциальной энергии $(m+M)gh$ приобретет кинетическую энергию $(m+M/2)v^2$, так что его скорость составит

$$v=\sqrt{\frac{m+M}{m+M/2}gh}=\sqrt{\left(1+\frac{M}{2m+M}\right)gh}. \qquad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), видим, что во втором случае скорость оказывается больше. Это означает, что на любом участке спуска с наклонной плоскости скорость бутылки с водой будет больше скорости пустой бутылки. Поэтому полная бутылка и скатится быстрее пустой.

Второй вопрос задачи — это, по существу, по-другому сформулированный первый. Мысленно обратим движение в первом случае и сразу приходим к выводу, что пустая бутылка, имея меньшую начальную скорость, чем полная, закатится на ту же высоту. А тогда, если начальные скорости обеих бутылок будут одинаковыми, пустая бутылка поднимется выше полной.

А. И. Буздин

Ф1110. *Почему, когда при температуре около 0 °С ешь мороженое, пар изо рта начинает идти сильнее?*

В выдыхаемом человеком воздухе содержится водяной пар. При соприкосновении с более холодным окружающим воздухом он охлаждается и конденсируется, превращаясь в туман, который мы видим и называем паром (хотя в действительности пар невидим).

При температуре около 0 °С этот процесс происходит достаточно далеко от человека, когда выдыхаемый воздух уже смешался с окружающим. Если человек ест мороженое, которое холоднее окружающего воздуха, практически весь выдыхаемый пар конденсируется уже во рту и вылетает сразу в виде тумана.

М. В. Чумаков

Ф1111. *Равномерно заряженную полусферу разрезали на две части так, как показано на рисунке 1 (по линии aa′), и эти части разнесли на большое расстояние. В какой точке напряженность электрического поля больше — в точке A′ или в точке A″?*

Для определенности предположим, что заряд полусферы положительный. Из симметрии ясно, что сферический сегмент в точке A' создает электрическое поле напряженностью $\vec{E}_1$, направленной вправо, вдоль оси симметрии, а сферический слой в точке A'' создает поле напряженностью $\vec{E}_2$, направленной влево (рис. 2).

Дополним мысленно сферический слой равномерно заряженной полусферой (рис. 3). Тогда поле в точке A'' увеличится: $E_3 > E_2$. Но $E_3 = E_1$, поскольку напряженность поля в любой точке внутри равномерно заряженной сферы равна нулю.

Итак, $E_1 > E_2$.

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

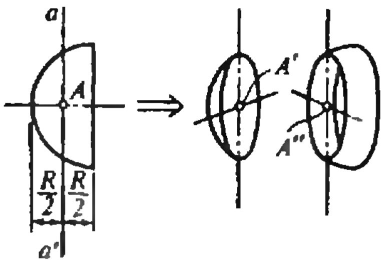


Рис. 1.

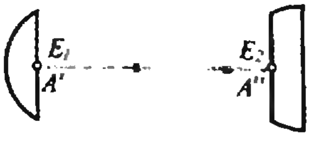


Рис. 2.

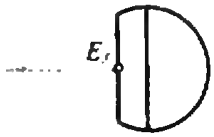
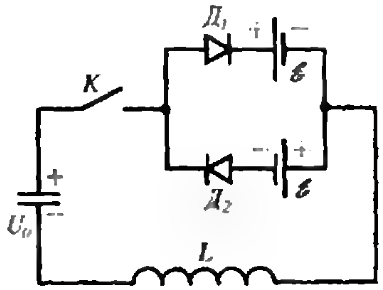


Рис. 3.

Ф1112. *В схеме, приведенной на рисунке, при разомкнутом ключе К конденсатор заряжен до некоторого напряжения U_0. Ключ замыкают, и через какое-то время ток в цепи прекращается. Какова должна быть величина U_0, чтобы напряжение на конденсаторе установилось равным $U_1=1$ В при изменившейся полярности пластин, если ЭДС каждой батареи в цепи $\mathscr{E}=1{,}5$ В? Диоды считать идеальными.*



Как видно из рисунка, через диод $Д_1$ ток может течь только слева направо, а через диод $Д_2$ — только справа налево. Таким образом, данная цепь представляет собой колебательный контур, содержащий источник тока с постоянной ЭДС, включенной каждый раз навстречу току.

Пусть в некоторый момент времени при замкнутом ключе K ток в цепи отсутствует, напряжение на конденсаторе равно U_n, а заряд равен $q_n=CU_n$ (верхняя пластина конденсатора заряжена положительно). В течение ближайшей следующей половины периода конденсатор будет перезаряжаться — сначала разряжаться, потом заряжаться зарядами противоположных знаков. При этом ток неизменного направления будет течь через диод $Д_1$, совершая работу против сторонних сил в источнике. Через полпериода заряд конденсатора станет равным q_{n+1}, так что через источник протечет заряд q_n+q_{n+1} (знак заряда пластин изменяется).

По закону сохранения энергии убыль энергии электрического поля конденсатора равна работе против сторонних сил:

$$\frac{q_n^2}{2C}-\frac{q_{n+1}^2}{2C}=(q_n+q_{n+1})\mathscr{E},\qquad \text{откуда}$$

$$\frac{q_n}{2C}-\frac{q_{n+1}}{2C}=\mathscr{E},\quad \text{или}\quad U_n-U_{n+1}=2\mathscr{E}.$$

Таким образом, через полпериода напряжение на конденсаторе уменьшится на $2\mathscr{E}=3$ В. Так будет происходить до тех пор, пока напряжение (при силе тока, равной нулю) не окажется меньше, чем $\mathscr{E}=1{,}5$ В. Поскольку по условию задачи конечное напряжение равно 1 В при изменившейся полярности пластин, начальное напряжение на конденсаторе (измеренное в вольтах) может быть равно

$$U_0=4+6n,\ \text{где}\ n=0,1,2,\ldots$$

При получении этой серии решений предполагалось, что в каждую половину периода колебаний, включая последнюю, знак зарядов пластин изменяется. Однако возможен случай, когда в последнюю половину периода заряд изменяется от q_{N-1} до q_N без изменений знака. Тогда через источник протекает заряд $q_{N-1}-q_N$, и закон сохранения энергии записывается в виде:

$$\frac{q_{N-1}^2}{2C}-\frac{q_N^2}{2C}=(q_{N-1}-q_N)\mathscr{E}.$$

Отсюда получаем

$$U_{N-1}+U_N=2\mathscr{E}.$$

Таким образом, $U_{N-1}=2\mathscr{E}-U_N=2$ В (верхняя пластина конденсатора имеет отрицательный заряд), $U_{N-2}=U_{N-1}+2\mathscr{E}=5$ В (верхняя пластина заряжена положительно) и т. д. Начальное напряжение в этом случае может быть равно

$$U_0=5+6n,\ \text{где}\ n=0,1,2,\ldots$$

Итак, имеется две серии решений:

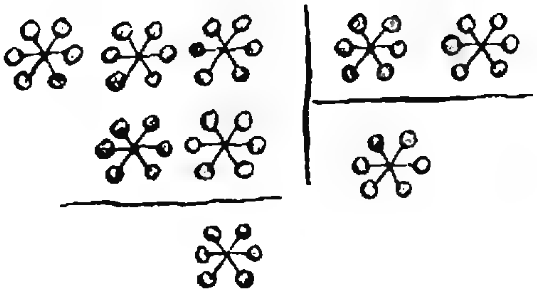
$$U_0=\begin{cases}4+6n,\\5+6n,\end{cases}\quad n=0,1,2,\ldots$$

А. И. Киркинский

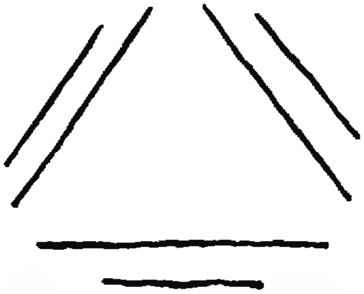
„Квант" для младших школьников

Задачи

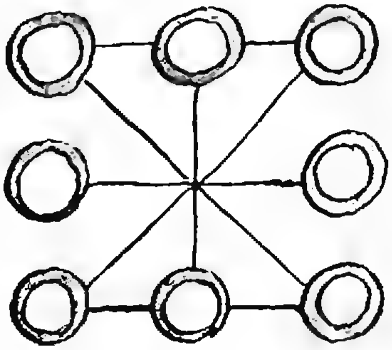
1. В этом зашифрованном примере на деление все девять цифр различны. Расшифруйте его.



2. Можно ли соединить некоторые концы отрезков, изображенных на рисунке, отрезками так, чтобы получилась одна несамопересекающаяся ломаная?



3. Расставьте в кружочки цифры от 1 до 8 так, чтобы в горизонтальных рядах получились числа, являющиеся квадратами, а сумма чисел, расположенных в центрально-симметричных кружках была одна и та же.



4. Найдите наименьшее натуральное число, которое оканчивается на 56, делится на 56 и имеет сумму цифр, равную 56.

5. Если книги, которые стоят в кабинете профессора Иванова, разорвать на отдельные страницы (разумеется, мысленно!!!), можно ли этими страницами покрыть футбольное поле? городской парк?

Эти задачи нам предложили *А. В. Швецов, А. П. Савин, А. М. Домашенко, С. Г. Губа, Д. Б. Фукс.*

COCA-COLA
СВЕМА
ФАНТА

КОРОТКО О ТЕПЛОВОМ РАСШИРЕНИИ

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Часы, которые вы видите на рисунке, буквально поразили мое воображение. Запаянные в стеклянный контейнер — этакий домик «без окон, без дверей»,— они наглухо изолированы от внешнего мира. На циферблате надпись «Lecoultra» — так называется известная швейцарская часовая фирма. А эта марка часов получила название «вечных». Завести их невозможно, но идут они, не останавливаясь. И никаких батареек, проводов и т. д. Вечный двигатель?!

Но мы с вами люди грамотные и знаем, что вечного двигателя быть не может. Энергия как-то должна подводиться к часам. Солнечная батарея? Но часы прекрасно идут и в темноте.

Признаюсь, не раскрыл я секрета «вечных» часов фирмы «Lecoultra». Оказывается, все дело в тепловом расширении, о котором у нас и пойдет речь. В часах есть баллон с этилхлоридом, который расширением или сжатием очень чутко реагирует на малейшие колебания температуры в помещении. Изменение температуры на 1 градус дает подзавод на 28 часов!

Конечно, это — оригинальное применение теплового расширения. И хотя само явление всем, вероятно, известно, понять, чем оно вызвано, не так просто. Во всяком случае, кое в чем требуется разобраться. В этой статье рассказ пойдет в основном о тепловом расширении твердых тел.

Вы, конечно, знаете, что температура связана с движением атомов и молекул, из которых состоят тела. Обычно это объясняется на примере жидкостей или газов. В частности, давление газов на стенки сосуда возникает из-за их бомбардировки молекулами. Чем выше температура, тем интенсивнее движение молекул и тем выше давление. И наоборот. Автолюбителям наверняка известно, что при осенне-зимнем похолодании требуется подкачка колес — давление в них падает.

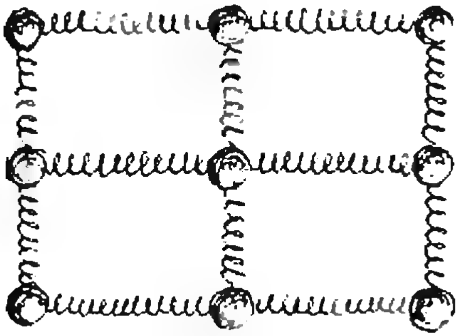


Рис. 1.

Но интенсификация атомного и молекулярного движения при нагревании — общее свойство всех тел, в том числе и твердых. Надо только понять, как именно могут двигаться атомы в твердом теле.

В древности, когда мудрые греки только-только «придумали» атомы, они представляли их в виде шариков. На первый взгляд кажется, что это очень грубая модель. И это действительно так. Но она же оказывается и очень плодотворной. Не случайно один из знаменитых физиков нашего времени, Нобелевский лауреат Невилл Мотт по этому поводу заметил, что «для объяснения многих свойств металлов достаточно атомной модели Лукреция»*).

Большинство твердых тел (в частности металлических) — кристаллы. Атомы в них расположены в узлах правильной кристаллической решетки. Атомы в решетке упакованы достаточно плотно. Больших промежутков, куда они могли бы проникать при своем движении, нет. Поэтому практически единственный доступный атомам в кристалле способ движения — колебания возле «родных» узлов **).

Часто для описания такого движения атом представляют «болтающимся» в узле на пружинках. Чем выше температура, тем быстрее движется атом, и тем больше он растягивает пружинки в своем движении. Иначе говоря, амплитуда колебаний атомов возле своих узлов возрастает при

---

*) Тит Лукреций Кар — древнеримский поэт и мыслитель, представлявший атомы в виде мелких круглых объектов.

**) Строго говоря, у атомов есть и другие возможности. Достаточно вспомнить о явлении диффузии в твердых телах, когда атомам удается совершать довольно далекие путешествия. Однако колебательный вид движения — основной. Грубо говоря, атомы твердого тела почти все время колеблются на месте, исключительно редко делая шаг в сторону.

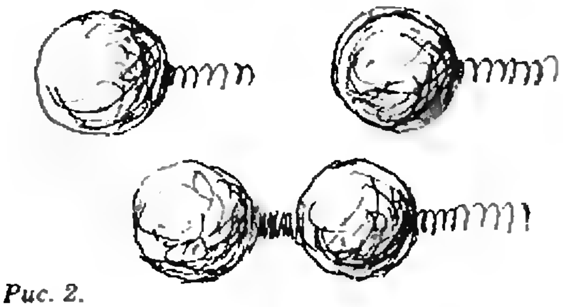


Рис. 2.

нагревании. Это — очень важное обстоятельство. Без него тепловое расширение было бы невозможно.

Рассматривая атомы в виде колеблющихся на пружинках твердых шаров, мы без труда объясним тепловое расширение. При колебаниях шары сближаются, и, поскольку они твердые, соседи, сталкиваясь, начинают мешать друг другу колебаться. Но вспомним, что при нагревании амплитуда колебаний должна увеличиться. И чтобы это произошло, атомам необходимо раздвинуться. А это и есть тепловое расширение.

Обратимся теперь к цифрам. Величину теплового расширения твердых тел обычно характеризуют коэффициентом теплового расширения α, который показывает, на сколько удлиняется стержень единичной длины из данного материала при нагревании на 1 °С. Например, для платины $\alpha=9{,}0\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$. Это значит, что при нагревании на 1 °С однометровый платиновый стержень удлинится на 9 микрометров.

Можно подумать, что это — ерунда, с которой не стоит даже и считаться. Но не торопитесь. Из-за сезонных колебаний температуры знаменитая Эйфелева башня — «железная мадам» — летом становится на 15 см выше, чем зимой. А все потому, что у железа сравнительно высокий коэффициент теплового расширения $\alpha=12{,}2\times10^{-6}$ град$^{-1}$. А как вы отнесетесь к тому, что из-за теплового расширения поршней заклинит двигатель вашего автомобиля? Или изменится калибр орудийного ствола? Или хоть немного нарушится соответствие в размерах деталей какого-нибудь сложного и тонкого механизма? Поэтому понятно, как важно иметь материал с возможно более низким коэффициентом теплового расширения. Платина (а еще лучше платино-иридиевые сплавы с $\alpha=8{,}3\cdot10^{-6}$ град$^{-1}$) выглядит в этом смысле очень привлекательно. Не случайно эталоном длины долгое время служил платиноиридиевый метр. Но сами понимаете — тут недолго и разориться. А не существует ли какой-нибудь сплав «подешевле» и с еще меньшим коэффициентом теплового расширения?

В 1896 году во Франции был придуман сплав из железа и никеля с удивительно низким коэффициентом теплового расширения — около $1{,}5\times10^{-6}$ град$^{-1}$. Его назвали инваром (от латинского invariablis — неизменный). Впервые инвар был применен в 1899 году для изготовления эталона длины дуги земного меридиана, определенной русско-шведской экспедицией на полярном архипелаге Шпицберген. При доставке в более теплую Европу длина инварного эталона почти не изменилась.

Механизм инварности был понят намного позднее и оказался очень непростым. Здесь мы только постараемся объяснить идею.*)

Еще в прошлом веке было открыто явление магнитострикции, состоящее в изменении размеров тела при его намагничивании, которое обычно происходит при поднесении магнита извне. Однако существует группа материалов, которые намагничиваются самопроизвольно (без внешнего магнита) при изменении температуры. К ним, в частности, относится и железо: при его остывании намагничивание начинается с температуры 769 °С и продолжается при дальнейшем охлаждении. Такое намагничивание также сопровождается магнитострикционным эффектом. Остается лишь подобрать материал, в котором бы тепловое расширение и магнитострикция друг друга компенсировали. В этом и состоит секрет инваров!

---

*) Об инварности и других необычных свойствах сплавов вы сможете узнать из книги А. С. Штейнберга «Репортаж из мира сплавов», которую издательство «Наука» выпустит в 1989 году в серии «Библиотечка «Квант». (*Примеч. ред.*)

КАК ВЗВЕСИТЬ ГИППОПОТАМА

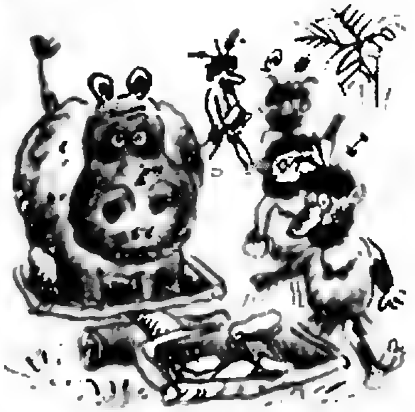
«Дух игры предрасполагает к озарениям, позволяющим находить оригинальные решения.»

М. Гарднер. «Есть идея».— М., «Мир», 1982 (предлагаемая задача взята из этого сборника).

Так уж повелось, что бремя забот о священном гиппопотаме нес на своих плечах вождь племени, собственноручно кормивший и всячески ублажавший своего подопечного.

Каждый год в день своего рождения вождь, прихватив с собой в лодку сборщика податей и священного гиппопотама, отправлялся вверх по реке в те места, где стояла хижина, возведенная специально для сбора дани.

Племя платило вождю дань — столько золотых слитков, сколько требовалось, чтобы уравновесить священного гиппопотама. На чашу огромных весов ставили священное животное и уравновешивали его грудой слитков золота на другой чаше.



Однажды вождь племени так раскормил священного гиппопотама, что весы не выдержали непомерной тяжести и сломались. На починку их потребовалось бы несколько дней. Над торжественной церемонией сбора дани нависла угроза срыва.

Вождь племени был вне себя от ярости. Он вызвал сборщика податей.

Вождь. Я не желаю ждать. Золото мне нужно сегодня и ровно столько, сколько весит священный гиппопотам. Если ты не придумаешь, как отмерить нужное количество золота до захода солнца, я прикажу отрубить тебе голову.

Несчастный сборщик податей от страха почти перестал что-либо соображать. Лишь огромным усилием воли ему удалось собраться с мыслями. После нескольких часов напряженных размышлений ему пришла в голову блестящая мысль. Вы не догадываетесь, что именно он придумал?

Лаборатория „Кванта"

Простые опыты с кипятком

Кандидат физико-математических наук
И. И. МАЗИН

Пустой стакан, кастрюля с водой, термос, чайник, плитка и ... желание — вот и все, что вам может понадобиться для проведения опытов.

Почему вода втягивается в стакан?

Возьмите обычную кастрюлю и налейте туда немного воды (2—3 сантиметра по высоте). Опустите в кастрюлю пустой стакан, донышком кверху. Поставьте кастрюлю на плитку, доведите воду до кипения и дайте ей покипеть минут пять. Теперь выключите плитку. Вскоре вы увидите, как вода начинает всасываться в стакан, поднимаясь все выше и выше, пока не заполнит бо́льшую его часть.

Попробуем объяснить увиденное.

Что заставляет воду из кастрюли подниматься в стакан? Ясно, что это может сделать только атмосферное давление (давление окружающего воздуха). Значит, давление воздуха внутри стакана меньше атмосферного. На сколько? Нетрудно оценить разность давлений (Δp) снаружи и внутри стакана — она равна как раз гидростатическому давлению воды в стакане после завершения опыта. Будем считать, что высота столба воды $h \approx \approx 10$ см, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = = 10$ м/с^2, тогда

$$\Delta p = \rho g h \approx 10^3 \text{ Па} \approx 0{,}01 \text{ атм.}$$

Почему же давление воздуха внутри стакана оказалось меньше атмосферного? Первая мысль, которая приходит в голову: во время кипения воды воздух в стакане нагревается, расширяется и частично выходит наружу (действительно, если приглядеться, можно заметить выходящие пузырьки). Когда оставшийся воздух охладится, после выключения плитки, он снова сожмется, а освободившееся место заполнится водой. Рассчитаем этот эффект.

Пусть объем стакана $V=200$ см^3, начальная температура (до нагревания) $T_1=300$ К, конечная $T_2=373$ К, атмосферное давления $p=1$ атм$\approx$ $\approx 10^5$ Па. Из уравнения Менделеева — Клапейрона найдем, какая часть воздуха останется в стакане:

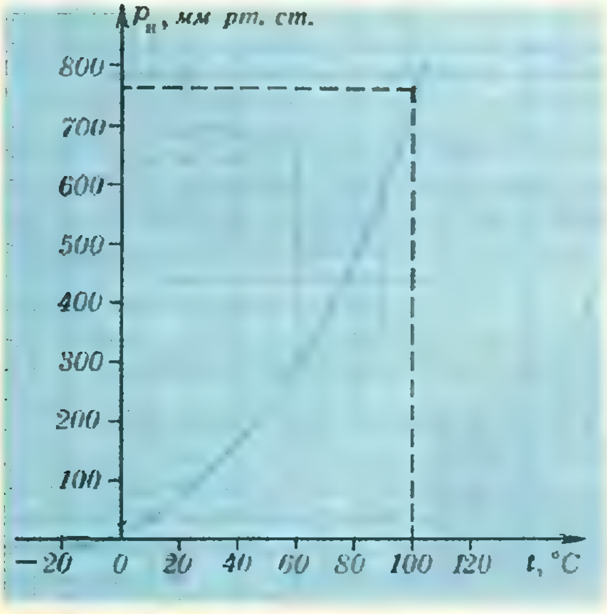
$$pV=\frac{m_1}{M}RT_1,$$

$$pV=\frac{m_2}{M}RT_2,$$

откуда

$$\frac{m_2}{m_1}=\frac{T_1}{T_2}\approx 0{,}8.$$

Таким образом, после охлаждения горячего воздуха до первоначальной температуры он будет занимать примерно 80 %, поднявшаяся вода — оставшиеся 20 % объема стакана. Но ведь мы видели, что вода заполнила больше половины стакана! Значит, мы объяснили в лучшем случае лишь треть эффекта. Если учесть еще, что подъем воды произошел буквально за несколько секунд, а за это время воздух никак не мог успеть остыть до комнатной температуры, то мы вынуждены полностью отказаться от предложенного объяснения.



Где же ошибка в наших рассуждениях? Наверное, мы ошиблись, полагая, что в стакане находится только воздух, забыв про водяной пар. А ведь в течение пяти минут бурного кипения воды в стакан непрерывно поступал водяной пар, который смешивался с воздухом и старался вытеснить его. Можно сказать, что в тот момент, когда мы выключили плитку, внутри стакана в основном находился не воздух, а водяной пар, причем в насыщенном состоянии. По мере остывания давление насыщенного пара уменьшается, причем очень резко (см. рисунок). Для того чтобы давление упало на 0,01 атм, достаточно пар охладить всего на 0,3 градуса. Ясно, что такое охлаждение может произойти почти мгновенно.

Более того, как показывает опыт, если воду кипятить достаточно долго, то после охлаждения она заполнит практически весь стакан. Никаких ограничений на высоту столба воды по существу нет — ведь давление 1 атм создается водяным столбом высотой 10 м.

Возникает вопрос — успеет ли за 5 минут испариться требуемое количество воды? Попробуем ответить. Конечно, скорость испарения зависит от мощности плитки, размеров кастрюли и т. д., поэтому мы воспользуемся конкретными цифрами, полученными опытным путем. В нашем случае слой воды толщиной 1 см испарялся из кастрюли примерно за 30 мин. Тогда за 5 мин с площади стакана ≈ 20 см^2 испарится $m\approx 3$ г воды. При температуре $T=373$ К и давлении $p=1$ атм такая масса насыщенного пара заняла бы объем

$$V=\frac{m}{M}\frac{RT}{p}\approx 5\text{ л!}$$

Так что, если считать, что водяной пар равномерно перемешивался с воздухом, то окажется, что в конце опыта лишь (0,2 л/5 л)·100 %=4 % объема стакана будет заполнено газом, а остальные 96 % — водой. И такой результат действительно можно наблюдать.

Когда труднее вынуть пробку из термоса?

Для второго опыта вам понадобится термос, желательно с узкой пробкой, плотно закрывающей горлышко, но не до конца входящей в него. Для начала вскипятите в чайнике воду, налейте ее в термос, а немного погодя вылейте и плотно закройте термос пробкой. Через несколько часов (от двух до десяти, в зависимости от конструкции термоса) попробуйте вынуть пробку из горлышка — она настолько плотно присосется и втянется в термос, что вытащить ее вам удастся с трудом. (Вот почему нужно брать пробку, которая достаточно высовывается из горлышка.) Если же оставить термос не пустым, а с кипятком, то эффекта всасывания пробки либо не будет совсем, либо он будет очень слабым. Ну а если термос заполнить кипятком, скажем, на четверть или на половину? Казалось бы, сила всасывания должна быть промежуточной между первыми двумя случаями. Оказывается, нет, эффект будет лишь ненамного сильнее, чем в случае с полным термосом. Попробуем разобраться, что к чему.

Отличительным свойством термоса является его малая теплоотдача. В хорошем литровом термосе вода остывает за сутки всего на 2—3 градуса. Учитывая, что удельная теплоемкость воды равна 4,2 кДж/(кг·К), можно оценить количество теплоты, отданное термосом за сутки: $\approx$10 кДж. Пустая колба от термоса имеет массу примерно 200 г. Удельную теплоемкость материала термоса (металл, стекло) можно считать равной 0,5 кДж/(кг·К), так что теплоотдача в 10 кДж соответствует уменьшению температуры примерно на 100 °C. Это означает, что термос просто остынет до комнатной температуры, т. е. на 80 °C. Такое падение температуры, согласно закону Шарля, соответствует разности давлений 0,2 атм, что при сечении пробки $\approx$5 см^2 дает довольно заметную силу — примерно 10 Н.

Поскольку удельная теплоемкость воды почти в 10 раз больше удельной теплоемкости стекла, то уже 100 г воды в термосе уменьшают перепад температур, а значит, и давлений в 4 раза, при на четверть заполненном термосе перепад давлений будет в 7 раз меньше, а при заполнении на половину — в 15 раз меньше, чем в случае пустого термоса.

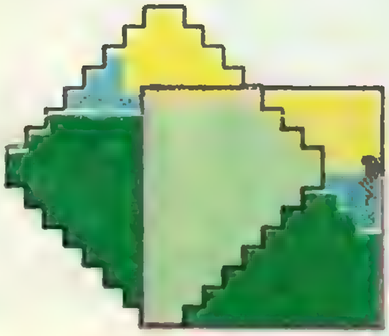
Объясните почему

Последний, простой, опыт попробуйте объяснить сами. Залейте термос до половины очень горячим молоком, закройте пробкой и встряхните. Вы увидите, как вокруг пробки пузырится молоко — из термоса выходит воздух. Почему?

Нам пишут

В статье «Задачи на разрезание», опубликованной в прошлом году в 7-м номере «Кванта», мы предложили читателям попробовать разрезать некоторые фигуры на меньшее число частей, чем было указано в условии задачи, но так, чтобы из полученных частей вновь можно было бы сложить квадрат.

Трое наших читателей придумали, как разрезать «Зубчатый квадрат» не на пять, а на четыре части (см. рисунок): это *Таня Попова*, девятиклассница школы № 16 из Невинномысска, *А. А. Ягубьянц* — инженер из Ростова-на-Дону и автор задачи — *Л. П. Мочалов*



А. П.

Математический кружок

Кого послать на Марс?

Кандидат физико-математических наук
М. В. ВОЛКОВ, Н. Н. СИЛКИН

Эта статья возвращает нас к теме, обсуждавшейся в статье М. Гарднера в четвертом номере «Кванта»,— к «цветным графам» и теории Рамсея. Здесь рассказывается о нескольких типичных задачах этой теории и, в частности, приводится решение задачи М1099 (условие ее также было помещено в № 4, 1988), обсуждаются общие методы оценок в подобных задачах и их применения.

Основы межпланетной дипломатии

Совершая очередное космическое путешествие, Громозека, космопроходец с огромным стажем, обнаружил незнакомую планетную систему. Он взял на нее курс и вскоре «приземлился» на третью от центральной звезды планету. Осмотревшись, Громозека увидел неподалеку аборигена и направился к нему. Завязался оживленный разговор, из которого Громозека узнал, что в Ух-ты (так, оказывается, называлась система) 9 планет, и все они обитаемы.

— Раньше,— сказал абориген Громозеке,— все наши планеты жили дружно. Но после того, как здесь побывали Весельчак и Глот, некоторые планеты разорвали дипломатические отношения. Правда, среди любых четырех планет какие-то две по-прежнему дружат между собой, но этого мало: ведь противостоять угрожающему нам вторжению сумчатых бегемотов могут только объединенные силы трех планет!

— Проклятые разбойники,— воскликнул Громозека.— Однако не все потеряно! *В вашей системе есть три планеты, которые попарно дружат между собой и, значит, могут объединиться!*

В ответ на недоуменный взгляд аборигена Громозека вывернул из грунта 9 камней.

— Представьте себе, что это девять планет системы Ух-ты,— начал Громозека.— Как называется ваша планета?

— Зям-лям,— ответил абориген.

— А теперь представьте, что этот камень — Зям-лям,— с этими словами Громозека поставил аборигена на один из камней.— Теперь я буду соединять сплошной линией две планеты тогда и только тогда, когда они дружат, а рассорившиеся планеты буду соединять пунктиром. Пусть нашлись 4 планеты, с которыми дружит Зям-лям; тогда среди них обязательно есть две, которые дружат между собой.

Громозека провел соответствующие линии между камнями (рис. 1) и продолжал:

— Получился треугольник. Это и есть тройка дружных планет! Пусть теперь Зям-лям состоит в дипломатических отношениях не более чем с двумя планетами. Тогда по крайней мере с шестью она находится в ссоре (рис. 2). *Среди этих шести планет всегда есть либо три попарно дружные между собой планеты, либо три попарно поссорившиеся.* Это-то вам ясно?

— Ясно,— согласился абориген. (Он вспомнил, что встречал подобную теорему в одном научно-популярном журнале*). Читателю же мы предлагаем доказать этот факт в качестве упражнения 1.)

— Отлично! Но трех попарно поссорившихся планет среди шести, порвавших отношения с Зям-лямом, быть не может: иначе получится, что есть четыре попарно поссорившиеся планеты (рис. 3). Вот и все,— закончил свои объяснения Громозека.

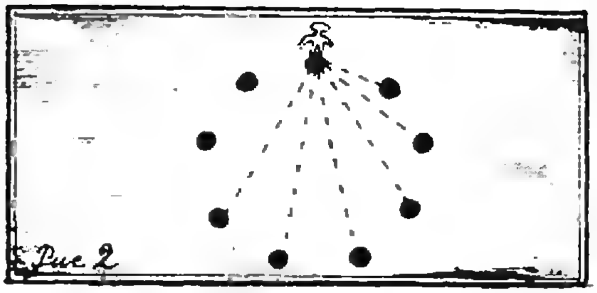


Рис 2

— Нет, не все,— возразил абориген, слезая с камня,— а если Зям-лям в ссоре ровно с пятью планетами, а дружит ровно с тремя?

— Тогда те же рассуждения можно применить к какой-нибудь другой планете, у которой больше друзей или больше недругов,— пояснил Громозека.

— А если каждая из планет в ссоре с пятью, а дружит ровно с тремя? — не унимался абориген.

— Мой друг, не волнуйтесь,— успокоил его Громозека,— *систем из девяти планет, каждая из которых дружит ровно с тремя, не может быть ни в одной галактике.* Поверьте моему богатому опыту космопроходца!

Упражнение 2. Проверьте и это утверждение Громозеки.

Надеемся, что читатель сможет выполнить упражнения 1 и 2, не прибегая к межгалактическим путешествиям. А мы пока, «установив исходные факты, начнем строить, основываясь на них, нашу теорию...» (А. Конан Дойл, «Серебряный»).

Некоторые выводы

Громозека иллюстрировал свои рассуждения рисунками из точек и линий, и это не случайно. Утверждения, которые он доказал, удобнее всего формулировать с помощью именно таких

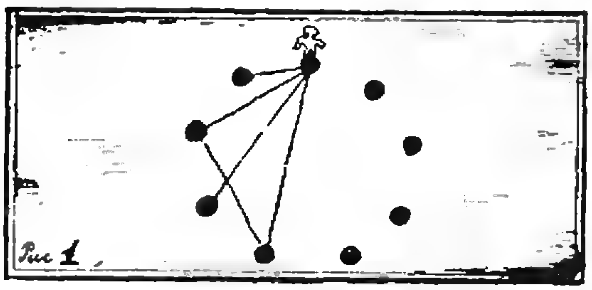


Рис 1

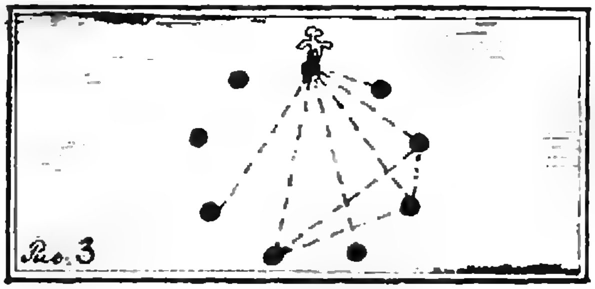


Рис 3

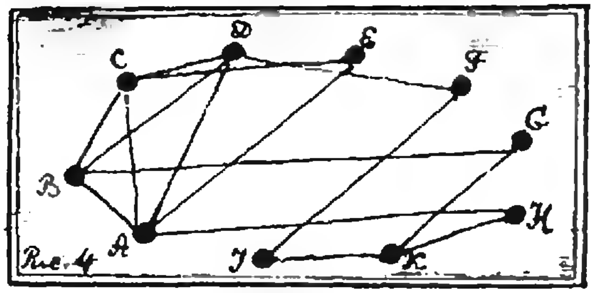
---

*) По-видимому, имеется в виду «Квант», 1988, № 4, с. 14. (*Примеч. ред.*)

рисунков, или, как их называют в математике, *графов*. Более точно, *совокупность точек и соединяющих их линий называется графом, если 1) каждая линия соединяет ровно две точки; 2) две любые точки соединены не более чем одной линией*. При этом точки принято называть *вершинами графа*, а линии — *ребрами графа*. На рисунке 4 приведен один пример графа. Вершины A, B, C, D на этом рисунке попарно соединены ребрами. Про такие вершины говорят, что они образуют *полный подграф*. А вот среди вершин E, F, G, H ни одна не соединена ребром с другой из тех же вершин. Такие вершины составляют *пустой подграф*.

Теперь задачу про шесть планет можно сформулировать так: *любой граф с шестью вершинами содержит либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с тремя вершинами*. То, что Громозека доказал про планетную систему Ук-ты, по существу означает, что *любой граф с девятью вершинами содержит либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с четырьмя вершинами*. Дальше естественно поинтересоваться: а какое минимальное число p нужно взять, чтобы любой граф с p вершинами содержал либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с пятью вершинами. Но не будем торопиться отвечать на него, ведь тогда появится следующий вопрос: какое минимальное число q нужно взять, чтобы любой граф с q вершинами содержал либо полный подграф с тремя вершинами, либо пустой подграф с шестью вершинами, и т. д. Попробуем лучше обобщить нашу задачу, чтобы сразу ответить на все такие вопросы.

Итак, рассмотрим сразу общую ситуацию. Пусть m и n — натуральные числа, большие 1. Обозначим через $r(m, n)$ минимальное число с таким свойством, что *любой граф не менее чем с $r(m, n)$ вершинами содержит либо полный подграф с m вершинами, либо пустой подграф с n вершинами*. (Читатель, знакомый с упоминавшейся статьей Гарднера, узнает в числах $r(m, n)$ числа Рамсея.) Наша задача — найти число $r(m, n)$*). Это нетрудно сделать, если $n=2$: тогда $r(m, 2)=m$. В самом деле, в любом графе с m вершинами либо все вершины попарно соединены ребрами, либо найдутся две вершины, не связанные ребром между собой. В первом случае в графе есть полный подграф с m вершинами (совпадающий со всем графом), а во втором случае в графе есть пустой подграф с двумя вершинами. Так же легко доказать, что $r(2, n)=n$ при любом n.



Упражнение 3. Докажите эту формулу.

Хотелось бы и при других m и n найти простую формулу для числа $r(m, n)$. Увы, пока такая формула неизвестна. Но несложно доказать следующее неравенство, позволяющее оценивать число $r(m, n)$, если известны числа $r(m-1, n)$ и $r(m, n-1)$:

$$\boxed{r(m, n) \leqslant r(m-1, n) + r(m, n-1). \qquad (1)}$$

Для этого нужно только проверить, что в любом графе с $r(m-1, n)+r(m, n-1)$ вершинами есть либо полный подграф с m вершинами, либо пустой подграф с n вершинами. Возьмем в таком графе одну из вершин, обозначим ее через X и рассмотрим два случая.

Случай первый. Число вершин, связанных ребрами с вершиной X, не меньше чем $r(m-1, n)$. Тогда среди этих вершин либо $m-1$ вершин составляют полный подграф (и вместе с X получается полный подграф с m вершинами), либо n вершин образуют пустой подграф.

---

*) Требовательный читатель скажет: «Но ведь нет никакой гарантии, что такое число существует», и будет прав. Но из дальнейших рассуждений следует не только оценка числа $r(m, n)$, но и его существование.

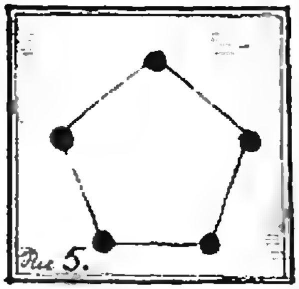


Рис. 5.

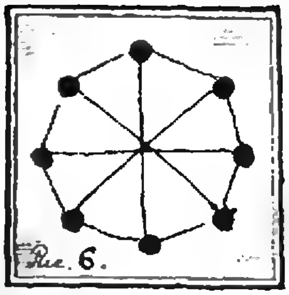


Рис. 6.

Случай второй. Число вершин, связанных ребром с вершиной X, меньше чем $r(m-1, n)$. Но тогда по крайней мере $r(m, n-1)$ вершин не соединены с X. Среди этих вершин либо m вершин составляют полный подграф, либо $n-1$ вершин образуют пустой подграф (и вместе с вершиной X получается пустой подграф с n вершинами).

Посмотрим, как применяется неравенство (1). Вычислим, к примеру, число $r(3; 3)$. Из формул $r(2, n)=n$ и $r(m, 2)=m$ и из неравенства (1) получаем, что $r(3, 3)\leqslant r(2, 3)+r(3, 2)=3+3=6$. Вот мы и доказали, что в любом графе с шестью вершинами найдется либо полный, либо пустой подграф с тремя вершинами,— но теперь из общих соображений. Легко привести пример графа с пятью вершинами, в котором нет ни пустого, ни полного подграфа с тремя вершинами (рис. 5). Поэтому *число $r(3; 3)$ равно 6.*

Что мы знаем и чего не знаем

Насколько точную оценку дает неравенство (1)? Попробуем-ка с его помощью получить утверждение Громозеки. Имеем:

$$r(3, 4)\leqslant r(2, 4)+r(3, 3)=4+6=10.$$

Осечка! Ведь Громозека доказал, что $r(3, 4)\leqslant 9$! Оказывается, если оба числа $r(m-1, n)$ и $r(m, n-1)$ четны, то справедливо неравенство

$$\boxed{r(m, n)\leqslant r(m-1, n)+r(m, n-1)-1. \qquad (2)}$$

Доказывается оно так же, как и (1), нужно только учесть, что графа с $r(m-1, n)+r(m, n-1)-1$ вершинами, в котором каждая вершина соединена ровно с $r(m-1, n)-1$ вершинами, не существует.

Упражнение 4. Докажите неравенство (2).

Заметим, что неравенству (2) можно придать такую удобную для использования форму: если $r(m-1, n)\leqslant A$ и $r(m, n-1)\leqslant B$, где A и B — четные числа, то $r(m, n)\leqslant A+B-1$.

Пользуясь неравенством (2), утверждение Громозеки можно доказать в одну строчку:

$$r(3, 4)\leqslant r(2, 4)+r(3, 3)-1=$$
$$=4+6-1=9.$$

На рисунке 6 изображен граф с восьмью вершинами, в котором нет ни полного подграфа с тремя вершинами, ни пустого подграфа с четырьмя вершинами. Поэтому *число $r(3, 4)$ равно 9.*

Мы уже отмечали, что при m и n, больших 2, точная формула для числа $r(m, n)$ неизвестна. Более того, точное значение этого числа известно пока только для некоторых небольших m и n.

Мы приводим таблицу, в которой собраны, пожалуй, все известные на сегодня сведения о значениях $r(m, n)$. (Значение $r(9, 3)=36=r(3, 9)$ найдено совсем недавно с помощью ЭВМ. А вот точное значение числа $r(3, 8)$ до сих пор неизвестно.)

Таблица

n \ m	3	4	5	6	7	8	9
3	6	9	14	18	23		36
4	9	18					
5	14						
6	18						
7	23						
8							
9	36						

Нетрудно заметить, что эта таблица симметрична относительно одной из диагоналей. Это не случайно: *для всех m и n верна формула $r(m, n)=r(n, m)$.*

Упражнение 5. Докажите эту формулу.

Теперь мы готовы начать

Решение задачи М1099

В отряде, ведущем подготовку к полету на Марс, 6783 космонавта, при-

чем известно, что среди любых четырех из них можно выбрать троих, составляющих слаженный экипаж для посадочного модуля. Докажите, что можно выбрать 5 космонавтов, любые трое из которых составляют слаженный экипаж.

Вероятно, читатель уже убедился в полезности обобщений. Давайте и сейчас отвлечемся от конкретных данных задачи М1099 и рассмотрим ее «в общем виде».

Пусть m и n — натуральные числа, бо́льшие 2. Обозначим через $R(m, n)$ минимальное число с тем свойством, что *в любом отряде из $R(m, n)$ космонавтов можно выбрать либо m человек, любые 3 из которых образуют слаженный экипаж, либо n человек, никакие 3 из которых не образуют слаженный экипаж.* Читатель, возможно, ожидает, что мы переформулируем эту задачу на языке графов и извлечем нужную информацию из предыдущих результатов. Но он будет на этот раз неправ. Числа $R(m, n)$ непосредственно не связаны с графами, хотя и имеют некоторое отношение к числам $r(m, n)$.

Прежде всего, можно понять, что для всех m и n верны равенства:

$$R(3, n)=n, \quad R(m, 3)=m,$$
$$R(m, n)=R(n, m),$$

похожие на отмечавшиеся выше равенства для чисел $r(m, n)$.

Упражнение 6. Обоснуйте эти равенства.

Раз между числами $R(m, n)$ и $r(m, n)$ существует сходство, можно ожидать, что числа $R(m, n)$ можно оценивать с помощью чисел $R(m-1, n)$ и $R(m, n-1)$ аналогично тому, как мы оценивали числа $r(m, n)$, пользуясь неравенством (1). И в самом деле, верно неравенство

$$\boxed{R(m, n)\leqslant r(R(m-1, n), R(m, n-1))+1. \qquad (3)}$$

Его доказательство похоже на доказательство неравенства (1). Нам нужно доказать, что в любом отряде из $r(R(m-1, n), R(m, n-1))+1$ космонавтов найдутся либо m человек, среди которых любая тройка является слаженной, либо n человек, никакие трое из которых не могут составить слаженный экипаж. Выделим теперь одного космонавта — X. Каждому из оставшихся космонавтов сопоставим одну точку и соединим линией такие пары точек, что соответствующие пары космонавтов образуют вместе с космонавтом X слаженный экипаж. В полученном графе с $r(R(m-1, n), R(m, n-1))$ вершинами найдется либо полный подграф с $R(m-1, n)$ вершинами, либо пустой подграф с $R(m, n-1)$ вершинами (это следует из определения числа $r(R(m-1, n), R(m, n-1))$).

Рассмотрим первый случай: в отряде космонавтов есть $R(m-1, n)$ человек, любые двое из которых образуют вместе с X слаженный экипаж. По определению числа $R(m-1, n)$ среди них найдутся либо $m-1$ человек, любые трое из которых образуют слаженный экипаж (и вместе с космонавтом X получится m таких человек), либо n человек, никакие трое из которых не могут составить слаженный экипаж.

Во втором случае в отряде есть $R(m, n-1)$ человек, никакие двое из которых не могут образовать вместе с космонавтом X слаженный экипаж. В свою очередь, среди них найдутся либо m человек, любая тройка из которых слаженная, либо $n-1$ человек, никакие трое из которых не в состоянии образовать слаженный экипаж (и вместе с космонавтом X получится n таких человек).

Неравенство (3) доказано, причем попутно мы доказали и факт существования чисел $R(m, n)$ для всех m и n (заранее далеко неочевидный).

Теперь для того, чтобы решить задачу М1099, достаточно проверить, что число $R(5, 4)$ меньше, чем 6783. Ведь тогда в любом отряде из 6783 космонавтов найдется либо 5 космонавтов, любая тройка из которых — слаженная, либо 4 космонавта, никакие три из которых не годятся для высадки на Марс. Второй случай по условию задачи невозможен, и остается только первая возможность.

Итак, займемся оценкой числа $R(5, 4)$. Применяя (3), получим

$$R(5,4)\leqslant r(R(4,4),\ R(5,3))+1.$$

Число $R(5,3)$ равно 5, а чтобы оценить $R(4,4)$, снова применим (3):

$$R(4,4)\leqslant r(R(3,4),\ R(4,3))+1=r(4,4)+1.$$

Число $r(4,4)$ можно оценить, используя (1). Получим

$$r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18.$$

(На самом деле, как видно из таблицы, 18 — это точное значение числа $r(4\ 4)$.) Итак, $R(4,4)\leqslant 19$, и $R(5,4)\leqslant r(19,5)+1$. Остается оценить число $r(19,5)$. Это можно сделать, многократно применяя неравенства (1) и (2):

$$\begin{aligned}
r(5,3)&\leqslant r(4,3)+r(5,2)=9+5=14,\\
r(6,3)&\leqslant 14+6-1=19,\\
r(7,3)&\leqslant 19+7=26,\\
r(8,3)&\leqslant 26+8-1=33,
\end{aligned}$$

и т. д., до $r(19,3)$; получится $r(19,3)\leqslant 182$.

Затем пишем:

$$\begin{aligned}
&r(4,4)\leqslant r(3,4)+r(4,3)=9+9=18,\\
&r(5,4)\leqslant 18+14-1=31,\\
&r(6,4)\leqslant 31+19=50,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r(19,4)\leqslant 1249;\\
&r(5,5)\leqslant r(4,5)+r(5,4)=31+31=62,\\
&r(6,5)\leqslant 62+50-1=111,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
&r(19,5)\leqslant 6782.
\end{aligned}$$

Следовательно, $R(5,4)\leqslant 6783$.

Оценка $R(5,4)\leqslant 6783$ не является точной. Если воспользоваться значениями чисел $r(m,n)$ из ранее приведенной таблицы, то, рассуждая вполне аналогично, можно получить существенно лучшую оценку: $R(5,4)\leqslant 6337$. Авторы умеют доказывать, что $R(5,4)\leqslant 6242$, но будет ли точной эта оценка, им неизвестно.

Теорема Рамсея

Начав с простых соображений, мы обнаружили, что они являются следствиями некоторых общих закономерностей: неравенств (1) и (3). Эти закономерности позволили нам решить задачу М1099. Но оказывается, что и сами они — всего лишь частные случаи еще более общего результата, полученного в 1930 году английским логиком Ф. Рамсеем (1903—1930). Для того чтобы сформулировать теорему Рамсея, представим, что в полет к Марсу нужно отправить не 5, а m человек, из которых не 3, а s должны высадиться на планету. Пусть известно, что из любых n космонавтов ($n\geqslant s$), ведущих подготовку к полету, можно выбрать s, которые составляют слаженный экипаж для посадочного модуля. Обозначим через $R(s;\ m,n)$ минимальное число космонавтов, среди которых можно выбрать m таких человек, что любые s из них образуют слаженный экипаж. Ясно, что при $s=3$ число $R(s;\ m,n)$ совпадает с числом $R(m,n)$; нетрудно также сообразить, что при $s=2$ это число равняется числу $r(m,n)$.

Упражнение 7. Проверьте, что $R(1;\ m,n)=m+n-1$.

Поставим теперь вопрос: *при любом ли s существует число $R(s;\ m,n)$? И если существует, то как его находить?* На эти вопросы отвечает

Теорема Рамсея. *Число $R(s;\ m,n)$ существует при любом s и при любых $m\geqslant s$ и $n\geqslant s$. Его можно оценить с помощью неравенства*

$$\boxed{\begin{gathered}R(s;\ m,n)\leqslant R(s-1;\\ R(s;\ m-1,n),\ R(s;\ m,n-1))+1.\qquad(4)\end{gathered}}$$

Неравенство (4) очень похоже на неравенство (3). Оно и доказывается, по существу, точно так же. Нужно только рассматривать не пары космонавтов, а экипажи из $s-1$ космонавтов. Ясно, что неравенства (1) и (3) — частные случаи неравенства (4) при $s=2$ (нужно учесть упражнение 7) и $s=3$ соответственно. Теорема Рамсея имеет очень много приложений в самых различных областях математики: в математической логике и в теории чисел, в алгебре и в комбинаторике, в геометрии и даже в программировании. Эти приложения заслуживают отдельного разговора, а здесь, в качестве примера того, как применяется теорема Рамсея, приведем только один изящный результат, который принадлежит венгерским математикам П. Эрдёшу и Д. Секерешу.

Теорема Эрдёша — Секереша. *Для любого натурального числа*

$m \geqslant 3$ существует наименьшее натуральное число $C(m)$ такое, что среди любых $C(m)$ точек плоскости, из которых никакие три не лежат на одной прямой, можно найти m точек, являющихся вершинами выпуклого m-угольника.

Упражнение 8. Докажите теорему Эрдёша — Секереша.

Задачи

1. На планете Зям-лям 17 государств. Некоторые из них дружат между собой, некоторые враждуют, а некоторые нейтральны по отношению друг к другу. Докажите, что на Зям-ляме есть либо тройка попарно дружественных, либо тройка попарно враждебных, либо тройка попарно нейтральных государств.

2. На плоскости нарисованы 19 кругов так, что среди любых четырех кругов какие-то три имеют общую точку. Докажите, что найдутся четыре круга, имеющие общую точку.

3. Натуральные числа от 1 до 66 покрашены в четыре цвета. Докажите, что среди них найдутся три числа x, y, z одного цвета такие, что $x+y=z$.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Найдите минимальное число, которое можно тремя различными способами представить в виде $13a+73b$, где a и b — натуральные числа.

2. Найдите натуральные числа k и n, если известно, что числа kn и n^k записываются (в десятичной системе) одинаковыми цифрами, но в обратном порядке по отношению друг к другу.

3. Пусть x_1 — корень уравнения $x^2+px+q=0$ и x_2 — корень уравнения $x^2-px-q=0$. Докажите, что уравнение $x^2+2px+2q=0$ имеет корень, заключенный между x_1 и x_2.

4. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки E и F такие, что $EC=2EB$ и $FC=FD$. Докажите, что угол AEB равен углу AEF.

5. Пусть A, B, C, D — последовательные вершины выпуклого четырехугольника $ABCD$. Докажите, что если $AB+BD \leqslant AC+CD$, то $AB \leqslant AC$.

Девятый класс

6. В последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ имеют место равенства $a_1=3$ и $a_{n+1}=a_n^2-2$ при всех n. Докажите, что все члены этой последовательности попарно взаимно просты.

7. Докажите, что если $x_1+\frac{1}{x_2}=x_2+\frac{1}{x_3}=\ldots=x_n+\frac{1}{x_1}$, то либо $x_1=x_2=\ldots=x_n$, либо $|x_1x_2\ldots x_n|=1$.

8. (задача Ферма). На диаметре AB полукруга построен не перекрывающийся с полукругом прямоугольник $ABCD$, высота AD которого равна стороне вписанного в круг квадрата. Пусть N — произвольная точка граничной полуокружности полукруга, E и F — точки пересечения прямых CN и DN с диаметром полукруга. Докажите, что $AE^2+BF^2=AB^2$.

9. Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем B лежит между A и C. Найдите геометрическое место точек M таких, что окружности, описанные около треугольников AMB и BMC, равны.

10. В множестве, состоящем из n элементов, выбрано 2^{n-1} различных подмножеств, каждые 3 из которых имеют общий элемент. Докажите, что все эти подмножества имеют общий элемент.

Десятый класс

11. Докажите, что число $11\ldots122\ldots2$ (10 единиц и 10 двоек) является произведением двух последовательных целых чисел.

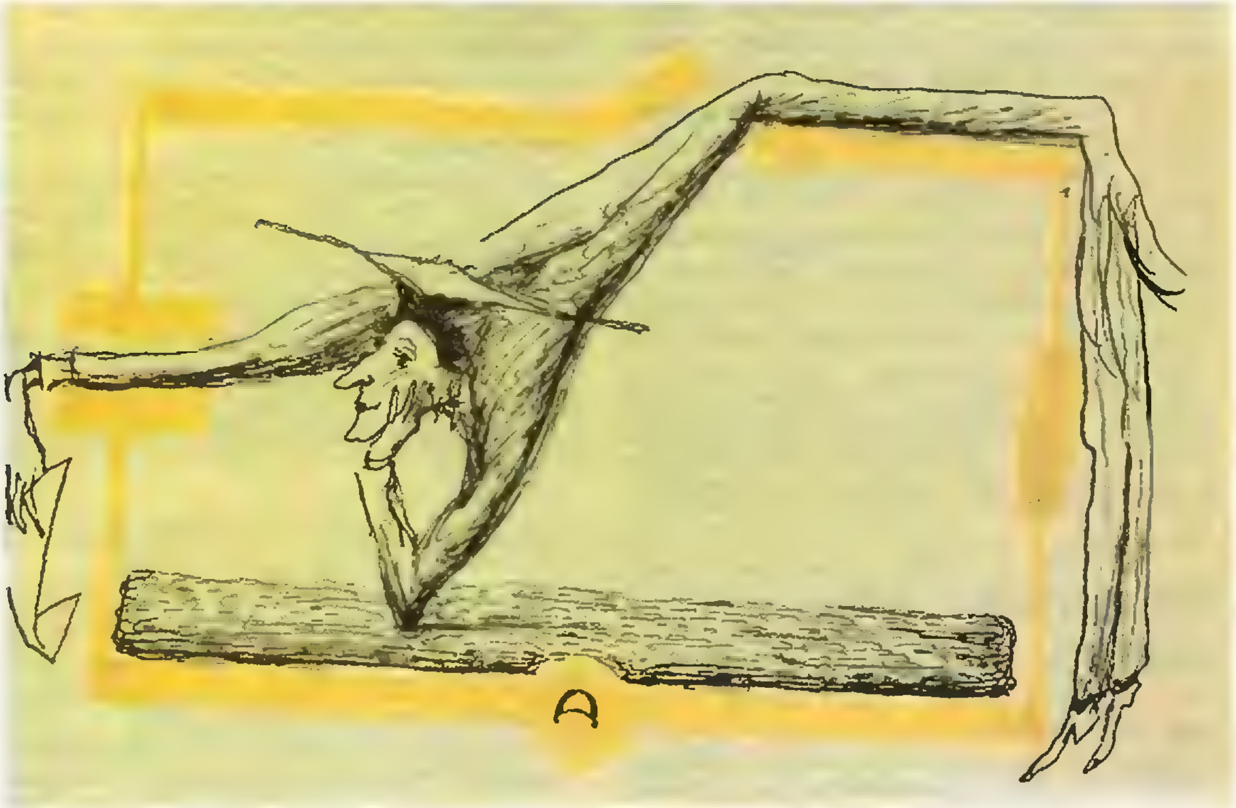
12. Найдите числа a, b, c, d, если известно, что $a^2+b^2+c^2+d^2-ab-bc-cd-d+\frac{2}{5}=0$.

13. Внутри тетраэдра $ABCD$ взята такая точка O, что объемы тетраэдров $OABC$, $OBCD$, $OACD$, $OABD$ равны. Докажите, что сумма векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ равна 0.

14. Основание тетраэдра — равносторонний треугольник, площади боковых граней равны между собой. Известно, что сторона основания имеет длину a, одно из боковых ребер имеет длину b. Найдите длины двух других боковых ребер.

15. Найдите все решения уравнения $\sin^3 x+\cos^3 x=\frac{1}{2}$, принадлежащие промежутку $[0; \pi]$.

Публикацию подготовили
Е. М. Гольберг, Л. Д. Курляндчик



Практикум абитуриента

Расчет электрических цепей

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Существует множество способов расчета электрических цепей, состоящих из батарей и резисторов. Практически любой из них (с простой переменой обозначений) годится и для цепей из батарей и конденсаторов. (А если вы уверенно обращаетесь с комплексными числами, то так же можно рассчитывать любые схемы для переменного тока.) В этой статье будут разобраны два простых способа расчета цепей постоянного тока с резисторами и конденсаторами.

Первый способ годится для сравнительно простых цепей. Пусть нам дана схема, состоящая из батарейки и нескольких резисторов. Для расчета токов в ветвях схемы мы вначале планомерно упрощаем схему, заменяя параллельно или последовательно соединенные резисторы их эквивалентами. После упрощения схемы до такой степени, что токи в ней найти легко, мы проводим обратный процесс, находя при этом токи исходных элементов. Способ этот вам хорошо знаком еще с седьмого класса.

Разберем несложный пример.

Задача 1. *В схеме, изображенной на рисунке 1, найдите ток, текущий по перемычке AB.*

Упростим схему, заменив параллельно соединенные резисторы *1* и *3*, а также *2* и *4* их эквивалентами. Получилась простая цепь с общим сопротивлением

$$R=\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\frac{R_2R_4}{R_2+R_4}$$

и общим током

$$I=\frac{U}{R}=\frac{U}{\dfrac{R_1R_3}{R_1+R_3}+\dfrac{R_2R_4}{R_2+R_4}}.$$

Напряжения на резисторах *1* и *3* равны, значит, $I_1:I_3=R_3:R_1$. Но $I_1+I_3=I$. Тогда

$$I_1=I\frac{R_3}{R_1+R_3},\quad I_3=I\frac{R_1}{R_1+R_3}.$$

Аналогично

$$I_2=I\frac{R_4}{R_2+R_4},\quad I_4=I\frac{R_2}{R_2+R_4}.$$

Теперь найдем ток через перемычку AB:

$$I_{AB}=I_1-I_2=\frac{U(R_2R_3-R_1R_4)}{R_1R_3(R_2+R_4)+R_2R_4(R_1+R_3)}.$$

Из полученного выражения видно, что при условии $R_1:R_2=R_3:R_4$ ток через перемычку равен нулю. Это часто используют для точного измерения неизвестного сопротивления.

Рассмотренный метод хотя и прост, но очень громоздок. Кроме того, он не универсален — далеко не всякую схему удается так упростить. Например, если на рисунке 1 заменить перемычку резистором, в получившейся схеме не окажется ни параллельно, ни последовательно соединенных резисторов.

Второй, более удобный, способ расчета основан на разумном выборе неизвестных для составляемых впоследствии уравнений.

Рассмотрим неразветвленный участок цепи, содержащий резистор и источник тока (рис. 2). Согласно закону сохранения энергии, ток на этом участке равен

$$I=\frac{\varphi_A-\varphi_B-\mathscr{E}}{R+r},$$

откуда видно, что для нахождения токов в каждой из ветвей достаточно знать потенциалы на ее концах (точнее — разности потенциалов). Точки соединения неразветвленных участков цепи называют узлами, отсюда и название способа — метод узловых потенциалов.

Итак, в качестве неизвестных величин выберем потенциалы узлов схемы. Удобно потенциал одного из них — любого — положить равным нулю (тогда потенциалы остальных узлов — это напряжения, измеренные относительно выбранного нами узла). Уравнения для определения узловых потенциалов записываются для токов, которые втекают в узлы и вытекают из них: сумма втекающих в узел токов равна сумме вытекающих. Если в схеме N узлов, то неизвестных потенциалов оказывается на один меньше (напомним, что потенциал одного из узлов мы задали сами). Значит, нужно написать уравнения для токов всех узлов, кроме одного. (Если мы все-таки напишем уравнения для всех узлов, то быстро убедимся, что одно из них — любое! — лишнее, его можно получить, комбинируя остальные уравнения.)

В качестве примера разберем такую задачу.

Задача 2. *Найдите ток через нагрузку сопротивлением R, подключенную к параллельно соединенным батареям с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и внутренними сопротивлениями r_1 и r_2 (рис. 3).*

Перерисуем схему так, как изображено на рисунке 4, и зададим $\varphi_A=0$. Теперь достаточно задать потенциал точки B, чтобы выразить все токи в схеме. Для узла B:

$$\frac{\mathscr{E}_1-\varphi_B}{r_1}+\frac{\mathscr{E}_2-\varphi_B}{r_2}=\frac{\varphi_B}{R},$$

откуда потенциал точки B

$$\varphi_B=\frac{\mathscr{E}_1/r_1+\mathscr{E}_2/r_2}{1/r_1+1/r_2+1/R},$$

и ток нагрузки

$$I=\frac{\varphi_B}{R}=\frac{\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1}{R(r_1+r_2)+r_1r_2}.$$

Иногда вопрос в задаче формулируют иначе: можно ли параллельно соединенные батарейки ($\mathscr{E}_1$, r_1 и $\mathscr{E}_2$, r_2) заменить эквивалентной батареей и каковы должны быть (если

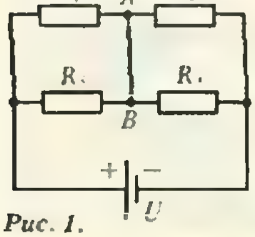


Рис. 1.

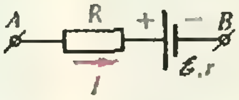


Рис. 2.

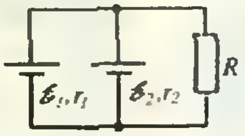


Рис. 3.

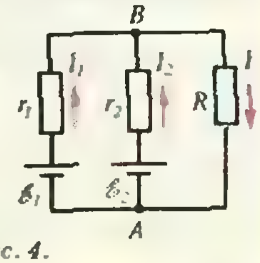


Рис. 4.

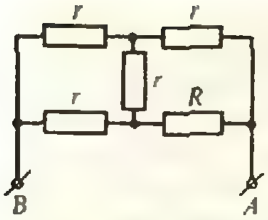


Рис. 5.

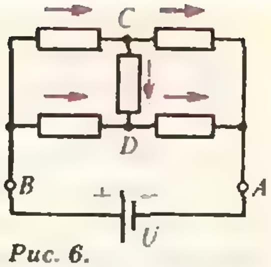


Рис. 6.

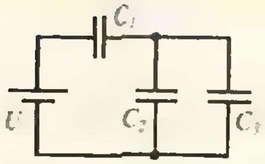


Рис. 7.

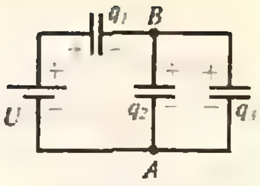


Рис. 8.

заменить можно!) ее ЭДС и внутреннее сопротивление? Для ответа на эти вопросы нужно попытаться выражение, полученное для тока нагрузки, привести к виду

$$I=\frac{\mathscr{E}_{\text{экв}}}{R+r_{\text{экв}}}.$$

Если получится, то это и будет ответ на оба вопроса. В нашем случае все просто:

$$I=\frac{(\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1)/(r_1+r_2)}{R+r_1r_2/(r_1+r_2)},$$

$$\mathscr{E}_{\text{экв}}=\frac{\mathscr{E}_1r_2+\mathscr{E}_2r_1}{r_1+r_2}, \qquad r_{\text{экв}}=\frac{r_1r_2}{r_1+r_2}.$$

(Отметим, что любую систему из батареек и резисторов, подключенную к внешней цепи двумя проводами, можно заменить эквивалентной батареей. Доказательство этого положения выходит за пределы школьной программы.)

Решим теперь более сложную задачу.

Задача 3. *В схеме, изображенной на рисунке 5, найдите сопротивление между точками A и B.*

Проще всего рассуждать так: подключим к этим точкам батарею с заданным напряжением U, найдем ток через батарею и рассчитаем общее сопротивление по формуле $R=U/I$. Нарисуем получившуюся схему (рис. 6) и положим $\varphi_A=0$. Тогда потенциал точки B известен: $\varphi_B=U$. Обозначим потенциал точки C через φ_1, точки D — через φ_2. Запишем два уравнения — для узла C:

$$\frac{U-\varphi_1}{r}=\frac{\varphi_1}{r}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{r},$$

для узла D:
$$\frac{U-\varphi_2}{r}+\frac{\varphi_1-\varphi_2}{r}=\frac{\varphi_2}{R}.$$

Отсюда находим

$$\varphi_1=U\,\frac{3+r/R}{5+3r/R}, \qquad \varphi_2=U\,\frac{4}{5+3r/R}.$$

Тогда

$$I=\frac{\varphi_1}{r}+\frac{\varphi_2}{R}=U\,\frac{3/r+5/R}{5+3r/R},$$

$$R_{\text{общ}}=r\,\frac{5+3r/R}{3+5r/R}.$$

В частном случае, когда $R=2r$, получим $R_{\text{общ}}=13\,r/11$.

Для схем с конденсаторами идея расчета та же, но вместо токов узлов нужно рассматривать заряды проводников, соединенных с узлом. Вот пример.

Задача 4. *Рассчитайте заряды конденсаторов в схеме, приведенной на рисунке 7.*

Обозначим $\varphi_A=0$, $\varphi_B=\varphi$ (рис. 8) и расставим предполагаемые знаки зарядов обкладок конденсаторов (это можно сделать произвольно, как и обозначить направления токов в предыдущих примерах, в крайнем случае величина заряда в ответе может оказаться отрицательной). Если конденсаторы вначале не были заряжены, то можно записать:

$$-(U-\varphi)\,C_1+\varphi\,C_2+\varphi\,C_3=0,$$

откуда
$$\varphi=\frac{C_1U}{C_1+C_2+C_3}.$$

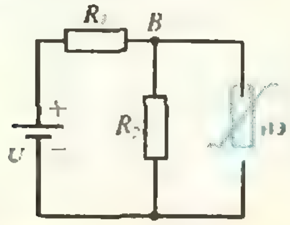
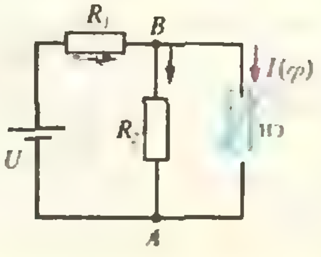


Рис. 9.



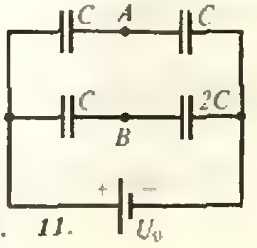


Рис. 11.

Теперь легко найти заряды каждого из конденсаторов:

$$q_1=\frac{C_1(C_2+C_3)}{C_1+C_2+C_3}U,\quad q_2=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2+C_3}U,$$

$$q_3=\frac{C_1C_3}{C_1+C_2+C_3}U.$$

Этот метод годится для расчета не только линейных цепей, но и нелинейных тоже.

Задача 5. *Найдите ток через нелинейный элемент (рис. 9), для которого зависимость тока от напряжения имеет вид:* $I=\alpha U^2$.

Перерисуем схему (рис. 10) и обозначим $\varphi_A=0$, $\varphi_B=\varphi$. Тогда для узла B получим уравнение:

$$\frac{U-\varphi}{R_1}=\frac{\varphi}{R_2}+I(\varphi),$$

или

$$\frac{U-\varphi}{R_1}=\frac{\varphi}{R_2}+\alpha\varphi^2.$$

Отсюда находим потенциал φ, а зная его, — и ток нелинейного элемента:

$$\alpha\varphi^2+\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)\varphi-\frac{U}{R_1}=0,$$

$$\varphi=\frac{-\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}+\sqrt{\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)^2+\frac{4\alpha U}{R_1}}}{2\alpha},$$

$$I=\alpha\varphi^2.$$

Методом узловых потенциалов можно пользоваться и тогда, когда вольтамперная характеристика нелинейного элемента задана графически. В этом случае полученную при решении уравнений зависимость между током элемента и потенциалом узла нужно изобразить на том же графике, где приведена вольтамперная характеристика, и найти точку пересечения графиков — т. е. решить уравнение графически.

Упражнения

1. Какой заряд протечет через батарею (рис. 11), если точки A и B замкнуть перемычкой?

2. В той же схеме (см. рис. 11) к точкам A и B вместо перемычки подключаем заряженный до напряжения U_0 конденсатор емкостью C. Найдите заряд конденсатора емкостью $2C$.

3. N батарей ($\mathscr{E}$, r) соединены параллельно. Какой эквивалентной батареей их можно заменить?

Информация

XI Турнир юных физиков

Турнир проводится с сентября 1988 г. по февраль 1989 г. в четыре этапа:

I. Заочный коллективный конкурс (сентябрь — ноябрь 1988 г.).

Задания заочного коллективного конкурса напечатаны в этой статье и в специальной брошюре, которая разослана во все областные и республиканские отделы народного образования (или Министерства просвещения союзных республик), в обкомы и в ЦК ЛКСМ союзных республик.

Принять участие в заочном конкурсе ТЮФ-XI может любой коллектив школьников.

Решения задач заочного конкурса необходимо отправить не позднее 30 ноября 1988 г. по адресу: 119899 Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, кафедра физики колебаний, Оргкомитет ТЮФ-XI. В конверт вложите анкету, в которой укажите:

1. Почтовый адрес и телефон школы, фамилию, имя, отчество учителя физики.
2. Список авторов решений (имена пишите полностью).
3. Фамилию, имя отчество и адрес руководителя команды.

Решение каждой задачи оформляйте отдельно. В начале решения каждой задачи обязательно укажите город, номер школы, фамилии авторов решения. К экспериментальным задачам приложите подробные описания установок, их схемы, желательно фотографии и экспериментальные данные. Наиболее удачные решения будут отмечены грамотами Турнира.

II. Городские, областные и республиканские турниры юных физиков (декабрь 1988 г.).

Московский ТЮФ-XI будет проведен физическим факультетом МГУ для школ Москвы и Московской области по задачам заочного конкурса.

Турниры юных физиков в других городах, в областях и республиках проводятся местными Оргкомитетами или инициативными группами. Физический факультет МГУ готов оказать организационную и методическую помощь в проведении таких турниров.

III. Всесоюзный турнир юных физиков (январь 1989 г.).

Будет проведен по заданиям заочного коллективного конкурса с дополнениями и разъяснениями, которые будут разосланы участникам Турнира в декабре 1988 г.

IV. Международный турнир юных физиков (февраль 1989 г.).

По предварительной договоренности каждая страна представляет по одной команде (страна-устроитель — две команды). Кроме того, в работе Турнира примут участие в качестве кураторов иностранных команд несколько команд от страны-устроителя. Предполагается провести II Международный турнир юных физиков в СССР, а III — в Чехословакии. Регламент проведения Международного турнира юных физиков будет разработан на консультативном совещании представителей стран-участников в октябре 1988 г. в Москве.

Задания заочного коллективного конкурса ТЮФ-XI

На курдля охотятся изнутри
С. Лем

1. **«Придумай сам».** Сконструируйте и изготовьте установку для наглядной демонстрации волновых свойств и законов распространения звука в воздухе.

2. **«Полдень».** Можно ли называть полднем момент в середине временного интервала от восхода до заката Солнца? Воспользовавшись календарем, вы легко убедитесь в том, что этот момент в течение года «плавает» относительно определенного момента времени. Объясните причину возникновения этого эффекта.

3 **«Прилив».** Оцените высоту прилива в Черном море 12 декабря 1988 г.

4. **«Лужа и ветер».** Измерьте параметры волн, возбуждаемых ветром в мелком водоеме. Исследуйте зависимость длины волны от скорости ветра.

5 **«Фигуры Хладни».** Исследуйте фигуры Хладни для диска и квадрата.

6 **«Мыльный пузырь».** Чем определяется «время жизни» мыльного пузыря? Почему он лопается и как это происходит?

7. **«Лесков».** Объясните, каким образом ковач Марой укорачивал английские болты (Лесков Н. С. «Запечатленный ангел»).

8. **«Метро».** Предложите способы и измерьте скорость электропоезда метро в середине перегона между станциями «Университет» и «Проспект Вернадского» (это для москвичей). То же для автобуса, в котором вы едете, если по пути следования нет надежных указателей расстояния.

9. **«Астронавт».** На какую максимальную дальность путешествия может рассчитывать астронавт за 50 лет полета?

10. **«Атмосфера Луны».** Представьте, что вам удалось создать на Луне атмосферу земного состава. Опишите ее параметры и свойства. Как быстро она будет «худеть» и как сохранить такую атмосферу?

11. **«Шампиньон».** Удивительно, но иногда шампиньоны и даже трава прорастают сквозь толщу асфальта. Объясните эти явления.

12. **«Прогноз погоды».** «Барометр падает — к ненастью» — почему это утверждение чаще всего справедливо?

13. **«Фотовспышка».** Осветите фотовспышкой свои зубы и наблюдайте в темноте их свечение (для этого нужно снять крышку с фотовспышки, глаза хорошо защитить и открыть их сразу после вспышки). Объясните и исследуйте явление послесвечения.

14. **«Триболюминесценция».** Сколько сахара вам потребуется, чтобы в темном подземелье прочесть послание (в несколько слов) от вашего предшественника? Спички у вас кончились, а фонарик вы уже выбросили.

15. **«Электрон».** Электрон, имеющий скорость $v = 3\cdot 10^5$ м/с, пролетает с прицельным параметром d мимо металлического шарика радиусом 1 см. Заряд шарика изменяется со временем по закону $q(t)=q_0\cos\omega t$, где $q_0=10^{-8}$ Кл, $\omega=10^5$ рад/с. Постройте зависимость угла рассеяния электрона φ от прицельного параметра d. Можно ли использовать этот эффект для объяснения комптоновского рассеяния?

16. **«Информация».** Сколько бит информации вы получили, прочтя задания заочного конкурса? Сколько бит информации вы получите, глядя на географическую карту размером в одну страницу текста?

17. **«Карлсон».** Сколько варенья должен съедать Карлсон, чтобы не худеть в процессе полета? (Традиционно задача № 17 имеет шуточный оттенок).

Задания подготовили сотрудники физического факультета МГУ: *В. Б. Брагинский, П. В. Елютин, А. Н. Коротков, А. Ю. Кусенко, Е. Н. Юносов.*

Участникам и организаторам Турниров

Турнир юных физиков — это коллективное состязание школьников старших классов в умении решать сложные физические задачи, убедительно представлять и отстаивать свои решения, участвовать в научных дискуссиях.

ТЮФ — соревнование школ, в котором школу представляет команда. Этим ТЮФ отличается, например от традиционных олимпиад по физике, которые являются индивидуальными состязаниями школьников. Участие в командном решении задач помогает юным физикам обрести навыки коллективной творческой работы.

Задачи, предлагаемые на ТЮФ,— это всегда проблемы. Их решение предполагает проведение самостоятельных теоретических и экспериментальных исследований. Условия задач сформулированы максимально кратко, без указаний на то, что является в данной ситуации существенным, а чем можно пренебречь. Поэтому участники ТЮФ сами должны выбрать модель для данной задачи, сделать необходимые допущения, исследовать полученное решение, словом, пройти через все необходимые этапы серьезной научной работы. Каждая задача имеет название, усиливающее ее эмоциональное восприятие. В название, как правило, входит ключевое слово, определяющее круг рассматриваемых объектов или их свойств. Иногда название содержит подсказку к решению задачи.

Спектр задач достаточно широк. Среди них обязательно есть легкие и очень трудные, решаемые в основном школьными методами, а иногда и выходящие за рамки школьной программы. Хорошую турнирную задачу могут решать школьник и учитель, студент и ученый, научные коллективы и целые институты. На любом уровне она позволяет получить достойные внимания результаты, но никогда нельзя сказать, что проблема исчерпана полностью. Обратите внимание, например, на задачи «Прогноз погоды» или «Электрон».

Основной формой представления решений задач участниками ТЮФ является физбой — публичная защита решений перед придирчивыми соперниками, заинтересованными зрителями и беспристрастным жюри. Участники ТЮФ должны в полемике отстаивать правильность своих выводов, что предполагает глубокую осведомленность в данном вопросе, умение быстро находить нужные аргументы, видеть сильные и слабые стороны своего решения и решений оппонентов.

Наконец, ТЮФ претворяет в жизнь принципы педагогики сотрудничества, теснейшим образом связывая воедино на основе общего дела интересы школьников, учителей, студентов и ученых. Творческий дух Турнира, непрерывность образования и преемственность в цепи школьник-студент-ученый — лучшие качества Турнира.

В последнее время ТЮФ приобрел широкую популярность, стал эффективной и долговременной формой взаимодействия средней школы и вуза.

Советы, как решать турнирную задачу, как можно работать коллективно и кто ваши помощники, приведены в «Кванте», 1987, № 8 (с. 60). Дополним их еще несколькими.

Как организован физбой. Физбой чаще всего проводится по схеме «Докладчик — оппонент — рецензент» в 3 или 6 действий. Каждая команда поочередно выступает в роли докладчика, оппонента или рецензента.

Регламент одного действия:

а) выступление докладчика — 5 мин;

б) полемика по докладу, отдельные выступления в полемике — 1 мин;

в) выступление оппонента — 3 мин;

г) выступление рецензента — 2 мин;

д) заключительная полемика, отдельные выступления — 1 мин;

е) слово жюри (подведение итогов) — 4 мин.

Вызов на доклад. Оппонент вызывает докладчика на любую задачу из предложенных на данный физбой. Докладчик может отклонить вызов (без объяснения причин, например из тактических соображений) — тогда производится новый вызов. Всего за физбой команда может дважды отклонить вызов.

Выступления команд. Докладчик (один или несколько членов команды) излагает суть решения задачи, акцентируя внимание слушателей на основных физических идеях и выводах. При этом желательно использовать заранее подготовленные рисунки, плакаты, слайды, фотографии, а также демонстрировать опыты, если задача экспериментальная.

В полемике по докладу обсуждается решение, представленное докладчиком. В очередности выступлений приоритет имеет команда оппонента. Докладчик отвечает на вопросы присутствующих.

В своем выступлении оппонент высказывает критические замечания по докладу, выявляет неточности и ошибки в понимании проблемы и в методах ее решения. Выступление оппонента не должно сводиться к изложению собственного решения задачи.

Рецензент дает оценку выступлениям докладчика и оппонента.

В заключительной полемике могут обсуждаться выступления оппонента и рецензента. Оппонент и рецензент могут, по усмотрению жюри, представить свои решения задач.

Ограничения на число выступлений. Каждый участник команды может выступать в качестве докладчика, оппонента или рецензента не более двух раз. Дополнительные выступления в полемике — без ограничений.

Судейство физбоя. Ведущий физбоя следит за соблюдением регламента, предоставляет участникам слово (или лишает слова) и координирует действия команд.

Жюри физбоя оценивает выступления докладчика, оппонента и рецензента и все дополнительные выступления, в заключительном слове подводит итоги обсуждения задачи, отмечает сильные и слабые стороны решения.

Оценка выступлений команд производится по расширенной школьной шкале. Оценки 5+ и 2 являются исключительными и выставляются с обязательным объяснением причины. Перевод оценок в баллы производится по следующей таблице:

Баллы / Оценка	2	3	3+	4	4+	5	5+
докладчику	0	9	12	18	21	27	30
оппоненту	0	6	8	12	14	18	20
рецензенту	0	3	4	6	7	9	10

Кто ваши шефы, кого приглашать в жюри. Конечно же, это студенты и ученые. Там, где ведется научная работа, вы всегда найдете понимание и поддержку. Ведь участвовать в жюри Турнира — это не просто контролировать ваши знания и выставлять оценки, а работать вместе с вами в творческом контакте.

Обращение к «нефизикам». Почему муравей меньше слона, могут ли химические реакции приводить к разделению (обогащению) изотопов, какова экономическая эффективность создания Рыбинского водохранилища...— такие вопросы могли бы стать содержанием турниров юных биологов, химиков, экономистов и других. Остается только организовать такие турниры, и здесь дело за энтузиастами.

Желаем всем будущим участникам и организаторам Турниров удачи и творческих успехов!

Зам. председателя
Оргкомитета
Е. Н. Юносов

Ответы, указания, решения

Расчет электрических цепей

1. $q = \frac{1}{30} CU_0$.

2. $q = \frac{4}{11} C(2U_0 - U_1)$.

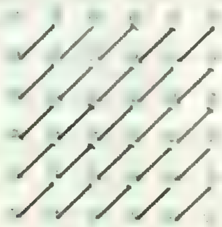
3. $\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_1/r_1 + \mathscr{E}_2/r_2 + \ldots + \mathscr{E}_N/r_N}{1/r_1 + 1/r_2 + \ldots + 1/r_N}$;

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots + \frac{1}{r_N}.$$

«Квант» для младших школьников»

(см. «Квант» № 7)

1. Соединим точки в квадрате прямыми, параллельными одной из диагоналей квадрата (см. рисунок). Суммируя количества точек на



каждой из полученных прямых, найдем общее количество точек в квадрате. Это и даст нужную формулу:

$$1+2+\ldots+(k-1)+k+(k-1)+\ldots+2+1=k^2.$$

2. Дима Крымов может кататься только с Аней Воробьевой, потому что Инна Крымова — его сестра, а остальные девочки выше его. Тогда Сережа Петров может кататься только с Инной Крымовой, Андрей Егоров — только с Олей Петровой, а Юра Воробьев — с Люсей Егоровой.

3. Воздух в стакане нагревается от воды и поэтому, расширяясь, занимает больший объем.

4. Числа x^5y и xy^5 имеют одинаковую четность и поэтому не могут отличаться на нечетное число 1987.

5. Как бы мы ни разрезали прямоугольник на три треугольника, площадь одного из них будет равна половине площади прямоугольника. Если мы обозначим площадь прямоугольника через S, площадь того треугольника, о котором идет речь в условии, через x, то площади двух других треугольников будут $\frac{S}{2}$ и $\frac{S}{2} - x$. По условию $x = \frac{S/2+(S/2-x)}{2}$. Отсюда $3x = \frac{S}{2}$, $x = \frac{S}{6}$, $\frac{S}{2} - x = \frac{S}{3}$. Таким образом, площади треугольников относятся как $\frac{S}{6} : \frac{S}{3} : \frac{S}{2}$, или 1:2:3.

Калейдоскоп «Кванта»

(см. «Квант» № 7, с. 44)

Диспетчер должен послать пожарных в квадрат Д3.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов,
Д. А. Крымов, И. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин,
Э. В. Назаров, И. С. Смирнова, П. И. Чернуский

Фото представили:
Фотогруппа факультета физико-химической
биологии МФТИ

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 15.06.88. Подписано к печати 21.07.88.
Т-12563. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 21,93. Усл. печ. л. 5,16. Уч.-изд. л. 6,32.
Тираж 189250 экз. Цена 40 коп. Заказ 1528;

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

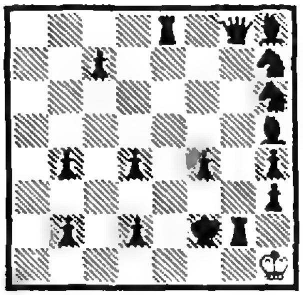
Шахматная страничка

КОРОЛЬ ПРЕВРАЩАЕТСЯ... В ДАМКУ

Сегодня в гостях у шахматной странички шашки. Впрочем, трудно сказать к какому жанру относятся эти головоломки — то ли к шахматам, то ли к шашкам.

Вот какая грустная история произошла в одном клубе.

В партии двух любителей возникло следующее положение.



Беззащитный белый король противостоит неприятельской армии, полностью сохранившейся во время битвы. Черные, понятно, могут заматовать его в том углу, где он сейчас очутился. Однако они пожелали пленить короля в другом углу доски — h8 — и, увы, горько поплатились за свою прихоть.

1...Лh2+ 2. Кр:h2 Фg1+ 3. Кр:h3 Фg2+ 4. Кр:h4 Фg3+ 5. Кр:h5 Фg4+ 6. Кр:h6 Фg5+ 7. Кр:h7 Ле7+ 8. Кр:h8. Доведя короля до последней горизонтали, игравший белыми что-то прошептал, но партнер, увлеченный своим замыслом, не расслышал слов и с возгласом «мат!» поставил ферзя рядом с белым королем — **8...Фg7.** «Но я же сказал: дамка»,— сдержанно заметил первый игрок, после чего провел маневр, подобного которому не знала шахматная история: **9. Крh8 — g7 — e7 — c7 — f4— f2 — d4 — d2 — b4 — b2!!** И от черных фигур, только что полным составом пребывавшим на доске, не осталось и следа. Да, легкомыслие порой обходится слишком дорого.

Белые: Крe5, Сa7; черные: Крh2. Мат в 7 ходов. (С. Белоконь, 1974 г.)

Эту задачу известный шахматный этюдист посвятил первому гроссмейстеру СССР по шашкам З. Цирику. Задание на первый взгляд невыполнимо, но надо иметь в виду, что черному королю разрешается ходить только по черным полям — как в шашках! Белые фигуры солидарны с ним и тоже перемещаются лишь по черным полям.

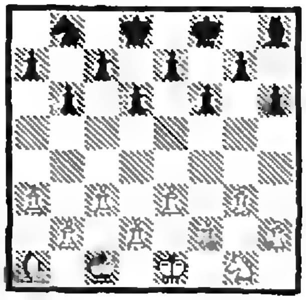
1. Крd6! Крg3 2. Сg1 Крf4 3. Сf2 Крg5 4. Сg3 Крf6 5. Сf4 Крg7 6. Сg5 Крf8(h8) 7. Сh6(f6)×.

В спортивных магазинах часто продаются комплекты шашек, на оборотной стороне которых нарисованы шахматные фигуры. Это очень удобно: можно играть в одну из игр на выбор. Не только играть, но и решать задачи!

Белые: Крd4, Фg1, п. c5; черные: Крb8. Белые выигрывают в 3 хода. (С. Шедей, 1984 г.)

Эта задача имеет и шахматное, и шашечное решение: **1) 1. Фg7 2. c6 и 3. Фb7(d7)×; 2) 1. gh2** (на полях d4, g1 и b8 — дамки) **1...ba7 2. dg1 и 3. g:a7×.**

Оригинальную игру придумал американский математик С. Голомб. Поскольку она является смесью шахмат и шашек, он назвал ее шашматы. Фигуры шахматные, но перемещаются они только по черным полям.

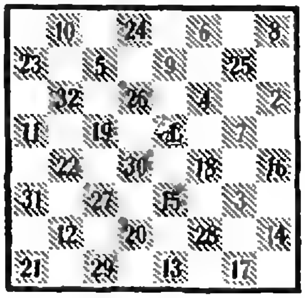


Перед вами исходная расстановка фигур. У каждой стороны по два короля, которые ходят на соседние черные поля. Шашматный слон ничем не отличается от шахматного, и пешки ходят как шашки. Конь по обычным правилам не в состоянии сделать на шашматной доске ни одного хода (он сразу попадает на запрещенное белое поле), поэтому ему разрешается перемещаться на три поля вдоль одной линии (вертикали или горизонтали) и на одно поле вдоль другой (с g1 — на d2, f4 и h4). Взятие пешек и королей делается как в шашках (перепрыгиванием через фигуру), а взятие слона и коня — как в шахматах. Пешки и короли берутся обязательно, а выбор между шахматным и шашечным взятием произвольный. Пешка, достигнув последней горизонтали, превращается в любую из трех фигур. Выигрывает в шашматы тот, кто первым берет обоих королей противника.

Рассмотрим две задачи о коне на шашматной доске. Как известно, на обычной доске существует замкнутый маршрут коня по всем полям (каждое посещается по одному разу); на доске удается расставить 32 коня (максимум), не угрожающих друг другу. Те же задачи возникают и для шашматного коня.

Существует ли замкнутый маршрут коня по всем полям шашматной доски? Какое наибольшее число коней можно расставить на ней так, чтобы они не угрожали друг другу?

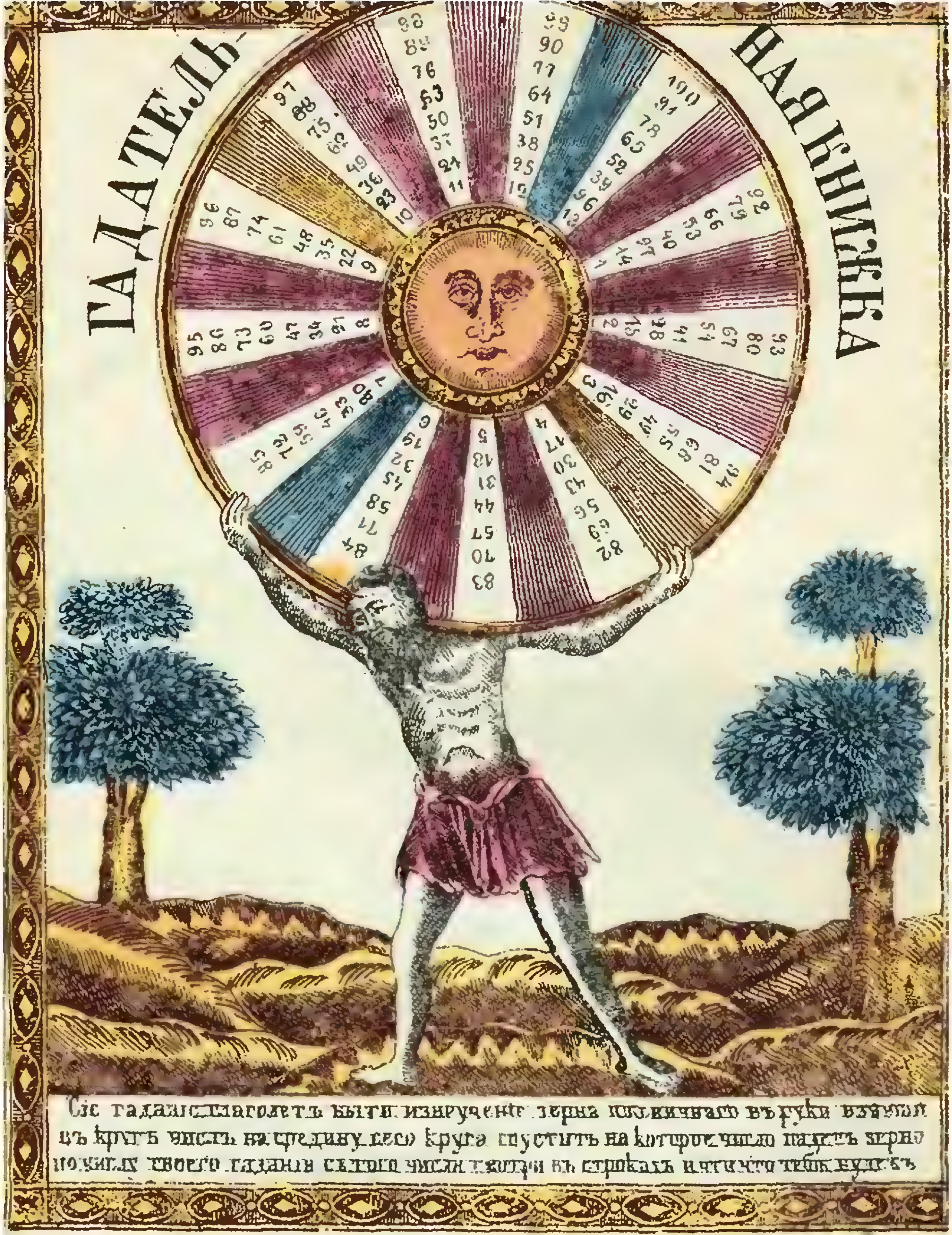
Вот решения обеих задач.



Поля маршрута, по которому проходит конь, последовательно занумерованы числами от 1 до 32. Поскольку поля с номерами 1 и 32 связаны между собой, маршрут замкнутый.

Наибольшее число «мирных» коней равно 16. Как и на обычной доске, они занимают половину всех доступных им полей. На рисунке коней можно поставить на все поля с нечетными номерами.

Е. Я. Гик


ГАДАТЕЛЬНАЯ КНИЖКА
98 85 76 63 50 37 24 11
99 90 77 64 51 38 25 12
97 88 75 62 49 36 23 10
100 91 78 65 52 39 26 13
96 87 74 61 48 35 22 9
92 79 66 53 40 27 14 1
95 86 73 60 47 34 21 8
93 80 67 54 41 28 15 2
85 72 59 46 33 20 7
94 81 68 55 42 29 16 3
84 71 58 45 32 19 6
82 69 56 43 30 17 4
83 70 57 44 31 18 5

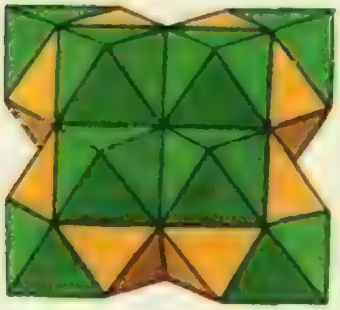
Сіе гаданіе глаголетъ быти изъ рученіе зерна пшеничнаго въ руки взявши въ кругъ числъ на средину сего круга спустить на которое число падетъ зерно по числу своего гаданія съ того числа смотри въ строкахъ и что что тебѣ будетъ

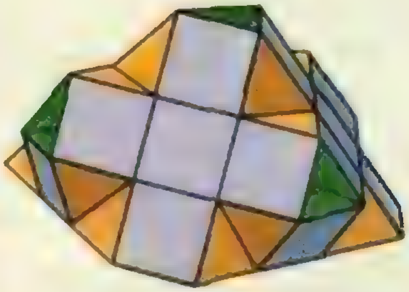
Дозволено Цензурою М. 31. Мая 1899 г.
Лит. И. Голышева въ Голышевка

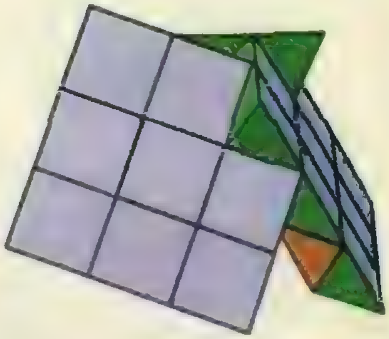
Цена 40 коп.

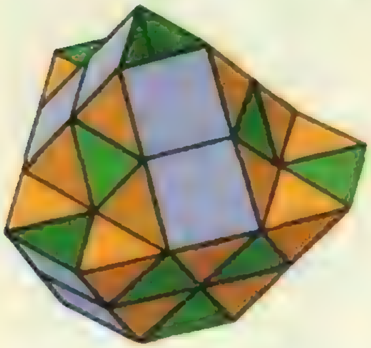
Индекс 70465

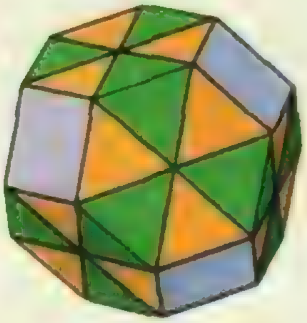
«Змейку Рубика» можно найти почти в любом магазине игрушек. Менее известна другая «змейка», состоящая из одинаковых кубиков. Ленинградцы В. С. Генель и С. М. Генель сумели объединить преимущества обеих этих игрушек и придать «змейке» новые качества за счет использования элементов двух сортов — правильных тетраэдров и правильных четырехгранных пирамид. Новая «змейка» состоит из 24 пар тетраэдр-пирамида; схема их соединения показана на рисунке. Выбор именно таких элементов объясняется несколькими соображениями. Чтобы «змейка» могла принимать разные формы, соприкасающиеся грани соседних элементов — здесь это правильные треугольники — должны допускать повороты; если, к тому же, у каждого элемента нескольких таких граней, появляется возможность перевода с одной грани соседнего элемента на другую. А благодаря тому, что приставленные друг к другу тетраэдр и «полуоктаэдр» образуют наклонную треугольную призму (проверьте!) и такими призмами можно замостить без просветов и перекрытий пространство, новая «змейка» хорошо сворачивается. Сотрудники математического отдела «Кванта» высоко оценили достоинства новой головоломки. Но авторам не удалось заинтересовать ею торговлю. А заинтересовала ли она вас?

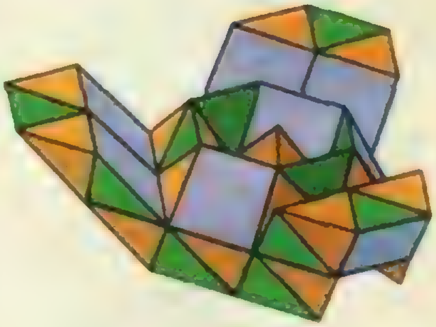


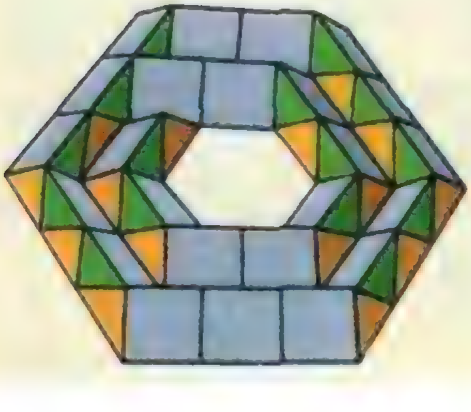


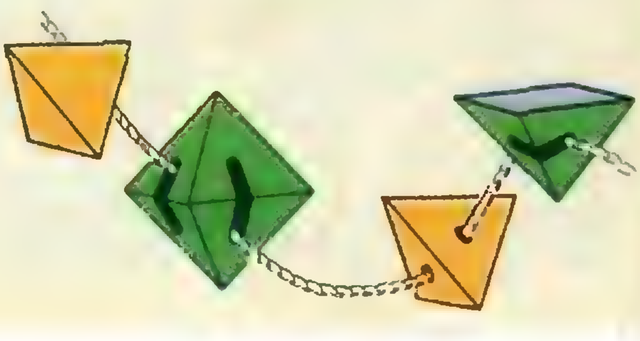












НОМЕР
9

Квант
Основан в 1970 году

9 1988

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *В. Я. Френкель.* Александр Александрович Фридман
9 *А. А. Борин.* Полет птицы и полет человека
17 *Д. Б. Фукс.* Геометрия листа бумаги
24 *А. В. Бялко.* Химическое разнообразие небесных тел
30 *В. В. Козлов.* Соударение тел

Задачник «Кванта»

37 Задачи М1121 — М1125, Ф1133— Ф1137
38 Problems M1121 — M1125, P1133 — P1137
42 Решения задач М1101 — М1105, Ф1113 — Ф1117
49 Список читателей, приславших правильные решения

40 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

51 Задачи
52 *А. Л. Розенталь.* Правило крайнего

Школа в «Кванте»
Физика 8, 9, 10:

58 Основная задача кинематики
60 Абсолютная температура

Лаборатория «Кванта»

63 *В. В. Утешев.* Жидкий азот и медная гайка

Практикум абитуриента

66 *В. Э. Матизен, В. Н. Дубровский.* Из геометрии тетраэдра

Олимпиады

72 Задачи LI Московской городской математической олимпиады
73 Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике
74 Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МВТУ им. Н. Э. Баумана

Информация

16 Заказы принимаются...
75 **Ответы, указания, решения**

Наша обложка

1, 4 *Вы заметили, что хвост у синички, сидящей на обложке, больше похож на хвост ласточки? Художник придал синичкиному хвосту форму поверхности, которую математики так и называют: «ласточкин хвост». Об этой интересной поверхности вы можете прочитать в статье Д. Б. Фукса «Геометрия листа бумаги».*

2 *Акварельный рисунок Альбрехта Дюрера (1471—1528). «Поистине искусство сокрыто в природе» — так писал этот великий немецкий художник. И не только искусство. Многие технические замыслы родились из желания человека достичь «природного идеала». Пример тому — авиация. (См. статью А. А. Борина «Полет птицы и полет человека».)*

3 *Шахматная страничка.*

© Издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

Александр Александрович ФРИДМАН

(к 100-летию со дня рождения)

Доктор физико-математических наук
В. Я. ФРЕНКЕЛЬ

Трудно определить, к какой области науки можно отнести деятельность замечательного советского ученого Александра Александровича Фридмана. Если обратиться к биографическому справочнику «Физики», то мы найдем в нем обстоятельную статью об Александре Александровиче. Но столь же информативная статья имеется и в аналогичном справочнике «Математики и механики». Наконец, в третьем подобном сборнике биографий «Астрономы» мы также найдем имя Фридмана, а заодно узнаем и о том, что в его честь назван один из кратеров на поверхности Луны. Кем же был этот наш соотечественник, жизнь которого справедливо называют подвигом, а открытие в области космологии — одним из самых революционных в науке, по масштабу приближающимся к тому, что было сделано Коперником? Он был «един в трех лицах», точнее — даже в четырех: и физик, и механик, и математик, и астроном (астрофизик). Созданная им в далеком 1922 году модель меняющейся во времени, расширяющейся Вселенной находится сейчас в центре внимания астрофизиков; она получила экспериментальное подтверждение в ряде работ-открытий, первая из которых была выполнена американским астрономом Э. Хабблом спустя четыре года после смерти Фридмана, а одна из самых существенных — обнаружение пронизывающего Вселенную электромагнитного излучения (получившего название реликтового)— около четверти века тому назад. Пожалуй, именно с момента этого открытия, сделанного американскими физиками Р. Вильсоном и А. Пензиасом, парадоксальные выводы из теории Фридмана, ему самому в свое время казавшиеся чуть ли не курьезом, обрели силу практически неопровержимых фактов, а наука о Вселенной стала стремительно развиваться.

А. А. Фридман родился в Петербурге 16 июня 1888 года. Его отец, тоже Александр Александрович, был артистом балета, дирижером, композитором, учился в Петербургской консерватории у Н. А. Римского-Корсакова. Мать, Людмила Игнатьевна Воячек, дочь известного петербургского композитора, органиста и дирижера И. К. Воячека, была пианисткой. «Ген» музыкальности в Александре Фридмане не проявился: он просто любил музыку, не более. В 1897 году он поступил в приготовительный класс 2-й Петербургской гимназии, располагавшейся неподалеку от дома № 35 по набережной реки Мойки, в котором жила его семья.

В гимназии был сильный преподавательский состав. Достаточно сказать, что двое из учителей были авторами гимназических учебников. Сведения по истории гимназии — самой старой в Петербурге — можно найти в ее материалах, составляющих особый фонд Государственного исторического архива Ленинграда. В этом фонде есть, конечно, сведения и об учениках, и об учителях, и материалы заседаний Педагогического совета гимназии, и даже страшные кондуиты (вспомните «Кондуит и Швамбранию» Льва Кассиля!), в которые пунктуально заносились рапорты классных надзирателей о проступках и шалостях гимназистов.

Если в первом классе Александр Фридман учился более чем средне (по большинству предметов, включая и арифметику, у него стояли тройки), то начиная с третьего класса он —

один из лучших учеников. Другим таким учеником, разделявшим с Александром пальму первенства, был его многолетний друг Яков Тамаркин. Классом старше занимался во 2-й гимназии еще один юноша, имя которого известно, вероятно, читателям «Кванта»,— это был в будущем знаменитый математик академик Владимир Иванович Смирнов, товарищ Фридмана по аспирантуре, соавтор его работ, автор пятитомного курса высшей математики. В одном классе со Смирновым учился еще один необычайно одаренный юноша — Михаил Петелин, также товарищ и соавтор Фридмана. Редкое соцветие талантов, не в последнюю очередь, думается, проявившееся благодаря педагогическим способностям учителей — математиков Я. В. Иодынского и П. Н. Гензеля и физика И. В. Глинки.

В 1903 году (Фридман был тогда в шестом классе) И. В. Глинка организовал в физическом кабинете гимназии внеклассные занятия по физике, а вскоре после этого — физический кружок, собиравшийся три раза в неделю. Наиболее инициативные его участники руководили практическими занятиями своих товарищей. Затем кружок стал несколько торжественно называться «Обществом любителей физики 2-й Санкт-Петербургской гимназии». Гимназисты читали на его заседаниях реферативные доклады, организовали свою кружковую физическую библиотечку, начали издавать рукописный журнал, в котором помещались сделанные учениками обзоры по новейшим достижениям физики.

Фридман был, очевидно, очень привязан к гимназическому физическому кружку и, по воспоминаниям одного из своих товарищей по университету, бывал на его заседаниях, уже став студентом.

Тщетно пытался я найти Александра Фридмана в числе озорников, описанием подвигов которых заполнены ежедневные записи в кондуите 2-й гимназии. Видимо, был он поначалу довольно тихого нрава, потом вместе с Тамаркиным серьезно увлекся математикой, а еще позднее, уже в самых последних классах — революционным движением. Здесь он проявил себя опытным конспиратором: гимназическое начальство и не подозревало, что один из учащихся — член Центрального комитета Петербургской социал-демократической ученической организации. Была у Фридмана и «партийная» кличка — «Лиловый».

Александр Александрович Фридман. (Фото начала 10-х годов.)

Однажды Фридман и Тамаркин, в то время ученики восьмого класса, на уроке были необычайно возбуждены, разговаривали. Их даже выставили из класса. Однако, когда учитель узнал причину такого возбуждения, он не дал «делу» ход. Оказалось, что именно в то утро друзья узнали, что их первый математический труд — статья по теории чисел — принят к печати известным немецким математическим журналом и получил одобрение крупнейшего математика — Д. Гильберта.

Гимназию Фридман окончил с золотой медалью.

В материалах фонда гимназии сохранились задачи, которые были предложены гимназистам на выпускных экзаменах. Приведем две такие задачи (из числа четырех, занесенных в протоколы экзаменационной комиссии), чтобы у современных школьников-старшеклассников создалось представление о степени трудности соответствующей экзаменационной процедуры в мае 1906 года.

Алгебра письменная. Решить в целых и положительных числах неопределенное уравнение $ax+by=c$, в котором a равно корню уравнения

$$\frac{x-1}{1+\sqrt{x}}=4-\frac{1-\sqrt{x}}{2},$$

уменьшенному на 5 единиц, b равно пятому члену геометрической прогрессии, в которой все члены положительны, второй больше первого на $1\frac{1}{9}$, а разность между четвертым и первым есть $14\frac{4}{9}$, и, наконец, c равно коэффициенту того члена разложения

$$\left(z\sqrt{z^3}+\sqrt[8]{\frac{1}{z}}\right)^m,$$

который после упрощения содержит пятую степень буквы z и где m равно корню уравнения

$$\frac{\lg x}{2-\lg 5}=1.$$

Геометрия письменная. В полукруге радиусом R проведена хорда CD, параллельная диаметру AB и стягивающая дугу α; из точки D опущен перпендикуляр DE на AB, и точка E соединена с C. Фигура, ограниченная прямыми DE, EC и дугою DC, вращается около диаметра. Определить объем тела вращения, если известно, что $R=23{,}476$ м, а дуга α определяется уравнением $5\cos 2\alpha+13=24\cos\alpha$.

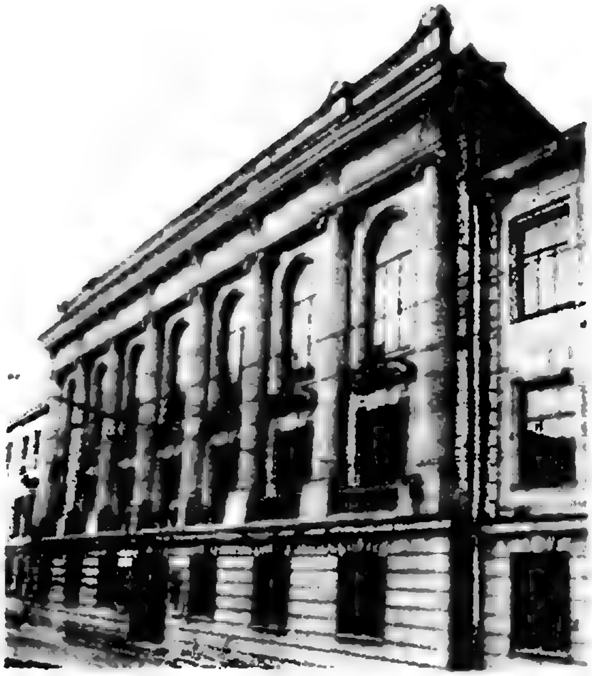
В 1906 году Фридман и Тамаркин — их имена во все годы учения идут рядом, как, скажем, имена Ильфа и Петрова,— поступают на математическое отделение физико-математического факультета Петербургского университета. И тут и им, и их товарищам очень повезло: как раз в этом году в Петербургский университет перевелся из Харьковского университета замечательный математик Владимир Андреевич Стеклов. Вот что Стеклов писал позднее, в 1911 году (этот отзыв хранится в том же архиве, что и материалы гимназии, но в фонде Университета): «Замечу, что выпуск 1910 г. (год окончания Фридманом и Тамаркиным университета,— *В. Ф.*) составляет какой-то исключительный случай. Из выпуска 1911 г. и среди студентов 4-го курса предстоящего выпуска нет ни одного, равного по способностям с гг. Тамаркиным, Фридманом, Булыгиным, Петелиным, Смирновым, Шохатом и др. Не было ни одного такого случая и за мою 15-летнюю преподавательскую деятельность в Харьковском университете. Этим благоприятным случаем необходимо воспользоваться для пользы Университета».

Еще будучи студентами-второкурсниками, Тамаркин и Фридман написали совместно сочинение на соискание золотой медали на тему «Разложение уравнений второй степени в целых числах». Стеклов писал в отзыве на эту работу, что она «обнаружила в авторах редкую для их возраста начитанность, знакомство с предметом и способность к систематическим исследованиям». Сочинение было удостоено золотой медали. Неудивительно, что после успешного окончания курса наук и получения диплома I-й степени Фридман и Тамаркин были оставлены в университете для подготовки к профессорской деятельности (аналог современной аспирантуры). К этому времени относится организация Фридманом и его товарищами «Математического кружка», который в течение четырех лет — с 1910 по 1914 годы — регулярно собирался для изучения и обсуждения различных математических проблем, штудирования книг классиков, для бесед о самих основах любимой науки. Фридман был одним из активнейших членов кружка.

С 1907 года он посещал также заседания кружка новой физики, руководителем которого был проживавший тогда в Петербурге венский физик П. С. Эренфест. Там разбирались новые работы по теории квантов и теории относительности. Фридман уже знал имя Эйнштейна, но вряд ли он подозревал в то время, что его научный путь пересечется с эйнштейновским и что произойдет это сравнительно скоро — в 1922 году.

В преддверии первой мировой войны с А. А. Фридманом произошла некоторая метаморфоза: молодой ученый кабинетного типа, увлекавшийся проблемами теории чисел, математического анализа, основами геометрии и теоретической механикой, под влиянием крупного русского ученого академика Б. Б. Голицына (и с одобрения В. А. Стеклова) увлекся вопросами аэро- и гидродинамики и метеорологии. В 1913 году он начал работать (наряду с преподаванием математики в Горном институте и Институте инженеров путей сообщения) в Главной физической обсерватории. В Павловске, под Петербургом, находился филиал этой обсерватории, и Фридман занимался там изучением поведения воздушных потоков, организовывал подъемы на воздушных змеях приборов, измерявших силу и направление ветров на различных высотах, сам с этой же целью совершал полеты на дирижабле. Пятый — воздушный — океан стал на всю жизнь подлинной страстью Александра Александровича!

Когда началась мировая война, Фридман уже в августе 1914 года поступил добровольцем в действующую армию. Ему было поручено налаживание аэронавигационной служ-



Дом на улице Плеханова (бывшей Казанской), в котором находилась 2-я Петербургская гимназия. Сейчас в этом здании — школа № 232.

В этом доме на Набережной Мойки жила семья А. А. Фридмана. Дом сохранился и ныне находится под охраной государства как памятник архитектуры XIX века.

бы, включавшей в себя и составление инструкций для полетов, и метеорологические прогнозы, и разработку приборов, обеспечивающих безопасность полета. За участие в разведывательных полетах русской авиации на Северном фронте и проявленную при этом храбрость Фридман уже в первые месяцы войны получил Георгиевский крест (к которому позднее присоединился и второй такой крест, и Георгиевское оружие — награда за особое мужество). На фронте Фридман не только продолжает совершать боевые вылеты, но и занимается составлением таблиц прицельного бомбометания — ведь поначалу, когда авиация из разведывательной стала превращаться в бомбардировочную (максимальный вес авиабомбы составлял в то время около 16 кг), было совсем неясно, в какой момент надо сбрасывать бомбу, чтобы она попала в цель.

В сентябре 1925 года приехавший в Ленинград немецкий профессор метеоролог Г. Фиккер рассказал академику В. А. Стеклову, что в минувшую войну он находился в осажденном русскими войсками городе-крепости Перемышле. И вот единственное точное попадание русской бомбы, которое ему довелось наблюдать, произошло с аэроплана, на котором летел Фридман. Это свидетельство неизменно упоминается в немногих публикациях об Александре Александровиче. Неясно, каким же образом Фиккер, находясь в 1915 году в Перемышле, об этом узнал. Ситуация прояснилась, когда мне удалось найти в сентябрьском номере одной из ленинградских газет (за 1925 г.) запись беседы Фиккера с корреспондентом этой газеты. Немецкий ученый рассказал, что впервые встретился с Фридманом летом 1923 года в Германии. В разговоре коллег очень быстро выяснилось, что оба они — по разные стороны от линии фронта — служили во время войны в военной авиации. Фридман помнил точную дату своего наиболее удачного полета над Перемышлем, а Фиккер запомнил день, когда буквально на его глазах там разорвалась бомба, сброшенная с русского военного аэроплана. Даты совпадали! В своем интервью Фиккер сказал: «Так выяснилось точное время и место столь... неприветливого нашего знакомства на поле брани». Знакомства, сменившегося в 23—25 годах тесным сотрудничеством.

В 1917 году Фридман возглавляет в Москве завод «Авиапром», выпускающий авиационные приборы, продолжает составлять таблицы бомбометания. Через год он переезжает в Пермь и становится профессором организованного там Университета, одним из активных создателей его физико-математического общества, научного журнала при этом обществе; выполняет ряд работ по гидродинамике и теоретической механике. В 1920 году он возвращается в Петроград. В городе — страшная нехватка квалифицированных педагогических кадров, и Фридман сразу же оказывается профессором четырех (!) вузов города: Университета, Политехнического института, Института инженеров путей сообщения и Военно-морской академии.

К этому времени он знакомится с последними работами Эйнштейна по приложению уравнений общей теории относительности к Миру в целом. Из уравнений Эйнштейна следовало, что Мир (Вселенная) в целом нестационарен. Это заключение противоречило философским установкам великого физика, полагавшего, что наша Вселенная вечна и не меняется со временем. Поэтому Эйнштейн ввел в соответствующее уравнение дополнительный член (так называемый λ-член), который приводил к стационарному решению. Теперь получался желаемый результат: Мир существовал всегда и будет существовать вечно, проблема «начала» и «конца», прочно ассоциировавшаяся с религиозными учениями и древними легендами, таким образом, не возникала.

Фридман подошел к этой проблеме не предвзято и показал, что уравнения Эйнштейна (взятые без λ-члена) допускают решение, в соответствии с которым расстояние между различными объектами Мира (например, галактиками) меняется во времени, причем оно может как возрастать, так и уменьшаться. Наша Вселенная может долгое время расширяться (название «расширяющаяся Вселенная» однозначно связывается с именем Фридмана и соответствует ныне переживаемой ею фазе). А будет ли это расширение безграничным или же сменится сжатием, зависит от того, какова средняя плотность ϱ материи во Вселенной. Если ϱ меньше некоторого критического значения $\varrho_к \approx \approx 10^{-29}$ г/см^3, то расширение будет продолжаться. Если же $\varrho > \varrho_к$, то оно сменится сжатием; Вселенная сожмется в «точку», которую называют точкой сингулярности. После этого произойдет «Большой взрыв» — и снова вещество, сконцентрировавшееся до умопомрачительных плотностей, начнет обратное движение к расширению. «Сценарий» того, что произошло после Большого взрыва, уже сейчас во многих деталях сумели воссоздать физики-теоретики и астрофизики. Он блестяще изложен в книге американского физика, лауреата Нобелевской премии Стивена Вайнберга «Первые три минуты». Интересно отметить, что само представление о рождении (или, лучше сказать, возрождении) Вселенной в Большом взрыве впервые было сформулировано американским физиком русского происхождения Г. А. Гамовым, который в 20-е годы учился у Фридмана в Петроградском университете и считал себя его учеником.

Александр Александрович Фридман был первым, кто получил формулы для определения возраста нашей Вселенной и, исходя из очень неточных данных, оценил его в 10 миллиардов лет. По нынешним оценкам он составляет 15—20 миллиардов лет. Космологическая работа Фридмана, вышедшая в свет в 1922 году в ведущем немецком физическом журнале, вызвала возражения Эйнштейна, который, как указывалось, полагал Вселенную стационарной и потому счел ошибочными выводы Фридмана о возможности ее эволюции во времени. Об этом Эйнштейн и написал краткую заметку в тот же журнал. Фридман в конце 1922 года написал Эйнштейну письмо, в котором отстаивал свои взгляды. Содержание письма довел до сведения Эйнштейна петроградский коллега Фридмана — профессор Юрий Александрович Крутков, оказавшийся весной 1923 года за границей. В мае этого года он несколько раз встречался с Эйнштейном, и 18 мая сделал такую полушутливую запись в своем дневнике: «Победил Эйнштейна в споре о Фридмане. Честь Петрограда спасена!». Эйнштейн направил (все в тот же журнал) еще одну заметку, в которой снимал свои прежние возражения против выводов Фридмана и признавал его результаты выдающимися и проливающими новый свет на проблемы космологии. Великому ученому и раньше приходилось делать ошибки, но позднее, в 1931 году, он признался, что более досадной ошибки, чем в случае оценки работы Фридмана, он в своей жизни не совершал.

Фридман не дожил до триумфа своей теории, в которой он «на кончике пера» открыл расширяющуюся Вселенную и, в общих чертах, предсказал возможные пути ее эволюции. Как упоминалось в начале статьи, доказательства пришли позднее. Через четыре года после кончины Александра Александровича американский астроном Э. Хаббл на основе изучения спектров далеких галактик показал, что галактики удаляются от нас со скоростью v, пропорциональной отделяющему их от нас расстоянию r: $\vec{v} = H\vec{r}$. Коэффициент пропорциональности H, не зависящий от $\vec{r}$ (и зависящий, вообще говоря, от времени), получил название постоянной Хаббла. По современным данным H принимают равной 75 км/(с · Мпс). Заметим, что постоянная Хаббла вместе с постоянной всемирного тяготения G определяет величину критической плотности $\varrho_к$: $\varrho_к = 3H^2/8\pi G \approx \approx 10^{-29}$ г/см^3.

В 1965 году Р. Вильсон и А. Пензиас в США обнаружили реликтовое излучение — зримый след Большого взрыва. Работа Фридмана получила новое и мощное подтверждение.

Мы не будем здесь воспроизводить формулы и рассуждения, которые привели Фридмана к его выводам. Укажем, однако, что в 1934 году оказалось возможным целый ряд важнейших заключений сделать не на сложном языке общей теории относительности, который использовал в своих работах Александр Александрович, а на более простом и привычном ньютоновском языке. Очень ярко об этом рассказал на страницах «Кванта» (№ 3, 1984) замечательный советский физик-теоретик Я. Б. Зельдович, необычайно много сделавший и для глубокого развития идей Фридмана, и для их пропаганды.

В первой половине 20-х годов Фридман продолжал работать одновременно и в области физики атмосферы, и в области теории относительности. В июле 1925 года, будучи директором Главной геофизической обсерватории, он совершил вместе с профессиональным летчиком-аэронавтом П. Ф. Федосеенко героический полет в атмосферу на воздушном шаре; был установлен всесоюзный рекорд высоты (7400 м). Фридман записал свои впечатления о полете. То же сделал и Федосеенко. Замечательные статьи! Из них — особенно, конечно, из статьи Федосеенко — мы узнаем, что мужественный летчик-наблюдатель времен Первой мировой войны, Александр Фридман остался таким же храбрым человеком, став всемирно известным ученым.

Летом 1925 года он впервые за много лет поехал на три недели отдохнуть в Крым. Возвращаясь домой — в Ленинград он приехал 17 августа,— Александр Александрович заболел брюшным тифом и от этой нелепой случайности погиб в 37-летнем возрасте 16 сентября, в расцвете творческих сил и таланта. Газеты откликнулись на это печальное событие рядом публикаций. В частности, «Вечерняя Красная Газета»— предшественница «Вечернего Ленинграда»— 18 сентября напечатала интервью с врачом, лечившим Фридмана. Последний день своей жизни Александр Александрович был в бреду, и бред его, как сказал врач, был очень характерен: «Он говорил о студентах, лекциях, вспоминал о полетах, старался делать какие-[illegible]ычисления. Порой казалось, что [illegible]итает лекцию». Вот когда ходячая фраза о том, что ученый до последних мгновений жизни думает о своей науке, перестает быть метафорической, а превращается в констатацию истинного положения вещей!

Имя Александра Александровича Фридмана золотыми буквами вписано в историю мировой науки. Его талант и заслуги были признаны при жизни. В 1931 году его работы были удостоены Премии имени В. И. Ленина. Его известность и слава сейчас, с развитием астрофизики, с дальнейшим проникновением в тайны Вселенной, все более и более возрастают.

Рекомендуемая литература

Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. Элементы математической физики. М.: «Наука», 1973. (§ 16 гл. II: «Расширяющаяся Вселенная», с. 118—126).

Новиков И. Д. Эволюция Вселенной. М.: «Наука», 1979.

Зельдович Я. Б. Вселенная. «Квант» № 3, 1984.

Вайнберг С. Первые три минуты. М.: «Наука», 1981.

Зельдович Я. Б. Почему расширяется Вселенная? «Природа» № 2, 1984.

Новиков И. Д. Как взорвалась Вселенная. «Природа» № 1, 1988.

Новиков И. Д. Вселенная как тепловая машина. «Квант» № 4, 1988.

Александр Аркадьевич Борин — известный специалист в области аэродинамики. В течение многих лет он работал в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) и в опытных конструкторских бюро ведущим конструктором по особо сложным объектам авиационной техники.

Эту статью А. А. Борин написал по просьбе редакции «Кванта». Так случилось, что она стала его последней работой — в июле 1987 года Александра Аркадьевича не стало.

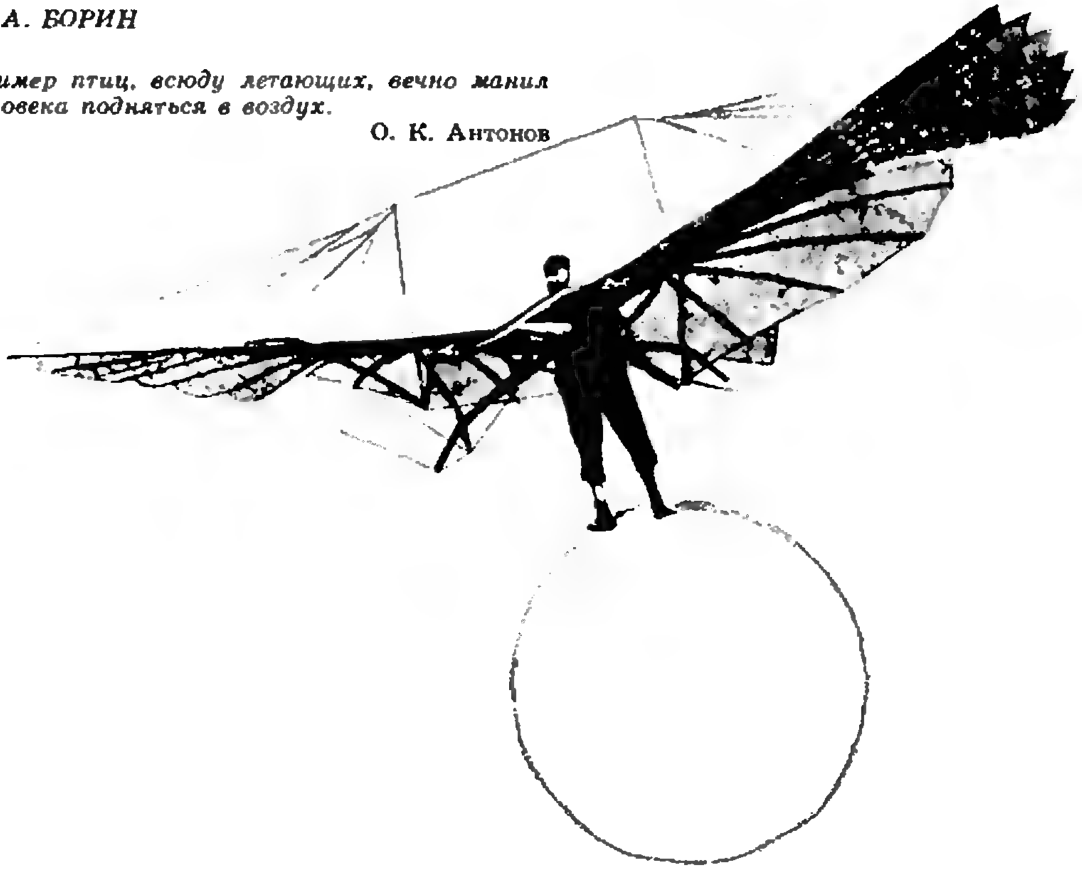
Мы решили опубликовать статью в том виде, в каком она была подготовлена автором. Понимая, что не все в ней доступно нашему читателю, мы попросили члена редколлегии «Кванта» профессора А. Л. Стасенко дать необходимые пояснения по тексту. Они приведены как примечания в конце статьи.

ПОЛЕТ ПТИЦЫ И ПОЛЕТ ЧЕЛОВЕКА

А. А. БОРИН

Пример птиц, всюду летающих, вечно манил человека подняться в воздух.

О. К. Антонов



Спор, длящийся столетия

Мечта о полете — о машущем полете — стара если не как мир, то, во всяком случае, как история развитого человеческого сознания. Древние, имея перед глазами пример птиц, не могли представить себе иной способ полета. Такова и легенда об Икаре.

Такова и первая сохранившаяся в истории попытка осмыслить полет с точки зрения тогдашних научных знаний. Это сделал Леонардо да Винчи. Понадобились еще сотни лет наблюдений и опытов, чтобы прийти к той очевидной для нас мысли, что летать можно и на неподвижном крыле. Теперь же мы прошли по этому пути так далеко, что оставили позади пернатых летунов почти по всем показателям, хотя ни один летательный аппарат не «владеет своим телом» столь совершенно, как птица.

Однако еще на рубеже нашего столетия представления ученых и техников были наивны и далеки от действительности. «Мы встречаем опять беспочвенные попытки летать на аппаратах, наивно имитирующих птиц,

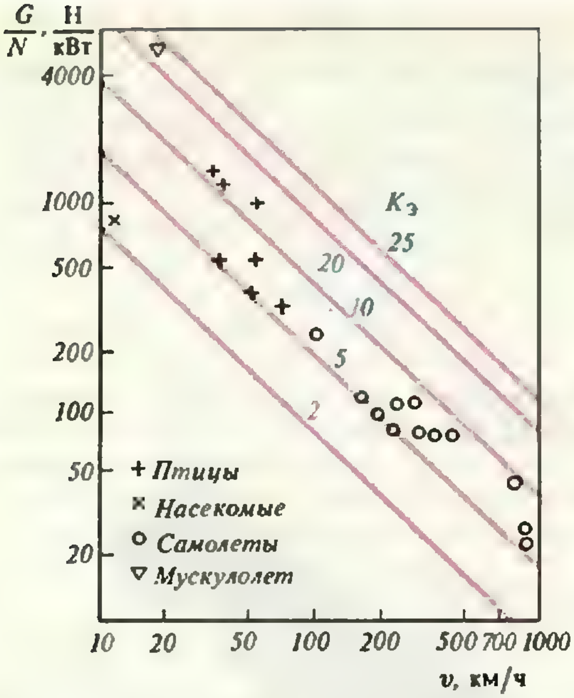


Рис. 1. Зависимость нагрузки на мощность от скорости крейсерского полета.

или новые исследования... частично повторяющие исследования Леонардо...» Так писал об этом времени замечательный советский ученый в области ракетно-космической техники М. К. Тихонравов в своей книге «Полет птиц и машины с машущими крыльями». Более того, точно такие же попытки повторяются в 30-х годах нашего столетия и, по крайней мере в проектах, неистребимо живут до наших дней. Легенда о машущем полете человека жива со времен древних греков, изменилось лишь ее содержание. В завораживающем своей легкостью парении птицы древние мифотворцы видели надежду на осуществление полета, нынешние же — они искушенней, ибо человек полетел,— ищут не достигнутое нами совершенство, свято веря, что творения природы всегда и во всем выше робких созданий разума.

Вопреки бесчисленным неудачам, машущий полет и сегодня привлекает громадное число энтузиастов. Его кажущаяся легкость побуждает любителей строить модели и подавать хитроумные проекты в счастливой уверенности, что именно им известен секрет, который позволит наконец человеку совершить машущий полет.

Но потом наступает разочарование: шагнуть дальше летающих моделей — а их за последнюю сотню лет построено без числа — не удалось пока никому. Случайно ли это? Или постоянные неудачи имеют более глубокие корни? Может ли человек летать в точном смысле «как птица»? И — главный вопрос: будет ли этот способ полета лучше обычного? или хуже?

Крейсерский полет

Крейсерским будем называть горизонтальный полет на режиме, обеспечивающем наибольшую дальность. Достижения миниатюрных существ — птиц — в этой области поражают воображение. Достоверно известно, что в 20-х годах стая чибисов пересекла Атлантику, покрыв 4000 км за 24 часа (средняя скорость 167 км/ч). Стая золотистых ржанок совершила перелет через Тихий океан на 10 000 км со средней скоростью более 100 км/ч.

Не менее впечатляет тот факт, что по нагрузке на единицу мощности (см. примечание[1]) птицы многократно превышают самолеты. Ведь очевидно, что аппарат, способный переносить по 1000Н на каждый киловатт мощности, несравненно выгодней другого, переносящего (при прочих равных условиях) только по 100Н. Следовательно, заявляют адепты машущего полета, по энергетике птица во много раз совершенней самолета.

Но, не забудем,— «при прочих равных условиях»! В чем заключается их равенство?

Как и всякий энергетический процесс, полет птицы (или самолета) подчиняется закону сохранения энергии, который для любого объекта, движущегося с постоянной скоростью v в сопротивляющейся среде, может быть представлен в виде $N\eta_{\text{дв}} = F_c v$, где N — потребляемая при движении мощность, $\eta_{\text{дв}}$ — КПД движителя, F_c — сила сопротивления среды (на данной скорости). Вводя величину качества[2] $K = G/F_c$ и выражая скорость в единицах км/ч, получаем величину нагрузки на единицу мощности:

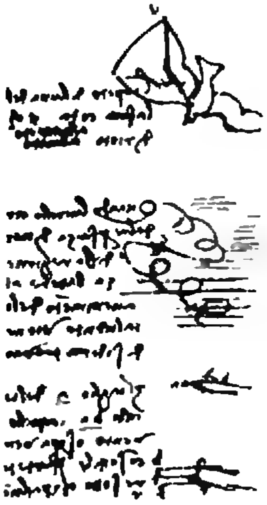
$$\frac{G}{N} = 3600 \frac{K\eta_{дв}}{v}.$$

Размерность этой величины — Н/кВт.

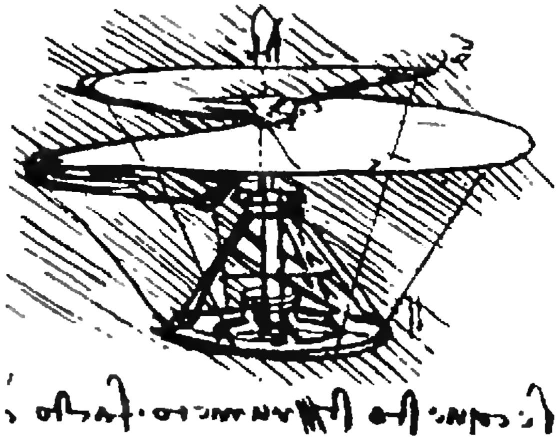
Эта зависимость универсальна: она справедлива для любых движущихся объектов (птица, самолет, поезд, корабль, жидкость, перекачиваемая по трубам) вне зависимости от происхождения силы, приводящей их в движение (мускулатура, тепловой или электрический двигатель, ветер), и от устройства движителя (колесо, винт, машущее крыло, насос). Чтобы решить задачу до конца в каждом конкретном случае, достаточно найти величину «эквивалентного качества» $K_э = K\eta_{дв}$, поскольку кроме $K_э$ нагрузка на мощность G/N зависит только от скорости v. Таким образом, критерием энергетического совершенства, оценивающим рациональность выбора технического решения или природного устройства объекта, является не нагрузка на мощность, коренным образом зависящая от скорости (не соблюдается «равенство прочих условий»!), а безразмерная величина $K_э$.

Теперь становится ясной причина больших значений G/N у птиц и насекомых. Ее отчетливо иллюстрирует график на рисунке 1. Даже при низком уровне энергетического совершенства (у саранчи, например, $K_э = 2{,}8$, тогда как у хороших самолетов $K_э = 13$ и больше) удельные нагрузки у них выше просто потому, что мала скорость полета. В этом смысле особо показательна точка графика, соответствующая знаменитому мускулолету «Госсамер — Кондор», перелетевшему Ла-Манш. Этот аппарат, построенный по самолетной схеме — неподвижное крыло и винтовой движитель, благодаря очень малой скорости полета ($v = 17{,}8$ км/ч) имеет недостижимую ни для каких птиц нагрузку на мощность 4400 Н/кВт.

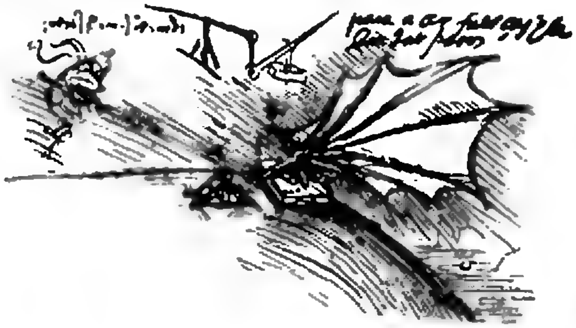
Физический смысл изложенного крайне прост: при затрате определенной мощности переносимый груз тем больше, чем меньше скорость. В этом и заключается «тайна» больших нагрузок на мощность у летающих животных.



Эскиз и описание маневра птицы в воздухе (из работ Леонардо да Винчи).



«...когда этот прибор, сделанный винтом,... быстро приводится во вращение —...винт ввинчивается в воздух и поднимается вверх» — таким текстом сопроводил Леонардо да Винчи этот свой эскиз летательного аппарата.



Леонардо да Винчи. Модель летательной машины.

Итак, критерий энергетического совершенства — $K_э$. Вполне естественно, что величина $K_э$ кардинально влияет на дальность горизонтального полета L. Согласно формуле Бреге,

$$L = -\frac{K_э}{C_у} \frac{\lg(1-\bar{m}_{гор})}{\lg e},$$

где $C_у$ — удельный расход горючего, $\bar{m}_{гор} = m_{гор}/m_0$ — относительная масса горючего, m_0 — стартовая масса объекта[3].

Из формулы видно, что абсолютные размеры и масса не оказывают влияния на дальность полета. Таким образом, сопоставление миниатюрных размеров птиц с покрываемыми ими расстояниями относится скорей к области эмоций, нежели к научной аргументации. При оценке же реально действующих факторов сравнение и здесь не обнаруживает какого-либо преимущества птиц.

Данные о перелетах — бесценный материал для исследователя. Достаточно хорошо измерить пройденное расстояние и относительную потерю массы (а это не представляет затруднений), чтобы получить надежную оценку энергетического совершенства объекта.

К сожалению, этих данных о птицах обычно и недостает. В сведениях об упомянутом перелете ржанок не указаны ни вес птиц, ни скорость ветра; более того, нет никаких указаний на то, что птицы не кормились в пути. Перелет чибисов через Атлантику сопровождался сильным попутным ветром — до 95 км/ч; потеря веса не измерялась. Полные и достоверные экспериментальные данные имеются лишь для одного случая: перелета стаи американских славок Dendroica striata от штата Массачусетс (США) до Бермудских островов (расстояние 1300 км). Скорость полета контролировалась радаром; учитывался ветер на трассе. Потеря массы составила в среднем 0,165 от стартовой.

Соответствующие данные по самолетам: относительная потеря массы устаревшего самолета ЛИ-2 — 0,182 при дальности полета 2090 км, самолета АНТ-25, совершившего в 1937 году перелет Москва — Сан-Джасинто (США) — 0,542 при дальности 13 000 км. Пользуясь известными значениями удельной теплоты сгорания авиационного топлива и «горючего» (жира) птиц, а также термическим КПД, по этим данным можно определить $K_э$: для птицы $K_э = 10{,}6$, для самолета ЛИ-2 $K_э = 8{,}7$, для АНТ-25 $K_э = 13{,}9$. Эти данные подтверждают отсутствие энергетического превосходства птиц. Интересно отметить, что относительной потере массы 0,165 у самолета АНТ-25 соответствует дальность только 3300 км.

Взлет, посадка, висение на месте

Да, скажут ревнители машущего полета, но ведь птица взлетает и садится вертикально, а для самолетов, лишенных этой возможности, мы вынуждены строить дорогостоящие взлетно-посадочные полосы.

Тут, как говорится, ничего не скажешь: осуществить аппарат, взлетающий как вертолет и летящий горизонтально как самолет, мы можем лишь ценой громадного расхода топлива на взлете. Необходимо, однако, внести некоторые уточнения.

Из второго закона Ньютона следует, что подъемная сила P всякого динамического несущего органа (крыла, несущего винта) равна произведению секундной массы отброшенного вниз воздуха $m_в$ на вертикальную скорость отброшенной струи. Обозначив площадь, ометаемую несущим органом (рис. 2), через s и имея в виду, что скорость отброшенной струи v_2 на режиме висения вдвое превышает скорость в плоскости несущего органа v_1, найдем подъемную силу, равную весу аппарата: $P = G = m_в v_2 = 2m_в v_1 = 2\varrho s v_1^2$ (ϱ — плотность воздуха у земли)[4].

Не вся затрачиваемая энергия идет на отбрасывание струи: учитывая потери ее (на закручивание струи, на трение несущего органа о воздух), введем «относительный КПД» η_0 и найдем мощность, необходимую для поддержания единицы веса:

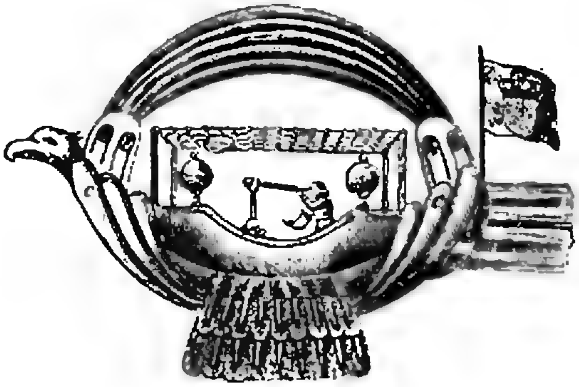
$$\frac{N_{потр}}{G} = \frac{1}{\eta_0\sqrt{2\varrho}}\left(\frac{G}{s}\right)^{1/2}.$$

Очевидно, что определяющим фактором для возможности вертикального взлета и висения является так называемая нагрузка на ометаемую площадь G/s. Отсюда следуют важные выводы, вполне подтверждаемые практикой.

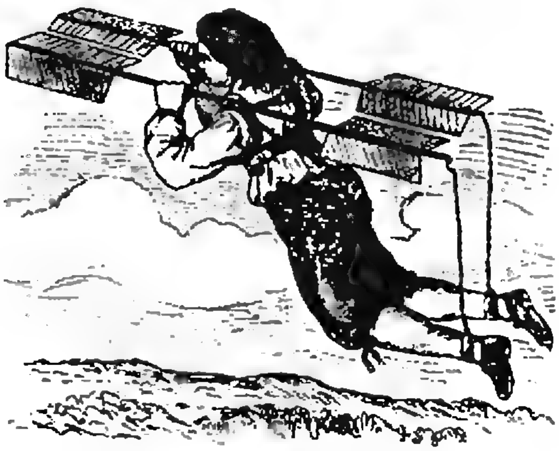
При условии геометрического и кинематического подобия (что удовлетворительно соблюдается в пределах одного биологического вида) ометаемая площадь изменяется пропорционально квадрату линейных размеров, масса — пропорционально кубу; нагрузка на площадь, следовательно, пропорциональна линейному размеру. Это объясняет упомянутый выше факт: вертикальным взлетом и способностью к «трепещущему» полету (зависанию) обладают только сравнительно небольшие птицы — не крупнее голубя. Более крупные — например, вороны — способны осуществлять точечный взлет (с места), пользуясь мощным толчком ногами; еще более крупные — гагара, пеликан, фламинго — взлетают, подобно самолету, с разбегом. Наконец, кондор, альбатрос и другие крупные птицы могут начинать полет, только бросаясь с возвышенных предметов — деревьев, скал, прибрежных дюн.

Кроме того — и это нельзя забывать энтузиастам, мечтающим осуществить вертикальный взлет на искусственном летательном аппарате, — добиться этого можно только при условии движения крыльев в горизонтальной плоскости на режиме взлета — иначе нельзя получить достаточно большую ометаемую площадь. У птиц переход от почти вертикального маха в крейсерском полете к почти горизонтальному при взлете и посадке осуществляется без труда благодаря гибкости и возможности сильно изменять наклон корпуса. Построить же такой натурный искусственный аппарат при сегодняшнем уровне техники не представляется возможным.

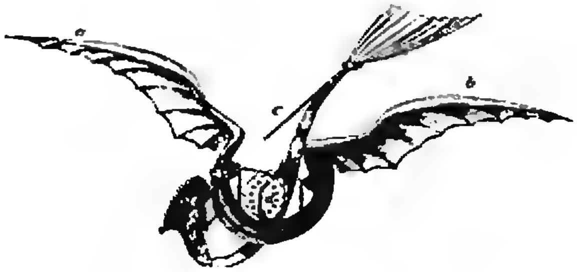
Вторым важным фактором, определяющим возможность висения и вертикального взлета, является доступный для данного животного предел удельной располагаемой мощности



Воздушный корабль, построенный французом Лованом в начале XVIII века. Крылья, сделанные из птичьих перьев, должны были приводиться в движение человеком.



В 1786 году француз Бенье испытал свой летательный снаряд с четырьмя крыльями.



Летательная машина Труве (конец XIX века). Модель летала на расстояние около 75 м и с последним взмахом крыльев медленно падала вниз.

$N_{расп}/G$. По оценке биологов он колеблется от 0,0040 до 0,0053 кВт/Н для птиц массой до 10 кг и снижается при дальнейшем увеличении массы. Очевидным условием вертикального взлета является выполнение неравенства $N_{потр} \leqslant N_{расп}$. На рисунке 3 дан график, по которому можно проследить, как выполняется это условие для реальных объектов — животных и летательных аппаратов (масштабы G/s и G/N ($N \equiv N_{расп}$) у вторых для наглядности сдвинуты).

При отсутствии упомянутых выше вредных потерь $\eta_0 = 1$. Этому случаю («идеальная птица») соответствует верхняя наклонная прямая графика. Ниже располагаются прямые с постепенно убывающим значением η_0. Нанося по известным G/s и G/N точку на график, получим характеристику соответствующего ей объекта; очевидно, что отстояние точки от прямой для «идеальной птицы» ($\eta_0 = 1$) является мерой энергетического совершенства объекта на данном режиме. Имеющиеся (к сожалению, немногочисленные) данные для птиц дают величину η_0 от 0,27 до 0,47; для единственного обстоятельно изученного насекомого — дрозофилы — 0,16. У вертолетов η_0 колеблется от 0,38 до 0,68, т. е. по степени энергетического совершенства на режиме висения они заметно превосходят летающих животных.

В этом нет ничего удивительного. Источником больших потерь у животных является неполнота ометания круга на размахе крыла. У птиц к этому добавляется отсутствие упругого элемента в системе корпус — крыло (он есть у насекомых в виде упругого внешнего скелета), из-за чего возникают потери на преодоление инерции крыла при каждой перемене направления взмаха. С другой стороны, у насекомых очень плохая аэродинамика из-за миниатюрных размеров и малых скоростей движения.

Таким образом, главным источником поражающего наши чувства «умения» насекомых и малых птиц взлетать вертикально и совершать трепещущий полет является просто-напросто малая нагрузка на ометаемую крылом площадь.

Мы видим, что к обещаниям энтузиастов осуществить искусственный аппарат машущего полета, выполняющий все, что «умеет» птица, надо относиться с большой осторожностью.

Ортоптер

В заключение упомянем о способе полета, подкупающем начинающих

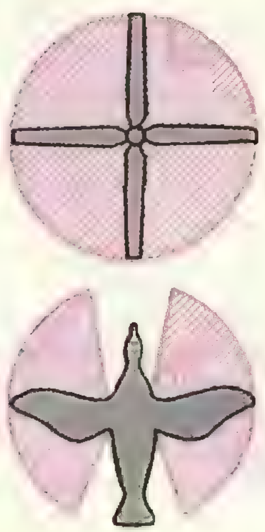


Рис. 2. Ометаемая несущим органом площадь.

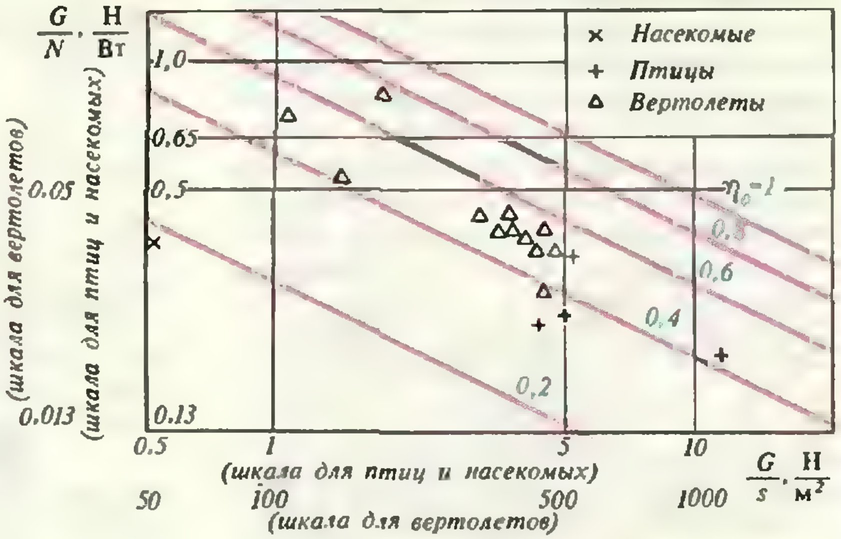


Рис. 3. Зависимость удельной взлетной мощности от нагрузки на ометаемую площадь.

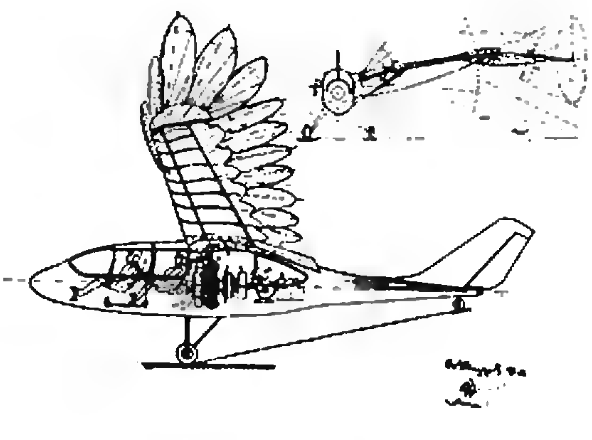
кажущейся очевидностью своей эффективности при взлете и висении: подъемная сила создается прямым ударом сверху вниз плоскостью крыла о воздух; при ходе вверх в крыле открываются клапаны либо оно поворачивается ребром по направлению движения. Аппарат, осуществляющий такое движение, называется ортоптером («прямокрыл»), и различные его варианты фигурируют в сотнях предложений.

Нетрудно видеть, что при таком движении площадь сечения столба воздуха, несущего на себе вес объекта, во много раз меньше площади, ометаемой крылом при горизонтальном его движении. Это, как мы уже знаем, влечет за собой резкий рост потребной мощности. В результате этого, а также из-за некоторых других специфических потерь, такой аппарат уступает по экономической эффективности вертолету в 4-5 раз.

В природе описанным видом летания пользуются только насекомые с очень малой нагрузкой на площадь крыла, например дневные бабочки.

Парусный летательный аппарат Лилиенталя (конец XIX века), поднимавшийся против ветра с возвышенного места.

Первый советский махолет, построенный в 1921 году Б. И. Черановским.



Двухместный махолет с мотором мощностью 150 л. с. и гидравлическим приводом крыльев (проект И. Н. Виноградова; 1962 год).

Примечания

1) Конечно, смешно сравнивать такие характеристики, как, например, вес или мощность воробья с весом и мощностью межконтинентального лайнера,— слишком жалким покажется воробей. Но разумно сравнить значения отношений этих характеристик, узнать, какой вес приходится на единицу мощности. Это отношение G/N и называется нагрузкой на единицу мощности. И вот при таком сравнении воробей окажется большой умницей — при своих слабых силенках он переносит в сто раз больший вес (чем смог бы лайнер). Правда, с меньшей скоростью.

Все сказанное и поясняет рисунок 1.

2) Сила, действующая на летательный аппарат со стороны воздуха,— аэродинамическая сила — может быть разложена на две составляющие: подъемную силу F_y, перпендикулярную скорости аппарата v, и силу сопротивления F_x, параллельную v. Интуитивно ясно, что чем больше подъемная сила и чем меньше сила сопротивления, тем лучше летательный аппарат выполняет свои функции — поднимать и переносить побыстрее грузы по воздуху, тем, образно говоря, этот аппарат качественнее. Поэтому отношение $K=F_y/F_x$ компонент аэродинамической силы получило название аэродинамического качества (или просто качества) летательного аппарата. В случае горизонтального полета с постоянной ско-

ростью подъемная сила уравновешивает силу тяжести, а сила тяги двигателя — силу сопротивления.

³⁾ Формула Бреге, по всей видимости, известна не каждому школьнику. Поэтому приведем ее вывод.

При равномерном горизонтальном полете, как уже говорилось, $F_x v = N\eta_{\text{дв}}$. Выразим F_x через подъемную силу $F_y = mg$ и аэродинамическое качество K:

$$\frac{mgv}{K} = N\eta_{\text{дв}}. \qquad (*)$$

Величина $N\eta_{\text{дв}}$ — это мощность, или секундная работа двигателя против сил сопротивления. Предположим, что в единицу времени двигатель расходует одну и ту же массу топлива μ ($[\mu]$=кг/с). Тогда за время dt масса топлива изменится на $dm = -\mu\, dt$ кг. Разделим обе части равенства (*) на $\mu = -dm/dt$:

$$-\frac{mgv \cdot dt}{K \cdot dm} = \frac{N\eta_{\text{дв}}}{\mu}.$$

Но ведь $v \cdot dt = dx$ — перемещение в горизонтальном направлении. Значит, уравнение, описывающее изменение массы вдоль пути, проходимого в горизонтальном полете, имеет вид

$$dx = -\frac{KN\eta_{\text{дв}}}{\mu g}\,\frac{dm}{m}.$$

Интегрируя это уравнение от точки старта ($x=0$, $m=m_0$) до конца полета ($x=L$, $m=m_0-m_{\text{гор}}$), получим:

$$L = -\frac{K_э N}{\mu g}\ln\left(1-\frac{m_{\text{гор}}}{m_0}\right) = -\frac{K_э N}{\mu g}\,\frac{\lg(1-\bar{m}_{\text{гор}})}{\lg e}.$$

Теперь осталось обозначить $\mu g/N = C_y$ — и мы получим формулу Бреге.

⁴⁾ Поясним этот абзац следующим образом. Изменение кинетической энергии массы воздуха, отбрасываемой вниз в единицу времени, равно

$$N = m_{\text{в}}\left(\frac{v_2^2}{2} - 0\right) = m_{\text{в}}\frac{v_2^2}{2}.$$

(Изменением потенциальной энергии этой массы мы пренебрегаем.) С другой стороны, можно рассматривать несущий орган (например, винт вертолета) как вентилятор, преодолевающий перепад давления, создающий подъемную силу. Этот перепад давления прогоняет «отсасываемый» сверху воздух со скоростью v_1, для чего требуется мощность

$$N = Gv_1.$$

Учитывая, что $G = m_{\text{в}}v_2$, из равенства двух выражений для мощности получаем:

$$m_{\text{в}}\frac{v_2^2}{2} = m_{\text{в}}v_2v_1, \text{ или } v_2 = 2v_1.$$

Забегая вперед, поясним, как находится мощность, необходимая для поддержания единицы веса — N/G. Из равенства $G = 2\rho s v_1^2$ выразим v_1: $v_1 = \sqrt{G/2\rho s}$. Подставив это v_1 в равенство $N = Gv_1$, найдем отношение N/G:

$$\frac{N}{G} = \frac{1}{\sqrt{2\rho}}\sqrt{\frac{G}{s}}.$$

Информация

Заказы принимаются...

Мы продолжаем список книг, которые будут выпущены издательством «Наука» в 1989 году и которые могут заинтересовать наших читателей (нумерация соответствует тематическому плану; цена указана ориентировочная; начало см. в № 7 и № 8).

Библиотечка «Квант»

160. Болотовский Б. М. Как излучают электроны и атомы, летящие быстрее света. 50 к.

Если электрон или атом движутся через вещество и их скорость превосходит скорость света в этом веществе, возникает электромагнитное излучение. В книге рассматривается это «сверхсветовое» излучение (эффект Вавилова — Черенкова, эффект Доплера), его свойства и применения.

161. Бялко А. В. Наша планета — Земля. 50 к.

Центральная тема книги — осознание того, почему наша планета при очевидной общности со всей Солнечной системой все же настолько уникальна, что стала единственно известным источником жизни. Круг рассмотренных вопросов очень широк — от происхождения химических элементов до климата Земли и его воздействия на цивилизацию.

162. Гальперин Г. А., Земляков А. Н. Математические бильярды. 50 к.

Рассказывается о поведении бильярдного шара на столе произвольной формы без луз. Описание этого поведения приводит к решению разнообразных вопросов математики и механики: задач о переливании жидкости, об освещении зеркальных комнат, о пеленге, осциллографе и фигурах Лиссажу, о столкновениях молекул газа в сосуде и др.

163. Гетман В. С. Внуки Солнца. 50 к.

Астероиды, кометы, метеорные тела, в бесчисленном множестве «населяющие» межпланетное пространство, все больше при-

(Окончание см. на с. 29)

ГЕОМЕТРИЯ ЛИСТА БУМАГИ

Доктор физико-математических наук
Д. Б. ФУКС

Возьмите в руки лист бумаги и, не сминая, изогните его. У вас в руках окажется кусочек поверхности, форма которого зависит от того, как вы изогнете лист. Образцы поверхностей, которые могут получиться, показаны на рисунке 1.

Однако далеко не всякая поверхность может быть представлена как изогнутый бумажный лист. Например, общеизвестно, что бумажному листу нельзя придать сферическую форму: если прижать лист бумаги к глобусу, на листе обязательно появятся складки. Лист бумаги можно, не сминая, свернуть в трубочку или в фунтик, но нельзя, избегнув складок, свернуть его вчетверо как носовой платок (рис. 2).

Определение. Поверхности, которые можно представить как изогнутый лист бумаги, называются *развертывающимися.*

Не определение, а бессмыслица, ничего путного из него выйти не может,— скажет Педант и будет прав. Не в том прав, что это определение чем-то плохо, а в том, что читать дальше ему не стоит: ни строгих определений, ни доказательств у нас не будет. Лучше сказать, все доказательства у нас (как в одном древнеиндийском геометрическом трактате) будут, в сущности, состоять из одного слова: смотри!

Все же не для Педанта (он уже захлопнул журнал), а для Вдумчивого Читателя, поясню: физические свойства листа бумаги, существенные для нашего определения,— это его гибкость и нерастяжимость (несжимаемость). Второе означает, что нарисованная на листе линия может при изгибании изменить свою форму, но сохраняет свою длину; первое означает, что никаких других ограничений на характер изгибания не существует.

2

То, что развертывающимися являются далеко не все поверхности, видно уже из того, что

всякая развертывающаяся поверхность является линейчатой.

Это означает, что к изогнутому листу бумаги можно в любом месте приложить спицу так, чтобы она прилегала к бумаге по целому отрезку,

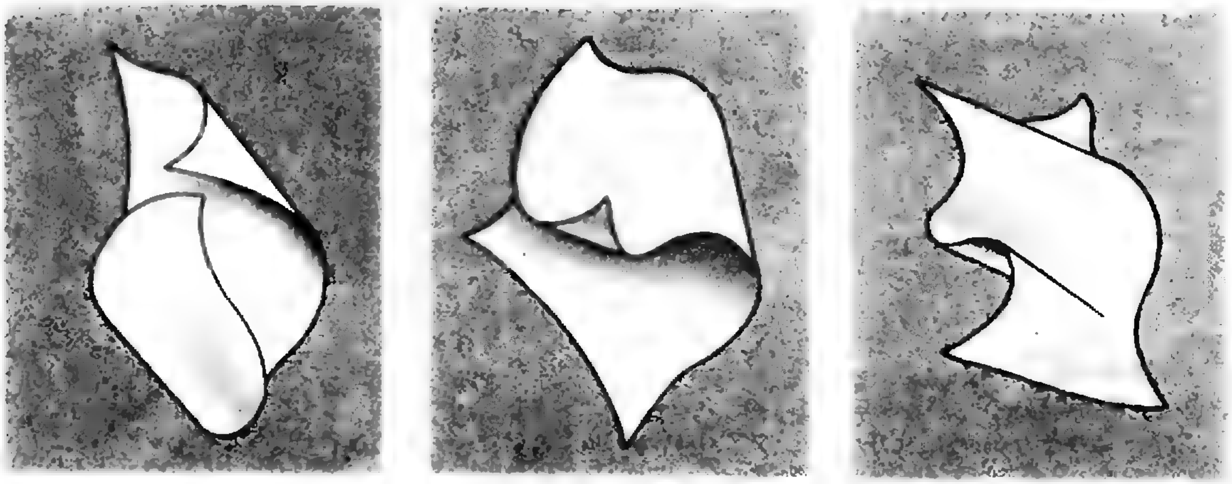


Рис. 1.

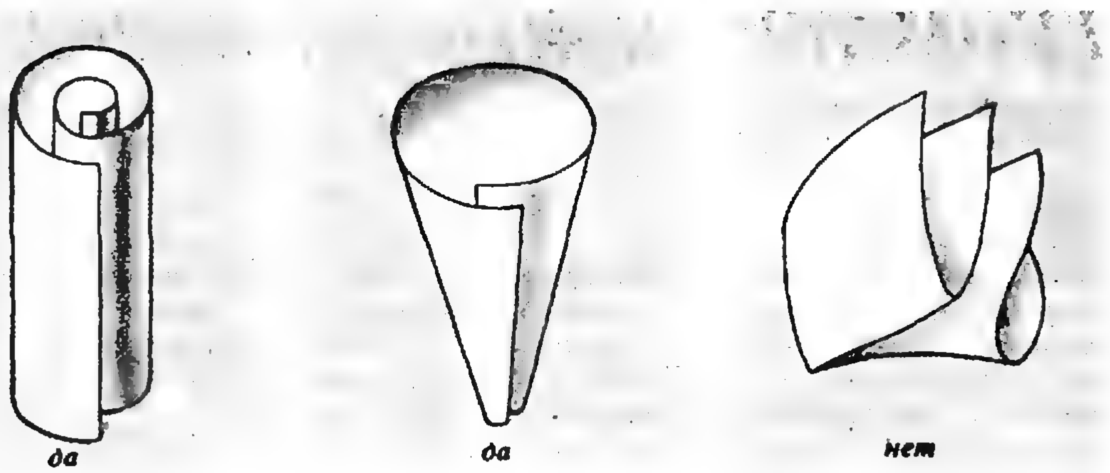


Рис. 2.

с двух сторон охватывающему выбранную точку. (Доказательство: эксперимент — см. рис. 3.) Другими словами, развертывающаяся поверхность состоит из прямолинейных отрезков, содержащихся в ней целиком. Эти отрезки называют прямолинейными образующими или просто образующими поверхности.

Если какая-нибудь точка развертывающейся поверхности является внутренней точкой двух не проходящих одна по другой образующих, то целый кусок вблизи этой точки является плоским (рис. 4). Такой случай мы будем исключать из рассмотрения, т. е. мы предполагаем, что

никакой, даже самый маленький, кусок нашей поверхности не является куском плоскости.

Таким образом, через каждую точку нашей поверхности проходит в точности одна прямолинейная образующая. Эти образующие составляют непрерывное семейство отрезков, заметающее нашу поверхность (см. рис. 5). Некоторые из этих отрезков вырождаются в точки, лежащие на границе нашего куска поверхности. (Последнее замечание — для замаячившей тени Педанта.)

Не следует думать, что всякая линейчатая поверхность является развертывающейся. Линейчатых поверхностей много. Прямолинейный отрезок, как угодно движущийся в пространстве, заметает линейчатую поверхность.

Возьмем какую-нибудь линейчатую поверхность, выберем прямолинейную

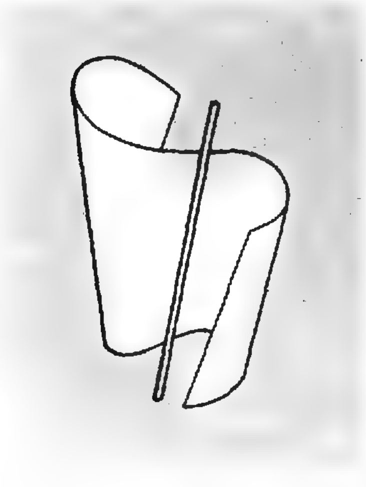


Рис. 3.

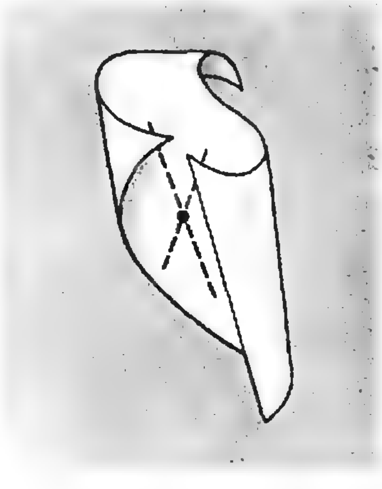


Рис. 4.

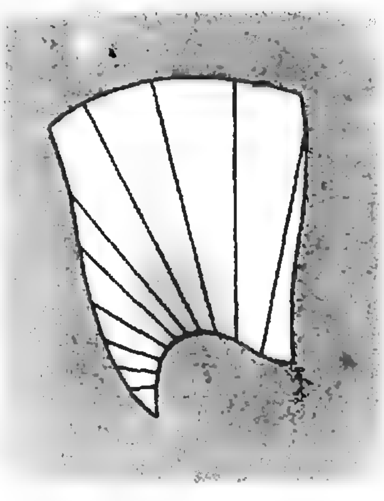


Рис. 5.

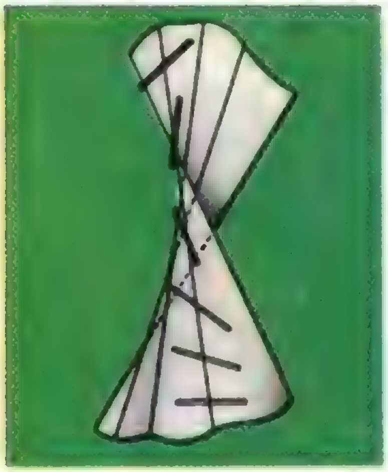


Рис. 6.

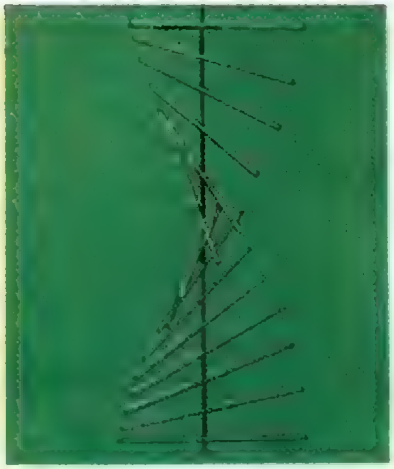


Рис. 7.

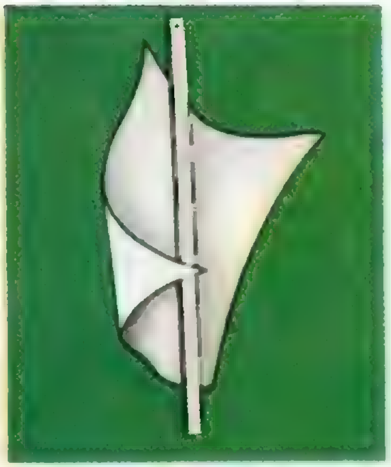


Рис. 8.

образующую и через каждую ее точку проведем прямую, которая ей перпендикулярна и касается поверхности (рис. 6). Получится подобие елочной гирлянды (рис. 7): перпендикулярные прямые торчат кто куда, вращаясь вокруг образующей. У развертывающейся же поверхности все прямые, перпендикулярные образующей и касающиеся поверхности, лежат в одной плоскости. Другими словами,

к развертывающейся поверхности не только можно приложить спицу, но можно приложить линейку, касающуюся поверхности по прямой, проходящей через наперед заданную точку (рис. 8).

(Доказательство: эксперимент.) И этого свойства уже достаточно: поверхность, которая им обладает, непременно является развертывающейся.

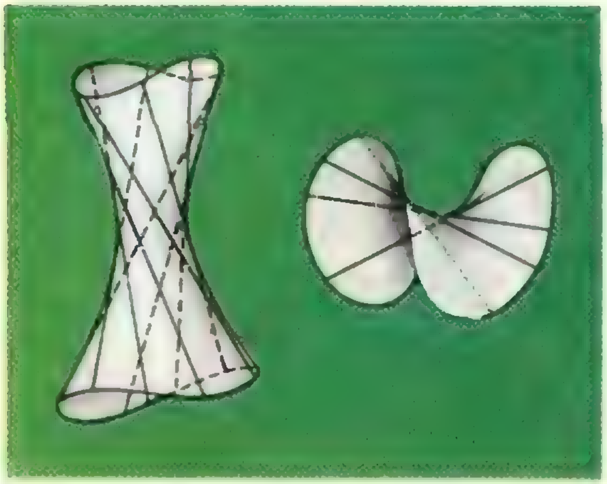


Рис. 9.

Кстати, вы, может быть, слыхали о таких линейчатых поверхностях: однополостном гиперболоиде и гиперболическом параболоиде (рис. 9)? Не слыхали — не надо, нам они не понадобятся. А если слыхали, то примите к сведению, что они не являются развертывающимися (потому хотя бы, что у них через каждую точку проходят две прямолинейные образующие, а для развертывающихся поверхностей такое невозможно — см. выше).

4

Посмотрите еще раз на рисунок 5. Вспомните, что мы имеем дело не с бесконечной поверхностью, а с куском поверхности (не может же лист бумаги быть бесконечным!). Этот кусок разграфлен прямолинейными образующими. Попробуем продолжить эти образующие — в одну или другую сторону. Что получится?

Вопрос этот поначалу кажется невинным. Продолжим образующие поверхности, изображенной на рисунке 5, «вверх» — в ту сторону, куда они расходятся веером. И ничего особенного не произойдет: поверхность будет расти, делаясь чем дальше, тем менее искривленной — более близкой к плоскости (рис. 10).

А если продолжить образующие в другую сторону? Я прошу тебя, читатель: отложи журнал, возьми в руки лист бумаги, изогни его примерно как

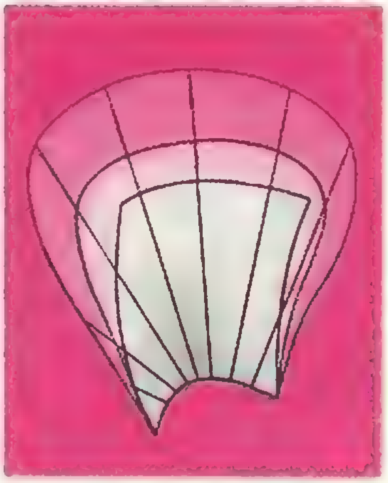


Рис. 10.

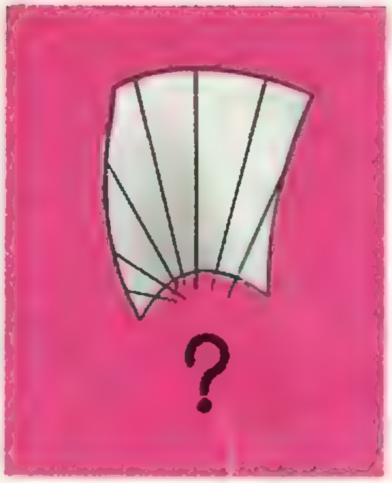


Рис. 11.

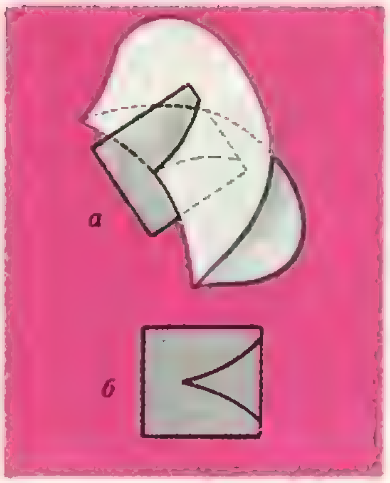


Рис. 12.

на рисунке 5 и попробуй представить себе, какой формы поверхность получится, если продолжить образующие в ту сторону, в которую они сходятся (рис. 11). Потом возьми журнал и узнай ответ. Если ты не знал и угадал, значит ты — Геометр.

А ответ таков: *поверхность не будет гладкой; на ней появится ребро возврата* (рис. 12, *а*). Это — линия, в которой сечение поверхности плоскостью выглядит примерно как показано на рисунке 12, *б*.

5

Я обещал воздерживаться от доказательств. Не потому, что я их вообще не люблю (это, конечно, неправда), и не потому, что доказательства моих утверждений, в частности, последнего утверждения, слишком сложны и не могут быть изложены доступным школьнику образом (это — правда только отчасти). Дело, скорее, в том, что доказательства (во всяком случае, известные мне) теорем этой статьи протекают в области формул: зададим поверхность уравнением, запишем через производные условие развертываемости и так далее, и так далее. Я не хочу излагать такое доказательство: оно вряд ли что-нибудь прояснит. Но все же пусть не доказать утверждение, а убедить читателя в том, что оно верно, я попытаюсь.

Еще раз посмотрите на рисунок 5. Как и всякое изображение пространственной фигуры, он представляет собой проекцию этой фигуры на плоскость — журнальную страницу. Итак, мы имеем семейство прямых на плоскости. Срисуйте его на отдельный лист и продолжите все прямые. Вы увидите, что все прямые сгущаются к некоторой кривой, которой они касаются (рис. 13). В анализе доказывают совсем простую теорему, что такая «огибающая» есть у всякого непрерывного семейства прямых, если только эти прямые не все параллельны и не проходят все через одну точку (похожее верно и для семейств кривых). Вот вы и увидели ребро возврата.

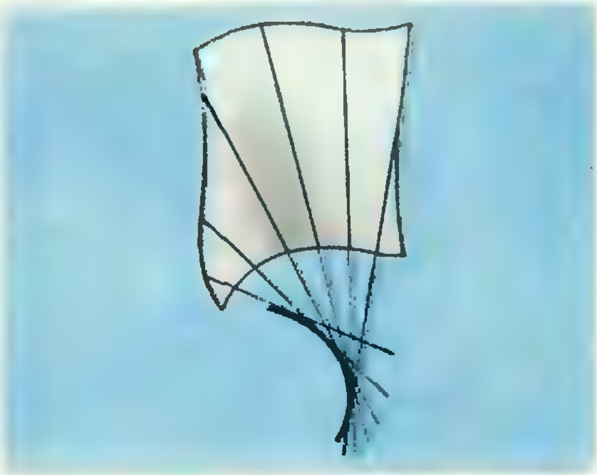


Рис. 13.

Но,— возражает Вдумчивый Читатель,— это рассуждение, если так его можно назвать, применимо к любой линейчатой поверхности. Скажем,

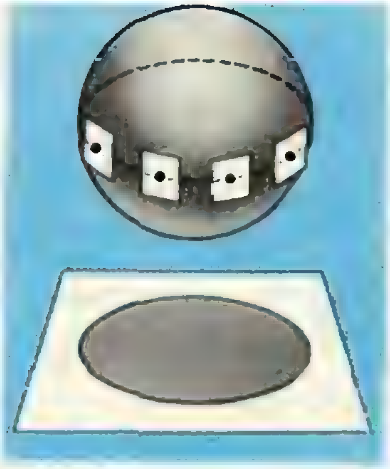


Рис. 14.

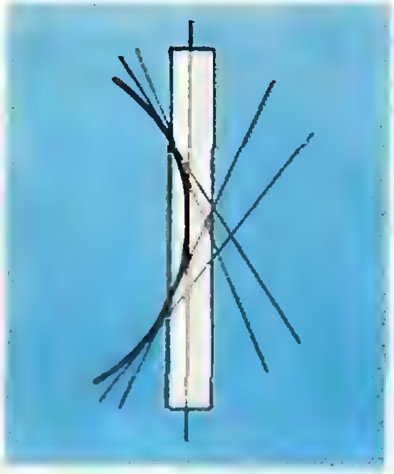


Рис. 15.

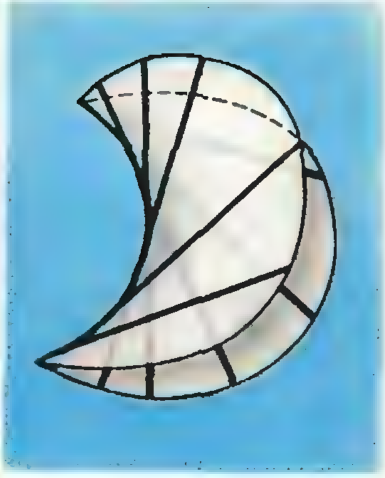


Рис. 16.

на изображении однополостного гиперболоида (рис. 9) тоже присутствует линия, которой касаются спроектированные на чертеж образующие (боковая гипербола), а на поверхности никакого ребра возврата нет.

Вдумчивый Читатель прав, как всегда; но у меня есть в запасе еще один аргумент, который, вероятно, его убедит. Линия, о которой он говорит,— это край изображения поверхности, или, как говорят, ее *видимый контур*. В точках этой линии касательная плоскость к поверхности перпендикулярна чертежу (см. рисунок 14, на котором показан видимый контур сферы). Но у развертывающейся поверхности касательная плоскость во всех точках образующей одна и та же (помните — приложенная линейка!), а в точках, не принадлежащих предполагаемому ребру возврата, она явно не перпендикулярна плоскости чертежа. Значит, она не перпендикулярна ей и в точках этой линии, а расположена как показано на рисунке 15, что с неопровержимостью показывает, что наша линия — ребро возврата.

На все это можно взглянуть с другой стороны: развертывающаяся поверхность (образующие которой не параллельны и не проходят все через одну точку) состоит из прямых, касающихся одной линии — ребра возврата. Это значит, что развертывающуюся поверхность можно получить так: взять пространственную кривую (никакой кусочек которой не является плоским) и провести к ней все касательные (рис. 16). Эти касательные заметут развертывающуюся поверхность, а исходная кривая будет ее ребром возврата. При этом

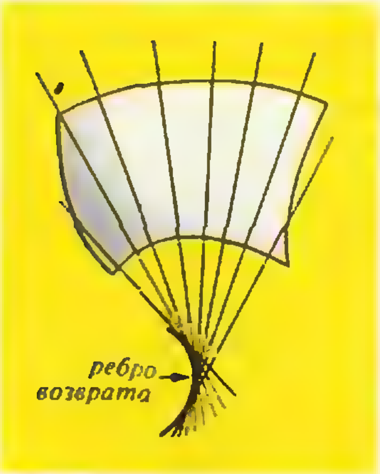


Рис. 17.

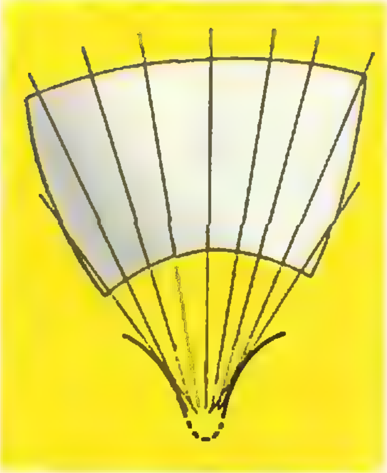


Рис. 18.

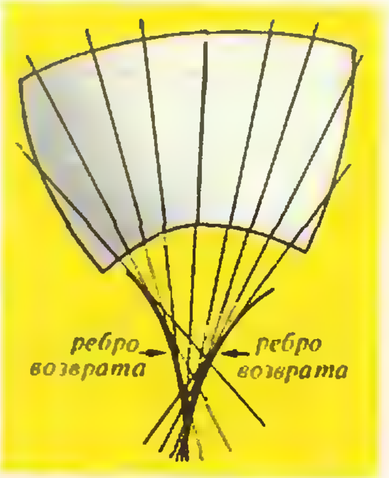


Рис. 19.

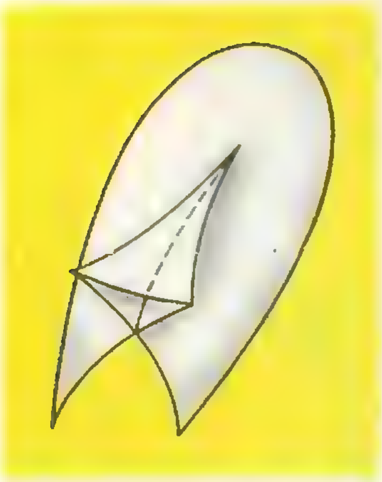


Рис. 20.

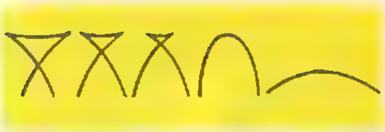


Рис. 21.

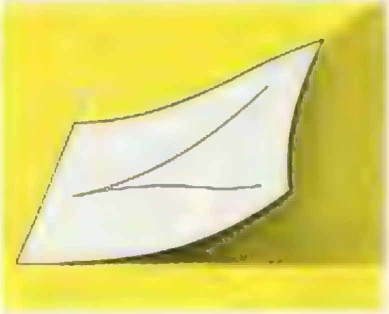


Рис. 22.

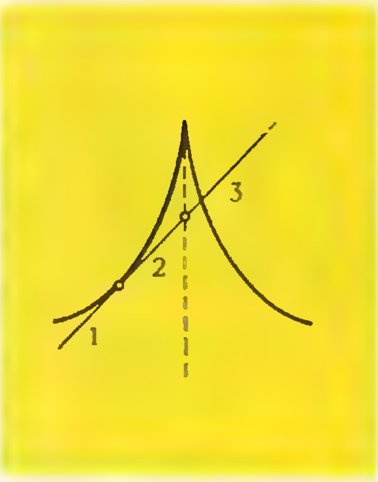


Рис. 23.

всякая нецилиндрическая и неконическая развертывающаяся поверхность может быть так получена (теорема Эйлера).

6

Это все? Нет, как вы сейчас увидите. Увеличим мысленно развертывающуюся поверхность до таких размеров, чтобы по ней можно было ходить, и пойдем по ней перпендикулярно образующим (рис. 17). Образующие касаются ребра возврата, и при нашем движении оно будет либо быстро удаляться от нас, либо быстро приближаться к нам. А в чем может заключаться переход из одного состояния в другое? Посмотрите на рисунок 18. На нем изображен лист бумаги, образующие и два отрезка ребра возврата. А что между ними? Плавная линия, наподобие пунктира на этом рисунке? Нет, эта линия не может всюду касаться образующих. Значит, остается одно:

ребро возврата само имеет точку возврата (рис. 19).

Как же устроена поверхность вблизи этой немыслимой точки? Начнем с картинки. На рисунке 20 показана сама поверхность. Кроме ребра возврата она обязательно имеет линию самопересечения. На рисунке 21 показаны сечения этой поверхности несколькими параллельными плоскостями. Чтобы в какой-то мере убедиться в том, что поверхность выглядит именно так, будем действовать как в теореме Эйлера: возьмем предполагаемое ребро возврата и проведем к нему всевозможные касательные.

Чтобы построить «типичную» пространственную кривую с точкой воз-

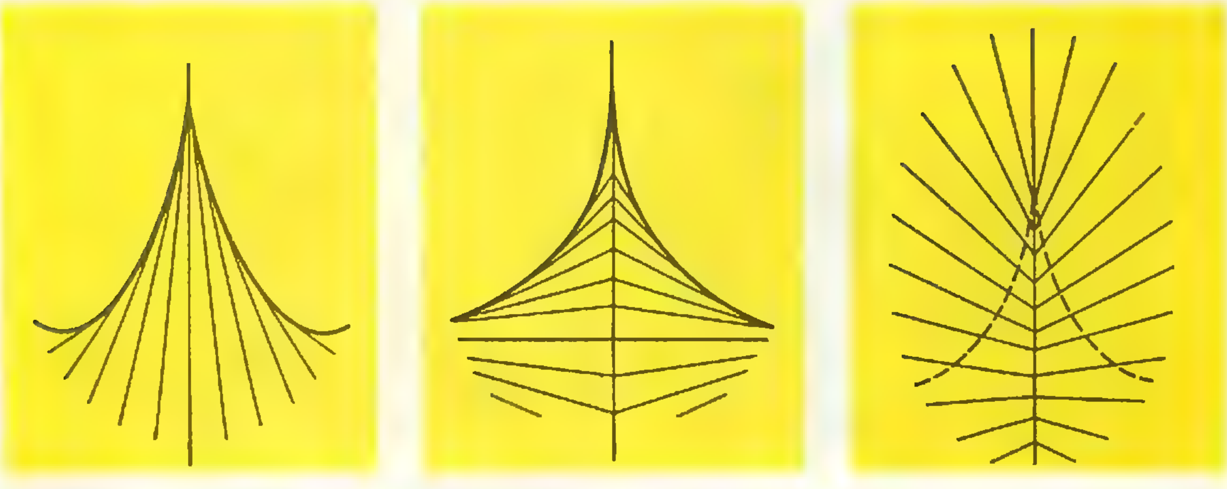


Рис. 24.

врата, возьмем плоскую кривую с точкой возврата и слегка изогнем плоскость (рис. 22). Теперь проведем к этой кривой касательные и посмотрим на получившееся сверху. Каждую касательную разобьем на три части как показано на рисунке 23. Теперь отдельно нарисуем первые, вторые и третьи части всех касательных (рис. 24). На первой картинке получилась верхняя, слегка прогнутая, перепонка между двумя ветвями ребра возврата; на второй картинке получилось сочленение двух кусков между ветвями ребра возврата и линией самопересечения; наконец, на третьей картинке получилась оставшаяся часть поверхности. Заметим, что фигуры, изображенные на второй и третьей картинках, имеют излом вдоль линии самопересечения. Поверхность в целом называется *ласточкиным хвостом* (похоже?).

Итак, произвольным образом изогнутый, но не смятый, лист бумаги превращается, после неограниченного продолжения его прямолинейных образующих, в поверхность, имеющую ребро возврата, которое само имеет, быть может, не одну, точку возврата. Вблизи каждой точки возврата ребра возврата поверхность устроена как ласточкин хвост, в частности, она имеет самопересечения. Вот какую интересную геометрию имеет обыкновенный лист бумаги (см. 4-ю страницу обложки).

7

В заключение — еще несколько слов о ласточкином хвосте. Эта поверхность возникает в трехмерной геометрии очень часто, к ней приводят многие естественные задачи анализа и механики. Но впервые ее изображение (не название: последнее придумано в 60-е годы нашего века знаменитым французским математиком Р. Томом) появилось в прошлом веке на страницах алгебраических книг в следующем контексте.

Рассмотрим уравнение

$$x^n+a_1x^{n-2}+a_2x^{n-3}+\ldots+a_{n-1}=0.$$

Оно может иметь от 0 до n решений. Например, уравнение

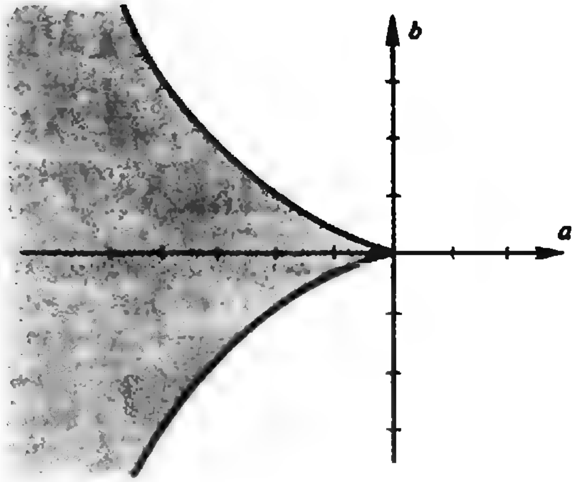


Рис. 25.

$$x^3+ax+b=0$$

может иметь 3, 2 или 1 решение. Чтобы узнать, сколько именно, нужно нарисовать на плоскости с координатами a, b *«дискриминантную кривую»* $4a^3+27b^2=0$ (рис. 25). Если точка (a, b) лежит внутри фиолетовой зоны, уравнение имеет 3 решения, если она лежит на ее границе, кроме острия,— то 2 решения, в остальных же случаях уравнение имеет 1 решение.

Аналогичная задача для уравнения 4-й степени

$$x^4+ax^2+bx+c=0$$

приводит к ласточкиному хвосту: в пространстве с координатами a, b, c расположен ласточкин хвост, подобный тому, который изображен на рисунке 20. Внутри трехгранного пенала лежат точки (a, b, c), для которых наше уравнение имеет 4 решения. На границе пенала, кроме ребра возврата и линии самопересечения, уравнение имеет 3 решения. На этих линиях, исключая вершину, решений 2; столько же решений имеет уравнение для всех (a, b, c), лежащих выше поверхности (со стороны пенала). На всей поверхности, исключая границу пенала, но включая вершину, решение одно, ниже поверхности решений вовсе нет. Подробности читатель может найти в книге Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», которая недавно переиздана в издательстве «Наука».

ХИМИЧЕСКОЕ РАЗНООБРАЗИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Окружающий нас мир неоднороден. Это относится, правда, только к твердой его части. И атмосфера, и океан хорошо перемешаны — их химический состав по всей Земле почти одинаков. Казалось бы, с течением времени и твердое вещество Земли естественным перемешиванием тоже должно было стать однородным. Однако за 4,5 миллиарда лет существования нашей планеты этого не произошло.

Один источник неоднородности на Земле — биологические процессы. Их мы здесь касаться не будем — описание воздействия жизни на природу планеты с точки зрения физики есть вопрос открытый. Очевидно, по крайней мере, что для самого происхождения жизни нужна начальная химическая неоднородность. В этой статье и пойдет речь о явлениях, приводящих к появлению химического разнообразия Земли, Луны, планет.

Лунные моря и масконы

Посмотрите на Луну в ясную ночь полнолуния. Вы увидите следы, оставленные на ней около 4 миллиардов лет назад, «шрамы» того времени, когда формировались планеты. Это лунные моря и океан Бурь — округлые низменности с размерами, доходящими до четверти лунного диска. Они — последствия столкновений Луны с небесными телами.

Под лунными морями находятся уплотнения, образовавшиеся после ударного сжатия пород при этих столкновениях. Эти уплотнения называются масконами (это сокращение от термина mass concentration (англ.) — концентрация масс). Наибольшие из масконов по объему достигают 10^{-5} от всего объема Луны. Находятся они на глубине до 50 км под ее поверхностью.

Масконы были обнаружены и исследованы с помощью космических аппаратов, обращавшихся вокруг Луны. «Обращавшихся» — в прошлом времени — потому, что эти аппараты уже прекратили свое существование, упав на Луну. Оказывается, несмотря на отсутствие лунной атмосферы, нельзя создать спутник Луны с неограниченным сроком существования. Высокие орбиты возмущает гравитационное поле Земли. А причина неустойчивости низких орбит — масконы. Они вызывают постепенное опускание периселения (наинизшей точки окололунной орбиты) вплоть до касания с лунной поверхностью.

Процесс, схожий с гравитационным торможением лунных спутников, был характерен и для начальной стадии образования планет. Представьте себе рой небесных тел, связанных между собой силами гравитации. Все они — как бы спутники друг другу. Гравитационное поле такой системы сильно неоднородно, каждое из тел движется под хаотическим воздействием всех остальных и теряет кинетическую энергию на внутреннее трение, на неупругие столкновения. Рой постепенно сжимается. Таким же способом, гравитационным торможением, рой захватывает, делает своими спутниками и пролетающие около него и через него посторонние, первоначально свободные небесные тела. Рой сливается, гравитационное поле образовавшейся протопланеты ускоряет приближение к ней оставшихся тел. Поэтому процесс слияния заканчивается бомбардировкой поверхности молодой планеты оставшимися телами роя. Следы этих событий в большом количестве остались не только на поверхности Луны, но и на Меркурии, Марсе, на спутниках планет — на всех небесных телах, не имеющих мощной атмосферы.

Как образовалась Луна?

Среди хаоса столкновений возможно были и катастрофические соударения, приводящие к неожиданным следствиям. Недавно группа американских астрофизиков во главе с А. Камероном выдвинула новую гипотезу образования Луны. Согласно их идее, Луна возникла от слияния осколков столкновения прото-Земли с другой планетой, по массе составляющей около 0,12 земной массы (представьте себе столкновение Земли с Марсом!).

На быстродействующей вычислительной машине были рассчитаны варианты столкновений и из последовательных временны́х стадий расчета сделан кинофильм. Компьютерное кино дает возможность «своими глазами» видеть, как это происходило. Сперва две планеты сближаются, при этом их тела теряют сферическую форму, вытягиваясь навстречу друг другу гравитационным притяжением. Затем следует удар. Он не был центральным — иначе Земля не приобрела бы после столкновения нужную скорость вращения. По обеим планетам пробегает ударная волна, нагревая вещество выше температуры плавления. Оба тела сливаются — образуется Земля; при этом разлетаются осколки. Часть этих осколков выпадает на Землю; а те, у которых скорость велика, уходят за пределы земного

Лунный кратер Бессель; его диаметр 16 км.

притяжения, покидают систему. Но примерно сотая доля полной массы остается на орбитах спутников Земли, а через некоторое время этот рой «мягко» сливается, формируя Луну.

Раньше существовало несколько конкурирующих взглядов на образование Луны. Первый, возникший в прошлом веке, предполагал, что Луна оторвалась от чересчур быстро вращавшейся Земли в том месте, где теперь расположен Тихий океан. Второй подход рассматривал совместное образование Земли и Луны из одного роя малых тел. Наконец, существует гипотеза захвата, согласно которой Луна изначально принадлежала к астероидам и двигалась по независимой орбите вокруг Солнца, а затем в результате сближения была захвачена Землей. Все эти гипотезы были в большой мере умозрительными — конкретных расчетов по ним или не существовало вовсе, или же они делались в неоправданно искусственных предположениях о начальных условиях или сопутствующих обстоятельствах.

Достоинство идеи рождения Луны при столкновении — в простоте исходной картины: нужны только два сталкивающихся тела. Конечно, такое катастрофическое столкновение очень маловероятно, но это обстоятельство нельзя считать серьезным возражением — наша планета вообще уникальна, жизнь, в конце концов, известна пока только на ней. Гипотеза столкновения достаточно естественно объясняет разную среднюю плотность Земли и Луны, их неодинаковый химический состав. Как показывают компьютерные расчеты, Луна образуется, в основном, из силикатных оболочек сталкивающихся планет, а их железные ядра сливаются в ядро Земли. Наконец, эта гипотеза привлекательна и с точки зрения возможного объяснения того, почему Земля и Венера так различны при близких массах. При катастрофическом столкновении Земля оказывается проплавленной насквозь, и тепло, запасенное в ее недрах, в дальнейшем определяет уникальную геологическую историю планеты. «Геологическая» жизнь Венеры намного менее активна.

Конечно, для того чтобы гипотеза стала убедительной теорией, нужно провести еще много вычислений и сравнений с оставшейся нам в наследство реальностью.

Посмотрим теперь, что известно о том первичном веществе, из которого образовались планеты. Свидетелями прошлого могут стать падающие на Землю метеориты.

Почему метеориты такие разные?

Метеориты — это небесные тела, обращающиеся вокруг Солнца, которые сталкиваются с Землей. Если масса метеорита меньше десятка граммов, то при торможении в земной атмосфере он сгорает без твердого остатка. Метеориты с массами от сотен граммов до нескольких тонн сильно тормозятся атмосферой и иногда могут достичь земной поверхности в не слишком измененном виде. Специалисты легко отличают метеориты от пород земного происхождения. Интересно, что более половины из нескольких тысяч найденных на Земле метеоритов было обнаружено на поверхности льда Антарктиды. В центре этого континента есть ледяные поля, на которых испарение льда больше, чем выпадение снега; лед медленно притекает туда из более обильных осадками областей и там испаряется. При этом поток льда приносит все метеориты, накопившиеся в его толще за тысячи лет. Они остаются на поверхности и легко обнаруживаются.

Наконец, метеориты с еще бóльшими массами (более нескольких тонн) тормозятся относительно слабо и достигают земной поверхности с такой скоростью, что при ударе об нее они сильно изменяются, а на месте их падения остается кратер. (Кратером древние греки называли широкий сосуд для разбавления вина водой.)

Что можно сказать о метеорите по оставшемуся от него кратеру, мы увидим дальше, а сначала расскажем о классификации метеоритов по составу. Метеориты делятся на три больших типа с промежуточными видоизменениями: на каменные, железокаменные и железные.

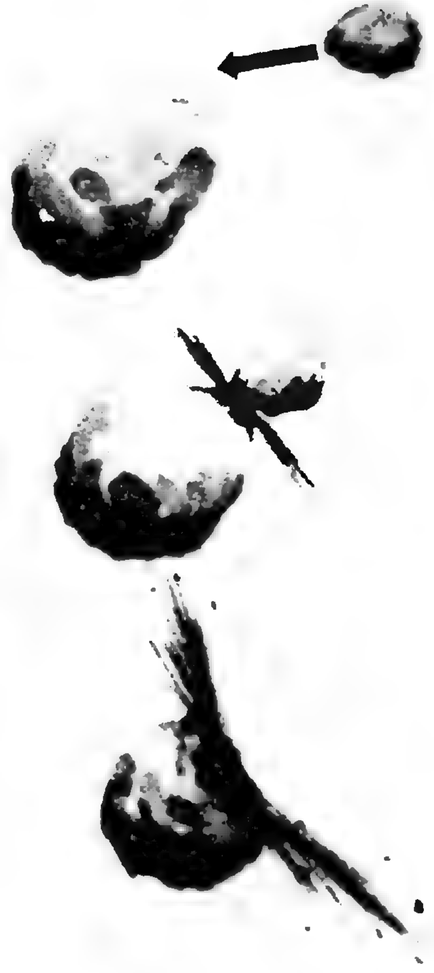
Довольно редкие разновидности каменных метеоритов — углистые метеориты, или метеориты типа С, считаются первичным материалом Солнечной системы. За исключением летучих газов, в их химическом составе элементы находятся в той же пропорции, что и у Солнца. Они содержат до 20 % воды, несколько процентов углерода и серы. После небольшого нагревания этих метеоритов, удаляющего воду и летучие соединения, остается смесь, содержащая 34 % оксида железа FeO, 33 % оксида кремния SiO_2, 23 % оксида магния MgO. Именно такие элементы, но в измененных пропорциях, и являются основой состава метеоритов других типов, а также астероидов и всех планет земной группы.

Наиболее часто выпадают на Землю другие представители каменных метеоритов — обыкновенные хондриты. Их силикатная структура содержит хондры — зерна размером до нескольких миллиметров. Такую кристаллизацию вещества пока не удалось вызвать искусственно, в земных лабораториях. В хондритах попадаются отдельные вкрапления сплава железа с никелем. Их доля может быть разной, но всегда в хондритах содержание железа оказывается меньшим, чем в прогретом веществе из метеоритов типа С.

Вторая и третья разновидности метеоритов — железокаменные и железные. В них, напротив, доминирует железоникелевый сплав, а каменные включения представляют собой просто застывший расплав, без хондритной структуры.

Очевидно, что такое разнообразие метеоритов как-то связано с условиями их «рождения». Наиболее естественна гипотеза, согласно которой метеориты — это осколки, образовавшиеся при столкновениях астероидов.

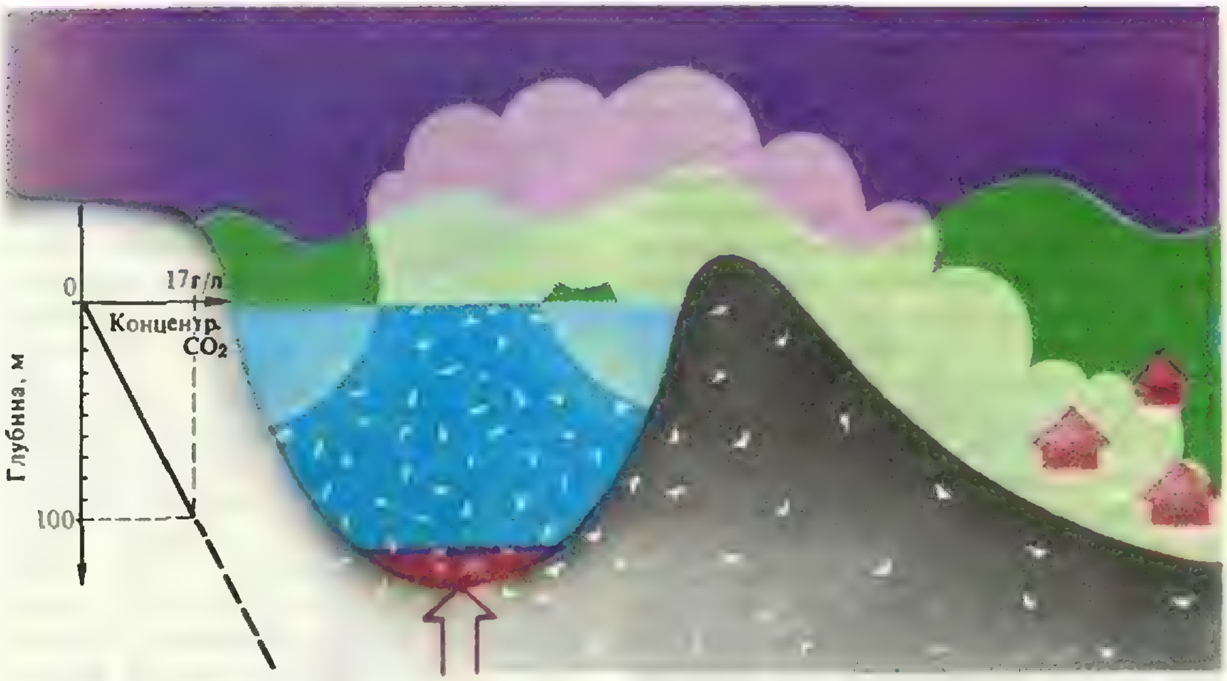
Небесные тела с размерами, превышающими сотни километров, под действием гравитации становятся сферическими по форме. При этом происходит распределение химических элементов по объему тела — его ядро



Возможно, так и происходило столкновение небесных тел, породившее Землю и Луну.

обогащается тяжелыми компонентами, главным образом железом, а оболочка становится силикатной, каменной. Поэтому при столкновениях больших астероидов разлетающиеся осколки могут быть весьма различны по своему химическому составу и кристаллическому строению. Железные и железокаменные метеориты происходят из центральных частей астероидов, которые успели обогатиться тяжелым железом, а часть каменных метеоритов — это застывшие капли и осколки наружных областей астероидов. Метеориты же типа С — это то вещество, которое не прошло гравитационной дифференциации.

Гравитационная дифференциация — это разделение пород в поле тяжести. Она — главная причина того, что окружающий нас мир не есть одно-



Газовая гравитационная дифференциация привела к трагедии на озере Ниос.

родная смесь веществ в химическом равновесии, а так удивительно разнообразен. Гравитационная дифференциация не только разделяет вещества по их плотности, она приводит к тому, что некоторые химические реакции, энергетически невыгодные в обычных условиях, становятся возможными для больших масс в гравитационном поле.

Представьте себе, что в результате некоторой химической реакции из одного вещества (скажем, сернистого железа) образуются два — одно более легкое (сера), а другое более тяжелое (железо). Энергия, необходимая для поддержания такого разделения, может черпаться из гравитационной энергии, высвобождающейся в результате опускания тяжелого вещества и всплывания легкого. Легким веществом при гравитационной дифференциации может оказаться и газ.

Вот неожиданный пример геофизического явления, вызванного гравитационной дифференциацией. 21-го августа 1986 года из Камеруна пришло трагическое сообщение: ночью из небольшого озера Ниос внезапно вырвалось облако газа, и в нем задохнулись, погибли около двух тысяч человек из близлежащих деревень. Это озеро расположено в вулканическом кратере, поэтому в первых сообщениях причиной катастрофы считалось выделение вулканом каких-то удушающих газов.

После изучения озера стала ясна физика происшедшего. Виновными действительно оказались потухший вулкан и озеро в его кратере. Но вот что поразительно: поведение вулкана было, на первый взгляд, вполне невинно — ни извержения, ни землетрясения не произошло. Газ же, вызвавший внезапную смерть тысяч людей, оказался обыкновенным оксидом углерода CO_2, безобидным в малых концентрациях. Суть явления состояла в следующем.

Ниос — небольшое озеро, но средняя глубина его более 100 м. Вулкан, на котором оно располагается, потух, но в результате остаточных геологических процессов в его недрах медленно выделяется оксид углерода. Этот газ хорошо растворяется в воде, и его растворимость быстро возрастает с увеличением давления. Вспомните, как бурно выделяется углекислый газ, когда открывают бутылку с минеральной водой. В закрытой бутылке давление больше атмосферного. Когда бутылку открывают, давление в ней понижается до атмосферного, растворимость углекислого газа при этом давлении ниже, и «лишний» газ выделяется из раствора.

В бутылке с минеральной водой избыточное давление меньше половины атмосферы, на глубине же 100 м давление равно 10 атм ($\approx 10^6$ Па). При таком давлении и температуре 20 °С в литре воды растворяется 17 г оксида углерода, а вблизи поверхности озера его концентрацию можно считать практически нулевой. Теперь представьте себе, что в озере случайно возникает поначалу небольшой поток вверх глубинной воды, насыщенной углекислым газом. Поднимаясь, жидкость попадает в область меньшего гидростатического давления, где растворимость газа ниже, и начинается выделение углекислого газа. Газ поднимается к поверхности и увлекает с собой окружающую жидкость. Развивается неустойчивость: поток пузырящейся жидкости, стремительно нарастая, рвется к поверхности, а верхние тяжелые воды, бедные углекислым газом, опускаются на дно озера. Происходит гравитационная дифференциация.

Во время катастрофы из озера Ниос выделилось около 10^6 м^3 углекислого газа, а уровень воды в озере понизился почти на 1 м. Углекислый газ тяжелее воздуха, перемешивание такого большого объема газа с воздухом происходит медленно, и поток газа опускался по долинам, где в нескольких деревнях от удушья погибло все живое. Изучение архивов и преданий показало, что трагедии меньшего масштаба от таких «шампанирующих» озер были и в прошлом.

Гравитационная дифференциация приводит к выделению тепловой энергии в недрах и одновременно способствует ее выходу к поверхности, поскольку легкие фракции, подымаясь, несут с собой тепло из недр. Этот перенос тепла и масс выглядел на заре существования Земли как мощные извержения множества вулканов. Извергнутые газы поступали в первичную атмосферу Земли, а лавы формировали ее базальтовую кору.

Кроме вулканических кратеров на Земле обнаружено немало кратеров и ударного происхождения, типа лунных. Разговор о них — в следующем номере.

Информация

Заказы принимаются...

(Начало см. на с. 16)

ковывают внимание ученых и любителей астрономии. Таинственный Икар, знаменитая комета Галлея, тысячи небесных камней, забитых в Землю космическими ударами, многочисленные образцы этих камней в научных лабораториях, потрясающие воображение болиды, огненными шарами проносящиеся по небу, ливни «падающих звезд» — все это связано с удивительными творениями природы, а именно малыми телами Солнечной системы. Их описанию и посвящена эта книга.

164. Гросберг А. Ю., Хохлов А. Р. Физика в мире полимеров. 50 к.

Рассказывается о современном состоянии информационной статистической физики макромолекул. Рассмотрены как фундаментальные вопросы физики синтетических гомополимеров — гибкость полимерной цепи, объемные эффекты и динамические свойства полимерных систем, так и проблемы физики основных биополимеров — ДНК и белков.

167. Кэрролл Л. Логическая игра: Пер. с англ. 50 к.

Сборник логических задач автора известных сказок «Алиса в Стране Чудес» и «Сквозь зеркало и что там увидела Алиса» Льюиса Кэрролла в яркой и занимательной игровой форме знакомит читателя с оригинальным графическим методом решения силлогизмов и соритов.

166. Крутогин Д. Г., Морченко А. Т. Микроэлектроника смотрит в будущее. 50 к.

В книге рассказывается о том, когда, зачем и как появилась микроэлектроника, какие достижения физики и материаловедения обеспечили ее развитие, что дает и может дать она человечеству.

СОУДАРЕНИЕ ТЕЛ

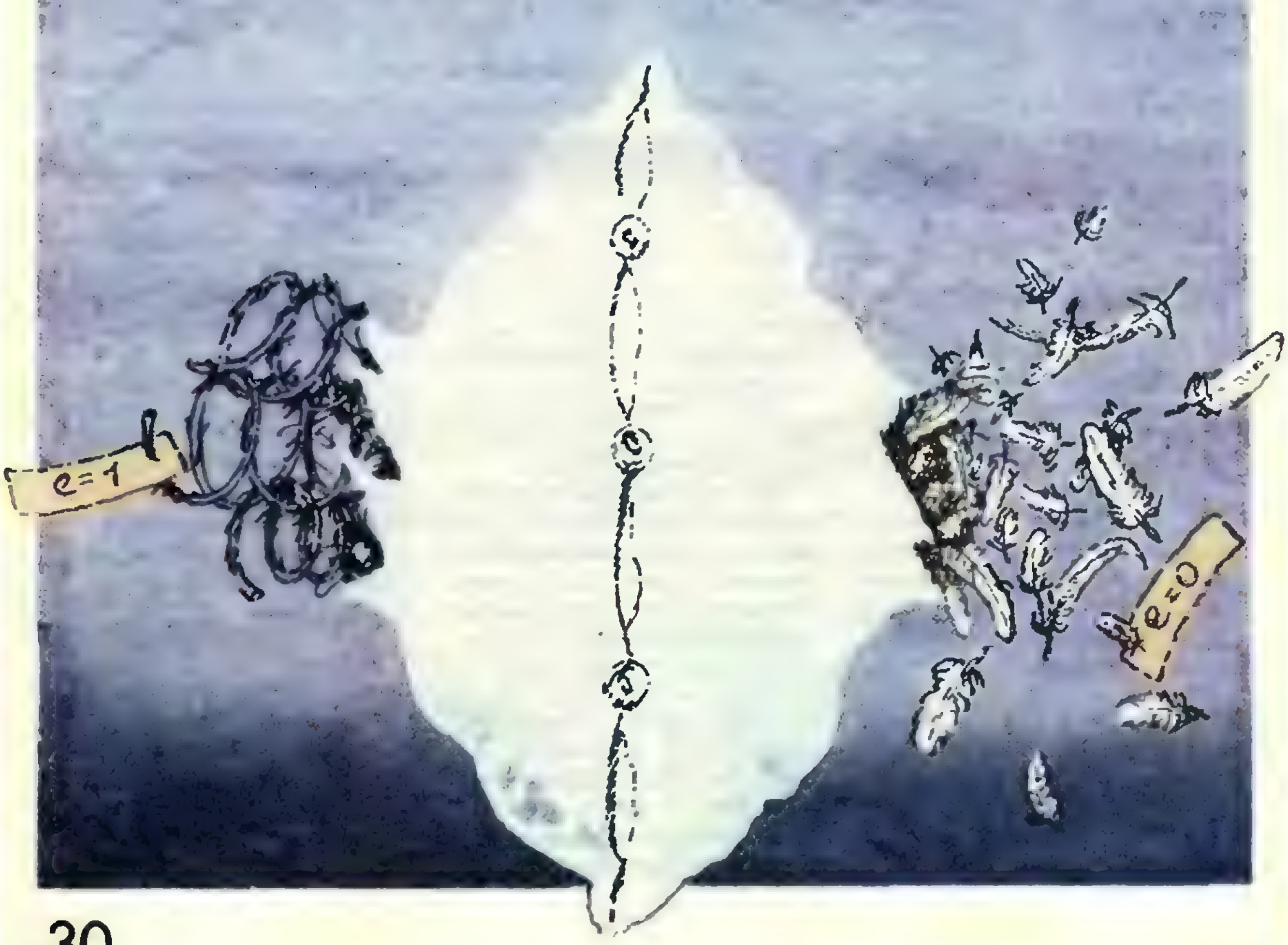
Доктор физико-математических наук
В. В. КОЗЛОВ

Введение

Некоторые физические теории построены по образцу, принятому в математике,— из небольшого числа физических утверждений, которые играют ту же роль, что аксиомы в математических теориях, логически строго выводятся разнообразные следствия. Эта статья посвящена одной такой теории — теории соударения тел. Явление удара хорошо описывается несложной математической моделью. Неудивительно поэтому, что законы удара были установлены до открытия основных принципов динамики.

Еще Галилей поставил ряд опытов для выяснения законов соударения тел. Эти опыты, правда, не привели его к определенным выводам. Современник Галилея, пражский профессор Марци в своем сочинении «De proportione motus» (1639) опубликовал некоторые результаты своих исследований явления удара. В частности, ему было известно, что тело, упруго ударившись о такое же покоящееся тело, теряет свою скорость, сообщая ее этому телу. Первое детальное исследование законов удара было предпринято в 1668 году по предложению Лондонского королевского общества. Три выдающихся механика и математика Валлис, Рен и Гюйгенс представили свои работы, в которых они изложили законы движения соударяющихся тел.

Джон Валлис ограничился, не оговаривая этого, рассмотрением абсолютно неупругого удара. Он исходил из гипотезы о сохранении суммарного импульса сталкивающихся тел.



Кристофер Рен изложил правила расчета упругого удара. Рен, как и Валлис, не привел никаких теоретических рассмотрений, однако для проверки своих правил он проделал ряд простых и убедительных опытов. На эти опыты ссылался Ньютон в своих знаменитых «Математических началах натуральной философии» (1687). Конкурсный мемуар Христиана Гюйгенса был наиболее полным исследованием по теории удара. В нем был намечен вывод соотношений теории удара, основанный на принципе относительности Галилея. Лондонское королевское общество напечатало лишь мемуары Валлиса и Рена. Гюйгенс напечатал свой мемуар в 1669 году в парижском «Журнале ученых».

Сохранение импульса

Рассмотрим ряд задач механики, связанных с исследованием соударения двух тел с массами m_1 и m_2, движущихся по прямой без воздействия каких-либо сил. Пусть v_1 и v_2 — скорости этих тел до удара (рис. 1). Мы будем считать скорость алгебраической величиной: если тело движется вправо, то его скорость положительна, а если влево, то отрицательна. В момент удара на тела действуют только внутренние силы; поэтому их суммарный импульс $m_1v_1+m_2v_2$ сохраняется. Пусть v_1' и v_2' — скорости тел после удара. Из сохранения суммарного импульса получаем соотношение

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'. \qquad (1)$$

Из одного этого уравнения, конечно, нельзя найти v_1' и v_2'. Это и неудивительно: соударения бывают разными. Есть упругие и неупругие. Например, при абсолютно неупругом ударе тела слипаются и движутся затем как одно целое. В этом случае $v_1'=v_2'=v$ и из формулы (1) находим скорость слипшихся тел после удара:

$$v=\frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}. \qquad (2)$$

Задача 1. Пусть $v_1\leqslant v_2$. Докажите, что $v_1\leqslant v\leqslant v_2$.

Изменение кинетической энергии

Кроме импульса в механике важную роль играет кинетическая энергия, равная $mv^2/2$, где m — масса тела, v — его скорость. Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух тел. В этом случае

$$\Delta T=\left(\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}\right)-\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}$$

называется *потерянной кинетической энергией.*

Следующее утверждение называется *первой теоремой Карно:*

Потерянная кинетическая энергия равна энергии точки массой $\mu=\frac{1}{1/m_1+1/m_2}$, *которая движется со скоростью, равной разности скоростей точек до удара:*

$$\Delta T=\frac{\mu(v_1-v_2)^2}{2}.$$

Задача 2. Докажите первую теорему Карно.

Масса μ называется в механике *приведенной массой системы.* Она равна половине среднего гармонического чисел m_1 и m_2.

Задача 3. Докажите неравенства

$$\mu\leqslant\frac{m_1+m_2}{4},\quad \mu\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{m_1m_2}\ .$$

Введем в рассмотрение *потерянные скорости:* $u_1=v-v_1$, $u_2=v-v_2$, с помощью которых формулируется *вторая теорема Карно:*

Потерянная кинетическая энергия равна суммарной кинетической энергии тел с массами m_1 *и* m_2, *движущихся с потерянными скоростями* u_1 *и* u_2:

$$\Delta T=\frac{m_1u_1^2}{2}+\frac{m_2u_2^2}{2}.$$

Задача 4. Докажите вторую теорему Карно.

Рассмотрим теперь противоположный случай: абсолютно упругий удар. По определению, в этом случае, кроме суммарного импульса, сохраня-

Рис. 1.

Галилео Галилей (1564—1642) — итальянский физик, математик и астроном. В главном сочинении Галилея по математике и физике, написанном в форме диалогов, заложены основы механики: установлены законы статики, равномерного движения, падения тел и колебания маятника. Инквизиция преследовала Галилея за книгу, написанную в поддержку гелиоцентрической системы.

Иоханнес Маркус Марци (1595—1667) — чешский философ, математик, физик, врач, профессор медицины и ректор Пражского университета. Марци развивал экспериментальный метод исследования. Он выяснил, как зависит продолжительность колебания маятника от его длины, и предложил использовать колебания маятника для измерения пульса пациентов.

IOANNES MARCVS MARCI PHIL. & MEDIC. DOCTOR

Джон Валлис (1616—1703) — английский математик и механик, член-основатель Лондонского королевского общества, один из пионеров анализа бесконечно малых. Получил формулу, выражающую число π в виде бесконечного произведения:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot \ldots}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot \ldots}.$$

Считал арифметику основой математики.

ется еще суммарная кинетическая энергия:

$$m_1v_1^2+m_2v_2^2=m_1(v_1')^2+m_2(v_2')^2.$$

Задача 5. Докажите, что в случае абсолютно упругого удара относительные скорости тел до и после удара равны по величине и противоположны по направлению:

$$v_1-v_2=-(v_1'-v_2'). \qquad (3)$$

Задача 6. Докажите равенства:

$$\begin{aligned} v_1'&=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1+\frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2,\\ v_2'&=\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1+\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2. \end{aligned} \qquad (4)$$

В частном случае, когда $m_1=m_2$, эти формулы приобретают наиболее простой вид:

$$v_1'=v_2,\ v_2'=v_1.$$

Следовательно в момент абсолютно упругого удара происходит обмен скоростями. Как уже говорилось, этот эффект был впервые описан Марци.

Абсолютно упругий удар тел равной массы удобно изображать на графиках движения тел, т. е. на графиках зависимости координат от времени (рис. 2). Эта графическая интерпретация используется в следующей задаче.

Задача 7. По прямой движутся с постоянными (не обязательно равными) скоростями несколько одинаковых шариков. Предположим, что соударения между ними абсолютно упругие и в каждом соударении участвуют только два шарика. Докажите, что общее число соударений конечно.

Рассмотрим еще один частный случай, когда масса m_1 много меньше массы m_2. Тогда

$$\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}=\frac{m_1/m_2-1}{m_1/m_2+1}\approx-1,$$

$$\frac{2m_1}{m_1+m_2}=\frac{2m_1/m_2}{m_1/m_2+1}\approx0,$$

$$\frac{2m_2}{m_1+m_2}=\frac{2}{m_1/m_2+1}\approx2,$$

Христиан Гюйгенс (1629—1695) — голландский механик, физик и математик. Первый президент французской Академии наук, был первым иностранным членом Лондонского королевского общества. Гюйгенс — непревзойденный часовой мастер. Он изобрел часы с маятником (ходики) и карманные часы с балансиром.

Кристофер Рен (1632—1723) — английский математик, механик и архитектор, член-основатель Лондонского королевского общества. Рен возглавил строительные работы в Лондоне после грандиозного пожара 1666 года. Его главное достижение в архитектуре — собор св. Павла.

Лазар Карно (1753—1823) — генерал, военный министр французской республики, игравший важную роль во время революции. В народе его называли «организатором побед». Результаты своих исследований по теории удара он изложил в 1783 году в анонимно изданной книге «Опыт о машинах вообще некоего офицера инженерных войск».

так как отношение масс m_1/m_2 близко к нулю. С учетом этих замечаний формулы (4) примут следующий вид:

$$v_1' = -v_1 + 2v_2 = v_2 - (v_1 - v_2), \qquad v_2' = v_2. \tag{5}$$

Следовательно, второе тело не изменит своей скорости, а первое будет двигаться за вторым, отставая от него со скоростью, равной их относительной скорости до удара.

На практике, однако, чаще встречаются случаи, когда в момент удара тела не слипаются, но и их суммарная энергия не сохраняется. В этой ситуации обычно принимают гипотезу Ньютона, заменяя соотношение (3) следующим соотношением:

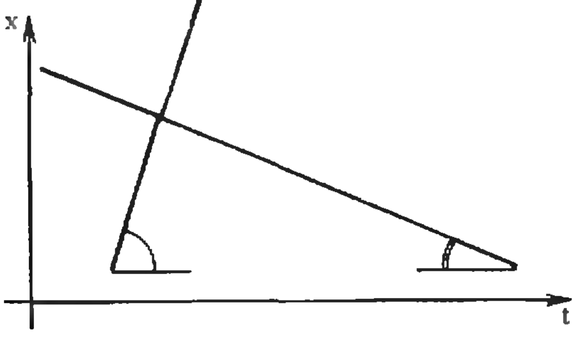


Рис. 2.

$$e(v_1 - v_2) = -(v_1' - v_2').$$

Здесь e — некоторый безразмерный коэффициент, заключенный в промежутке от 0 до 1 и определяемый обычно из эксперимента. Число e называют *коэффициентом восстановления*. При $e=0$ получается абсолютно неупругий удар, а при $e=1$ удар будет абсолютно упругим.

Пусть u_1 и u_2 снова обозначают потерянные скорости.

Величина потерянной энергии в общем случае вычисляется с помощью *обобщенной теоремы Карно:*

$$\Delta T = \frac{1-e}{1+e}\left(\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}\right).$$

При $e=0$ это утверждение известно нам как вторая теорема Карно; при $e=1$ потери энергии вообще не происходит — удар абсолютно упругий.

Задача 8. Докажите обобщенную теорему Карно.

Адиабатический инвариант

В качестве поучительного применения формул (5) рассмотрим следующую задачу. Шарик движется между двумя стенками, одна из которых неподвижна, а другая приближается к ней со скоростью V (рис. 3; шарик начинает движение от неподвижной стенки). Удар шарика о стенки абсолютно упругий. После столкновения с неподвижной стенкой величина скорости шарика не меняется, а после каждого столкновения с подвижной стенкой скорость шарика (см. формулы (5)) увеличивается на $2V$. Следовательно, энергия шарика тоже увеличивается. Пусть v_0 — величина скорости шарика в начальный момент времени (т. е. момент «нулевого» удара о неподвижную стенку), l_0 — расстояние между стенками в этот момент. Аналогично, через v_n и l_n обозначим величину скорости шарика и расстояние между стенками в момент n-го удара шарика о неподвижную стенку. Положим $I_n = v_n l_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$).

Задача 9. Докажите, что $I_n = I_0$.

Усложним задачу. Введем функцию $I(t)$, равную произведению величины скорости $v(t)$ шарика на расстояние $l(t)$ между стенками в произвольный момент времени t. Пусть $t_0, t_1, \ldots$ — моменты удара шарика о неподвижную стенку. Согласно утверждению задачи 9, $I(t_n) = I_0$ для всех $n \geqslant 0$. Однако при остальных значениях t получаем $I(t) \neq I_0$.

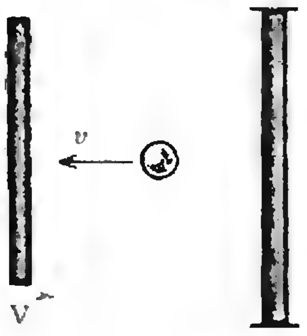


Рис. 3.

Задача 10. Докажите неравенство

$$\left|\frac{I(t)-I_0}{I_0}\right| \leqslant \frac{V}{v_0+V}.$$

Подсказкой к решению этой задачи служит график функции $I(t)$, изображенный на рисунке 4.

Следовательно, если скорость стенки много меньше скорости шарика ($V \ll v_0$), то величина $I(t)$ будет очень мало отличаться от своего первоначального значения I_0. В механике такие величины называются *адиабатическими инвариантами* (в термодинамике адиабатическим процессом называется процесс, проходящий без выделения и поглощения тепла).

Баллистический маятник

В качестве еще одного применения законов удара рассмотрим задачу о баллистическом маятнике, с помощью которого измеряют скорости движущихся тел. Он состоит из трубы массой M, заполненной песком и подвешенной на невесомом тросе длиной l (рис. 5). Снаряд массой m, попадая в трубу, застревает в песке. Происходит очень быстрая потеря скорости снаряда — абсолютно неупругий удар.

Задача 11. Зная максимальный угол отклонения трубы φ, найдите скорость снаряда.

Баллистический маятник изобретен английским механиком Робинсом и описан в книге «Новые принципы пушечной стрельбы» (1742).

Принцип относительности и закон сохранения импульса

Мы решили ряд конкретных задач из механики соударяющихся тел. Теперь снова можно обратиться к основным соотношениям теории удара и обсудить их смысл и происхождение.

В мемуаре Гюйгенса «О движении тел под воздействием удара» закон сохранения импульса выводится из принципа относительности Галилея. Мы воспроизведем рассуждения Гюйгенса для случая абсолютно неупругого удара.

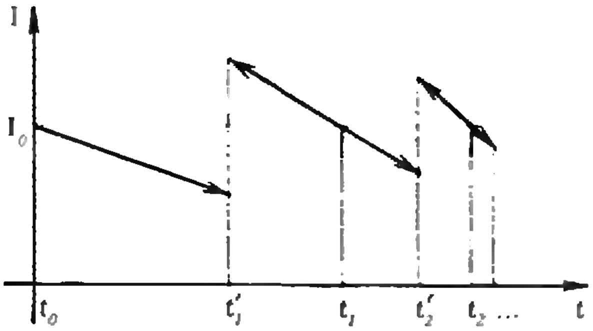


Рис. 4.

Сначала напомним определение инерциальной системы отсчета и формулировку принципа относительности. Под системой отсчета будем понимать платформу, снабженную линейкой и часами. С ее помощью можно определять положение тел на прямой и течение времени. Предположим, что одна система отсчета движется относительно другой с постоянной скоростью. Принцип относительности Галилея утверждает, что все законы механики (в том числе и законы удара) имеют в обеих системах отсчета одинаковый вид. Этот принцип относительности является очень общим: он справедлив и в релятивистской механике. Специфика ньютоновской механики проявляется в том, как связаны системы отсчета, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью.

Эта связь выражается преобразованиями Галилея. Предположим, что в обеих системах производится наблюдение одного и того же тела. Пусть в первой системе отсчета координата тела на прямой равна x, а часы показывают время t; во второй системе значения координаты и времени равны x' и t'. Если v — постоянная скорость движения второй системы отсчета относительно первой, то

$$x = x' + vt' + a,\quad t = \pm t' + b,$$

где a и b — некоторые константы.

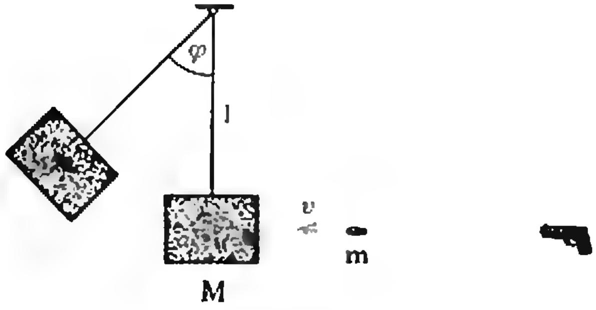


Рис. 5.

Обратимся к выводу формулы (2) для абсолютно неупругого удара.

Рассуждения Гюйгенса включают анализ нескольких случаев.

а) Рассмотрим сначала простейшую ситуацию, когда сталкиваются два одинаковых тела с массами m, двигавшиеся навстречу друг другу со скоростями v и $-v$. В силу предположения о неупругом характере удара тела слипаются, образуя одно тело массой $2m$. По соображениям симметрии, это тело после удара будет покоиться.

б) Рассмотрим более сложный случай, когда сталкиваются две одинаковые массы m, имеющие до момента удара произвольные скорости v_1 и v_2. Перейдем к новой инерциальной системе отсчета S', которая движется относительно исходной системы S с постоянной скоростью $v = (v_1 + v_2)/2$. В системе S' картина движения тел будет, как в случае а): тела одинаковой массы сближаются с равными по величине скоростями $(v_1 - v_2)/2$ и $(v_2 - v_1)/2$. Согласно принципу относительности и заключению пункта а), после удара тело массой $2m$ будет покоиться в системе S'. Следовательно, относительно исходной системы S оно будет двигаться со скоростью $(v_1 + v_2)/2$. Итак, формула (2) установлена в случае, когда $m_1 = m_2$.

в) Пусть теперь имеются три одинаковых тела каждое массой m (рис. 6). В начальный момент все они покоятся, причем тела *1* и *2* соприкасаются. Предположим, что тела *1* и *2* разлетаются в разные стороны (например, в результате взрыва). Ввиду симметрии их скорости будут равны по величине. Первое тело будет беспрепятственно двигаться влево со скоростью $-v$, а второе будет двигаться вправо со скоростью v и вскоре столкнется с телом *3*. Согласно результату пункта б), тело «*2+3*» массой $2m$ будет после удара двигаться вправо со скоростью $v/2$. Если расстояние

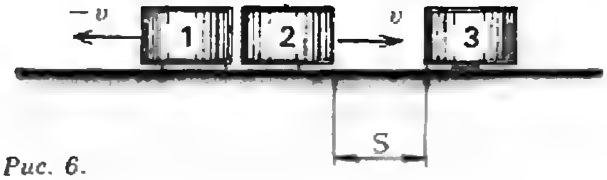


Рис. 6.

между телами очень мало, то столкновение и слипание тел *2* и *3* произойдет практически мгновенно. Поэтому можно считать, что с самого начала тела *2* и *3* образовывали одно целое и мы приходим к следующему выводу: если в начальный момент времени два тела с массами m и $2m$ соприкасались и затем начали разлетаться в разные стороны, то скорость тела массой $2m$ будет в два раза меньше скорости тела массой m.

г) Рассмотрим случай, когда два тела с массами m и $2m$ движутся навстречу друг другу со скоростями v и $-v/2$ соответственно. Утверждается, что после абсолютно неупругого удара слипшееся тело массой $3m$ будет покоиться (в соответствии с формулой (2)). Действительно, мы можем вообразить новую систему отсчета S', в которой часы идут в «обратную сторону». Относительно системы S' все тела будут двигаться в противоположном направлении с той же по абсолютной величине скоростью, поэтому нам остается воспользоваться принципом относительности и результатом пункта в).

д) Теперь обратимся к случаю, когда тела с массами m и $2m$ движутся с произвольными скоростями v_1 и v_2. Как и в рассуждении пункта б), перейдем к новой системе отсчета S', которая движется относительно S со скоростью $v_1 + 2v_2/3$. Именно с этой скоростью движется их общий центр масс (проверьте!). В системе S' центр масс тел m и $2m$ покоится, тело m подлетает к нему со скоростью

$$v_1' = \frac{v_1 + 2v_2}{3} - v_1 = -\frac{2}{3}(v_1 - v_2),$$

а тело $2m$ — со скоростью

$$v_2' = \frac{v_1 + 2v_2}{3} - v_2 = \frac{1}{3}(v_1 - v_2).$$

Мы видим, что относительные скорости v_1' и v_2' отличаются знаками и $|v_1'| = |2v_2'|$. Следовательно, согласно пункту г), после столкновения тело массой $3m$ будет покоиться в системе S', а относительно исходной системы S оно будет двигаться со скоростью

$$v = \frac{mv_1 + 2mv_2}{3m} = \frac{v_1 + 2v_2}{3}.$$

Таким образом, формула (2) установлена в случае, когда $m_2 = 2m_1$.

Рассуждая аналогично, мы можем обосновать формулу (2) для случая рационального отношения масс m_1 и m_2. Ее обоснование для иррациональных отношений m_1/m_2 носит уже формальный характер и связано со строгим введением понятия действительного числа. Дело здесь обстоит так же, как с выводом формулы площади прямоугольника со сторонами a и b: для соизмеримых a и b прямоугольник можно разбить на одинаковые квадраты, а если a и b несоизмеримы, то нужно использовать приближение иррациональных чисел рациональными.

С математической точки зрения рассуждения Гюйгенса, быть может, нельзя признать вполне строгими. Но мы и не стремились дать строгое доказательство формулы для абсолютно неупругого удара. У нас была иная цель: показать, что идеи Гюйгенса с необходимостью приводят к закону сохранения импульса. Подчеркнем, что мы исходили лишь из принципа относительности Галилея и не использовали основные принципы динамики Ньютона (например, закон равенства действия и противодействия). Рассуждение Гюйгенса показывает, что закон сохранения импульса следует из симметричности (или инвариантности) законов механики относительно преобразований Галилея. Это отражает общий факт: всякая симметрия законов механики приводит к своему закону сохранения. Например, инвариантность относительно поворотов пространства влечет закон сохранения момента импульса, а инвариантность относительно сдвигов оси времени — закон сохранения энергии. Общая теорема, связывающая симметрии с законами сохранения, была открыта знаменитым немецким математиком Эмми Нётер (1882—1935).

Задачник „Кванта"

Задачи

М1121 — М1125, Ф1133 — Ф1137

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 декабря 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1121» или «Ф1133». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1121 — М1125 предлагались весной этого года на Девятом Турнире городов.

Задачи Ф1133 — Ф1137 предлагались на заключительном этапе XXII Всесоюзной олимпиады по физике (Тбилиси, 1988).

М1121. Дан треугольник ABC. Две прямые, симметричные прямой AC относительно прямых AB и BC соответственно, пересекаются в точке K. Докажите, что прямая BK проходит через центр описанной окружности треугольника ABC.

В. Ю. Протасов

М1122. Решите систему:

$$\begin{aligned}(x_3+x_1+x_5)^5&=3x_1,\\ (x_4+x_5+x_1)^5&=3x_2,\\ (x_5+x_1+x_2)^5&=3x_3,\\ (x_1+x_2+x_3)^5&=3x_4,\\ (x_2+x_3+x_4)^5&=3x_5.\end{aligned}$$

Л. Тутеску (Румыния)

М1123. Прямой угол разбит на бесконечное число квадратных клеток со стороной единица. Будем рассматривать ряды клеток, паралелльные сторонам угла («вертикальные» и «горизонтальные» ряды). Можно ли в каждую клетку записать натуральное число так, чтобы каждый вертикальный и каждый горизонтальный ряд клеток содержал все натуральные числа по одному разу?

В. С. Шевелев

М1124. Боковые стороны, диагонали и продолжения оснований трапеции пересекают прямую l в шести точках, т. е. высекают на прямой l пять отрезков.

а) Докажите, что если крайние (1-й и 5-й) отрезки равны, то соседние с ними (2-й и 4-й) также равны.

б) При каком отношении оснований трапеции можно провести прямую l так, чтобы все пять отрезков были равны?

Э. Г. Готман

М1125. Рассматривается последовательность слов, состоящая из букв A и B. Первое слово в последовательности — «A»; k-е слово получается из $(k-1)$-го с помощью следующей операции: каждое A заменяется на AAB, каждое B — на A (A, AAB, $AABAABA$, ...).

а) Докажите, что каждое слово является началом следующего (тем самым определяется бесконечная последовательность букв: $AABAABAAABAABAAAB$...).

б) *На каком месте в этой последовательности встретится 1988-я буква A?

в) *Докажите, что эта последовательность непериодическая.

В. М. Гальперин

Ф1133. В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества. Удельная теплота плавления этого вещества (она была определена в предыдущих опытах) $L=200$ кДж/кг. По графику зависимости температуры вещества от времени (рис. 1) определите удельные теплоемкости вещества в твердом и жидком состоянии. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

А. Р. Зильберман

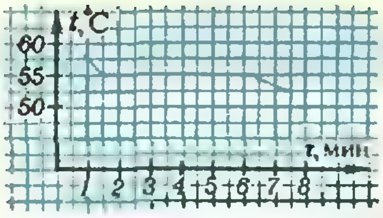


Рис. 1.

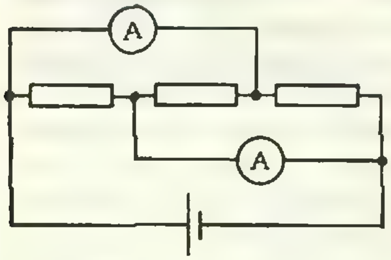


Рис. 2.

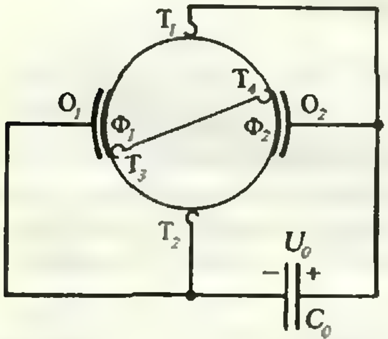


Рис. 3.

Задачник „Кванта"

Ф1134. Исследуя вновь открытую планету, имеющую форму шара радиусом $R=6400$ км и покрытую по всей поверхности океаном глубиной $H=10$ км из обычной воды, ученые установили, что ускорение свободного падения остается с большой степенью точности неизменным при погружении в океан на различные глубины. Определите по этим данным ускорение свободного падения на планете. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

И. И. Воробьев

Ф1135. Горизонтальная площадка с лежащей на ней монетой совершает круговое поступательное движение в горизонтальной плоскости так, что все ее точки описывают окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Коэффициент трения между монетой и площадкой μ. Каким будет установившееся движение монеты? Какой след «вычерчивает» она на площадке?

Е. И. Бутиков

Ф1136. В схеме, приведенной на рисунке 2, амперметры показывают токи 0,2 А и 0,3 А. После того как два резистора в схеме поменяли местами, показания амперметров не изменились. Какой ток течет через батарею? Считать напряжение батареи неизменным. Сопротивления амперметров пренебрежимо малы.

А. Р. Зильберман

Ф1137. Электростатический генератор (рис. 3) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены полоски фольги $Ф_1$ и $Ф_2$, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет напряжение на этом конденсаторе после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.

И. И. Воробьев

Problems

M1121—M1125, P1133—1137

M1121. A triangle ABC is given. The two lines which are the mirror images of AC with respect to AB and BC intersect at the point K. Prove that BK passes through the centre of the circumcircle of triangle ABC.

V. J. Protasov

M1122. Solve the system of equations:

$$\begin{aligned}(x_3+x_4+x_5)^5&=3x_1,\\(x_4+x_5+x_1)^5&=3x_2,\\(x_5+x_1+x_2)^6&=3x_3,\\(x_1+x_2+x_3)^5&=3x_4,\\(x_2+x_3+x_4)^5&=3x_5.\end{aligned}$$

L. Tutescu (Rumania)

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that

not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 1 st, 1988 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we schall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Задачник „Кванта"

M1123. A right angle is divided into an infinite number of unit squares. Consider the rows of squares which are parallel to the sides of the angle (i. e. "vertical" and "horisontal" rows). Is it possible to write a natural number into every square so that every vertical and every horisontal row contain all the natural numbers and every number appears in every row only once?

V. S. Shevelev

M1124. A line l is divided by the lateral sides, the diagonals and the (parallel) lines containing the upper and lower base of a trapezium into five intervals.

a) Prove that if the extreme intervals (i. e. the 1-st and the 5-th) are equal, then their adjacent intervals (i. e. the 2-nd and the 4-th) are also equal.

b) For what ratio of the trapezium's bases is it possible to draw the line l so that all five intervals are equal?

E. G. Gotman

M1125. Consider a sequence of words which consist of the letters *A* and *B*. The first word is "*A*"; to get the k-th word from the $k-1$-th one, we must replace every *A* by *AAB* and every *B* by *A* (thus the sequence is *A*, *AAB*, *AABAABA*,...).

a) Prove that every word is the beginning of the next one (so that the infinite sequence *AABAABAAABAABAAAB*... is defined).

b) * At what place will the 1988-th letter *A* occur?

c) * Prove that this sequence is not periodical.

V. M. Galperin

P1133. A melted sample of a material under experimental study is slowly cooled in a calorimeter. The specific heat of melting for this material (which was determined in previous experiments) is $L=200$ kJ/kg. From the graph showing how the temperature of the material changes in time (see figure Рис. 1) determine the specific heat capacity of the material in hard and liquid state. The calorimeter's heat capacity may be neglected.

A. R. Zilberman

P1134. Studying a newly discovered planet shaped like a sphere of radius $R=6400$ km and entirely covered by an ocean of ordinary water whose depth is $H=10$ km, scientists established that the acceleration of gravity remains unchanged (with a great degree of precision) at various depths in the ocean. Use this data to determine the acceleration of gravity on the planet. The gravitational constant is $G=6.67\cdot 10^{-11}$ N$\cdot$ m^2/kg^2.

I. I. Vorobjev

P1135. A horizontal plate with a coin lying flat on it moves circularly so that each of its points describes a horizontal circle of radius R with angular velocity ω. The friction coefficient between coin and plate is μ. What will the established motion of the coin be like? What is its "trace" on the plate?

E. I. Butikov

P1136. In the circuit shown on figure Рис. 2, the ammeters show currents of 0.2 A and 0.3 A. After the two resistors in the circuit have been interchanged, the ammeter readings don't change. What current flows through the battery? The difference of potential of the battery may be assumed constant. The resistance of the ammeters is negligible.

A. R. Zilberman

Замечательные числа.

Дружественные числа и простые числа-близнецы

101
103
227
229
284

Каждому из вас многократно приходилось раскладывать числа на множители. Рассмотрим число и сумму всех его делителей, отличных от самого числа. Если эта сумма больше исходного числа, число называют *избыточным*, если меньше — *недостаточным*; в случае же равенства число называют *совершенным*.

Пифагор говорил: «Мой друг тот, кто является моим вторым я, как числа 220 и 284». Эти два числа замечательны тем, что сумма делителей каждого из них равна второму числу. Они были названы *дружественными*.

Принято считать, что сле-

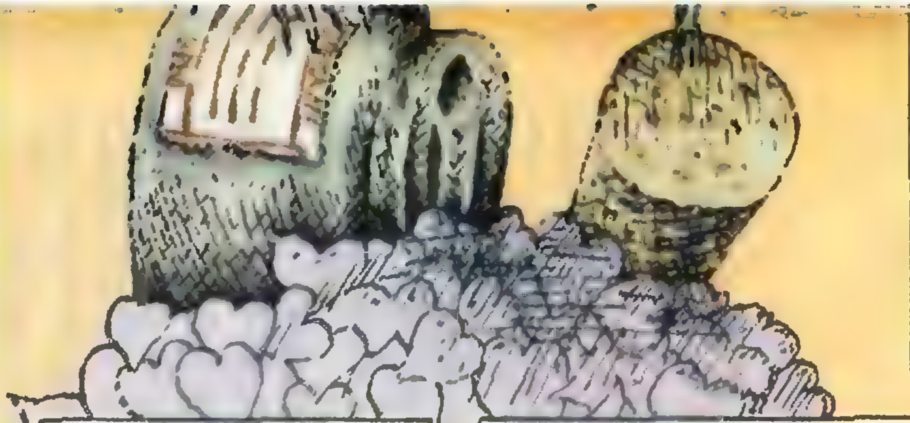
При $n=2$ и $n=4$ получаются числа, найденные Пифагором и ибн аль-Банной. При $n=7$ получаются числа 9 363 584 и 9 437 056, найденные в 1638 году Р. Декартом (1596—1650), не знавшим теоремы ибн Курры. Этими тремя случаями исчерпываются все значения $n \leqslant 20\,000$, при которых способ ибн Курры дает дружественные числа.

Леонард Эйлер (1707—1783) первым после Декарта получил новые дружественные числа. Всего им открыто 59 пар чисел, среди них были и пары нечетных чисел: $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 7$ и $3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 89$, а также $3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 107$ и $3^4 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 2\,699$. Он предложил пять методов отыскания дружественных чисел.

В настоящее время известно около 1100 пар дружественных чисел, найденных либо хитроумными способами, либо (в последнее время) простым перебором на ЭВМ. Любопытно, что на долю ЭВМ досталось в этом списке совсем немного чисел — большинство было уже открыто математиками.

Математиков Древней Греции очень интересовали и *простые числа* — числа, имеющие ровно два делителя. Среди них они выделяли *числа-близнецы* — простые числа, отличающиеся на 2: например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19.

принято считать, что сле-дующую пару дружественных чисел 17 296 и 18 416 открыл в 1636 году Ферма (1601—1665). Но недавно в одном из трактатов марокканского ученого ибн аль-Банны (1256—1321) были найдены следующие строки: «Числа 17 296 и 18 416 являются дружественными... Аллах всеведущ».



Задолго до ибн аль-Банны другой арабский математик ибн Курра (836—901) сформулировал следующий способ нахождения некоторых дружественных чисел: если три числа $p=3\cdot 2^{n-1}$, $q=3\cdot 2^{n}-1$ и $r=9\cdot 2^{2n-1}-1$ — простые, то числа $A=2^{n}pq$ и $B=2^{n}r$ будут дружественными.

Многие авторы после ибн Курры изучали дружественные числа, но ничего существенного не открыли. В их сочинениях присутствуют такие рецепты: «Чтобы добиться взаимности в любви, нужно на чем-либо записать числа 220 и 284, меньшее дать объекту любви, а большее съесть самому».

Хотя пока не доказано, что чисел-близнецов бесконечно много, но их количество в заданном отрезке $[x;\ x+a]$ натурального ряда с большой точностью выражается следующей формулой:
$N=Ca/(\ln x)^2$, где $C=1{,}320\ 323\ 631\ 6\ldots$

Интервал	По формуле	Фактически
10^{8} — $(10^{8}+1{,}5\cdot 10^{5})$	584	601
10^{9} — $(10^{9}+1{,}5\cdot 10^{5})$	461	466
10^{10} — $(10^{10}+1{,}5\cdot 10^{5})$	374	389
10^{11} — $(10^{11}+1{,}5\cdot 10^{5})$	309	276
10^{12} — $(10^{12}+1{,}5\cdot 10^{5})$	259	276
10^{13} — $(10^{13}+1{,}5\cdot 10^{5})$	211	208
10^{14} — $(10^{14}+1{,}5\cdot 10^{5})$	191	186
10^{15} — $(10^{15}+1{,}5\cdot 10^{5})$	166	161

В таблице приведены количества чисел-близнецов, вычисленные по формуле, и фактические.

A =90 2364653062 3313066515 5201592687
0786444130 4548569003 8961540360
5363719932 5828701918 5759580345
2747004992 7532312907 0333233826
7840675607 3892061566 6452384945

B =86 2593766501 4359638769 0953818787
1666597148 4088835777 4281383581
6831022646 6591332953 3162256868
3649647747 2706738497 3129580885
3683841099 1321499127 6380031055

A и *B* — самые большие из известных дружественных чисел.

P1137. A model of an electroctatic electric machine (see figure Рис. 3) consists of a non-conducting cylinder with two strips of aluminium foil Φ_1 and Φ_2 glued to it, external condensator plates O_1 and O_2, fixed current receivers T_1 and T_2 outside and a fixed connection inside between the receivers T_3 and T_4. In initial position the foil strips are opposite to the external plates, forming two capacitors of capacity C_1 each. A capacitor of capacity C_0, initially charged to U_0, [illegible] connected to the external plates. What will the charge on this capacitor be after N clockwise revolutions of the cylinder? The capacity between the external plates and the foil strips when they are not opposite to each other are negligible.

I. I. Vorobjev

Решения задач

М1101 — М1105, Ф1113 — Ф1117

М1101. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC нашлись такие точки D и E соответственно, что $AD=BC=EC$ и треугольник ADE равнобедренный. Каким может быть угол при вершине A?*

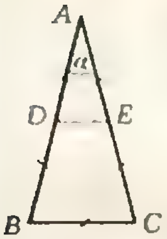


Рис. 1.

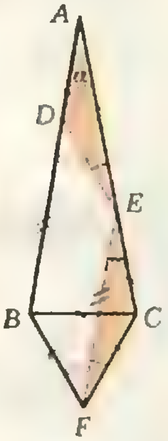


Рис. 3.

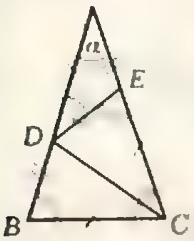


Рис. 2.

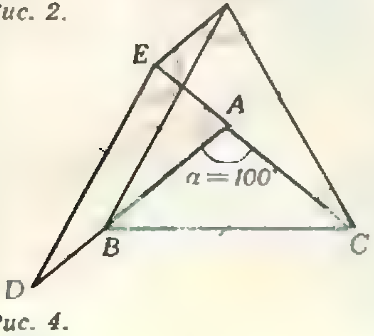


Рис. 4.

Ответ. Возможны три случая: 1) если $AD=AE$, то $\angle A=2\operatorname{arctg}(1/4)$; 2) если $AE=DE$, то $\angle A=36^\circ$; 3) если $AD=DE$, то $\angle A=20^\circ$.

Рассмотрим эти случаи по отдельности. Положим $\angle A=\alpha$.

Случай 1) (рис. 1). Поскольку $AD=AE=EC=BC$, боковая сторона равнобедренного треугольника ABC вдвое больше основания. Очевидно, $\operatorname{tg}(\alpha/2)=BC/(2AC)=1/4$.

Случай 2) (рис. 2). Поскольку $BD=AB-AD=AC-EC=AE=ED$ и $BC=EC$, треугольники BCD и ECD равны (по трем сторонам). Угол DEC является внешним в равнобедренном треугольнике ADE, следовательно

$$\angle ACB=\angle ABC=\angle DEC=2\alpha,$$

а сумма углов треугольника ABC равна $\alpha+2\alpha+2\alpha=5\alpha=180^\circ$, т. е. $\alpha=36^\circ$.

Случай 3) (рис. 3). Достроим треугольник BDE до параллелограмма $BDEF$ и покажем, что $\triangle BCF$ — равносторонний. Из очевидных равенств $\angle CEF=\angle CAB=\alpha$, $CE=AD=DE$ и $EF=BD=AB-AD=AC-EC=AE$ следует, что $\triangle CEF=\triangle DAE$, CEF — равнобедренный треугольник, причем $CF=CE=CB$, $\angle CFE=\angle CEF=\alpha$. Кроме того, $BF=DE=CB$, а $\angle CFE=\angle BDE=2\alpha$, т. к. $BDEF$ — параллелограмм, а BDE — внешний угол треугольника ADE. Итак, $BF=FC=CB$ и $\angle BFC=60^\circ=\angle BFE+\angle EFC=2\alpha+\alpha=3\alpha$. Отсюда получаем, что $\alpha=20^\circ$.

В конце этого рассуждения, записывая равенство $\angle BFC=\angle BFE+\angle EFC$, мы неявно воспользовались тем, что треугольники ABC и FBC лежат по разные стороны от BC и луч FE проходит внутри угла BFC. Но если бы точка F оказалась над основанием BC, то точно так же мы имели бы равенство $3\alpha=\angle BFE+\angle EFC=360^\circ-\angle BFC=300^\circ$, откуда $\alpha=100^\circ$, что невозможно, т. к. α — угол при основании равнобедренного треугольника DEA. (Впрочем, и этот случай можно включить в рассмотрение, если разрешить точкам D и E находиться на продолжениях соответствующих сторон треугольника; рис. 4.)

В. Кириак, В. Н. Дубровский

M1102. *Докажите, что существуют n различных натуральных чисел, сумма кубов которых равна кубу натурального числа, если а) n=3, б) n=4, в) n — любое натуральное число, большее 2.*

Приведем примеры наборов из трех и четырех кубов различных натуральных чисел, сумма которых — куб:

а) $3^3+4^3+5^3=6^3$,

б) $1^3+5^3+7^3+12^3=13^3$.

Построить наборы из большего числа кубов можно путем «наращивания»: умножив все кубы в равенстве *а*) на 2^3 (или в равенстве *б*) — на 6^3), мы получим равенство кубов, наименьший из которых 6^3; его можно заменить на $3^3+4^3+5^3$. Таким образом, из *а*) мы получим равенства

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3=12^3 \quad (n=5),$$

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+16^3+20^3=24^3 \quad (n=7)$$

и т. д. для всех нечетных n, а из *б*) —

$$3^3+4^3+5^3+30^3+42^3+72^3=78^3 \quad (n=6),$$

$$3^3+4^3+5^3+8^3+10^3+60^3+84^3+144^3=156^3 \quad (n=8)$$

и т. д. для всех четных n.

Л. Д. Курляндчик

M1103. *а) На бесконечной плоскости, разбитой на квадратные клетки, некоторое — быть может бесконечное — количество прямоугольников размером 1×2 закрашены в черный цвет так, что никакие два черных прямоугольника не имеют общих точек (даже вершин). Докажите, что оставшуюся часть плоскости можно замостить этими прямоугольниками. б)* Пусть на клетчатой плоскости закрашены несколько прямоугольников*

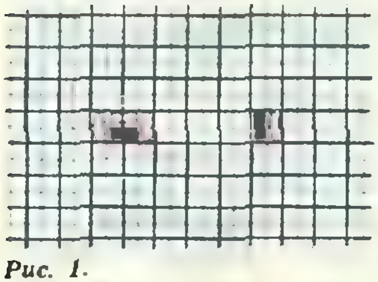


Рис. 1.

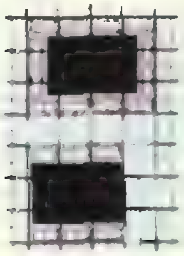


Рис. 2.

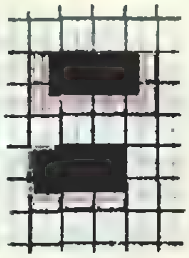


Рис. 3.

Покроем исходную (голубую) клетчатую сетку более крупной (черной), разбивающей плоскость на квадраты 2×2 клетки. Каждое черное домино 1×2 либо целиком помещается в одном квадрате 2×2 новой сетки, либо в двух соседних, образующих прямоугольник 2×4, причем другие черные домино в этот участок черной сетки не заходят. В обоих случаях остаток участка легко покрыть домино (на рисунке 1 эти домино обведены розовой линией); пустые клетки 2×2 разбиваются на два домино. Отсюда следует утверждение задачи а).

Аналогично, с помощью сетки из квадратов 2×2 доказывается и утверждение б) для прямоугольников $m\times n$ из четного числа mn клеток. Здесь важно, что белая каемка шириной в одну клетку, остающаяся на участке каждого черного домино $m\times n$, состоит из четного числа клеток (быть может, из двух полосок, в каждой из которых — четное число клеток; рисунок

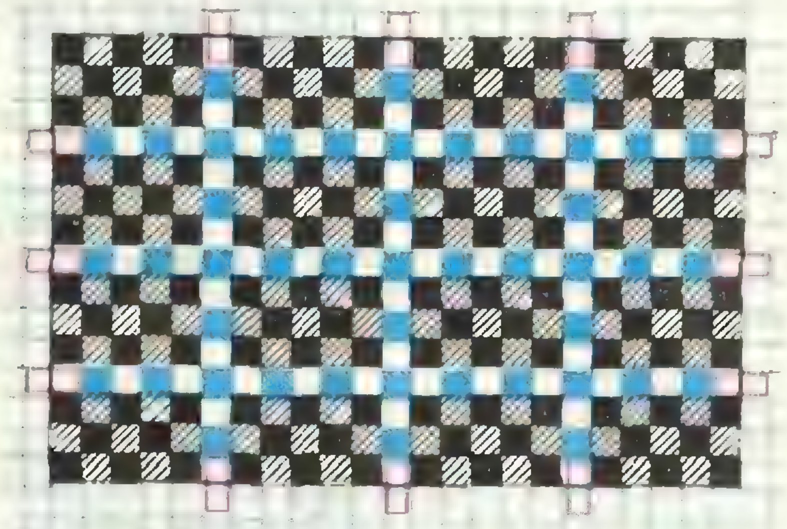


Рис. 4.

размером $m\times n$ клеток, не имеющих общих точек. Докажите, что если mn четно, то оставшуюся часть плоскости можно замостить прямоугольниками размером 1×2, а если mn — нечетно, то это не всегда возможно.

2 изображает случаи, когда m и n оба четны, рисунок 3 — когда m четно, а n нечетно).

Докажем теперь, что если mn нечетно и k^2 прямоугольников $m\times n$ размещены рядами с промежутками шириной в одну клетку, как показано на рисунке 4, то при $k\geqslant 4$ покрыть оставшуюся часть плоскости домино 1×2 нельзя.

Пусть П — весь прямоугольник из $2N-1=(mk+k-1)\times(nk+k-1)$ клеток, содержащий k^2 прямоугольников. Закрасим в шахматном порядке N клеток П, включая условие (внутри прямоугольников — черным, вне — голубым). *В каждом из k^2 прямоугольников «лишняя»* черная клетка, поэтому среди $N-1$ клеток непокрытой ими области П на k^2-1 больше белых клеток, чем голубых. Но каждое домино покрывает одну белую и одну голубую клетку.

Предположим, что вся эта область покрыта домино. Некоторые из них — но не более $4(k-1)$ — могут выходить (на одну клетку) за пределы П, но поскольку *$k^2-1>4(k-1)$ при $k\geqslant 4$, наше предположение* приводит к противоречию.

М. Хованов

М1104. *В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и BCD перпендикулярны, $\angle BAC=90°$. Докажите, что из отрезков, длины которых равны произведениям длин противоположных ребер тетраэдра, можно составить прямоугольный треугольник.*

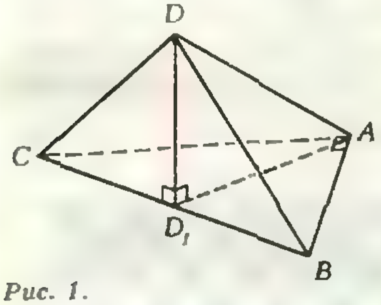


Рис. 1.

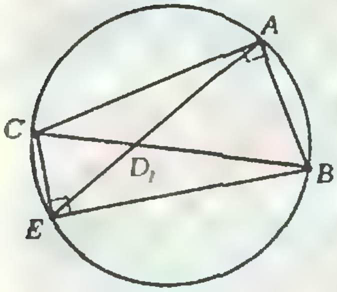


Рис. 2.

Докажем, что

$$(DA\cdot BC)^2=(DB\cdot CA)^2+(DC\cdot AB)^2.$$

Это равенство эквивалентно аналогичному равенству для проекции D_1 точки D на плоскость ABC (рис. 1):

$$D_1A^2\cdot BC^2=D_1B^2\cdot CA^2+D_1C^2\cdot AB^2. \qquad (*)$$

В самом деле, вычитая из первого равенства второе, по теореме Пифагора для треугольников DD_1A, DD_1B и DD_1C получим

$$D_1D^2\cdot BC^2=D_1D^2\cdot CA^2+D_1D^2\cdot AB^2,$$

а это равенство всегда верно, так как в треугольнике ABC угол A прямой.

Доказательство равенства (*) можно провести так. Опишем окружность около треугольника ABC и обозначим через E точку ее пересечения с прямой AD_1 (отличную от точки A; см. рис. 2). Треугольники D_1BE и D_1AC подобны ($\angle ED_1B=\angle CD_1A$, $\angle BED_1=\angle ACD_1$), поэтому $BE:BD_1=CA:AD_1$, или

$$CA^2\cdot BD_1^2=BE^2\cdot AD_1^2;$$

аналогично,

$$AB^2\cdot CD_1^2=CE^2\cdot AD_1^2.$$

Следовательно, поскольку $\triangle BEC$ прямоугольный,

$$CA^2\cdot BD_1^2+AB^2\cdot CD_1^2=(BE^2+CE^2)\cdot AD_1^2=BC^2\cdot AD_1^2,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что равенство (*) — это, по сути дела, частный случай так называемой «формулы Стюарта» для длины отрезка AD_1 (рис. 2) в произвольном треугольнике ABC:

$$AD_1^2=p\cdot AB^2+q\cdot AC^2-pq\cdot BC^2,$$

где $p=CD_1/BC$, $q=BD_1/BC$.

Читателям, знакомым с преобразованием *инверсии*, укажем на связь нашей задачи с этим преобразованием:

если A_1, B_1 и C_1 — образы точек A, B, C при некоторой инверсии с центром D (т. е. точки A_1, B_1, C_1 лежат, соответственно, на лучах DA, DB, DC и $DA_1 \cdot DA = DB_1 \cdot DB = DC_1 \cdot DC$), то стороны треугольника $A_1B_1C_1$ пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра $ABCD$, причем этот треугольник — прямоугольный. (По основному свойству инверсии описанная около треугольника ABC окружность переходит при инверсии в окружность, описанную около треугольника $A_1B_1C_1$; легко видеть, что в нашей задаче сторона B_1C_1 будет диаметром второй окружности.)

В. Н. Дубровский

М1105. *После нескольких прямолинейных разрезов поверхность выпуклого многогранника развернули на плоскость. Получился многоугольник, для которого известно, какие точки его границы «склеиваются», т. е. отвечают одной и той же точке на поверхности многогранника. Каким был исходный многогранник, если при разрезании получился*

а) прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$,

б) равнобедренный треугольник с углом 120°,

причем в обоих случаях склеиваются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины.

а), б) Ответ в обеих задачах — правильный тетраэдр.

Покажем, что и в одном, и в другом случае заданную развертку можно переклеить в правильный треугольник, граница которого склеивается по тому же правилу, что и в условии задачи: соединяются точки каждой стороны, симметричные относительно ее середины.

Пусть $P_1P_2P_3P_4$ — прямоугольник, рассматриваемый в задаче а), A, B, C, D — середины его сторон (рис. 1). Разрежем его по отрезкам DA и DC и подклеим сторону AP_1 треугольника AP_1D к отрезку AP_2, а сторону CP_4 треугольника CP_4D к отрезку CP_3, в соответствии с указанным в условии правилом склейки. Получится треугольник DD_1D_2 (рис. 2), в котором должны быть склеены отрезки сторон AD и AD_1, CD и CD_2, BD_1 и BD_2 (очевидно, эти отрезки попарно равны). Ясно, что это — правильный треугольник со стороной 2. Еще проще осуществляется аналогичная переклейка в задаче б) (рис. 3).

Остается заметить, что правильный треугольник с указанным способом склейки границы является разверткой правильного тетраэдра, который получается, если перегнуть треугольник по средним линиям.

Строго говоря, нужно еще доказать, что правильный тетраэдр является единственным многогранником с данной разверткой. Мы еще вернемся к этой задаче и, в частности, докажем его единственность.

Н. П. Долбилин, М. И. Штогрин, В. Н. Дубровский

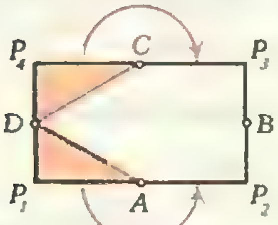


Рис. 1.

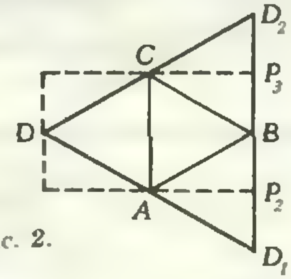


Рис. 2.

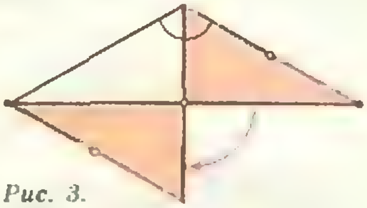


Рис. 3.

Ф1113. *Шар радиусом R может свободно вращаться на закрепленной горизонтально оси OO′. Под ша-*

Сначала обсудим качественно, что будет происходить с шаром после прижатия к нему ленты.

Поскольку лента шероховатая, в месте контакта на шар действуют силы трения, которые создают вращаю-

ром, прижимаясь к нему, движется шероховатая жесткая лента, изогнутая в виде полуцилиндра радиусом R (рис. 1). Скорость ленты v направлена горизонтально и перпендикулярно оси OO′. Чему равна установившаяся скорость вращения шара?

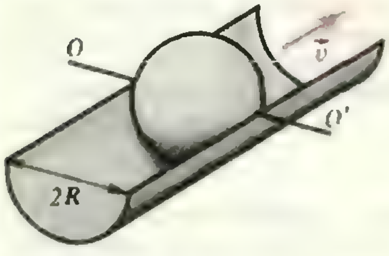


Рис. 1.

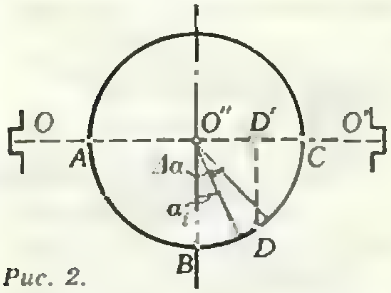


Рис. 2.

щий момент, раскручивающий шар. Когда угловая скорость вращения достигнет величины $\omega = v/R$, точка шара B (рис. 2), максимально удаленная от оси вращения OO', будет иметь линейную скорость, равную скорости ленты: $\omega R = vR/R = v$. Проскальзывание шара относительно ленты в этом месте прекратится, и сила трения (а значит, и ее момент) исчезнет. Однако у всех остальных точек дуги ABC (по которой шар контактирует с лентой) линейная скорость в этот момент меньше, чем v (эти точки ближе к оси вращения), так что шар продолжает разгоняться.

По мере роста угловой скорости шара точка отсутствия проскальзывания перемещается ближе к оси OO', и число участков, имеющих линейную скорость, меньшую v, уменьшается. Вместе с тем, растет число участков, где линейная скорость больше v, сила трения направлена в противоположную сторону и создает момент сил, тормозящий вращение. В какой-то момент разгоняющий и тормозящий моменты сил сравняются, и угловая скорость перестанет изменяться.

Теперь проведем соответствующие расчеты. Прежде всего найдем, в какой точке будет отсутствовать проскальзывание при установившемся режиме.

Будем считать, что лента прижимается к шару во всех местах с одинаковой силой, тогда на любые два одинаковых участка контакта будут действовать одинаковые (по модулю) силы трения. Пусть искомая точка отсутствия проскальзывания — это точка D (см. рис. 2). Рассмотрим небольшой участок дуги вблизи этой точки. Его длина $\Delta l = R\Delta\alpha$; действующая на него сила трения $\Delta F = k\Delta l = kR\Delta\alpha$ (k — некоторая постоянная); ее момент $\Delta M = kR\Delta\alpha \cdot R\cos\alpha$. Суммарный момент сил трения

$$M = \sum_i \Delta M = kR\sum_i R\Delta\alpha\cos\alpha_i,$$

действующий на дугу BC, при установившемся режиме должен быть равен нулю. Это означает, что должна быть равной нулю сумма проекций дуг BD и DC («положительной» и «отрицательной» соответственно) на ось вращения OO':

$$\sum_i R\Delta\alpha\cos\alpha_i = 0 \Rightarrow O''D' = D'C = R/2,$$

откуда искомая установившаяся угловая скорость

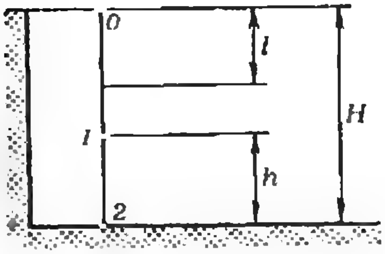
$$\omega = \frac{v}{D'D} = \frac{2v}{\sqrt{3}R} \approx 1{,}15\frac{v}{R}.$$

Л. Г. Маркович

Ф1114. *Каскадер падает с высоты $H = 50$ м. К нему пристегнут резиновый шнур, второй конец которого закреплен в месте старта. Длина и жесткость шнура подобраны так, что у земли скорость гасится до нуля. После того как за-*

Введем обозначения для неизвестных параметров: l — длина нерастянутого шнура (очевидно, что $l + h < H$), k — его жесткость, m — масса каскадера, v — искомая скорость. Заметим, что максимальная скорость была у каскадера как раз на высоте h над землей, т. е. в положении равновесия, где сила тяжести mg уравновешена силой упругости шнура $k(H - l - h)$. Выше этой точки сила тяжести доминирует над силой упругости — движение каскадера ускоренное, ниже этой точки преоб-

тухли колебания, каскадер повис на высоте $h=10$ м над землей. Какова была максимальная скорость каскадера во время падения? Сопротивление воздуха не учитывать.



ладает сила упругости — движение замедленное.

Запишем закон сохранения механической энергии для положений *0* и *1* (см. рисунок):

$$mgH=mgh+\frac{1}{2}k(H-l-h)^2+\frac{1}{2}mv^2 \qquad (1)$$

и для положений *0* и *2*:

$$mgH=\frac{1}{2}k(H-l)^2. \qquad (2)$$

Учтем также условие равновесия на высоте h:

$$mg=k(H-l-h). \qquad (3)$$

Исключив из уравнений (1) — (3) неизвестные параметры m, k и l, найдем v. Проще всего это сделать так. Разделим уравнение (2) на уравнение (3) и найдем $l=\sqrt{H^2-2Hh}$; слагаемое $k(H-l-h)^2/2$ в уравнении (1) перепишем, с учетом равенства (3), в виде $mg(H-l-h)/2$; после чего получим

$$v^2=g(H-h+\sqrt{H^2-2Hh}),$$

и

$$v=\sqrt{g(H-h+\sqrt{H^2-2Hh})}\approx 28 \text{ м/с}.$$

Д. В. Павлов

Ф1115. *Замкнутый сосуд, заполненный газом, разделен на две части непроницаемым горизонтальным поршнем; масса сосуда m, масса поршня M. Вначале сосуд покоится на подставке. Затем подставку толчком выбивают из-под сосуда. С каким ускорением начнет двигаться сосуд? Трением между стенками сосуда и поршнем пренебречь.*

В исходном состоянии равновесие поршня обеспечивается тем, что в нижней части сосуда газ сжат сильнее, чем в верхнем ($p_2>p_1$). Если обозначить через S площадь сечения поршня, то условие его равновесия запишется в виде:

$$(p_2-p_1)S=Mg. \qquad (1)$$

Сразу после выбивания подставки на сосуд в вертикальном направлении действуют три силы: силы давления газа на верхнюю и нижнюю стенки сосуда p_1S и p_2S и сила тяжести сосуда mg. Согласно второму закону Ньютона,

$$ma_0=mg-p_1S+p_2S. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим начальное ускорение:

$$a_0=g\,\frac{M+m}{m}.$$

С. Ф. Ким, А. И. Латынин

Ф1116. *В две одинаковые химические пипетки набирают до одного и того же уровня воду: в одну — холодную, в другую — горячую. Пипетки опорожняют и считают при этом капли. Из какой пипетки упадет больше капель?*

Капля отрывается от конца пипетки в тот момент, когда сила поверхностного натяжения уже не может уравновесить силу тяжести капли.

С ростом температуры воды коэффициент ее поверхностного натяжения, а значит, и сила поверхностного натяжения, уменьшается. Причем уменьшается довольно заметно — примерно на 20 % при повышении температуры от 20 до 100 °С. Таким образом, сила тяжести горячей капли меньше, чем холодной, а число горячих капель, наоборот, больше.

Заметим, что при нагревании происходит еще один процесс — уменьшение плотности воды (связанное с ее расширением). Это обстоятельство, вообще говоря, играет противоположную роль. Но обусловленный им эффект, из-за малого коэффициента теплового расширения воды, оказывается гораздо слабее первого и практически не проявляется.

А. И. Буздин

Ф1117. *Свет от точечного источника A выводится сквозь непрозрачную стенку с помощью световода — тонкой прозрачной палочки с радиусом сечения R (рис. 1); внутренняя часть палочки с радиусом r ($R-r<r$) сделана из материала с показателем преломления n_1, а внешняя оболочка — из материала с показателем преломления n_2 ($n_2<n_1$). Определите диаметр светового пятна на экране, расположенном на расстоянии L от правого торца световода. Источник света находится вблизи центра левого торца световода.*

Как изменится размер пятна, если источник удалить вдоль оси световода на расстояние l от торца?

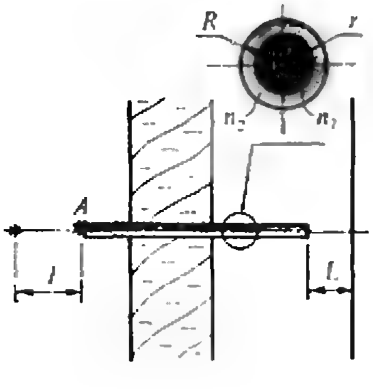


Рис. 1.

Очевидно, что на экран придут те лучи от источника, которые на поверхности соприкосновения сердцевины и оболочки претерпевают полное отражение и оказываются как бы захваченными сердцевиной световода.

Лучи света проходят в сердцевине световода (рис. 2), если угол падения $\alpha \geqslant \alpha_0$, где α_0 — предельный угол полного отражения на границе двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 ($\sin\alpha_0 = n_2/n_1$).

После преломления на противоположном от источника торце световода лучи света будут расходиться в виде конического пучка. В соответствии с законами геометрической оптики угол преломления находим из условия

$$\frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ-\alpha)} = n_1.$$

Луч света будет испытывать на торце палочки наибольшее отклонение, если угол α минимален, т. е. $\alpha=\alpha_0$. Тогда для максимального угла преломления $\beta_{\max}$ получаем выражение, справедливое при $n_1^2-n_2^2<1$:

$$\sin\beta_{\max} = n_1\cos\alpha_0 = \sqrt{n_1^2-n_2^2}.$$

Таким образом, зная высоту усеченного конуса (светового пучка) L, радиус меньшего основания r, угол $\beta_{\max}$ между осью конуса и его образующей, легко найти радиус большего основания, или, что то же самое, радиус светового пятна на экране:

$$R_1 = r + L\,\mathrm{tg}\,\beta_{\max}, \qquad (1)$$

или

$$R_1 = r + L\frac{\sqrt{n_1^2-n_2^2}}{\sqrt{1+n_2^2-n_1^2}}. \qquad (2)$$

Если $n_1^2-n_2^2 \geqslant 1$, то лучи света будут выходить под любым углом $\beta \leqslant \pi/2$ и размер светового пятна будет неограничен.

В том случае, когда источник удален на расстояние l от торца световода, в формировании светового пятна могут участвовать лучи, попадающие на левый торец под углами $\gamma \leqslant \gamma_{\max}$, где $\mathrm{tg}\,\gamma_{\max} = r/l$. Поэтому выходящий пучок не может иметь угол расхождения больший, чем $\gamma_{\max}$, т. е. $\beta \leqslant \gamma_{\max}$ (как при прохождении плоскопараллельной пластины). Если $\beta_{\max} \leqslant \gamma_{\max}$, то и для этого случая справедлива формула (2). Если $\beta_{\max} > \gamma_{\max}$, то в формулу (1) вместо $\beta_{\max}$ следует поставить $\gamma_{\max}$:

$$R_1 = r\left(1+\frac{L}{l}\right).$$

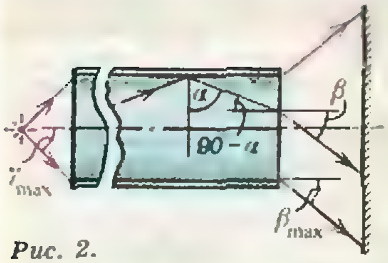


Рис. 2.

Интересно отметить, что плавные изгибы длинной палочки в ее центральной части практически не влияют на величину светового пятна. И еще. Такие световоды позволяют световому сигналу преодолевать не только стену, но и более сложные препятствия. Они весьма перспективны и уже находят широкое применение в технике связи, например при построении помехозащищенного кабельного телевидения в густозастроенных городских районах.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1076 — М1090, Ф1088 — Ф1102, справились с задачами М1076, М1081, М1082, М1086, М1088, М1090, Ф1088, Ф1090, Ф1091, Ф1093 — Ф1095, Ф1098 — Ф1100.

Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Д. Абдуллаев (Баку) 89; *В. Абраамян* (с. Бюракан АрмССР) 87, 89; *Э. Агаев* (п. Борадыгях АзССР) 89; *К. Адриан* (Каракал, СРР) 77—80; *Н. Адрианов* (Электросталь) 83, 84, 87, 89; *А. Акимов* (Евпатория) 77—80, 83, 87, 89; *А. Акопян* (Ереван) 78, 79, 83, 89; *Г. Аксенов* (Москва) 83; *П. Андрас* (СРР) 87, 89; *В. Андрющенко* (Винница) 83, 87; *И. Аржанцев* (Киев) 83, 85, 87, 89; *Б. Арясов* (Киев) 83, 89; *Д. Асадов* (Баку) 83, 89; *Ш. Асадов* (с. Кирилавар АзССР) 89; *А. Ахметов* (Алма-Ата) 87; *Ш. Бабаев* (Баку) 83, 89; *Р. Баженов* (Симферополь) 89; *Е. Бакенов* (Караганда) 87; *Л. Бараковская* (Киев) 89; *В. Бараковский* (Омск) 87, 89; *Н. Баринова* (Усть-Каменогорск) 87, 89; *Ю. Безгачева* (Красноярск) 77, 79; *С. Березовский* (Киев) 83, 85; *Н. Билусяк* (с. Менява Ивано-Франковской обл.) 83, 85, 87; *Н. Биядилов* (Алма-Ата) 87, 89; *А. Блинова* (Ленинград) 87; *А. Богданов* (Старый Оскол) 87, 89; *Я. Бойчук* (Киев) 83, 87, 89; *Б. Боранбаев* (Алма-Ата) 87, 89; *Ж. Борашев* (Алма-Ата) 87, 89; *П. Бородин* (Киров) 89; *А. Брейман* (Москва) 83, 84; *Я. Бренер* (Вильнюс) 80; *Д. Бринзан* (СРР) 87; *С. Бутвина* (Житомир) 83—85, 89; *В. Варламов* (Воткинск) 89; *Ц. Василев* (София, НРБ) 78—80; *Е. Васильева* (Химки) 83; *Ю. Великина* (Днепропетровск) 79, 83, 89; *А. Виницкий* (Калуга) 79, 89; *Т. Вовкивский* (Черновцы) 89; *С. Волошин* (Подгородное Днепропетровской обл.) 89; *О. Волощук* (Гайаорон) 89; *В. Волчков* (Шахтерск) 83, 84, 87, 89; *В. Вончурин* (Москва) 87, 89; *М. Всемирнов* (Ленинград) 83, 87; *М. Выборнов* (Киев) 79, 80, 83, 87, 89; *А. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 89; *С. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) 89; *Б. Гасанов* (Баку) 83, 89; *В. Гацоева* (Орджоникидзе) 87; *В. Горбачев* (Харьков) 87, 89; *Э. Горянский* (Берегово Закарпатской обл.) 89; *П. Григорьев* (Рига) 87, 89; *Ю. Гринфельд* (Москва) 83—85, 87, 89; *А. Гурло* (г. п. Кривичи Минской обл.) 89; *А. Гурман* (Одесса) 89; *К. Давтян* (Ереван) 89; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 83, 87, 89; *Р. Дадашов* (п. Борадыгях АзССР) 89; *А. Даниленко* (Волгоград) 79; *Д. Делич* (Нови Сад, СФРЮ) 89; *В. Демик* (Орджоникидзе) 89; *Х. Джафаров* (с. Тюркоба АзССР) 77—79, 83, 87, 89; *Д. Долгопят* (Реутов) 84, 87, 89; *С. Дориченко* (Берогово Закарпатской обл.) 89; *Е. Дорогайкин* (Киев) 83, 89; *Д. Драчев* (Киев) 89; *В. Дробовцев* (Москва) 84; *Б. Дубров* (Минск) 83, 84, 87; *Е. Дуда* (Харьков) 83, 87, 89; *К. Дышлевой* (Черкассы) 83, 84; *Д. Дэмбэрэл* (Улан-Батор, МНР) 89; *А. Ерасов* (Москва) 83; *Е. Ербаулетов* (Алма-Ата) 87, 89; *Д. Ефимов* (Москва) 83; *С. Жарков* (Киев) 87, 89; *О. Жеребцов* (Усинск) 89; *В. Жилинскайте* (Вильнюс) 83—85, 89; *Х. Жумабеков* (с. Джайльма Джамбульской обл.) 87, 89; *Ю. Журавель* (Киев) 79, 83, 87, 89; *Д. Зайнолданов* (Талды-Курган) 84; *Н. Зарубин* (Харьков) 87, 89; *И. Зеленко* (Саратов) 77—79, 84, 85, 87, 89; *Д. Зеленский* (Семипалатинск) 83, 84, 89; *С. Зеленский* (Семипалатинск) 83, 89; *С. Зелик* (Краматорск) 77—80, 83—85, 87; *Г. Зельцман* (Киев) 85; *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) 77—79; *И. Зук* (Эссен, ФРГ) 83, 84, 87; *Р. Иванов* (Чебоксары) 89; *М. Игнатьев* (Москва) 83, 84; *С. Измалков* (Харьков) 83, 84, 87, 89; *Н. Ильина* (с. Каменское Уральской обл.) 89; *Д. Ильясов* (с. Коктерек КазССР) 87, 89; *А. Ионес* (Ленинград) 89; *И. Иоппе* (Москва) 83, 84, 87, 89; *А. Исаков* (Алма-Ата) 87, 89; *М. Исмаилов* (п. Ярдымлы АзССР) 89; *А. Кабдолов* (Алма-Ата) 87, 89; *А. Калинин* (Саратов) 79; *В. Калошин* (Харьков) 83—85, 87, 89; *Л. Каминштейн* (Киев) 83, 85, 87, 89; *Н. Капуткина* (Москва) 83, 87; *А. Караваев* (Волгоград) 85; *С. Касаманян* (с/х Аракс АрмССР) 89; *И. Кириллов* (Усть-Каменогорск) 87, 89; *О. Кирнасовский* (Винница) 78, 79; *В. Климов* (Алма-Ата) 83, 87, 89; *А. Клячин* (Волгоград) 78; *В. Клячин* (Волгоград) 79; *Д. Кобыш* (Москва) 89; *Г. Коваль* (Новосибирск) 89; *Т. Ковальчук* (Киев) 89; *С. Коваценко* (Винница) **79, 83, 87, 89**; *О. Коврижкин* (Майкоп) **78, 79, 83**; *А. Козачко* (Винница) **79, 83, 87, 89**; *И. Кокорев* (Ленинград) **77—80**; *М. Колодей* (Омск) **87, 89**; *П. Кононенко* (Иваново) **89**; *А. Копылов* (Черноголовка Московской обл.) **78, 83**; *Д. Коржнев* (Киев) **83, 87, 89**; *Б. Коробейников* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *Д. Коровин* (Иваново) **87, 89**; *А. Короткий* (Днепродзержинск) **83, 87, 89**; *А. Коршков* (Мозырь) **83, 87**; *А. Крапивин* (Харьков) **83**; *И. Крисюк* (Павлодар) **89**; *Г. Кронин* (Ленинград) **79, 89**; *А. Крючков* (Саратов) **85, 87, 89**; *Д. Кудрявцев* (Орджоникидзе) **83, 87, 89**; *К. Кузнецов* (Днепропетровск) **89**; *А. Кулиев* (Фрунзе) **89**; *А. Кулик* (Киев) **83—85, 89**; *А. Кучкаров* (Шават) **87, 89**; *М. Лаба* (Львов) **87, 89**; *Н. Лапуста* (Тернополь) **83**; *Г. Леванов* (Москва) **79, 83, 87, 89**; *М. Левицка* (Гданьск, ПНР) **89**; *С. Лесик* (Донецк) **79, 80, 85, 87, 89**; *М. Либеров* (Москва) **83, 84**; *В. Либо* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *А. Липкин* (Киев) **85, 87, 89**; *Е. Ломовцева* (Белорецк) **84, 87, 89**; *А. Лосев* (Ленинград) **78, 79**; *А. Лукин* (Киев) **89**; *И. Лысюк* (Гайворон) **89**; *А. Ляховецкий* (Одесса) **87**; *С. Лященко* (Харьков) **87, 89**; *Д. Макаров* (Пенза) **84**; *С. Макашев* (Алма-Ата) **87**; *П. Макулев* (Пловдив, НРБ) **83**; *А. Малый* (Чебоксары) **83**; *В. Мамедов* (п. Борадыгях АзССР) **89**; *Д. Мамонтов* (Орджоникидзе) **87**; *И. Марков* (Киев) **87, 89**; *В. Марченко* (Минск) **79, 83—85, 87**; *М. Марченко* (Гайворон) **89**; *А. Мельник* (Гайворон) **89**; *А. Мальников* (Краснодар) **89**; *О. Мельников* (Красноярск) **79**; *А. Мельниченко* (Гомель) **89**; *Д. Менагаргишвили* (Тбилиси) **89**; *И. Мерлин* (Уфа) **89**; *Н. Мехтиев* (Кимиль-Кишлак АзССР) **89**; *А. Миронов* (Заволжье) **87**; *В. Мисакян* (Ереван) **87, 89**; *А. Морозова* (Одесса) **78, 84, 87, 89**; *Д. Муравлев* (Орджоникидзе) **87**; *Я. Мустафаев* (Баку) **77—80**; *Р. Мучник* (Винница) **83, 87, 89**; *О. Наумов* (Заволжье) **83**; *В. Нечаев* (Киев) **83**; *А. Никифоров* (Тула) **89**; *А. Николаев* (Киев) **83**; *Д. Никшич* (Киев) **87, 89**; *Е. Нурбеков* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *А. Нургумаров* (Павлодар) **89**; *И. Опульский* (Киев) **83, 85, 87, 89**; *М. Осовский* (Тольятти) **89**; *Е. Останина* (Белорецк) **84, 87, 89**; *В. Острик* (Жданов) **87**; *О. Павлов* (Новосибирск) **78—80**; *А. Панкратьев* (Курск) **84**; *А. Парыгин* (Омск) **87, 89**; *А. Пашоян* (Чаренцаван) **84**; *Е. Перевознюк* (Гайворон) **89**; *А. Петер* (СРР) **77—79**; *И. Петков* (Враца, НРБ) **84, 87, 89**; *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) **87, 89**; *А. Пилипенко* (Киев) **83, 87, 89**; *О. Пихурко* (Нестеров Львовской обл.) **85**; *В. Плачко* (с. Великая Рустава Винницкой обл.) **83**; *К. Погосян* (Ереван) **85, 89**; *В. Полищук* (Киев) **83, 85, 87, 89**; *И. Поляк* (Ленинград) **83, 87, 89**; *Н. Потупало* (Орджоникидзе) **83**; *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) **77—79, 83, 85, 87, 89**; *А. Рабинович* (Винница) **87, 89**; *В. Рагулин* (Москва) **87, 89**; *В. Рагулин* (Челябинск) **83, 84**; *В. Радулеску* (Каракал, СРР) **83**; *Д. Ревин* (Алма-Ата) **87**; *З. Ремус* (Орадеа, СРР) **84, 85, 87, 89**; *О. Рыбалкин* (Орджоникидзе) **87**; *А. Рыжков* (Минск) **84**; *Н. Рябова* (Харьков) **89**; *Б. Сагиндыков* (Алма-Ата) **87**; *Р. Садреев* (Алма-Ата) **87, 89**; *У. Саметов* (с. Коркес Карагандинской обл.) **89**; *И. Селищев* (п. Манченки Харьковской обл.) **83**; *В. Семенцов* (Смоленск) **78, 79**; *А. Серебряков* (Москва) **83, 87, 89**; *С. Сидоренко* (Харьков) **83**; *А. Сизых* (Саяногорск) **89**; *А. Сикорин* (Евпатория) **87**; *Г. Синицын* (Томск) **83**; *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) **83**; *А. Скопенков* (Саратов) **77—79, 84, 87, 89**; *З. Сланова* (Орджоникидзе) **87**; *А. Смотров* (Хабаровск) **84, 89**; *Ю. Соколов* (Челябинск) **77—80, 84, 89**; *О. Солош* (Запорожье) **79**; *В. Стрижевский* (Одесса) **79**; *С. Тарасов* (Ангарск) **85**; *Г. Тер-Сааков* (Баку) **79, 87, 89**; *С. Тер-Сааков* (Баку) **79, 87, 89**; *С. Тихонов* (Воронеж) **77—80, 83, 85, 87, 89**; *С. Ткачев* (Москва) **83**; *Д. Турсунов* (Караганда) **79, 85, 87, 89**; *А. Тютеньков* (Усть-Каменогорск) **87, 89**; *А. Устинов* (Плавск) **87**; *К. Ушаков* (Киев) **83, 87, 89**; *Ю. Файзуллаев* (Шават) **87**; *П. Федосеев* (Новгород) **77—79**; *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **77—80, 83, 87, 89**; *Р. Фельдман* (Львов) **83**; *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *В. Филлипов* (Киев) **83, 87, 89**; *Х. Хаджиев* (Ташкент) **89**; *В. Харламов* (Ленинград) **78**; *М. Хасидовский* (Ташкент) **87, 89**; *Р. Христюк* (Киев) **83, 87, 89**; *Ж. Хужамов* (Шаватский район Хорезмской обл.) **87, 89**; *В. Цветков* (София, НРБ) **83, 89**; *А. Цинкер* (Ташкент) **87, 89**; *М. Цой* (Алма-Ата) **83**; *Д. Цэдэнбаяр* (Улан-Удэ) **89**; *Д. Чайчук* (Саратов) **84, 87, 89**; *М. Чванов* (Киев) **83, 87, 89**; *И. Червоненко* (Харьков) **87, 89**; *Н. Черепанова* (Целиноград) **83, 87**; *С. Черепнин* (Семипалатинск) **83, 89**; *И. Чижиков* (Винница) **83, 87**; *А. Чуприн* (Алма-Ата) **89**; *Д. Шадыкулов* (Алма-Ата) **83, 87, 89**; *Ш. Шамеденов* (Алма-Ата) **87, 89**; *А. Шаповая* (Киев) **83, 85, 87, 89**; *А. Шварцман* (Алма-Ата) **87, 89**; *О. Шведов* (Москва) **77, 79, 87, 89**; *К. Шерниязов* (Кунград) **87, 89**; *С. Шилов* (Ленинград) **87**; *С. Шлыкова* (Орджоникидзе) **87**; *З. Шония* (Тбилиси) **79, 89**; *С. Шпырко* (Ужгород) **78**; *В. Штотланд* (Курск) **83, 87, 89**; *А. Эгамов* (Гороховец) **87, 89**; *В. Эйгес* (Москва) **89**; *Р. Яворский* (Полтава) **87**; *М. Ягмуров* (Алма-Ата) **83, 87, 89**.

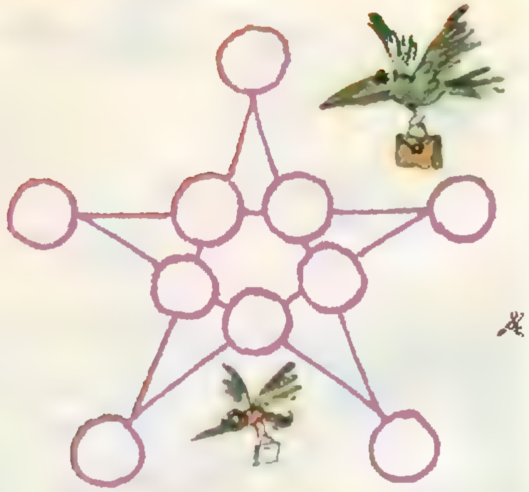
Физика

И. и Х. Абдулазизовы (Шеки) **97**; *С. Авдеенко* (Киев) **01**; *С. Агаронян* (Пятигорск) **02**; *В. Аксюк* (п. Черноголовка Московской обл.) **01, 02**; *Р. Акчурин* (Тамбов) **01**; *О. Армоник* (Гродно) **89, 92**; *И. Ашурбеков* (с. Пилиг ДагАССР) **92**; *А. Бабкин* (Киев) **96, 97, 01, 02**; *П. Баев* (п. Протвино Московской обл.) **92, 97**; *Н. Балюнас* (Вильнюс) **01**; *А. Башкатов* (Новополоцк) **96, 97, 02**; *В. Белоног* (Старый Оскол) **96 97, 01**; *В. Берестецкий* (Винница) **96**; *В. Бескровный* (Донецк) **96, 97, 01, 02**; *А. Беспятый* (Киев) **97**; *И. Блайвас* (Ростов-на-Дону) **01, 02**; *В. Бобров* (Железногорск) **01, 02**; *С. Бобровник* (Черновцы) **92, 96, 97, 01, 02**; *С. Бобылев* (Долгопрудный) **92**;

(Продолжение см. на с. 57)

„Квант" для младших школьников.

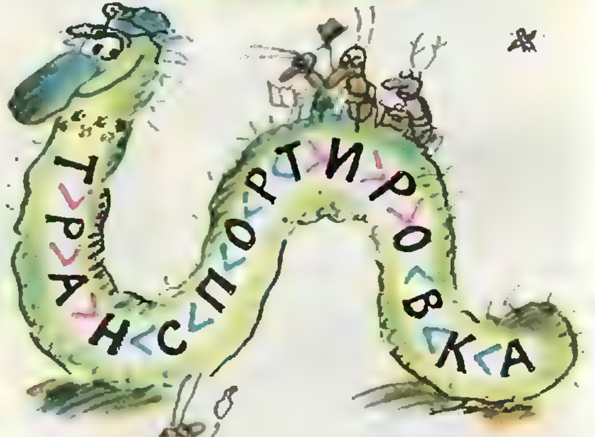
Задачи



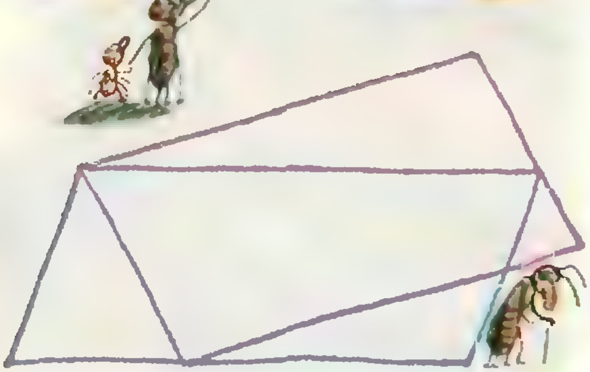
1. Можно ли в кружки звезды на рисунке расставить десять различных натуральных чисел так, чтобы суммы четырех чисел вдоль каждой из пяти прямых были нечетными?

2. Шесть пассажиров автобуса без кондуктора должны уплатить за билеты по 5 копеек. Но у них есть лишь монеты по 10, 15 и 20 копеек. Тем не менее пассажиры справились с задачей. Покажите, что общее число монет у них не меньше восьми. Смогут ли пассажиры решить эту задачу, если монет у них в сумме ровно восемь?

3. Два последовательных двузначных числа сложили и в их сумме переставили цифры. В результате получилось бо́льшее из складываемых чисел. Какие числа складывали?

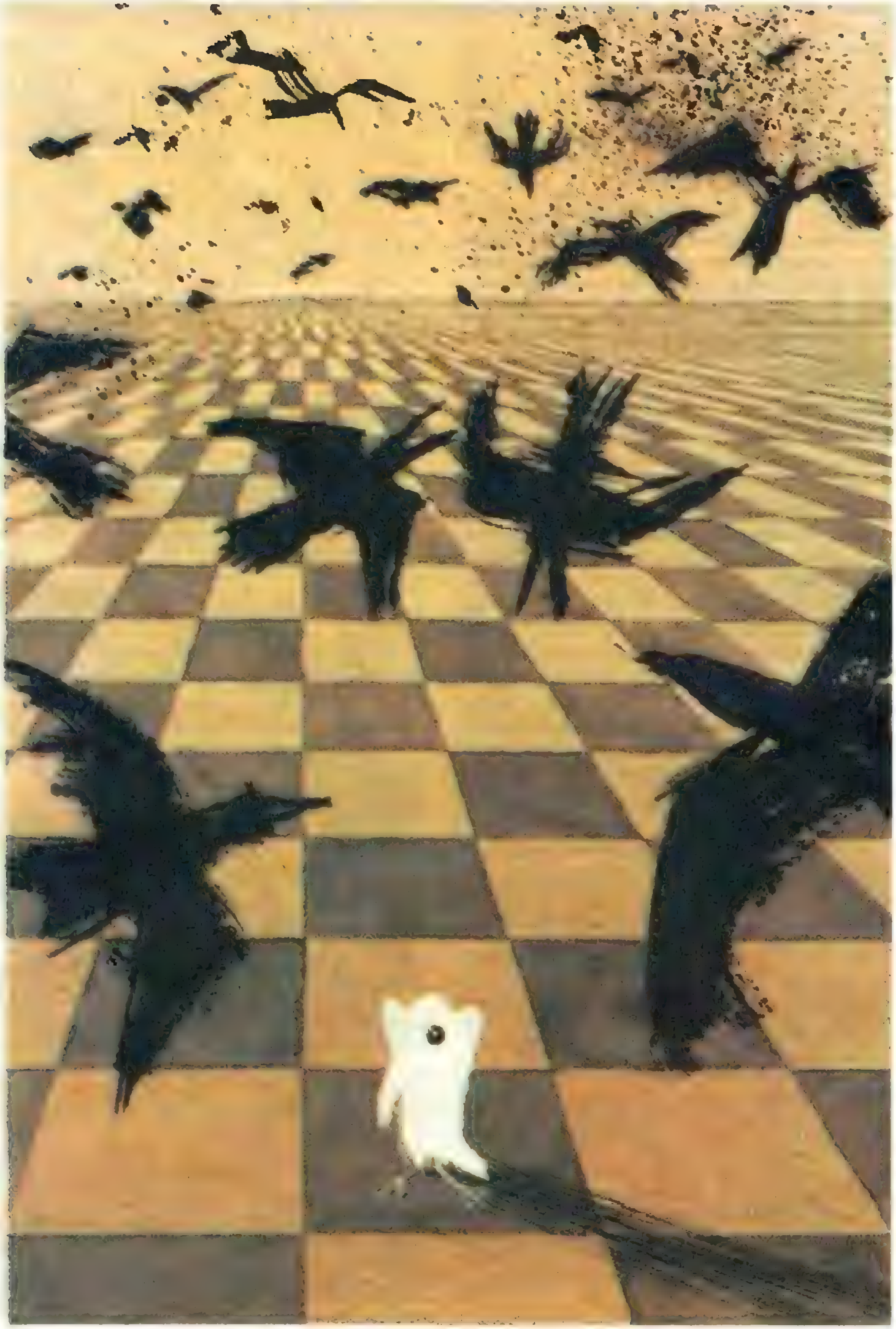


4. Определите числовое значение слова ТРАНСПОРТИРОВКА, если одинаковые буквы заменить соответственно одинаковыми цифрами, разные — разными, причем так, чтобы были выполнены указанные на рисунке неравенства.



5. Два параллелограмма — красный и синий — имеют общую вершину и еще по одной вершине каждый на стороне другого (см. рисунок). Покажите, что их площади равны.

Эти задачи нам предложили: *А. М. Домашенко, Н. Б. Васильев, Жора Головатенко из Москвы, М. П. Мочалов* и *В. В. Произволов.*



ПРАВИЛО КРАЙНЕГО

Кандидат физико-математических наук
А. Л. РОЗЕНТАЛЬ

Если вы хотите научиться решать математические задачи, вам надо попытаться овладеть более или менее общими подходами, приемами и методами математических рассуждений. Рассмотрим один весьма общий подход, который мы будем называть *правилом крайнего.*

Правило крайнего может быть кратко выражено словами «Рассмотри крайнее!». Это правило есть попросту рекомендация рассмотреть объект, обладающий какими-либо крайними, или, как говорят математики, *экстремальными*, свойствами. Если речь в задаче идет о множестве точек на прямой, то правило «Рассмотри крайнее!» советует нам сосредоточить свое внимание на самой крайней точке множества (самой левой или самой правой). Если в задаче фигурирует некоторый набор чисел, то правило крайнего рекомендует рассмотреть наибольшее или наименьшее из этих чисел. Вот несколько примеров.

Задача 1. *На плоскости задано некоторое множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего какую-либо пару точек того же множества M. Докажите, что множество M содержит бесконечно много точек.*

Очень часто бывает так, что ключ к решению задачи находят, решая более простую аналогичную задачу. Поэтому, прежде чем решать данную задачу, попробуем решить следующую задачу.

Задача 2. *На прямой задано множество точек M такое, что каждая точка из M является серединой отрезка, соединяющего две другие точки из M. Докажите, что множество M бесконечно.*

Предположим, что множество M конечно. Применим правило крайнего: если множество M — конечно, то среди его точек есть крайние — самая левая и самая правая. Рассмотрим одну из них, например самую левую; обозначим ее буквой A. Точка A — крайняя и потому не может лежать внутри отрезка, соединяющего две другие точки множества M; значит, она не принадлежит M. Полученное противоречие и доказывает, что множество M не может быть конечным.

Приведем еще одно решение этой задачи, использующее правило крайнего. Допустим снова, что множество M конечно, и рассмотрим длины отрезков, соединяющих точки из M. Этот набор чисел конечен. Применим к нему наше правило в форме «Рассмотри наибольшее!» — рассмотрим отрезок BC наибольшей длины. Ясно, что вне отрезка BC нет точек из M, иначе существовали бы отрезки с бóльшими длинами. Таким образом, все точки множества M лежат на отрезке BC и, значит, ни B, ни C не удовлетворяют условию, т. е. не принадлежат множеству M. Противоречие.

Вернемся теперь к задаче 1. Допустим, что множество M конечно. Снова применим правило крайнего. Для этого зафиксируем положение плоскости и рассмотрим самую левую точку множества M, а если «самых левых» точек несколько, то возьмем самую нижнюю из них. Легко убедиться, что эта точка, обозначим ее через A, не может лежать внутри отрезка, соединяющего две точки множества M. Действительно, если бы такой отрезок существовал, то один из его концов находился бы либо левее точки A, либо на одной вертикали с A, но ниже ее. Ни того, ни другого не может быть в силу выбора точки A.

Здесь, как и в задаче 2, тоже существует решение, основанное на рассмотрении попарных расстояний между точками множества M. Если множество M конечно, то и попарных расстояний конечное число, и среди

Эта статья впервые была опубликована в «Кванте» № 8 за 1976 год. (*Примеч. ред.*)

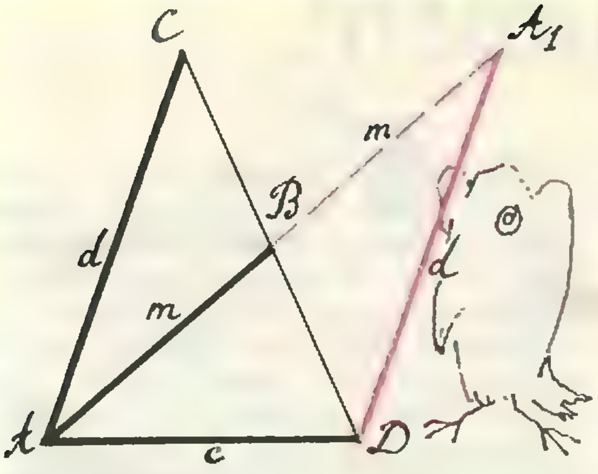


Рис. 1.

них, руководствуясь правилом крайнего, можно отыскать наибольшее. Пусть это будет расстояние между точками A и B. Но точка B является серединой некоторого отрезка CD, концы которого по условию принадлежат множеству M (рис. 1). Тогда легко доказать, что либо AD, либо AC больше AB (сделайте это самостоятельно, воспользовавшись тем, что медиана m, проведенная к одной из сторон треугольника, меньше полусуммы двух других сторон).

Задача 3. *На полях бесконечной шахматной доски написаны натуральные числа так, что каждое число равно среднему арифметическому четырех соседних чисел — верхнего, нижнего, правого и левого. Докажите, что все числа на доске равны между собой.*

Решить эту задачу нам поможет правило крайнего в форме «Рассмотри наименьшее!». Среди натуральных чисел, записанных на полях шахматной доски, непременно существует наименьшее. В этом нетрудно убедиться. Пусть k — одно из данных чисел. Если среди чисел, записанных на доске, имеется единица, то она и является таким наименьшим числом (не существует натуральных чисел, меньших единицы). Если единицы на доске нет, посмотрим, нет ли там двойки. Если есть, то она и является наименьшим числом, если же нет, то поищем на доске тройку, и т. д. Не более чем за k шагов мы отыщем таким образом наименьшее число m. Рассмотрим поле P, на котором оно записано. Обозначим числа, записанные на соседних полях, буквами a, b, c и d. По условию $m=(a+b+c+d)/4$. Отсюда $a+b+c+d=4m$. В силу выбора числа m имеем $a\geqslant m$, $b\geqslant m$, $c\geqslant m$, $d\geqslant m$. Если хоть одно из этих неравенств было бы строгим, то мы имели бы $a+b+c+d>4m$, что противоречит условию. Значит $a=b=c=d=m$.

Таким образом, если на некотором поле записано число m, то и на соседних полях записано число m. Отсюда следует, что на горизонтали, содержащей поле P, записаны одни только числа m. Но любая вертикаль пересекает эту горизонталь, т. е. она содержит число m, и, значит, все числа на вертикалях равны m. Поэтому вообще все числа на доске равны m.

Задача 4. *На квадратной шахматной доске размером $n\times n$ расставлены ладьи с соблюдением следующего условия: если некоторое поле свободно, то общее количество ладей, стоящих на одной с этим полем горизонтали и на одной с ним вертикали, не меньше n. Докажите, что на доске находится не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.*

Эта задача — трудная. Однако умелое применение правила крайнего может существенно облегчить поиск решения. Именно, правило крайнего наталкивает на мысль рассмотреть ту из линий доски — вертикалей и горизонталей,— на которой стоит меньше всего ладей. Может случиться, что есть несколько таких линий, «одинаково нагруженных» ладьями. Тогда выберем любую из них. Пусть эта линия — горизонталь (в противном случае повернем доску на 90° — вертикали станут горизонталями). Число ладей на этой горизонтали обозначим через k. Если $k\geqslant\frac{n}{2}$, то на каждой из n горизонталей не менее $\frac{n}{2}$ ладей, а всего на доске не менее $\frac{n^2}{2}$ ладей.

Пусть теперь $k<\frac{n}{2}$. На рассматриваемой горизонтали $n-k$ свободных полей, и каждая вертикаль, проходящая через такое свободное поле, содержит, как видно из условия, не менее $n-k$ ладей, а все такие вертикали — не менее $(n-k)^2$ ладей. Остальные k вертикалей содержат не менее чем по k ладей каждая (в силу выбора числа k). Всего на доске стоят не менее чем $(n-k)^2+k^2$ ладей. Остается доказать, что $(n-k)^2+k^2 \geqslant \frac{n^2}{2}$. Это можно сделать разными способами: вот один из них:

$$((n-k)^2+k^2)-\frac{n^2}{2}=\frac{n^2}{2}-2nk+2k^2=$$

$$=2\left(\frac{n^2}{4}-nk+k^2\right)=2\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\geqslant 0.$$

Если n — число четное, то можно найти удовлетворяющую условию расстановку, содержащую в точности $\frac{n^2}{2}$ ладей,— достаточно поставить ладьи на все черные поля (или на все белые). Если число n — нечетное, то $\frac{n^2}{2}$ ладей расставить, соблюдая условия задачи, нельзя, так как число $\frac{n^2}{2}$ нецелое, но $\frac{n^2+1}{2}$ ладей расставить можно: одну ладью ставим на одно из угловых полей, а остальные — на поля того же цвета.

Аналогично решается следующая задача.

Задача 5. *Пусть n^2 неотрицательных целых чисел расположены в виде таблицы, содержащей n строк и n столбцов. При этом выполнено следующее условие: если на некотором месте таблицы записан нуль, то сумма чисел столбца и строки, содержащих этот нуль, не меньше n. Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.*

Следующая задача тоже решается с помощью правила крайнего.

Задача 6. *На плоскости заданы n точек. Никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что существует окружность, проходящая через три данные точки, не содержащая внутри не одной из данных точек.*

Проведем окружность через каждую тройку точек. Получим некоторое множество окружностей (некоторые из них могут слиться в одну). Требуется доказать, что хотя бы одна из этих окружностей не содержит внутри себя ни одной из данных точек. Правило крайнего может навести на мысль рассмотреть наименьшую окружность (окружность наименьшего радиуса), но это в данном случае ничего не даст (достаточно рассмотреть конфигурацию из таких точек: 4 вершины квадрата и его центр; наименьшей будет окружность, описанная около квадрата, а она условию не удовлетворяет). Поступим иначе. Попробуем решить более простую задачу, а именно, будем искать окружность, проходящую через две из данных точек и не содержащую точек внутри себя. Измерим расстояния между каждыми двумя данными точками и, воспользовавшись правилом крайнего в форме «Рассмотри наименьшее!», возьмем пару точек A и B, находящихся на наименьшем расстоянии друг от друга. Легко убедиться, что окружность, построенная на отрезке AB как на диаметре, удовлетворяет условию: остальные $(n-2)$ данные точки удалены и от A, и от B не менее чем на AB, а потому расположены вне этой окружности. Теперь проведем окружности через точки A и B и через каждую из остальных $(n-2)$ точек. Вот среди этих окружностей выберем наименьшую, как нам подсказывает правило «Рассмотри наименьшее!». Пусть это будет

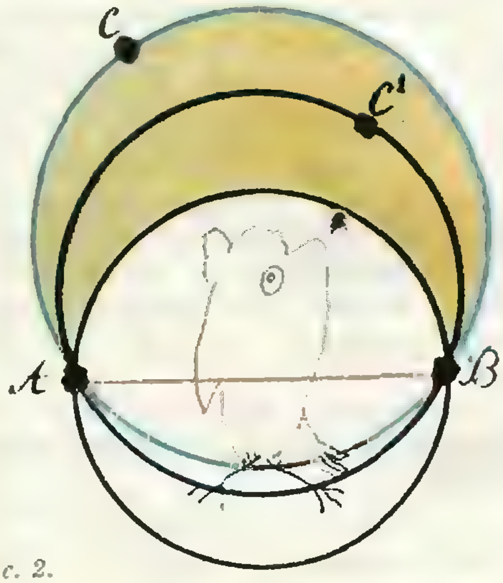


Рис. 2.

окружность, проходящая через точки A, B, C. Она — искомая, потому что любая окружность, проведенная через точки A и B и некоторую точку C' «серпа» (рис. 2), меньше окружности, проходящей через точки A, B, C (докажите это самостоятельно).

Задача 7. *На плоскости проведено n прямых ($n \geqslant 3$). Никакие две из них не параллельны, никакие три не пересекаются в одной точке. Эти прямые разрезают плоскость на части. Докажите, что какую бы из n прямых мы ни взяли, хотя бы одна из примыкающих к ней частей плоскости является треугольником.*

Пусть l_1 — одна из данных прямых. Руководствуясь правилом крайнего, из всех точек пересечения остальных прямых выберем ту, которая находится на наименьшем расстоянии от прямой l_1. Пусть в этой точке, обозначим ее буквой P, пересекаются прямые l_2 и l_3. Нетрудно доказать (сделайте это самостоятельно), что треугольник, образуемый прямыми l_1, l_2 и l_3, составляет одну часть плоскости и, следовательно, удовлетворяет условию задачи.

Задача 8. *Докажите, что не существует четверки натуральных чисел x, y, z, u, удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=3(z^2+u^2)$.*

Допустим, что такие четверки существуют. Рассмотрим ту из них, для которой величина x^2+y^2 минимальна (если есть несколько четверок, у которых эта величина одинакова и минимальна, рассмотрим одну из них, любую). Пусть это будет четверка a, b, c, d. Из уравнения $a^2+b^2=3(c^2+d^2)$ видно, что a^2+b^2 кратно трем. Но легко доказать, что a^2+b^2 делится на три тогда и только тогда, когда и a, и b делятся на три, потому что квадрат числа, не делящегося на три, дает при делении на три в остатке единицу. Следовательно, $a=3m$, $b=3n$, откуда

$$a^2+b^2=9m^2+9n^2=3(c^2+d^2).$$

Сокращая последнее равенство на 3, получим:

$$c^2+d^2=3(m^2+n^2).$$

Мы нашли четверку чисел c, d, m, n, удовлетворяющую данному уравнению, причем для этой четверки

$$c^2+d^2<a^2+b^2,$$

а это невозможно в силу выбора четверки a, b, c, d.

Задача 9. *На плоскости расположены n прямых ($n \geqslant 3$). Любые две прямые пересекаются и через каждую точку пересечения проходят не менее трех из данных прямых. Докажите, что все прямые пересекаются в одной точке.*

Пусть M — одна из точек пересечения прямых. Допустим, что она — не единственная. Тогда найдется прямая l данной системы, не проходящая через M. Множество точек пересечения прямых, не лежащих на l, непусто — оно содержит, например, точку M. Рассмотрите точку этого множества, ближайшую к l (а если имеется несколько точек, находящихся на минимальном расстоянии от l, то выберете одну из них, любую), и получите противоречие.

Вот еще одна аналогичная задача.

Задача 10. *На плоскости заданы n точек ($n \geqslant 3$). Известно, что на всякой прямой, проходящей через 2 данные точки, расположена по крайней мере еще одна из данных точек. Докажите, что тогда все n точек лежат на одной прямой.*

Развитием правила крайнего является «правило расположения», которое звучит так: «Расположи элементы исследуемого множества в каком-нибудь порядке: возрастания, убывания или в каком-нибудь другом!».

Задача 11. *Семь грибников собрали вместе 100 грибов, причем никакие двое не собрали одинакового числа грибов. Докажите, что есть трое грибников, собравших вместе не менее 50 грибов.*

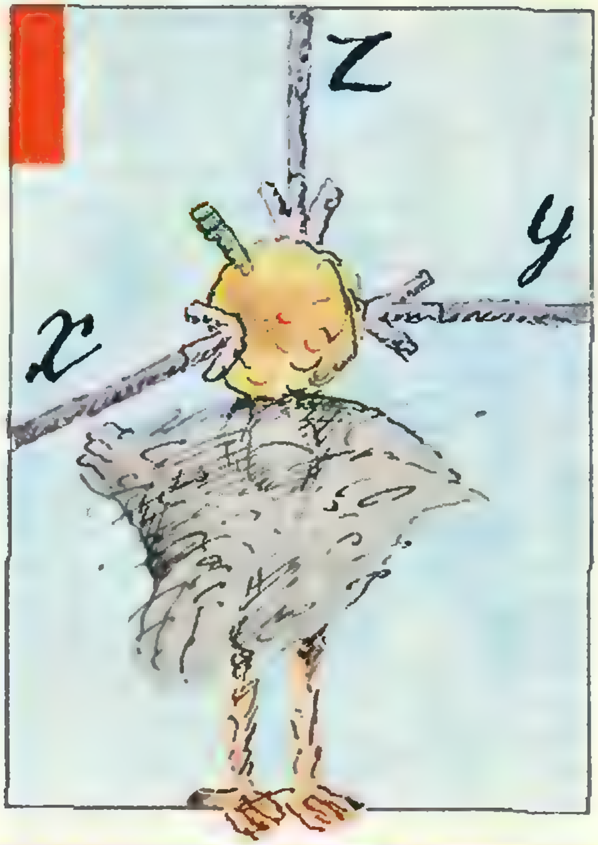
Составим «таблицу первенства», поместив в ней грибников в порядке убывания числа собранных ими грибов. Ясно, что рассматривать надо грибников, занявших первые 3 места — они собрали грибов больше, чем любая другая тройка. Попробуем доказать, что они собрали не менее 50 грибов. Если грибник, занявший 3-е место, собрал 16 грибов или больше, то на 2-м месте — грибник, собравший не менее 17 грибов, а на первом — не менее 18 грибов. Вместе они собрали не меньше $16+17+18=51$ гриба. Если же грибник, занявший 3-е место, собрал не более 15 грибов, то грибники, занявшие места с 4-го по 7-е, собрали не более $14+13+12+11=50$ грибов. На долю первой тройки и в этом случае остается не менее 50 грибов.

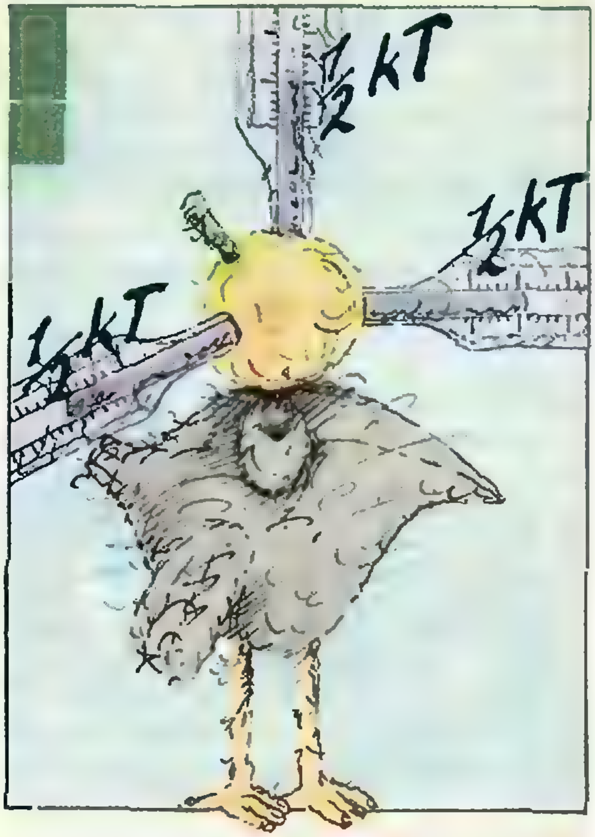
Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

А. Богданов (Мичуринск) 89; *О. Борисенко* (Киев) 97; *А. Бузунов* (Киев) 89, 92; *В. Бурдин* (Пермь) 96, 97; *А. Бучель* (Луцк) 89, 92, 96, 97, 01; *В. Быдзан* (Борисполь) 92; *С. Бычихин* (Евпатория) 02; *Э. Бязрова* (Тбилиси) 96, 01; *М. Выборнов* (Киев) 01; *В. Высоцкий* (Киев) 96, 01, 02; *В. Гавенский* (Баку) 96, 01; *Ю. Гаева* (Киев) 97; *С. Ганжур* (Петропавловск-Камчатский) 96, 02; *П. Гнездилов* (Пятигорск) 02; *В. Горбовец* (Свердловск) 96; *И. Горбунов* (Саратов) 02; *В. Горденчук* (Житомир) 96, 01; *В. Гордиенко* (Винница) 96, 97; *А. Грибов* (Минск) 01; *Ю. Гринфельд* (Москва) 01; *Л. Губанова* (Москва) 96, 97; *А. Гуленок* (Москва) 89, 92; *Б. Гуревич* (Саратов) 92; *В. Гусятников* (Москва) 01; *Б. Дейч* (Харьков) 89, 92, 96, 97, 01, 02; *К. Демьяненко* (Киев) 96, 97, 02; *М. Дорохова* (п. Черноголовка Московской обл.) 97, 01, 02; *Е. Доценко* (п. Черноголовка Московской обл.) 97; *В. Дядечко* (Винница) 89, 92, 96, 01, 02; *И. Ермолаев* (Запорожье) 92; *Ю. Жданов* (Кострома) 96; *А. Жук* (Ровио) 97, 01, 02; *В. Журавлев* (Донецк) 01; *Е. Задорожная* (Киев) 02; *В. Зайцев* (Борисоглебск) 01; *А. Залеский* (Харьков) 96, 97, 01, 02; *Л. Заломихина* (Старый Оскол) 97; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 96, 97; *В. Затушевский* (п. Светлый МолдССР) 01, 02; *Д. и С. Зеленские* (Семипалатинск) 96, 97, 02; *Е. Зельцер* (Киев) 96, 02; *А. Зискинд* (Винница) 92; *Д. Золотарев* (Харьков) 96, 01; *Я. Зубков* (Алма-Ата) 92; *К. Зуев* (Вологда) 96, 97, 01, 02; *А. Зуенков* (Донецк) 01; *И. Иоппе* (Москва) 01; *Х. Исрафилов* (Шеки) 97; *С. Казенас* (Алма-Ата) 89, 96, 01; *В. Камчатный* (Киев) 01, 02; *А. Капустин* (Москва) 89, 92; *М. Капустин* (Львов) 01, 02; *Е. Кемель* (Киев) 92; *Д. Кириллов* (Калининград) 96; *В. Клименко* (Первомайск Николаевской обл.) 96; *Г. Коваль* (Новороссийск) 01; *А. Кожевников* (Калуга) 01; *А. Колесник* (Старый Оскол) 92, 96, 97; *М. Колпаков* (п. Почет Красноярского кр.) 92, 96, 01, 02; *Д. Комисаренко* (Винница) 89; *А. Комник* (Старый Оскол) 92, 96, 97, 01; *В. Кондратьев* (Калининград) 97; *О. Кондратьев* (Брест) 96, 97, 02; *А. Корнев* (Воронеж) 01, 02; *А. Коршиков* (Мозырь) 89, 92, 96, 01; *С. Кострыкин* (Старый Оскол) 97; *И. Кравченко* (Харьков) 96, 97, 01, 02; *А. Крайский* (Москва) 96, 01; *К. Краснов* (Киев) 96, 97, 01, 02; *М. Крейнин* (Ухта) 96; *В. Кудреватых* (Киров) 97; *Н. Кузьма* (п. Протва Калужской обл.) 96, 01, 02; *Д. Кузьменко* (Казань) 01; *Ю. Кумпан* (Москва) 97; *Д. Лабутин* (Иваново) 92, 02; *А. Лавров* (Москва) 89; *С. Лапин* (Саратов) 97, 01; *А. Лемперт* (п. Черноголовка Московской обл.) 97, 02; *А. Логунов* (Ульяновск) 97, 02; *Н. Локоть* (п. Заложцы Тернопольской обл.) 92; *С. Луганский* (Москва) 89; *А. Лутовинов* (Мичуринск) 96, 02; *Н. Лысянский* (Новосибирск) 92, 96, 97, 01, 02; *Б. Лянский* (Паневежис) 97; *В. Макеев* (Алма-Ата) 96; *Р. Малков* (Саратов) 92, 96, 97, 01, 02; *А. Малый* (Чебоксары) 96, 97, 01, 02; *А. Мамаев* (Заволжье) 92, 96, 97, 01; *В. Манжос* (Алма-Ата) 01; *И. Мартин* (Таллин) 01; *К. Матмуратов* (Дружба УзССР) 02; *Д. Мацукевич* (Минск) 01; *А. Мелеховец* (Брест) 92; *И. Мельников* (Бодайбо) 96; *В. Меркер* (Старый Оскол) 92, 97; *С. Меркулов* (Долгопрудный) 96, 97; *Р. Мизюк* (Ровно) 97, 01, 02; *А. Мина* (Киев) 97, 01, 02; *С. Михайлов* (Винница) 96; *С. Михайлов* (Наманган) 96; *П. Михеев* (Старый Оскол) 96, 97, 01; *Я. Михеев* (Киев) 92; *Е. Моисеев* (Запорожье) 92; *Е. Монакова* (Таллин) 92; *М. Мороз* (Киев) 96, 01; *Е. Недув* (Одесса) 01; *А. Новик* (Мозырь) 89, 92, 96, 01; *Ш. Нурматов* (Наманган) 02; *М. Оконь* (Старый Оскол) 92; *А. Окунев* (Гродно) 92; *А. Орловский* (Киев) 89; *А. Павлощук* (Киев) 01; *А. Панас* (Могилев) 97, 02; *Е. Пармузин* (Старый Оскол) 01; *Г. Парсамян* (Ереван) 92; *А. Пасека* (Владивосток) 01; *К. Пенанен* (Одесса) 89, 92; *И. Петков* (Враца, НРБ) 02; *Е. Пивоваров* (Ленинград) 97; *О. Пилипенко* (Киев) 96, 02; *В. Подзоров* (Ташкент) 96; *С. Пожидаев* (Хабаровск) 96; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) 92; *В. Полищук* (Киев) 96, 97; *С. Польшин* (Харьков) 97; *В. Портной* (Одесса) 96, 97, 01; *А. Пушнов* (Вольск) 01; *И. Рассадин* (Минск) 92, 96, 97, 01; *Т. Рашник* (Киев) 96, 01; *М. Рудай* (Артемовск) 96; *С. Рудницкий* (Одесса) 89, 92, 02; *А. Ружук* (Винница) 89; *К. Ручкин* (Донецк) 01; *А. Рыжов* (Новосибирск) 97, 02; *Д. Самборский* (Истра) 96, 97, 01, 02; *А. Серебряков* (Москва) 01; *К. Скиртач* (Запорожье) 96, 02; *И. Скребков* (Сумгаит) 01; *М. Столяр* (Киев) 92, 96, 97; *М. Субботин* (Старый Оскол) 92, 96, 97, 01; *В. Тамошюнас* (Вильнюс) 01; *Ю. Тарасюк* (Винница) 96, 02; *Н. Тарновский* (Винница) 96, 02; *Д. Тейтельман* (Минск) 92, 96, 97; *С. Тимашов* (Алма-Ата) 01; *С. Титов* (Старый Оскол) 96, 01; *И. Тодощенко* (Пермь) 92, 01, 02; *Д. Толкачев* (Ногинск) 02; *М. Томашевский* (Москва) 01, 02; *М. Турлаков* (Фрунзе) 01; *А. Тутов* (Рига) 02; *К. Убайдуллаев* (к/х «Победа» Наманганской обл.) 96; *Ю. Уваров* (Ленинград) 89, 92, 96, 01, 02; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 92, 97, 01;

(Окончание см. на с. 80)





Школа в „Кванте"

Физика 8, 9 10

Публикуемая ниже заметка «Основная задача кинематики» предназначена восьмиклассникам, начинающим подробное изучение основ механики. Не расстраивайтесь, если вы встретите некоторые еще не совсем привычные для вас понятия. Мы надеемся, что эта заметка будет полезной также и десятиклассникам — при повторении пройденного материала. Она позволит взглянуть на кинематику в целом.
Заметка «Абсолютная температура» предназначена девятиклассникам.

Основная задача кинематики

Но как раз стрела запела,
В шею коршуна задела —
Коршун в море кровь пролил,
Лук царевич опустил...

А. С. Пушкин

Как известно, для того чтобы спасти царевну Лебедь, князю Гвидону не потребовалось ничего, кроме решительности и меткости. Но вот вопрос — *а что такое «меткость»*? *Или* иначе, если бы Гвидон захотел рассчитать свой выстрел, то какой информацией он должен был бы обладать и как ею воспользоваться? Попробуем разобраться.

Прежде всего, разумеется, надо точно знать положение коршуна. Но этого не достаточно. Ведь коршун не сидит на месте и не ждет, пока его подстрелят, он движется. Значит, надо знать характер его движения, т. е. величину и направление скорости, а если она меняется, то как именно это происходит. Кроме того, есть еще и стрела. И о ее движении тоже надо знать все — величину и направление скорости и то, как она меняется с течением времени. Так вот, если бы все эти данные были у царевича в руках, то дело свелось бы к решению основной задачи кинематики.

Все кинематические задачи выглядят более или менее одинаково: *из-*

вестны положение и скорость тела в какой-то момент времени и характер его движения; надо определить положение и скорость этого тела в некоторый другой момент времени. Это — ключевая фраза! В ней «зашифрована» практически вся кинематика, но и скрыто много «подводных камней».

Начнем со слов: «известны положение и скорость тела в какой-то момент времени». Эти слова означают, во-первых, что выбраны тело отсчета и система координат и, во-вторых, что выбрано начало отсчета времени. Другими словами, выбрана система отсчета. А это — важнейший элемент описания любой физической ситуации. Ведь для того, например, чтобы смотреть фильм, нужен экран, на котором будут разворачиваться все события фильма. Так и система отсчета является своеобразным экраном для физических событий.

Пойдем дальше. Мы уже несколько раз употребляли слова «характер движения». Как вы знаете, положение тела в любой момент времени t задается его координатами x, y, z, а изменение координат — вектором перемещения тела $\vec{s}$. Слова «известен характер движения» и означают, что известен вид функции $\vec{s}(t)$ или, что то же самое, вид функций $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$.

В природе существует огромное разнообразие типов движения. Простейшие движения описываются простейшими функциями: прямолинейное равномерное движение — линейной функцией $x=x_0+vt$, или $\vec{s}(t)=\vec{v}t$; прямолинейное равноускоренное — квадратичной функцией $x=x_0+v_0t+at^2/2$, или $\vec{s}(t)=\vec{v}_0t+\vec{a}t^2/2$; колебательное — гармонической функцией синуса (или косинуса) $x=x_m\sin\omega t$ и т. д. А попробуйте проследить за какой-нибудь точкой на ободе катящегося колеса или за гимнастом, соскакивающим с перекладины, и вы убедитесь, что для описания таких движений понадобятся гораздо более сложные функции. Но в принципе это можно сделать всегда, и, что очень важно, метод решения основной кинематической задачи универсален и не зависит от типа движения.

Наконец, последняя фраза в формулировке задачи: «определить положение и скорость тела в некоторый (конечный) момент времени». Здесь основная проблема состоит в том, что этот конечный момент времени, как правило, указывается неясно. Очень редко говорится прямо, в какой именно момент времени нужно найти положение и скорость тела. В большинстве случаев этот момент задается каким-то дополнительным условием. (Так, например, в случае единоборства Гвидона с коршуном конечный момент времени определяется «встречей» стрелы с коршуном.) Используя это условие, нужно найти момент времени, в который оно выполняется, а затем уже это время подставить в выражения для перемещения (координаты) и скорости тела.

«Расшифровав» таким образом содержание основной задачи кинематики, мы фактически сформулировали и алгоритм ее решения:

1) Выбрать систему отсчета (всегда желателен рисунок).

2) Определить характер движения.

3) Записать перемещение и скорость (в проекциях на соответствующие оси координат) как функции времени; если в задаче присутствуют несколько движущихся тел, то уравнения движения надо записать для каждого тела отдельно.

4) Используя дополнительные сведения, определить конечный момент времени. Подставить это время в уравнение для интересующей нас величины — и задача решена.

А теперь вернемся к Пушкину. Пусть Гвидон, прежде чем выпустить стрелу, немного посчитает (а заодно и мы вместе с ним).

Исходная информация, которой обладает Гвидон, выглядит так: коршун находится прямо над царевной на высоте H (помните — «бьется лебедь средь зыбей, коршун носится над ней») и камнем пикирует на нее. Предположим, что начальная скорость коршуна равна нулю, Гвидон находится на берегу на расстоянии L от царевны, начальная скорость стрелы равна v_0. Спрашивается, под каким углом к горизонту должен стрелять царевич? Будем решать задачу по порядку.

1) Система координат показана на рисунке, а начало отсчета времени разумно связать с моментом выстрела.

2) Очевидно, что движение коршуна можно считать прямолинейным равноускоренным с ускорением свободного падения $\vec{g}$. Движение стрелы более сложное — его траекторией является парабола, а скорость изменяется и по величине, и по направлению. Однако ситуация упростится, если рассматривать перемещение стрелы в проекциях на оси координат X и Y. Легко видеть, что координата x стрелы с течением времени изменяется так же, как при прямолинейном равномерном движении, а координата y — как при прямолинейном равноускоренном движении, причем с тем же, что и для коршуна, ускорением $\vec{g}$.

3) Запишем уравнения движения обоих тел в проекциях на оси координат X и Y:

$$x_{\text{к}} = L,$$

$$y_{\text{к}} = H - \frac{gt^2}{2},$$

$$x_{\text{с}} = v_0 \cos\alpha \cdot t,$$

$$y_{\text{с}} = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}.$$

4) В момент встречи ($t = t_{\text{в}}$) координаты коршуна и стрелы равны:

$$L = v_0 \cos\alpha \cdot t_{\text{в}},$$

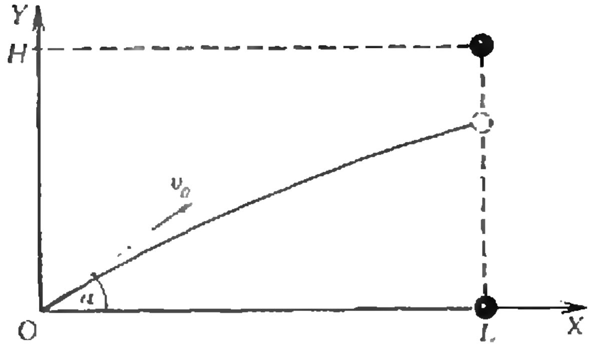
$$H - \frac{gt_{\text{в}}^2}{2} = v_0 \sin\alpha \cdot t_{\text{в}} - \frac{gt_{\text{в}}^2}{2}.$$

Мы получили два уравнения с двумя неизвестными ($t_{\text{в}}$ и α). Решая их, находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{L}.$$

(В принципе, зная угол α, можно найти время встречи $t_{\text{в}}$, а затем и координаты места встречи.)

Конечно, движение коршуна на самом деле может быть и другим (он ведь все-таки живой!). Но принципиально решение задачи будет выглядеть точно так же. Только окончательные уравнения будут другими.



(Заметим, что похожий метод используется при наведении на цель движущихся ракет. Локатор непрерывно определяет координаты цели, ЭВМ — решая соответствующие уравнения, аналогичные нашим,— находит точку встречи ракеты с целью и вносит коррективы в движение ракеты.)

Что же касается царевича Гвидона, то на самом деле совершенно не ясно, чем бы закончилась вся история, если бы он вместо того, чтобы действовать, начал действительно считать. А если говорить серьезно, то до сих пор остается абсолютной загадкой способность человека мгновенно оценивать столь большое число параметров (H, L, v_0, α) и действовать с такой великолепной точностью. Приходится признать, что вопрос о том, что такое меткость, с которого мы начали разговор, и вопрос о решении основной кинематической задачи — все-таки совершенно разные вопросы.

Е. Е. Городецкий

Абсолютная температура

Теплота! Казалось бы, нет другой такой области физики, где фундаментальные идеи о строении вещества (все тела состоят из взаимодействующих друг с другом молекул, которые находятся в непрестанном движении) касались бы так тесно наших непосредственных ощущений. Но как долог и мучителен был путь понимания даже самых простых вещей. Например того, что́ происходит при нагревании или остывании тел, при контакте двух тел с разными температурами и т. п.

В этой заметке мы коснемся лишь двух основных моментов современного представления о тепловых явлениях с точки зрения молекулярного строения вещества.

Выделим небольшую, но все же макроскопическую часть какого-нибудь тела. Небольшую — это значит, что размеры выделенной области гораздо меньше размеров всего тела. Это нам нужно для того, чтобы в случаях, когда температура меняется вдоль тела, на протяжении нашей области ее всюду можно было бы считать одинаковой. С другой стороны, мы сказали, что область должна быть макроскопической. Это означает, что, несмотря на небольшие размеры, число частиц в ней должно быть все-таки очень большим.

Молекулы, заполняющие выделенную область, движутся с самыми разными скоростями, сталкиваются друг с другом, некоторые из них покидают область, а на их место приходят другие — в общем, идет сложная, можно даже сказать, суетливая жизнь. Понять эту безумную молекулярную «пляску», наблюдая за каждой молекулой отдельно,— занятие совершенно безнадежное, да и ненужное: мы все равно не знали бы, что делать с такой гигантской информацией. К счастью, именно сложность и запутанность молекулярного движения позволяют подойти к описанию ситуации совсем с другой стороны — с точки зрения теории вероятностей.

Предсказания этой теории очень специфичны. Она не может, например, предсказать, кто и с каким временем победит в десятикилометровой лыжной гонке на предстоящих в 1992 году Олимпийских играх. Однако, просмотрев результаты всех предыдущих игр, можно более или менее надежно сказать, что 1—2 % участников гонки покажут время, меньшее 29 минут, а 60—70 % уложатся в интервал от 29 до 31 минуты и т. д. Разумеется, на школьных соревнованиях уровень и распределение результатов будет другим. Вполне очевидно, что ранг соревнований определяет средний уровень результатов (и в этом смысле, как будет видно из дальнейшего, он похож на температуру).

Теория вероятностей, почти ничего не зная о единичных событиях, надежно предсказывает исход большого числа однотипных или повторяющихся событий. Понятно поэтому, что хаотически движущиеся и взаимодействующие друг с другом молекулы являются идеальным объектом для такой теории (теперь ясно, зачем число молекул в выделенной области должно было большим).

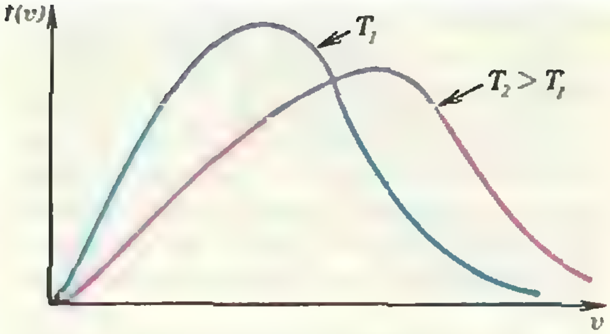
Обсудим такой вопрос: какая часть всех молекул, заполняющих нашу область, имеет скорость, близкую к какой-нибудь заданной скорости v (или, говоря иначе, имеет скорость в интервале от v до $v+\Delta v$)? Для того чтобы сформулировать вопрос точнее, обозначим число частиц, имеющих скорость в данном интервале, через $\Delta N(v)$, а полное число частиц, находящихся в выделенной области, через N. Тогда нам нужно найти отношение $\Delta N(v)/N$.

Если величина допустимого разброса скоростей Δv не слишком велика, то понятно, что $\Delta N(v)$ должно быть пропорционально Δv:

$$\frac{\Delta N(v)}{N}=f(v)\Delta v.$$

Величина $f(v)$ называется функцией распределения молекул по скоростям и является важнейшей характеристикой любой макроскопической системы. Зная $f(v)$, мы можем оценить, сколько процентов всех молекул движутся со скоростью, близкой к такой-то скорости, а сколько — к такой и т. д.

Напомним, что мы начали заметку с вопроса о том, что́ происходит с системой тел на уровне молекул в процессе выравнивания температур. Так вот, оказывается, что пока система не находится в равновесии, столкно-



вения молекул приводят к постоянному изменению функции распределения $f(v)$, но после того как равновесие установилось, столкновения молекул больше не влияют на эту функцию. Явный вид равновесной функции $f(v)$ был найден теоретически в 1860 году выдающимся английским физиком Максвеллом.*)

Как следует из теории (внимание! это первое главное утверждение заметки), функция $f(v)$ в равновесии полностью *определяется температурой системы* T. Этот факт, если вдуматься, кажется странным. Он означает, что система всегда сама придет в нужное состояние, независимо от того, что с ней было в начальный момент времени, лишь бы температура ее была задана. Вы можете «взболтать» газ как угодно, но, будучи предоставленным сам себе, он всегда придет в одно и то же состояние и начисто забудет о том, что с ним было вначале.

На рисунке представлены графики функции $f(v)$ для двух температур T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$). Попробуйте самостоятельно объяснить факт «смещения» графика при изменении температуры.

Итак, температура играет основополагающую роль в определении теплового равновесия *тел*.

Из сказанного становится понятной и еще одна чрезвычайно важная вещь. Раз мы знаем, какая доля молекул с какой скоростью движется, мы *можем вычислять* средние характеристики движения молекул. В частности, среднюю энергию поступательного движения одной молекулы:

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

Основываясь на этой формуле, часто говорят, что температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул. Это не совсем так. Дело в том, что коэффициент «$^3/_2$», стоящий в выражении для энергии, совершенно не случаен и имеет глубокий смысл. Число «3» связано с тем, что в трехмерном пространстве для определения положения центра масс молекулы необходимо знать три его координаты. Или, говоря иначе, каждая молекула имеет три степени свободы ее поступательного движения. Но, *кроме поступательных*, у молекулы могут быть и другие степени свободы: вращательные, колебательные и т. п.

Оказывается, зная функцию распределения молекул по скоростям, можно показать (внимание! это второе главное утверждение заметки), что на любую степень свободы приходится в среднем энергия $^1/_2\ kT$. (Отсюда и получается коэффициент «$^3/_2$» в выражении для средней кинетической энергии поступательного движения молекул.) Другими словами, температура — не мера кинетической энергии поступательного движения молекул, а мера энергии, приходящейся на одну любую степень свободы системы.

Е. Е. Городецкий

---

*) См. статью Т. С. Петровой «Из жизни молекул», опубликованную в седьмом номере «Кванта» за этот год. (*Примеч. ред.*)

Лаборатория „Кванта"

Жидкий азот и медная гайка

В. В. УТЕШЕВ

Однажды в лаборатории мы наблюдали, как вскипает жидкий азот вокруг упавшей в него медной гайки. Процесс кипения протекал очень интересно и совсем не так, как можно было бы ожидать. Жидкий азот начинал кипеть сразу после погружения в него гайки, но через несколько секунд, перед самым завершением, кипение вдруг резко усиливалось.

Понятно, что причиной кипения является большая разница начальных температур гайки и азота. Но возникает вопрос: почему охлаждение гайки происходит не монотонно, не плавно, как можно было предположить, а имеет два режима разной интенсивности, причем смена режимов происходит очень быстро (скачком)?

Любой процесс кипения всегда связан с передачей тепла. В нашем случае — от гайки к азоту. Поэтому ответ на вопрос о характере кипения можно найти, проанализировав механизм теплопередачи.

Как известно, тепло от одного тела к другому может передаваться разными способами, например с помощью теплопроводности или конвекции. При конвекции перенос тепла осуществляется путем перемещения и перемешивания больших масс вещества, нагретых до разных температур. В противоположность конвекции, при теплопроводности передача тепла не сопровождается перемещением вещества.

В природе конвективные явления встречаются буквально на каждом шагу. Иногда их стараются активно использовать, иногда, наоборот, от них хотят избавиться. Знаете ли вы, например, как устроено осиное гнездо? Это очень сложный лабиринт из множества листиков и различных пленок. Оказывается, такая конструкция максимально избавляет гнездо от конвективных потоков и тем самым хорошо сохраняет тепло. Правда, можно сказать, что существует еще теплопроводность воздуха. Но она, как показывает опыт, играет ничтожную роль в теплопередаче (по сравнению с конвекцией).

В технике, прежде всего во всякого рода охлаждающих системах, конвекция чаще всего играет положительную роль, и ее всячески стараются усилить. В обычном автомобиле, например, именно для этого используется радиатор. При движении автомобиля возникает процесс *искусственной воздушной конвекции* — проникая через радиатор, движущиеся массы воздуха «снимают» тепло с нагретого двигателя.

Самые интенсивные конвективные явления на Земле происходят в атмосфере. Температура воздуха на различных высотах меняется в очень широких пределах. Более теплые области воздуха имеют меньшую плотность и поэтому поднимаются вверх, а более холодные, наоборот, опускаются, в результате чего происходит конвекция. Любопытно, что в невесомости разность температур различных воздушных областей не приводит к естественной конвекции, поэтому, например, спичка в космическом корабле не может гореть обычным способом. Она загорается и сразу же гаснет, так как нет конвективного подтока кислорода, необходимого для горения. Однако можно создать искусственную конвекцию, скажем, слегка дуя в сторону спички, и таким образом поддерживать горение.

В физике для количественной характеристики процессов теплопередачи вводится специальная физическая величина — *плотность потока тепловой энергии* (тепла). Это энергия, проходящая через единицу площади за единицу времени. Для конвекции плотность потока тепла W непосредственно связана с плотностью потока вещества q, т. е. с массой вещества, проходящего через единицу площади за единицу времени: $W \sim q$. При теплопроводности переноса вещества нет, и плотность потока тепла определяется тем, как быстро изменяется температура тела от одного его участка к другому: $W \sim \Delta T / \Delta x$ (здесь T — температура, x — координата).

Теперь вернемся к случаю с гайкой и жидким азотом. Сначала объясним его *теоретически*.

Тепло в гайке распространяется по принципу обычной теплопроводности. В азоте же тепло передается с помощью конвекции за счет движущихся масс испарившегося азота. Но ни один из этих способов теплопередачи не объясняет оригинальный характер кипения жидкого азота. В чем же дело?

Оказывается, самое интересное происходит в месте контакта гайки с жидким азотом, где температура изменяется скачком. На этом контакте *плотность потока энергии* можно представить в виде: $W = a\Delta T$, где a — некий эффективный коэффициент теплопередачи, а ΔT — тот самый скачок температур между азотом и гайкой. Описанным в начале статьи двум режимам кипения соответствуют различные значения a, и переход от одного значения к другому происходит скачком в тот момент, когда температура гайки достигает некоторого определенного значения.

Теперь попробуем разобраться в механизме этого интересного явления чуть подробнее.

При соприкосновении гайки, имеющей температуру 20 °С (293 К), с жидким азотом, его температура —196 °С (77 К), вокруг гайки создается «шуба» из газообразного азота. Этому процессу соответствует определенное значение плотности теплового потока от

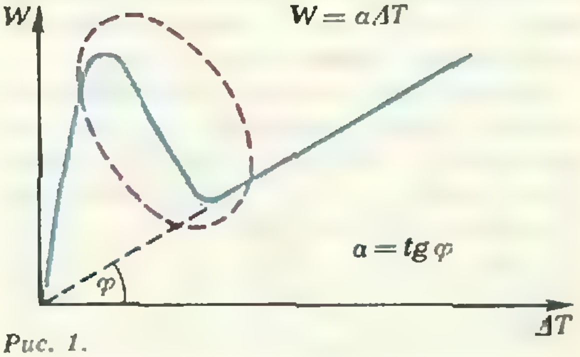


Рис. 1.

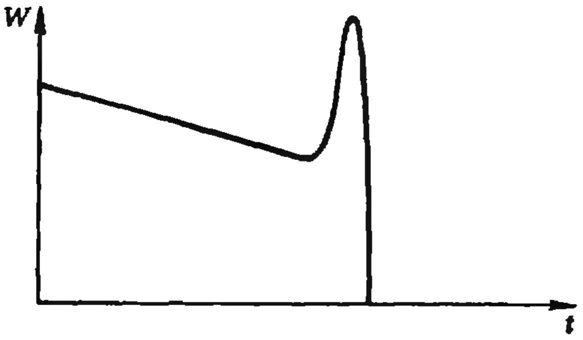


Рис. 2.

гайки к жидкому азоту. Когда гайка достаточно охладится и теплового потока не будет хватать для поддержания «шубы», «шуба» распадется (скачком) и сменится большим числом отдельных пузырьков газообразного азота. Теперь часть тепла будет уходить от гайки по-прежнему через газ, а часть — через жидкий азот, который проводит тепло лучше газообразного. Таким образом, здесь наблюдается некая парадоксальная ситуация, когда поток тепла увеличивается с уменьшением разности температур. И происходит это благодаря сильному скачку коэффициента α. (При возрастании потока «шуба» не образуется потому, что температура гайки уже достаточно упала.)

На рисунках 1 и 2 приведены графики зависимости W от ΔT и от времени t. В обведенной области α терпит скачок.

Заметим, что такое же необычное кипение в принципе можно наблюдать и с другими веществами. Например, вместо жидкого азота можно взять обычную воду и бросить в нее сильно нагретую медную гайку. После погружения гайки в воду тоже образуется «шуба», но она распадается так быстро, что заметить смену режимов кипения практически невозможно. Различие в длительности процесса кипения связано с различием в теплоемкостях. Вода по сравнению с жидким азотом имеет огромную теплоемкость и поэтому кипит значительно меньшее время.

Вместо медной гайки можно использовать и какое-нибудь другое нагретое тело. Медь же хороша тем, что имеет большую теплопроводность, вследствие чего гайка успевает остывать однородно по всему объему, создавая необходимые условия для образования «шубы».

Совершенно аналогичное явление смены режимов теплопередачи можно наблюдать, бросив несколько капель воды на раскаленную сковороду (или плиту). Если сковорода горячая, но ее температура все же не очень большая, капли, упав на поверхность сковороды, будут неподвижны и довольно быстро испарятся. Если же сковорода нагрета сильно, капли воды сразу после падения на ее поверхность соберутся в шарики, которые будут «бегать» по сковороде довольно долго. Это произойдет из-за того, что между сковородой и каплями возникнет паровая подушка (то же самое, что и «шуба» в случае с гайкой), которая затруднит теплопередачу от сковороды к капле и увеличит тем самым время жизни капли.*)

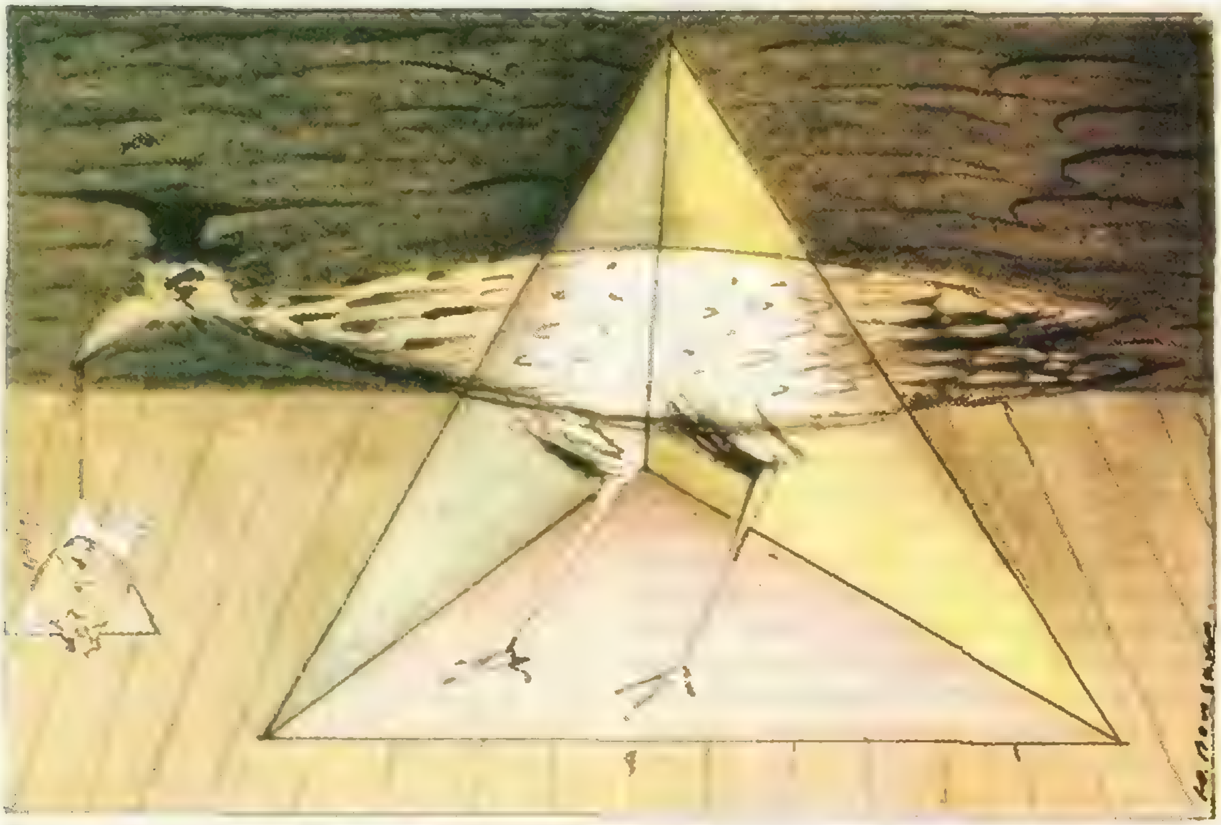
Итак, теплопередача — такое, казалось бы, простое и всем знакомое явление, на самом деле скрывает в себе большие возможности для наблюдения и исследования.

---

*) Поведение таких «бегающих» капель подробно описано в статье М. Голубева и А. Кагаленко «Капля на горячей поверхности» («Квант», 1977, № 12) и в статье А. Лушкова и Ю. Лужкова «Звезды» из водяной капли» («Квант», 1978, № 7).

Дорогие читатели!

В будущем, 1989 году журнал «Квант», как и прежде, будет распространяться только по подписке. Оформить годовую подписку можно до 1 ноября 1988 года. Подписка принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.



Практикум абитуриента

Из геометрии тетраэдра

В. Э. МАТИЗЕН, В. Н. ДУБРОВСКИЙ

В этой статье речь пойдет главным образом о признаках принадлежности тетраэдра к тому или другому классу. Примеры таких классов — *правильные треугольные пирамиды* и *правильные тетраэдры*, которые можно считать аналогами, соответственно, равнобедренных и равносторонних треугольников. Но в отличие от планиметрии, где можно назвать еще разве что прямоугольные треугольники, в стереометрии интересные классы тетраэдров этим отнюдь не исчерпываются. О двух таких классах уже рассказывалось в «Кванте» (см. «Квант», 1983, № 7, с. 34): это классы *равногранных* и *каркасных* тетраэдров. В класс равногранных тетраэдров входят тетраэдры, все грани которых равны между собой. В класс *каркасных тетраэдров — тетраэдры, все ребра которых касаются* некоторой сферы. В статье, опубликованной в 1983 году, обсуждались многочисленные признаки «равногранности» и «каркасности». Знакомство с ней для понимания дальнейшего необязательно (хотя и полезно): мы будем изучать свойства трех других классов тетраэдров.

Ортоцентрический тетраэдр

В отличие от треугольника, высоты которого всегда пересекаются в одной точке — *ортоцентре*, не всякий тетраэдр обладает аналогичным свойством (рис. 1). Тетраэдр, высоты которого пересекаются в одной точке, называется *ортоцентрическим*. Мы начнем изучение ортоцентрических тетраэдров с необходимых и достаточных условий ортоцентричности; каждое из них можно принять за определение ортоцентрического тетраэдра.

Итак, мы докажем эквивалентность следующих свойств тетраэдра:

O1. Высоты тетраэдра пересекаются в одной точке.

O2. Основания высот тетраэдра являются ортоцентрами граней.

O3. Каждые два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны.

O4. Суммы квадратов противоположных ребер тетраэдра равны.

O5. Отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, равны (эти отрезки называются *бимедианами*).

O6. Произведения косинусов противоположных двугранных углов равны.

O7. Сумма квадратов площадей граней вчетверо меньше суммы квадратов произведений противоположных ребер.

Обозначим через a, b, c, a_1, b_1, c_1 ребра тетраэдра $ABCD$ ($a=BC$, $a_1=DA$, $b=CA$, ...; рис. 2), через m_a, m_b, m_c — бимедианы (m_a соединяет середины ребер a и a_1 и т. д.); те же буквы обозначают длины соответствующих отрезков — из контекста будет ясно, что имеется в виду — отрезок или его длина. Величины двугранных углов тетраэдра при ребрах a, b, ... обозначим так: $\hat{a}$, $\hat{b}$, ... Сначала рассмотрим тетраэдр, который является ортоцентрическим как бы «наполовину», а именно, докажем равносильность следующих условий:

O1°. высоты AA_1 и DD_1 пересекаются.

O2°. точка D_1 (проекция вершины D на грань ABC) лежит на высоте грани ABC, проведенной из вершины A (или на ее продолжении).

O3°. Ребра BC и AD (a и a_1) *перпендикулярны.*

O4°. Бимедианы m_b и m_c равны.

O5°. $b^2+b_1^2=c^2+c_1^2$.

O6°. $\cos\hat{b}\cdot\cos\hat{b}_1=\cos\hat{c}\cdot\cos\hat{c}_1$.

Установить, что $O1°\Leftrightarrow O2°\Leftrightarrow O3°$, совсем легко: проектируя прямые AA_1 и AD на грань ABC, мы из теоремы о трех перпендикулярах получим, что каждое из этих трех утверждений эквивалентно перпендикулярности прямых AD_1 и BC (или, возможно, совпадению точек D_1 и A).

Теперь докажем, что $O3°\Leftrightarrow O4°\Leftrightarrow O5°$. Заметим, что каждые две бимедианы являются диагоналями параллелограмма (рис. 3), стороны которого, будучи средними линиями граней, параллельны двум противоположным ребрам тетраэдра и равны по длине половинам этих ребер. Условия $O3°$ и $O4°$, т. е. $a\perp a_1$ и $m_b=m_c$, равносильны тому, что соответствующий параллелограмм — прямоугольник. Запишем для двух других аналогичных параллелограммов известное равенство параллелограмма (сумма квадратов сторон равна сумме квадратов диагоналей): $b^2+b_1^2=2(m_c^2+m_a^2)$, $c^2+c_1^2=2(m_a^2+m_b^2)$. Из этих равенств сразу следует, что $O4°\Leftrightarrow O5°$.

Для доказательства того, что $O6°\Leftrightarrow O1°$, рассмотрим точки P и P' пересечения плоскостей ADD_1 и ADA_1 с прямой BC. Отношение $k(P)=BP:PC$ равно отношению $S_{AD_1B}:S_{AD_1C}$ площадей треугольников AD_1B и AD_1C (рис. 4). А так как эти треугольники являются проекциями граней ADB и ADC на плоскость ABC, для $k(P)$ получаем:

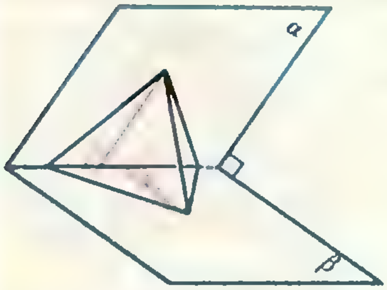


Рис. 1. Неортоцентрический тетраэдр (плоскости α и β перпендикулярны).

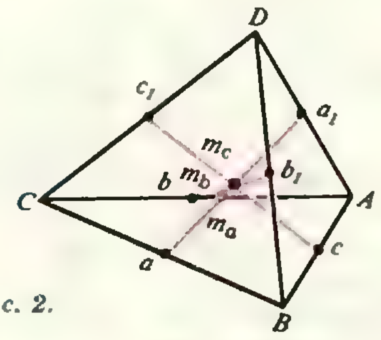


Рис. 2.

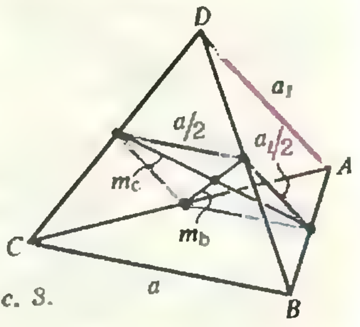


Рис. 3.

$$k(P) = \frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} \cdot \frac{\cos \hat{c}}{\cos \hat{b}}.$$

(Чтобы охватить и случай, когда угол $\hat{b}$ или угол $\hat{c}$ — тупой, будем под $k(P)$ понимать отношение направленных отрезков: $\overrightarrow{BP} = k(P) \cdot \overrightarrow{PC}$. Для точки P' справедлива аналогичная формула:

$$k(P') = \frac{S_{ADB}}{S_{ADC}} \cdot \frac{\cos \hat{b}_1}{\cos \hat{c}_1}.$$

Условие $O1^\circ$ эквивалентно совпадению точек P и P' или равенству $k(P) = k(P')$, которое легко превратить в $O6^\circ$.

Из равносильности свойств $O1^\circ$ — $O6^\circ$ моментально следует равносильность $O1$ — $O6$. Заминка может возникнуть только, когда мы будем выводить $O1$ из какого-либо другого признака ортоцентричности. Из каждого из свойств $O2$ — $O6$ получается лишь, что для любой пары высот выполняется свойство $O1^\circ$ (т. е. любые две высоты пересекаются). Но отсюда уже следует $O1$, потому что, как легко видеть, несколько попарно пересекающихся прямых, не лежащих в одной плоскости, всегда пересекаются в одной точке.

Остается еще условие $O7$. Заметим, что если два противоположных ребра тетраэдра перпендикулярны, то их произведение, очевидно, равно учетверенной площади параллелограмма с вершинами в серединах остальных ребер; если же два противоположных ребра не перпендикулярны, то их произведение больше этой величины. Поэтому эквивалентность $O3$ и $O7$ следует из утверждения задачи М1070, включенной в «Задачник «Кванта» 10-го номера за 1987 год, согласно которому сумма квадратов площадей граней тетраэдра вчетверо больше суммы квадратов площадей трех таких параллелограммов.

Условия $O1$, $O2$, $O3$ можно заменить на формально более слабые. Докажите, что

1. *в $O2$ можно ограничиться только одной высотой, в $O3$ — двумя парами противоположных ребер, а в $O1$ потребовать, чтобы одна из высот пересекалась с двумя другими.*

Еще несколько свойств ортоцентрического тетраэдра связаны с общими перпендикулярами его скрещивающихся ребер. По аналогии с бимедианами мы будем называть их *бивысотами*. Докажите, что

2. *если каждая бивысота пересекается с одной из высот тетраэдра, то он ортоцентрический;*

3. *в ортоцентрическом тетраэдре бивысоты пересекаются в одной точке (в ортоцентре).*

А что можно сказать о тетраэдре, бивысоты которого пересекаются в одной точке? Верно ли, что он будет ортоцентрическим?

Некоторые свойства ортоцентрического тетраэдра удобно доказывать

С помощью скалярного произведения

Зададим направления на ребрах и бимедианах тетраэдра $ABCD$, как показано на рисунке 5; получившиеся векторы будем обозначать теми же буквами: $\bar{a} = \overrightarrow{BC}$, $\bar{a}_1 = \overrightarrow{DA}$ и т. д. Выпишем несколько полезных тождеств, справедливых для любых четырех

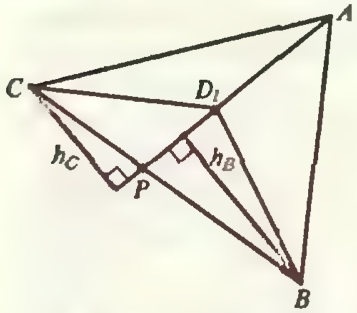


Рис. 4. $\frac{S_{AD_1B}}{S_{AD_1C}} = \frac{AD_1 \cdot h_B}{AD_1 \cdot h_C} = \frac{BP}{PC}$.

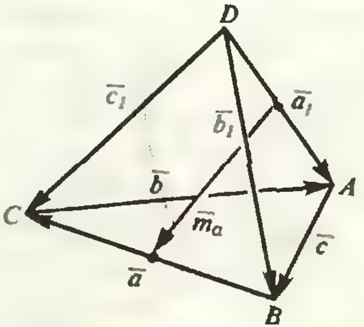


Рис. 5.

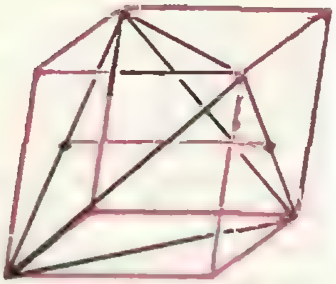


Рис. 6.

точек *A*, *B*, *C*, *D*:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}_1+\bar{b}\cdot\bar{b}_1+\bar{c}\cdot\bar{c}_1=0; \qquad (1)$$

$$2\bar{m}_a=\bar{b}_1-\bar{b}=\bar{c}_1+\bar{c}; \qquad (2)$$

$$m_a^2-m_b^2=\bar{c}\cdot\bar{c}_1; \qquad (3)$$

$$2\bar{c}\cdot\bar{c}_1=b^2+b_1^2-a^2-a_1^2; \qquad (4)$$

$$4m_a^2=b^2+b_1^2+c^2+c_1^2-a^2-a_1^2. \qquad (5)$$

Доказательства этих тождеств сводятся к несложным алгебраическим преобразованиям, и мы оставляем их читателям. Вот два примера геометрических следствий этих тождеств; из (1) вытекает, что высоты треугольника пересекаются в одной точке (возьмите в качестве *D* точку пересечения двух высот треугольника *ABC*); из (3), (4) и (5) — равносильность условий *О3*, *О4* и *О5* ортоцентричности тетраэдра. Другие примеры можно найти среди следующих задач:

Докажите, что

4. *каждое из следующих утверждений можно взять за определение ортоцентрического тетраэдра:*

а) $\bar{a}\cdot\bar{a}_1=\bar{b}\cdot\bar{b}_1=\bar{c}\cdot\bar{c}_1$,

б) *углы между противоположными ребрами равны*)*,

в) $\bar{a}_1\cdot\bar{b}_1=\bar{b}_1\cdot\bar{c}_1=\bar{c}_1\cdot\bar{a}_1$;

5. *в ортоцентрическом тетраэдре плоские углы при трех вершинах острые, а при четвертой — либо все острые, либо все тупые, либо все прямые, при этом все двугранные углы при четвертой вершине — либо все острые, либо все тупые, либо все прямые, а двугранные углы при остальных вершинах — острые;*

6. *если EF — общий перпендикуляр ребер AD и BC ортоцентрического тетраэдра ABCD (E∈AD, F∈BC), то*

$$\overrightarrow{EF}^2=\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{FC}.$$

Описанный параллелепипед

Проведем через каждое ребро тетраэдра плоскость, параллельную противоположному ребру. Эти плоскости ограничивают так называемый *описанный параллелепипед тетраэдра* (рис. 6). Некоторые свойства тетраэдра становятся более наглядными, если переформулировать их для параллелепипеда. Например, каждое из определений *О3*, *О4*, *О5* ортоцентрического тетраэдра равносильно тому, что

О8. Ребра описанного параллелепипеда равны,

т. е. все его грани — ромбы. (Для доказательства надо только заметить, что ребра тетраэдра — это диагонали граней параллелепипеда, а бимедианы тетраэдра равны и параллельны ребрам параллелепипеда,— рис. 6.) Условие же равенства всех граней описанного параллелепипеда (а тем самым и его ребер) характеризует правильные треугольные пирамиды. Еще один вид тетраэдров — *равногранные* — можно определить так: их описанные параллелепипеды — прямоугольные. Кстати, сейчас мы сможем дать отрицательный ответ на вопрос, поставленный в конце первого раздела: тетраэдр, бивысоты которого пересекаются в одной точке, не обязательно ортоцетрический. Равногранный тетраэдр тоже обладает этим свойством, поскольку бивысоты равногранного тетраэдра совпадают с бимедианами и пересекаются в центре его описанного параллелепипеда. Еще один пример можно получить из прямого параллелепипеда, в основании которого ромб,— у соответствующего тетраэдра два противоположных ребра перпендикулярны, а остальные равны.

Другие примеры тетраэдров, у которых бивысоты пересекались бы в одной точке, нам не известны. Также не известно, есть ли какие-либо общие условия, при которых это свойство выполняется. Возможно, их найдут читатели.

Докажите, что

7. *между элементами тетраэдра и элементами его описанного параллелепипеда имеются следующие соотношения:*

а) *высоты параллелепипеда равны бивысотам тетраэдра,*

б) *объем параллелепипеда втрое больше объема тетраэдра,*

в) *диагонали параллелепипеда пересекают грани тетраэдра в их центрах тяжести и делятся ими в отно-*

---

*) Пункты а) и б) составляют задачу М1039, решение которой опубликовано в «Кванте» № 5 за 1987 год.

шении 2:1, считая от конца, совпадающего с вершиной тетраэдра;

8. *если ABCD — ортоцентрический тетраэдр, H — его ортоцентр, O и R — центр и радиус описанной около этого тетраэдра сферы, m — длина бимедианы, то:*

а) *перпендикуляр, опущенный на грань BCD из вершины описанного параллелепипеда, противоположной A, проходит через O;*

б) *точки O и H симметричны относительно центра тяжести тетраэдра;*

в) $OH^2=4R^2-3m^2$;

г) *середины ребер и основания бивысот тетраэдра лежат на одной сфере;*

д) *центры тяжести и ортоцентры граней лежат на одной сфере.*

Инцентрические тетраэдры

Отрезки, соединяющие центры тяжести граней тетраэдра с противоположными вершинами («медианы тетраэдра»), всегда пересекаются в одной точке (эта точка — центр тяжести тетраэдра). Если в этом условии заменить *центры тяжести* граней на *ортоцентры* граней, то оно превратится в новое определение ортоцентрического тетраэдра (проверьте!). Если же заменить их на *центры вписанных в грани окружностей,* называемые иногда *инцентрами,* мы получим определение нового класса так называемых *инцентрических тетраэдров.*

Признаки класса инцентрических тетраэдров тоже довольно интересны:

И1. *Отрезки, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противоположные грани, пересекаются в одной точке.*

И2. *Биссектрисы углов двух граней, проведенные к общему ребру этих граней, имеют общее основание.*

И3. *Произведения длин противоположных ребер равны.*

И4. *Треугольник, образованный вторыми точками пересечения трех ребер, выходящих из одной вершины, с любой сферой, проходящей через три конца этих ребер, является равносторонним* (рис. 7).

Проверка эквивалентности этих условий не сложна, и мы оставляем ее читателям, ограничившись только одним указанием: *для любого тетраэдра стороны треугольника, о котором говорится в условии И4, пропорциональны произведениям противоположных ребер тетраэдра.*

Докажите еще два свойства инцентрических тетраэдров и выясните, можно ли принять их за определения этого класса:

9. *косинус угла между одной парой противоположных ребер тетраэдра равен сумме косинусов двух углов между двумя другими парами его противоположных ребер;*

10. *прямые, по которым плоскости трех граней тетраэдра пересекаются с плоскостью, касающейся его описанной сферы в общей вершине этих граней, образуют друг с другом углы по 60°.*

Соразмерные тетраэдры

Последний класс тетраэдров, с которым мы хотим познакомить читателей,— это класс *соразмерных тетраэдров.* Соразмерными мы называем тетраэдры, у которых

С1. *Бивысоты равны.*

Это определение можно заменить любым из следующих:

С2. *Проекция тетраэдра на плоскость, перпендикулярную любой бимедиане, есть ромб.*

С3. *Грани описанного параллелепипеда равновелики.*

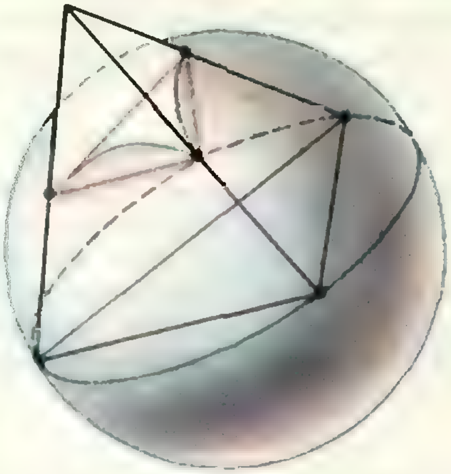


Рис. 7.

C4. $4a^2a_1^2-(b^2+b_1^2-c^2-c_1^2)^2=$ $=4b^2b_1^2-(c^2+c_1^2-a^2-a_1^2)^2=4c^2c_1^2-$ $-(a^2+a_1^2-b^2-b_1^2)^2$, *где* a *и* a_1, b *и* b_1, c *и* c_1 *— длины противоположных ребер.*

Для доказательства эквивалентности определений C1 — C4 достаточно заметить, что бивысоты тетраэдра равны высотам параллелограмма, являющегося его проекцией, упоминавшейся в C2, и высотам описанного параллелепипеда и что квадрат площади грани параллелепипеда, содержащей, скажем, ребро c, равен $(c^2c_1^2-$ $-(\bar{c}\cdot\bar{c}_1)^2/4$, а скалярное произведение $c\cdot c_1$ выражается через ребра тетраэдра по формуле (4).

Добавим сюда еще два легко доказываемых условия соразмерности:

C5. *Для каждой пары противоположных ребер тетраэдра плоскости, проведенные через одно из них и середину второго,перпендикулярны.*
C6. *В описанный параллелепипед соразмерного тетраэдра можно вписать сферу.*

Пересечения классов. Правильные пирамиды

Мы рассмотрели три класса тетраэдров. Про каждый из них можно сказать, что он определяется двумя равенствами (см. O5, И3, C4). Также двумя равенствами ($a+a_1=b+b_1=c+$ $+c_1$) определяются упомянутые в начале статьи каркасные тетраэдры. Равногранные же тетраэдры определяются тремя равенствами ($a=a_1$, $b=b_1$, $c=c_1$), а хорошо знакомые всем правильные треугольные пирамиды определяются четырьмя равенствами ($a=b=c$, $a_1=b_1=c_1$). У правильного тетраэдра все ребра равны — пять равенств. Можно ли получить какие-то новые виды тетраэдров, пересекая названные классы? К сожалению, нет.

Докажите, что

11. *равногранные тетраэдры в пересечении с любым другим классом дают правильные тетраэдры, а пересечение любого набора из остальных шести классов — правильные пирамиды;*

12. *каждое из следующих условий, за исключением одного (какого?) определяет правильную пирамиду:*

1) $AB=BC=CA$, $\angle DAB=\angle DBC=$ $=\angle DCA$
(здесь треугольник ABC — основание, точка D — вершина пирамиды);

2) *существует сфера, касающаяся сторон основания в их серединах и проходящая через середины боковых ребер;*

существует сфера, касающаяся боковых граней в их

3) *центрах тяжести,*

4) *центрах вписанных окружностей,*

5) *центрах описанных окружностей,*

6) *ортоцентрах.*

Конкурсные задачи

Для тех, кто готовится к поступлению в вуз, мы предлагаем несколько задач приемных экзаменов разных лет на механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики МГУ (формулировки незначительно изменены). Все эти задачи прямо или косвенно связаны с темой нашей статьи.

13. *В тетраэдре SABC известны плоские углы при вершине S:* $\angle BSC=90^\circ$, $\angle ASC=$ $=\angle ASB=60^\circ$. *Вершины A, S и середины ребер SB, SC, AB, AC лежат на сфере радиусом 3. Докажите, что ребро SA — ее диаметр и найдите объем тетраэдра.*

14. *В тетраэдре SABC середины всех ребер лежат на сфере радиусом 2,* $AB=3$, $AC=4$. *Ребро SA перпендикулярно плоскости ABC. Найдите объем пирамиды.*

15. *В тетраэдре ABCD ребра AB и CD перпендикулярны, а ребра AC и BD перпендикулярны и равны между собой. Все ребра касаются некоторого шара. Найдите его радиус, если* $BC=a$.

16. *В пирамиде SABC произведения длин ребер, выходящих из каждой вершины, равны одному и тому же числу. Величина угла между ребром SA и основанием ABC равна* $\arcsin 4/\sqrt{21}$, *а расстояние между ребрами SA и AB равно 1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если известно, что она не менее 4, а* $3SA^2+SC^2=3SB^2$.

17. *В пирамиде SABC площадь грани ASB равна* $3\sqrt{7}/4$, *угол BCS равен* $\operatorname{arctg}\sqrt{231}/37$, $AS=SB$ *и* $SC\cdot AC=20$. *Известно, то перпендикуляры к граням, восставленные из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке. Найдите объем пирамиды.*

Задачи LI Московской городской математической олимпиады

28 февраля 1988 года в Московском государственном университете состоялся заключительный тур LI Московской городской математической олимпиады. В нем участвовали 654 школьника 7—10 классов. Ниже приводятся задачи этого тура (на их решение отводилось по 4 часа).

7 класс

1. Докажите, что при простых $p>7$ число p^4-1 делится на 240.

2. На серединах ребер AB и $B'C'$ куба $ABCDA'B'C'D'$ взяты точки M и P. Изобразите на грани $BCC'B'$ все точки, кратчайшие расстояния от которых по поверхности куба до точек M и P равны.

3. С помощью кронциркуля и линейки проведите через данную точку прямую, параллельную данной. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

4. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более двух проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

8 класс

1. Над строкой из четырех чисел 1, 9, 8, 8 проделаем следующую операцию: между каждыми двумя соседними числами впишем число, которое получится в результате вычитания левого числа из правого. Над новой строкой проделаем ту же операцию и т. д. Найдите сумму чисел строки, которая получится после ста таких операций.

2. Имеется линейка без делений и специальный инструмент, позволяющий замерять расстояние между двумя произвольными точками и откладывать это расстояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша разделить пополам данный отрезок?

3. Докажите, что ни одна четверка натуральных чисел x, y, z, t не удовлетворяет равенству $3x^4+5y^4+7z^4=11t^4$.

4. Даны четыре монеты, среди которых могут оказаться фальшивые. Известно, что настоящая монета весит 10 г, а фальшивая — 9 г. Весы с одной чашкой показывают общий вес положенных на эту чашку монет. Найдите наименьшее количество взвешиваний, которые нужно сделать, чтобы наверняка определить, какие монеты являются фальшивыми, а какие — настоящими.

9 класс

1. Выпуклый четырехугольник разбит диагоналями на четыре треугольника, площади которых выражаются целыми числами. Докажите, что произведение этих чисел не может оканчиваться на 1988.

2. Докажите, что при простых $p_i\geqslant 5$, $i=1, 2, \ldots, 24$ число $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{24}^2$ делится нацело на 24.

3. На плоскости даны две перпендикулярные прямые. С помощью кронциркуля укажите на плоскости три точки, являющиеся вершинами равностороннего треугольника. Кронциркуль — это инструмент, похожий на циркуль, но на концах у него две иголки. Он позволяет переносить одинаковые расстояния, но не позволяет рисовать (процарапывать) окружности, дуги окружностей и делать засечки.

4. Пусть x и y натуральные числа. Рассмотрим функцию

$$f(x, y)=\frac{(x+y-1)(x+y-2)}{2}+y.$$

Докажите, что множеством значений $f(x, y)$ являются все натуральные числа, причем для любого натурального $i=f(x, y)$ числа x и y определяются однозначно.

5. 20 телефонов соединены проводами так, что каждый провод соединяет два телефона, каждая пара телефонов соединена не более чем одним проводом и от каждого телефона отходит не более трех проводов. Нужно закрасить провода (каждый провод целиком одной краской) так, чтобы от каждого телефона отходили провода разных цветов. Какого наименьшего числа красок достаточно для такой закраски?

10 класс

1. Калькулятор выполняет пять операций: сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение квадратного корня. Найдите формулу, по которой на этом калькуляторе можно определить наименьшее из двух произвольных чисел a и b.

2. Существует ли на координатной плоскости прямая, относительно которой симметричен график функции $y=2^x$?

3. Всякий ли параллелепипед можно рассечь плоскостью так, чтобы в сечении получился прямоугольник?

4. Имеется линейка без делений и эталон длины, позволяющий откладывать некоторое фиксированное расстояние на любой уже проведенной прямой от произвольной точки этой прямой. Как с помощью этих инструментов и карандаша провести какой-нибудь перпендикуляр к данной прямой?

5. Возьмем пару натуральных *чисел и разделим* с остатком большее из них на меньшее (если числа равны, то также одно из них разделим на другое). Из полученных частного и остатка *образуем новую* пару чисел и проделаем с ней то же самое. Как только одно из чисел окажется равным нулю, прекратим вычисления. Докажите, что если начать с чисел, не превосходящих 1988, то более шести делений выполнить не удастся.

Задачи предложили: *В. Б. Алексеев* (7.4, 9.5), *С. Б. Гашков* (8.4), *И. Иновенков* (9.4), *С. В. Конягин* (10.5), *В. Родин* (9.1), *И. Н. Сергеев* (7.3, 8.1, 8.2, 8.3, 9.3, 10.1, 10.2, 10.3, 10.4), *А. Н. Соколихин* (7.1, 7.2, 9.2).

Публикацию подготовил *И. Н. Сергеев*

Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Перпендикулярно к свободному концу рычага с осью вращения в точке O на расстоянии l_1 приложена сила $\vec{F}$ (рис. 1). Другой конец упирается в гладкую стенку на расстоянии l_2 от оси. Угол $\alpha=135°$. Найдите величину силы, действующей на ось.

2. По тонкой трубке без трения движутся вправо с одинаковыми скоростями четыре одинаковых маленьких шарика так, что расстояния между ними равны l_1, l_2, l_3 (рис. 2). Трубка закрыта пробкой. Как будут расположены и как будут двигаться шарики после того, как все соударения прекратятся? Удары шаров друг о друга и о пробку абсолютно упругие.

3. 1 кг льда и 1 кг легкоплавкого вещества, не смешивающегося с водой, при $t=-40$ °С помещены в теплоизолированный сосуд с нагревателем внутри. Нагреватель выделяет постоянную мощность. Зависимость температуры в сосуде от времени показана на рисунке 3. Удельная теплоемкость льда $c_л=2\cdot10^3$ Дж/(кг · К), твердого вещества $c=10^3$ Дж/(кг · К). Найдите удельную теплоту плавления вещества и его удельную теплоемкость в расплавленном состоянии.

4. Посеребренная (зеркальная) изнутри стеклянная сфера имеет круглое отверстие с углом раствора 2α, в которое падает однородный параллельный пучок лучей, перпендикулярный плоскости отверстия (рис. 4). Часть лучей, претерпев *одно* отражение, *выходит* из сферы обратно через отверстие. Какую долю, по мощности, вышедший пучок составляет от вошедшего? α — произвольное.

9 класс

1. Три одинаковых массивных шара находятся на одной высоте над горизонтальной *плоскостью* (рис. 5). Первый шар насажен на невесомую спицу, конец которой закреплен в шарнире. Второй шар насажен на такую же спицу, но ее конец может без трения скользить по плоскости. Третий шар никак не взаимодействует с плоскостью. Шары одновременно начинают падать без начальной скорости. В каком порядке они упадут на плоскость?

2. Некто сконструировал педальный вертолет с очень малой массой и диаметром винта $d=8$ м. Сможет ли пилот массой $M=80$ кг взлететь на такой машине? (Сравните требуемую мощность с мощностью лошади.)

3. Горизонтальный цилиндр с поршнем наполнен воздухом, содержащим пары воды. В исходном состоянии его объем $V_0=1$ л, давление $p_0=10^5$ Па, температура $t_0=30$ °С. Если закрепить поршень и охлаждать цилиндр при постоянном объеме V_0, то при $t_1=10{,}5$ °С в нем выпадет роса. Можно поступить по-другому: оставить поршень свободным и охлаждать воздух из исходного состояния при постоянном давлении p_0. *При какой температуре* выпадет роса в этом случае? Зависимость плотности насыщенного водяного пара от температуры показана на рисунке 6.

4. *Космическая станция*, представляющая собой металлический шар радиусом $R=1$ м, находится в далеком космосе. В некоторый момент на борту включается «электронная пушка», испускающая в пространство пучок электронов с энергией $W=9\cdot10^4$ эВ. Сила тока в пучке $I=1$ мкА. Найдите напряженность электрического поля у поверхности корпуса станции через $\tau=1$ мин после включения «пушки». (В начальный момент времени $E=0$.)

10 класс

1. Грузик массой m падает с высоты h на *площадку*, закрепленную на пружине жесткостью k (рис. 7). Пружина и площадка невесомы, все движение происходит по вертикали. Нарисовать (со всеми подробностями!) графи-

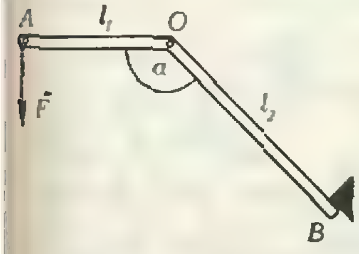


Рис. 1.

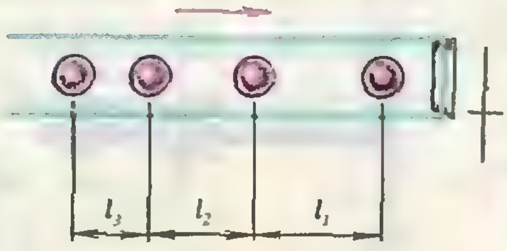


Рис. 2.

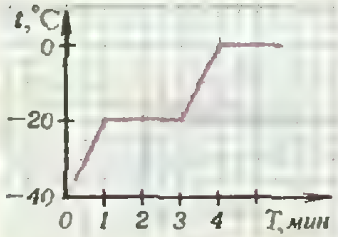


Рис. 3.

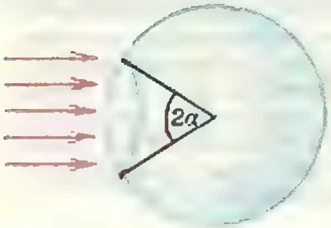


Рис. 4.

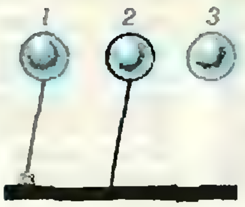


Рис. 5.

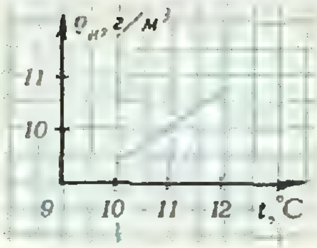


Рис. 6.

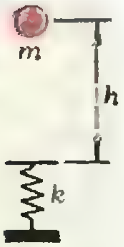


Рис. 7.

ки зависимости ускорения и скорости грузика от времени.

2. Если облучать медную пластину пучком ионов аргона Ar^+ (однозарядных), ускоренных разностью потенциалов $U=1000$ В, происходит интенсивное распыление меди с поверхности пластины. Однако пучок электронов, ускоренных той же разностью потенциалов, никакого распыления не вызывает. Почему так происходит? Ответ обоснуйте количественно. (Чтобы выбить атом меди из кристаллической решетки, ему надо придать энергию не менее $E_0=3{,}5$ эВ.)

3. Лазер излучает световые импульсы с энергией $W=0{,}1$ Дж. Частота повторения импульсов $f=10$ Гц. Коэффициент полезного действия лазера, определяемый как отношение излучаемой энергии к потребляемой, составляет $\eta=0{,}01$. Какой объем воды нужно прогнать за время $\tau=1$ ч через охлаждающую систему лазера, чтобы вода нагрелась не более чем на $\Delta t=10$ °C?

4. Близорукий человек смотрит через верхний край стекол своих очков на лампу дневного света, расположенную горизонтально на потолке перпендикулярно лучу зрения. При этом у верхней и нижней кромок лампы он видит цветную кайму. Какого цвета?

Публикацию подготовили
А. И. Буздин, С. С. Кротов

Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МВТУ им. Н. Э. Баумана

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана проводит в 1988/89 учебном году Всесоюзную заочную физико-математическую олимпиаду (с техническим приложением) для учащихся средних школ, ПТУ и техникумов.

Олимпиада проводится в два тура. Условия задач первого тура публикуются ниже. Условия задач второго тура будут рассылаться участникам олимпиады, допущенным ко второму туру по результатам первого.

Решения задач надо оформить в одной школьной тетради. На внешнюю сторону обложки тетради наклейте лист бумаги с указанием подробного домашнего адреса (с почтовым индексом), фамилии, имени, отчества и места учебы. На внутреннюю сторону обложки наклейте справку с места учебы с указанием класса.

Тетрадь с решениями присылайте в большом конверте простой бандеролью по адресу: 107005 Москва, 2-я Бауманская ул., д. 5, МВТУ им. Н. Э. Баумана, «Олимпиада — 88/89».

Задачи первого тура

1. Однородная балка (длиной $L=6{,}0$ м) одной частью ($l=1{,}0$ м) лежит на горизонтальной платформе, остальная часть балки свешивается с платформы (рис. 1). К концу свешивающейся части балки приложена вертикальная сила $\vec{F}$. Балка удерживается в горизонтальном положении, если значение силы находится в интервале от некоторого минимального значения F_{min} до максимального F_{max}. Найдите отношение F_{max}/F_{min}, если толщина балки значительно меньше ее длины.

2. Два одинаковых точечных грузика C и D массой m каждый соединены нерастяжимой нитью длиной l и могут скользить без трения по гладкому невесомому горизонтальному стержню (рис. 2). В начальный момент времени, когда груз C находился на вертикальной оси OZ, системе сообщили угловую скорость ω_0. Найдите натяжение нити в тот момент, когда груз C удалится от оси на расстояние $2l$.

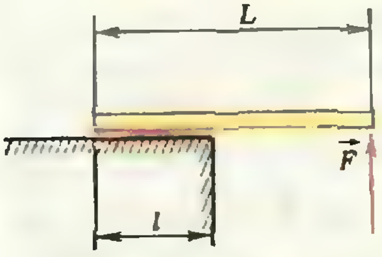


Рис. 1.

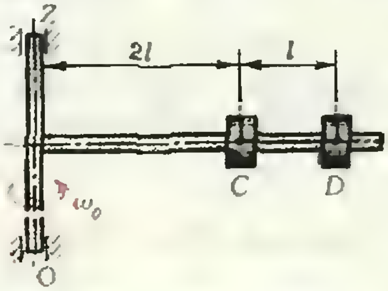


Рис. 2.

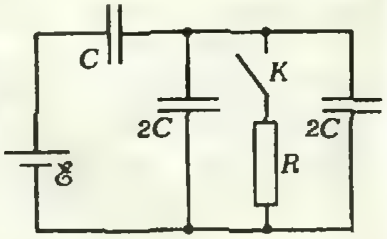


Рис. 3.

3. На орбитальной станции есть сосуд Дьюара с жидким азотом. Как получить «лед» из азота? Что может помешать получению такого «льда»?

4. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R после замыкания ключа K (рис. 3)? Внутренним сопротивлением источника тока пренебречь.

5. Предложите вариант установки для получения электроэнергии, использующей разность температур на поверхности Луны во время лунного дня и лунной ночи. Сделайте возможные оценки и расчеты.

6. Электрон в начальный момент покоится в однородных и постоянных электрическом и магнитном полях. Определите траекторию движения электрона, если векторы индукции магнитного поля $\vec{B}$ ($B=0{,}05$ Тл) и напряженности электрического поля $\vec{E}$ ($E=10^4$ В/м) взаимно перпендикулярны.

7. Как разделить (сепарировать) смесь немагнитных материалов различной плотности с помощью магнитного поля?

8. При высоких температурах с поверхности металлов испускаются электроны. Выходу электрона препятствует наведенный им на поверхности металла положительный заряд. Какое внешнее «тянущее» электростатическое поле необходимо создать у поверхности металла, чтобы работа выхода уменьшилась на $\Delta A_{\text{вых}}=0{,}1$ эВ?

9. На аэродроме в пункте A находится почтовый самолет, имеющий на борту запас топлива, позволяющий пролететь расстояние, равное половине длины экватора. Какова область его действия, если, выполнив задание, он должен вернуться на другой аэродром — в пункт B? Можно считать, что Земля имеет форму шара.

10. Решите уравнение:

$$21x^2-6\pi x\sin x-4\sqrt{3}\,\pi x\operatorname{tg}x=$$

$$=\pi^2\cos^2 x-\frac{\pi}{\cos^2 x}.$$

Ответы, указания, решения

[illegible]о послать на Марс?

[illegible] *«Квант» № 8)*

Упражнения

1. Пусть X — одна из наших шести планет. Тогда найдутся либо три планеты, дружные с X, либо три планеты, находящиеся с X в ссоре. В первом случае либо три планеты, дружные с X, все поссорились между собой — тогда они составляют тройку поссорившихся планет (рис. 1), либо какие-то две из них дружны и тогда они составляют вместе с X тройку дружных планет (рис. 2). Второй случай разбирается дословно так же, только нужно всюду заменить слово «дружные» словом «поссорившиеся» и наоборот.

2. Сосчитаем число линий, которые провел бы Громозека, объясняя этот случай. От каждого камня отходят 3 линии, всего камней 9, следовательно, линий всего будет $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 3=13{,}5$. Получилось дробное число, так что этот случай невозможен.

3. В любом графе с n вершинами либо найдутся две вершины, связанные ребром, либо в нем никакие две вершины не связаны ребром. В первом случае мы имеем полный подграф с двумя вершинами, во втором — пустой подграф с n вершинами (совпадающий со всем графом).

4. Пусть $r(m-1,\ n)$ и $r(m,\ n-1)$ — четные числа. Возьмем произвольную вершину X в графе с $r(m-1,\ n)+r(m,\ n-1)-1$ вершинами. Если число вершин, связанных ребрами с X, не меньше чем $r(m-1,\ n)$, то дальше рассуждаем как в первом случае в доказательстве неравенства (1); если же число вершин, связанных ребрами с X, не больше чем $r(m-1,\ n)-2$, то рассуждаем дальше как во втором случае в доказательстве неравенства (1). Осталось рассмотреть случай, когда вершина X связана ребрами ровно с $r(m-1,\ n)-1$ другими вершинами. Но такое условие для всех вершин графа выполняться не может. Действительно, если каждая вершина графа соединена ребрами ровно с $r(m-1,\ n)-1$ вершинами, то число ребер равно $\frac{1}{2}(r(m-1,\ n)+r(m,\ n-1)-1)(r(m-1,\ n)-1)$ — дробное число (сравните с решением упражнения 2).

5. Покажем сначала, что $r(m,\ n)\geqslant r(n,\ m)$. Возьмем любой граф с $r(m,\ n)$ вершинами и произведем над ним такую операцию: сотрем все ребра, а вершины, которые не были соединены ребрами, соединим ребрами. В новом графе тоже $r(m,\ n)$ вершин, и, значит (по смыслу числа $r(m,\ n)$), в нем есть либо полный подграф с m вершинами, либо пустой подграф с n вершинами. Но полным подграфам нового графа отвечают пустые подграфы старого графа, а пустым подграфам нового графа отвечают полные подграфы старого графа. Значит,

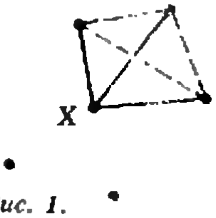


Рис. 1.

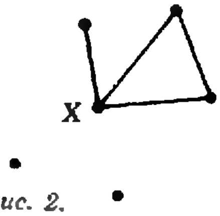


Рис. 2.

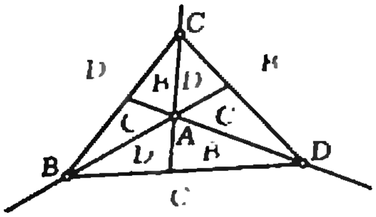


Рис. 3.

в старом графе (а это был произвольный граф с $r(m, n)$ вершинами!) есть либо пустой подграф с m вершинами, либо полный подграф с n вершинами. Таким образом, $r(m, n) \geqslant r(n, m)$. Точно так же доказывается, что $r(n, m) \geqslant r(m, n)$. Значит, $r(m, n) = r(n, m)$.

6. В самом деле, среди любых n космонавтов либо есть 3 космонавта, образующих слаженный экипаж, либо никакие 3 из n космонавтов не могут образовывать слаженный экипаж. Знавит, $R(3, n) = n$. Точно так же можно доказать, что $R(m, 3) = m$. Докажем, что $R(m, n) = R(n, m)$. Возьмем произвольный отряд из $R(m, n)$ космонавтов.

Представим себе, что с отрядом произошло следующее: все тройки, которые составляли слаженный экипаж, теперь его не могут составить, а все тройки, которые не могли образовать слаженного экипажа, стали слаженными. Отряд по-прежнему состоит из $R(m, n)$ космонавтов, и потому в нем найдутся либо m человек, любая тройка из которых слаженная, либо n человек, никакие трое из которых не могут составить слаженного экипажа. Значит, в исходном отряде найдутся либо m человек, никакие трое из которых не могут составить слаженного экипажа, либо n человек, любая тройка из которых — слаженная. Следовательно, $R(m, n) \geqslant R(n, m)$. Точно так же $R(n, m) \geqslant R(m, n)$, и, таким образом, $R(m, n) = R(n, m)$.

7. Воспользуемся «принципом Дирихле». В самом деле, среди $m+n-1$ космонавтов всегда найдутся либо m космонавтов, каждый из которых способен спуститься на Марс, либо n космонавтов, каждый из которых не подходит для спуска на Марс.

8. Нам потребуются две леммы.

Лемма 1. $C(4)=5$, т. е. *из любых пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, можно выбрать четыре, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.*

Доказательство. Возьмем любые четыре из наших пяти точек. Если они не составляют выпуклого четырехугольника, то одна из них (скажем, A) лежит в треугольнике, образуемом тремя другими (скажем, BCD). Пятая точка лежит в одной из девяти областей, на которые делят плоскость линии, изображенные на рисунке 3. Мы исключаем из наших пяти точек точку, обозначение которой указано красным цветом на этой области, и получаем искомые четыре точки.

Лемма 2. *Если m точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, не являются вершинами выпуклого m-угольника, то некоторые четыре из этих точек не являются вершинами выпуклого четырехугольника.*

Доказательство. Возьмем *выпуклую оболочку P* наших точек (наименьший выпуклый многоугольник, который все их содержит). Пусть это l-угольник, причем $l<m$. Тогда по крайней мере одна из наших m точек, скажем A, лежит внутри P и, значит, содержится в одном из треугольников, образуемых вершинами многоугольника P, скажем в треугольнике BCD. Но тогда точки A, B, C, D не образуют выпуклого четырехугольника.

Из этой леммы немедленно следует, что *произвольные m точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой и любые четыре из которых образуют выпуклый четырехугольник, являются вершинами выпуклого m-угольника.*

Теперь докажем теорему Эрдёша — Секереша. Ясно, что $C(3)=3$, и мы доказали, что $C(4)=5$. Пусть теперь $m>4$. Рассмотрим произвольное множество из $R(4;\ m,\ 5)$ точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Поставим в соответствие каждой точке космонавта и условимся, что четыре космонавта составляют слаженный экипаж тогда и только тогда, когда соответствующие четыре точки являются вершинами выпуклого четырехугольника. Тогда по лемме 1 среди любых пяти космонавтов найдутся четыре, составляющие слаженный экипаж. По определению числа $R(4;\ m,\ 5)$, тогда среди наших $R(4;\ m,\ 5)$ космонавтов найдутся m космонавтов, среди которых каждая четверка космонавтов образует слаженный экипаж. Это значит, что найдутся m точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой, любые четыре из которых образуют выпуклый четырехугольник. Но, как было получено из леммы 2, тогда эти m точек являются вершинами выпуклого m-угольника. Значит, $C(m)=R(4;\ m,\ 5)$, и теорема доказана.

Задачи

1. Сформулируем эту задачу на языке графов: *докажите, что в полном графе из 17 вершин, ребра которого раскрашены в три цвета, найдутся 3 вершины, соединенные между собой ребрами одного цвета.*

Возьмем произвольную вершину X графа. Из нее выходят 16 ребер, которые раскрашены в три цвета, следовательно, среди них есть шесть ребер одного (скажем синего) цвета. Если какие-то две из шести вершин, соединенных с X синими ребрами, соединены между собой также синим ребром, то эти две вершины и вершина X — искомые. Если никакие две из шести вершин, соединенных с X синими ребрами, не соединены между собой синим ребром, то мы получаем полный граф из шести вершин с ребрами двух цветов. Для завершения доказательства нужно воспользоваться упражнением 1.

2. Так как $R(3;\ 4,\ 4) \leqslant 19$, то среди 19 кругов на плоскости таких, что среди любых четырех какие-то три имеют общую точку, найдутся четыре, любые три из которых имеют общую точку. Докажем, что существует точка X, общая для этих четырех кругов. Пусть точка A — общая для первого, второго и

третьего кругов; точка B — общая для первого, второго и четвертого кругов; точка C — общая для первого, третьего и четвертого кругов; точка D — общая для второго, третьего и четвертого кругов.

Можно считать, что точки A, B, C, D различны (если, скажем, $A=B$, то A — искомая точка).

Случай 1. *Точки A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник.* В этом случае точка пересечения его диагоналей — искомая.

Случай 2. *Выпуклая оболочка точек A, B, C, D — треугольник.* Тогда та из точек A, B, C, D, которая лежит внутри этого треугольника,— искомая.

Случай 3. *Точки A, B, C, D лежат на одной прямой.* В этом случае искомой является любая точка прямой, по одну и по другую сторону от которой на прямой лежат по две из точек A, B, C, D.

3. Пусть натуральные числа 1, ..., 66 покрашены в четыре цвета. Возьмем полный граф с 66 вершинами и занумеруем их натуральными числами от 1 до 66. Раскраску ребер графа произведем по следующему правилу: ребро, соединяющее вершины с номерами i и j, покрасим в один цвет с числом $|i-j|$ ($1\leqslant i, j\leqslant 66$). Теперь убедимся, что в этом графе найдутся три вершины, соединенные ребрами одного цвета. Обозначим одну из вершин через X. Из нее выходит $65=16\cdot 4+1$ ребер четырех цветов, следовательно, среди них найдется семнадцать одного цвета, например синего. Если какие-то две из вершин, соединенных с вершиной X ребрами синего цвета, также соединены между собой ребром синего цвета, то эти две вершины и вершина X — искомые. Если же никакие две из 17 вершин, соединенных с вершиной X синими ребрами, не соединены между собой тоже синим ребром, то среди них найдутся три вершины, соединенные между собой ребрами одного цвета (см. решение задачи 1).

Пусть вершины с номерами a, b, c соединены друг с другом одноцветными ребрами. Для определенности пусть $a>b>c$. Тогда числа $x=a-b$, $y=b-c$ и $z=a-c$ имеют один и тот же цвет и удовлетворяют условию $x+y=z$.

ейдоскоп «Кванта»

«Квант» № 8)

Вопросы и задачи

1. В наинизшем.

2. Выталкивающая сила уменьшает натяжение нити, что равносильно уменьшению g, поэтому период колебаний маятника увеличится.

3. Нет, если не изменится положение центра тяжести системы.

4. Да, поскольку силы упругости существуют и в невесомости.

5. $kA^2/2$.

6. Часы следует поднять.

7. Можно, если сообщать штативу небольшие толчки с частотой, равной частоте собственных колебаний одного из маятников (резонанс).

8. Можно, изменив темп ходьбы: тем самым меняется частота внешней силы, вызвавшей резонансные колебания ведра с водой.

9. Сила электрического взаимодействия шариков всегда направлена вдоль нити; она не отражается на величине возвращающей силы, поэтому не влияет на период колебаний.

10. Да, частота колебаний увеличится.

11. а) Уменьшится; б) увеличится.

12. За счет уменьшения энергии магнитного поля катушки.

Микроопыт

Период колебаний будет уменьшаться.

анные школьные задачи

«Квант» № 8)

1. 1984. Решение. Пусть $N=13a_1+73b_1=13a_2+73b_2=13a_3+73b_3$ и $a_1<a_2<a_3$. Так как $13(a_2-a_1)=73(b_1-b_2)$, то a_2-a_1 делится на 73; аналогично, a_3-a_2 делится на 73. Значит, $a_3\geqslant a_2+73\geqslant(a_1+73)+73\geqslant 1+73+73=147$, и, следовательно, $N=13a_3+73b_3\geqslant 13\cdot 147+73=1984$. Остается заметить, что 1984 имеет три представления указанного вида: $a_1=1$, $a_2=74$, $a_3=147$, $b_1=27$, $b_2=14$, $b_3=1$.

2. $k=1$, n — натуральное число, равное числу, записанному теми же цифрами, но в обратном порядке; $k=2$, $n=2$; $k=2$, $n=9$. Указание. Так как kn и n^k должны состоять из одинакового числа цифр, $n^k<10kn$. При $k\geqslant 2$, $n\geqslant 2$ это неравенство оставляет для k и n конечное число возможностей; случаи $k=1$ и $n=1$ очевидны.

3. Из условия задачи вытекает, что $x_2^2=px_2+q$, $x_1^2=-px_1-q$. Поэтому $x_2^2+2px_2+2q=3x_2^2$, $x_1^2+2px_1+2q=-x_1^2$, откуда видно, что либо одно (или оба) из чисел x_1, x_2 является корнем уравнения $x^2+2px+2q=0$, либо левая часть этого уравнения принимает в точках x_1, x_2 значения разных знаков, и тогда между этими точками обязательно лежит корень уравнения.

4. Примем сторону квадрата за единицу и отложим на продолжении стороны CB отрезок $BM=\frac{1}{2}$. Имеем: $EF=\frac{5}{6}$, $ME=\frac{5}{6}$, $AM=AF$. Таким образом, в четырехугольнике $MEFA$ равны стороны ME и EF, а также стороны MA и AF (рис. 4). Поэтому треугольники AEM и AEF равны, из чего и вытекает требуемое равенство углов.

5. Предположим, что $AB>AC$. Тогда угол BCA больше угла CBA и, значит, угол BCD больше угла CBD (рис. 5). Следовательно, $BD>CD$ и $AB+BD>AC+CD$. Противоречие.

6. Пусть $d\geqslant 2$ — общий делитель чисел a_n и a_m, $m>n$. Прежде всего, все числа a_n нечетны, поэтому $d\neq 2$. Ясно, далее, что остаток от деления числа $a_{n+1}=a_n^2-2$ на d равен $d-2$, остаток от деления числа a_{n+2} на d равен остатку от деления числа $(d-2)^2-2$ на d, т. е. равен 2. Но тогда и остаток от деления числа a_{n+3} на d равен $2^2-2=2$, и то же верно для a_{n+4}, a_{n+5}, ... Поэтому a_m не может делиться на d.

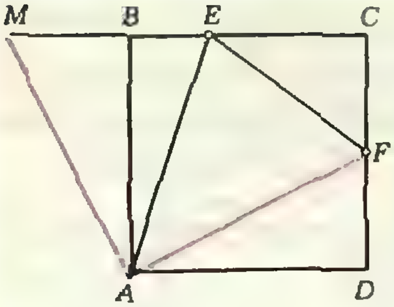


Рис. 4.

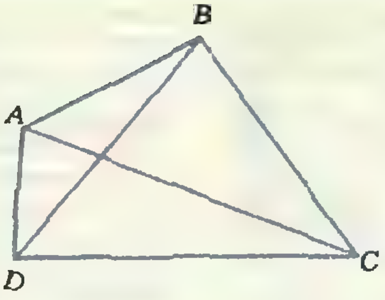


Рис. 5.

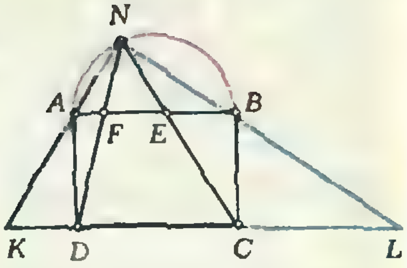


Рис. 6.

7. Из условия имеем $x_1-x_2=\frac{x_2-x_3}{x_2x_3}$, $x_2-x_3=\frac{x_3-x_4}{x_3x_4}$, ..., $x_n-x_1=\frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$. Если $x_1=x_2$, то $x_2=x_3=...=x_n$. Если же $x_1\neq x_2$, то $x_2\neq x_3$, ..., $x_n\neq x_1$. В этом случае, перемножив все написанные равенства и сократив на $(x_1-x_2)\times\times(x_2-x_3)...(x_n-x_1)$, получим $(x_1x_2...x_n)^2=1$.

8. Пусть K, L — точки пересечения прямых NA и NB с прямой CD (рис. 6). Ясно, что $\frac{KD}{AF}=\frac{DC}{FE}=\frac{CL}{EB}$. Из подобия треугольников AKD и CLB следует, что $\frac{KD}{BC}=\frac{AD}{CL}$. Поэтому $2KD\cdot CL=2BC\cdot AD=CD^2$, а значит, $2AF\cdot EB=EF^2$. Далее, $AE+FB=AB+EF$. Следовательно, $AE^2+FB^2+2AE\cdot FB=AB^2+EF^2+$ $+2AB\cdot EF=AB^2+2(AF\cdot EB+AB\cdot EF)$. Остается доказать, что $AE\cdot FB=AF\cdot EB+AB\cdot EF$. Но это равенство следует из тождества $(AF+FE)(FE+EB)=AF\cdot EB+(AF+FE+$ $+EB)FE=AF\cdot EB+AB\cdot EF$.

9. Перпендикуляр к прямой AC, проведенный через середину D отрезка AC, за вычетом *самой точки* D. Решение. Углы MAB и MCB равны как вписанные и опирающиеся на равные дуги. Поэтому MAC — равнобедренный треугольник.

10. Во-первых, среди выбранных подмножеств не может быть пустого. Во-вторых, если множество A не принадлежит к выбранной совокупности, то дополнение к A к ней принадлежит. Действительно, A и дополнение к A не могут оба принадлежать к выбранной совокупности, поскольку они не пересекаются. Но всего подмножеств 2^n и ровно половина из них принадлежит к выбранной совокупности. Значит, для каждого множества A либо само A, либо дополнение к A принадлежит к выбранной совокупности. Наконец, в-третьих, если A и B принадлежат к выбранной совокупности, то и пересечение $A\cap B$ к ней принадлежит. Действительно, в противном случае к нашей совокупности принадлежало бы дополнение C к $A\cap B$, но пересечение множеств A, B, C пусто. Значит, нашей совокупности принадлежит пересечение всех ее множеств, и это пересечение не пусто, поскольку пустое множество совокупности не принадлежит.

11. Положим $n=11...1$ (10 единиц). Наше число равно $n\cdot 10^{10}+2n=n(10^{10}-1)+3n=$ $=n\cdot 9n+3n=3n(3n+1)$.

12. $a=\frac{1}{5}$, $b=\frac{2}{5}$, $c=\frac{3}{5}$, $d=\frac{4}{5}$. Решение. Уравнение приводится к виду $\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+$ $+\frac{3}{4}\left(b-\frac{2}{3}c\right)^2+\frac{2}{3}\left(c-\frac{3}{4}d\right)^2+\frac{5}{8}\left(d-\right.$ $\left.-\frac{4}{5}\right)^2=0$.

13. Обозначим точку пересечения плоскости OBC с ребром AD через M (рис. 7). Имеем $\frac{MD}{MA}=\frac{V_{ODBC}}{V_{OABC}}=1$. Значит, M — середина ребра AD. Аналогично точка N пересечения плоскости OAD и ребра BC является серединой ребра BC. Пусть P, Q, R, S — середины ребер BD, AC, DC, AB соответственно. Рассмотрим точки M, N, O. Они принадлежат плоскостям MBC и NAD, а значит, принадлежат прямой пересечения этих плоскостей. Поэтому точка O лежит на отрезке MN. Аналогично получаем, что точка O принадлежит отрезкам RQ и PS. Так как четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм, то точка O — точка пересечения диагоналей — делит отрезки MN и PQ пополам. Ясно также, что O — середина отрезка RS. Следовательно, $\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{ON}$. Поэтому $\overrightarrow{OA}+$ $+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON})=0$.

14. $\{b, b\}$, $\{b, \sqrt{2a^2+b^2}\}$, $\{\sqrt{b^2-2a^2}, \sqrt{b^2-2a^2}\}$; первое решение присутствует только если $b\sqrt{3}>a$, второе — только если $b>a$, третье — только если $b>a\sqrt{3}$. Указание. Из условия следует, что высоты боковых граней равны. Следовательно, равны проекции высот на

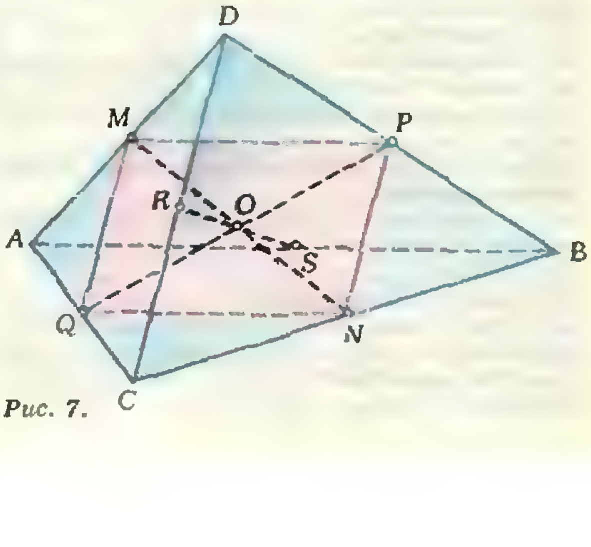


Рис. 7.

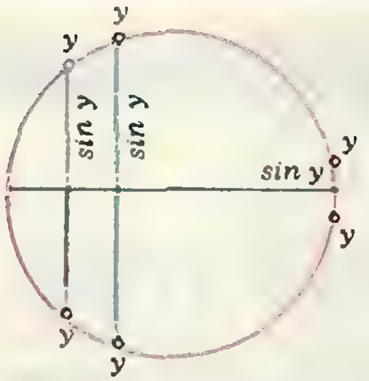


Рис. 8.

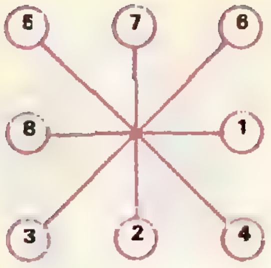


Рис. 9.

плоскость основания, и, значит, проекция вершины на плоскость основания совпадает с центром вписанной или вневписанной окружности основания.

15. $\frac{3}{4}\pi-\arcsin\left(\sqrt{2}\ \sin\frac{\pi}{18}\right)$. Решение. Сделаем замену $\cos x+\sin x=2\ \sin y$, т. е. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin y$. Наше уравнение примет вид $\sin 3y=\frac{1}{2}$ (проверьте!); его решения $y\in\left\{\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi,\ k\in Z\right\}\cup\left\{\frac{5}{18}\pi+\frac{2}{3}m\pi,\ m\in Z\right)$ (рис. 8). Но $0\leqslant x\leqslant\pi$, значит, $\frac{\pi}{4}\leqslant x+\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1$, $-\frac{1}{2}\leqslant\sin y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. Как видно из рисунка 5, $\sin y$ может принимать три значения, но только одно из них, а именно, $\sin\frac{\pi}{18}$, попадает в нужный промежуток. Таким образом, $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\ \sin\frac{\pi}{18}$, и из всех решений этого уравнения только $x=\pi-\frac{\pi}{4}-\arcsin\left(\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{18}\right)$ находится в промежутке $[0;\ \pi]$.

Как взвесить гиппопотама
(см «Квант» № 8, с. 47)

Как и все гениальное, выход из создавшегося положения был необычайно прост. Сборщик податей ввел священного гиппопотама на пустую лодку вождя и отметил снаружи на борту лодки уровень, до которого та погрузилась в воду. Затем он свел гиппопотама на берег и принялся нагружать лодку золотыми слитками. Так он трудился до тех пор, пока лодка не погрузилась в воду по сделанную ранее отметку.

«Квант» для младших школьников
(см «Квант» № 8)

1. $\begin{array}{r|l} -103 & 48 \\ \cline{2-2} \underline{96} & 2 \\ 7 & \end{array}$

2. Нельзя. Действительно, один из коротких отрезков — не концевой в ломаной, но его концы можно соединить только с концами параллельного ему длинного отрезка.

3. См. рис. 9.

4. Искомое число можно представить в виде $A\cdot 100+56$. Поскольку $A\cdot 100$ должно делиться на 56, то A кратно 14, т. е. оно четно и делится на 7. При этом A имеет сумму цифр, равную $56-(5+6)=45$. Наименьшим четным числом с суммой цифр 45 является число 199 998, однако оно не делится на 7. Следующими по величине четными числами с такой суммой цифр будут 289 998 и 298 998. Первое из них не делится на 7, а второе — делится, поэтому ответом на вопрос задачи является число 29 899 856.

5. Книга имеет ширину ≈ 15 см и высоту ≈ 25 см. Таким образом, площадь страницы $\approx 0{,}04$ м^2. Если в книге 500 страниц, то ее страницами можно покрыть примерно $250\times\times 0{,}04=10$ квадратных метров. Футбольное поле имеет площадь порядка 5—6 тысяч квадратных метров, и на него потребуется 500—600 книг, столько их у профессора Иванова вполне может быть. Парк имеет площадь порядка квадратного километра, на него потребуется порядка 100 000 книг — столько их у профессора Иванова наверняка нет.

[illegible]нт» для младших школьников
[illegible] «Квант» № 6)

1. См. рис. 10.

2. $93989+7492+7492=108973$.

3. Не играли. Доказательство. В турнире с 7-ю участниками играется 21 партия, с 8-ю участниками — 28 партий, с 9-ю участниками — 36 партий. Так как было сыграно больше 21 партии, число участников турнира было больше 7, а так как было сыграно меньше 28 партий, число участников, закончивших турнир, было меньше 8, а всего участников — меньше 10. Значит, в турнире играли 8 или 9 шахматистов. В обоих

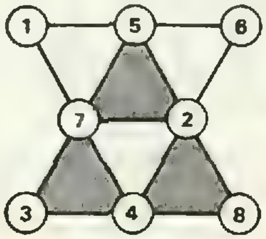


Рис. 10.

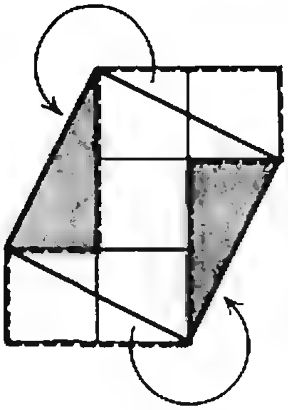


Рис. 11.

случаях осталось несыгранными нечетное число партий (5 или 13), а если бы Женя и Саша между собой уже сыграли, то несыгранных партий осталось бы четное число (поровну у Саши и Жени).

4. 1988. Доказательство. Пусть число 2^{1987} содержит n цифр, а число 5^{1987} содержит k цифр. Тогда

$$10^{n-1}<2^{1987}<10^{n} \text{ и } 10^{k-1}<5^{1987}<10^{k}.$$

Отсюда $10^{n+k-2}<10^{1987}<10^{n+k}$, значит, $k+n-2<1987<k+n$, т. е. $1987=k+n-1$, отсюда $k+n=1988$.

5. Сначала развернем коробку на плоскость, сделав соответствующие разрезы (см. рис. 11), а потом отрежем два треугольника. Приставив их к оставшейся части, получаем нужный квадрат.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

Д. Фельдман (п. Черноголовка Московской обл.) **89, 92, 96, 97, 01**; *Н. Фендеров* (Калининград) **01**; *А. Фокин* (Москва) **92**; *А. Фридлянд* (Саратов) **97, 01, 02**; *М. Фурман* (Ташкент) **97**; *С. Фурсиков* (Куйбышев) **97**; *Б. Хакимджанов* (Ташкент) **97**; *И. Халиков* (п/о Машад Наманганской обл.) **96, 02**; *В. Харламов* (Ленинград) **97**; *Б. Хасин* (Кимры) **97**; *И. Химони* (Днепропетровск) **97, 01, 02**; *А. Хмельницкий* (Киев) **92**; *С. Храпов* (Коломна) **92, 02**; *О. Цодиков* (Артемовск Донецкой обл.) **92, 96**; *О. Чанов* (Брест) **92, 96**; *Д. Черепнин* (Винница) **96**; *М. Чернодуб* (Киев) **97, 02**; *Е. Чернышев* (Ташкент) **01**; *А. Чмутов* (Харьков) **02**; *Д. Чокин* (Алма-Ата) **01**; *А. Шаргородский* (Котовск Одесской обл.) **97**; *Ю. Шарлай* (Харьков) **96, 97, 01, 02**; *О. Шведов* (Москва) **92, 97, 01, 02**; *Е. Швец* (Черновцы) **92, 97, 02**; *А. Швороб* (Барановичи) **96, 97, 01, 02**; *С. Шинкевич* (Березники) **89, 92, 96, 97, 01, 02**; *С. Широков* (Ульяновск) **97, 02**; *З. Шония* (Тбилиси) **97**; *С. Штовба* (Винница) **89, 92**; *А. Эгамбердиев* (Ургенч) **02**; *А. Экдышман* (Белгород) **92, 96**; *Б. Эшганов* (Шават) **02**; *Ф. Юсупов* (Верхняя Тура) **97**; *А. Яблоков* (с. Рождественское Костромской обл.) **92**; *И. Ягольницер* (Черновцы) **92**; *Т. Яровой* (Москва) **01**; *И. Ясников* (Тольятти) **92**; *Е. Яхнич* (Минск) **01**.

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Т. Н. Кольченко, Н. С. Кузьмина, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский

Фото представил
А. С. Жирный

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Д. Дорохова

Сдано в набор 16.07.88. Подписано к печати 26.08.88
Т-17818. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 27,80. Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 7,96
Тираж 189 700 экз. Цена 40 коп. Заказ 1824

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

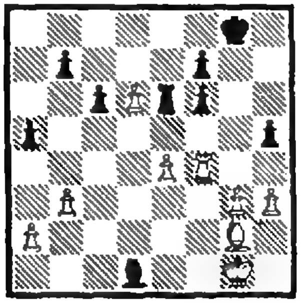
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

КОЛЛЕКЦИОНЕР ШАХМАТНЫХ КОМПЬЮТЕРОВ

Московский любитель шахмат А. Сутин уже несколько лет коллекционирует шахматные компьютеры знаменитых фирм. И не только собирает, но и проводит с ними безлимитный матч-сеанс с нормальным контролем времени.

Приведем два образца из безлимитного матча Сутина. В обеих партиях машинам был установлен наивысший уровень.



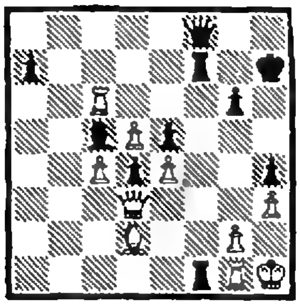
«Мефисто» — А. Сутин

Финал, придуманный ЭВМ, представляет собой истинный этюд. В этой позиции владелец машины не сомневался, что благополучно забирает пешку «d», получая хорошие шансы на выигрыш. Однако... 27. Л:f6!! Л:f6 28. e5! «Мефисто» играет просто с мефистофельской силой! Ввиду угрозы d6—d7 черные вынуждены вернуть ладью, а в слоновом эндшпиле им не на что надеяться. 28... Л:d6 29. ed Kpf8 30. Ce4! Ce2 31. Kpf2 Cb5 32. a4! Ca6 33. Kpe3 c5. 34. Cd3! C:d3 35. Kp:d3 Kpe8 36. Kpc4 b6 37. Kpb5 Kpd7 38. Kp:b6 Kp:d6 39. Kp:a5 h4 40. g4 f6 41. Kpa6. Черные сдались.

«Челленджер» — А. Сутин
Принятый ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 dc 4. e3 e6 5. Kc3 c5 6. C:c4 a6 7. 0—0 b5 8. Cb3 Cb7 9. Фe2 Kbd7 10. Лd1 Cd6 11. h3 0—0 12. e4 cd 13. Л:d4 Cc5 14. Лd1 b4 15. e5 C:f3 16. gf bc 17. ef Фc7! Эта позиция встретилась в партии Лехтинский — Добровольский на турнире в Польше (1982 г.). Гроссмейстер Лехтинский отказался от 18. fg ввиду 18... Фg3+, но проиграл и при другом ответе. Сутина, конечно, устраивал такой поворот событий, но компьютер удивил его. 18. fg! Фg3+ 19. Kpf1 Ф:h3+ 20. Kpg1 Kp:g7 21. C:e6! fe. Если бы черные знали, какие неприятности их ожидают, они бы взяли на e6 ферзем, после 21... Ф:e6 22. Ф:e6 fe 23. Л:d7+Лf7 24. Л:f7+Kp:f7 25. bc партия заканчивалась вничью. 22. Л:d7+ Kpf6. На первый взгляд белые отдали слона от отчаяния, но компьютеру такие эмоции не свойственны. 23. Cg5+!! Kp:g5 24. Фe5+ Фf5. Не помогает и 24... Лf5 25. f4+! Kpg4 26. Лg7+ Kpf3 27. Ф:c3+ с победой. 25. Фg3+Kph5 26. Л:h7+!! Фейерверк жертв. На немедленное 26. Kpg2 следовала реплика 26... Ф:f3+27. Ф:f3+Л:f3 28. Kp:f3 cb. 26... Ф:h7 27. Kpg2!! После серии жертв все решает один тихий ход. Мат неизбежен, черные сдались.

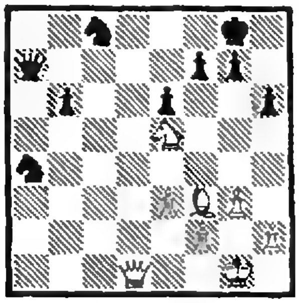
Надо сказать, что А. Сутин не только играет с компьютерами. Его «Плейматик» внимательно изучил все встречи последнего поединка между Г. Каспаровым и А. Карповым (Севилья, 1987 г.) и сделал ряд ценных замечаний.



А. Карпов — Г. Каспаров

В этой позиции (23-я партия) Каспаров допустил тактический просчет — 50... Л7f3??, и после 51. gf Л:f3 52. Лc7+ Kph8 53. Ch6!! выяснилось, что жертва ладьи некорректна. После 53... Л:d3 54. C:f8 Л:h3+ 55. Kpg2 Лg3+ 56. Kph2 Л:g1 57. C:c5 d3 черные сдались (белые играют 58. Ce3, отдают слона за пешку, и проходные «c» и «d» неудержимы).

«Плейматик» за 8 минут нашел белым ход 53. Ch6, а за черных вместо ошибочного 50... Л7f3 избрал 50... Cb4!, что сохраняло шансы на ничью.

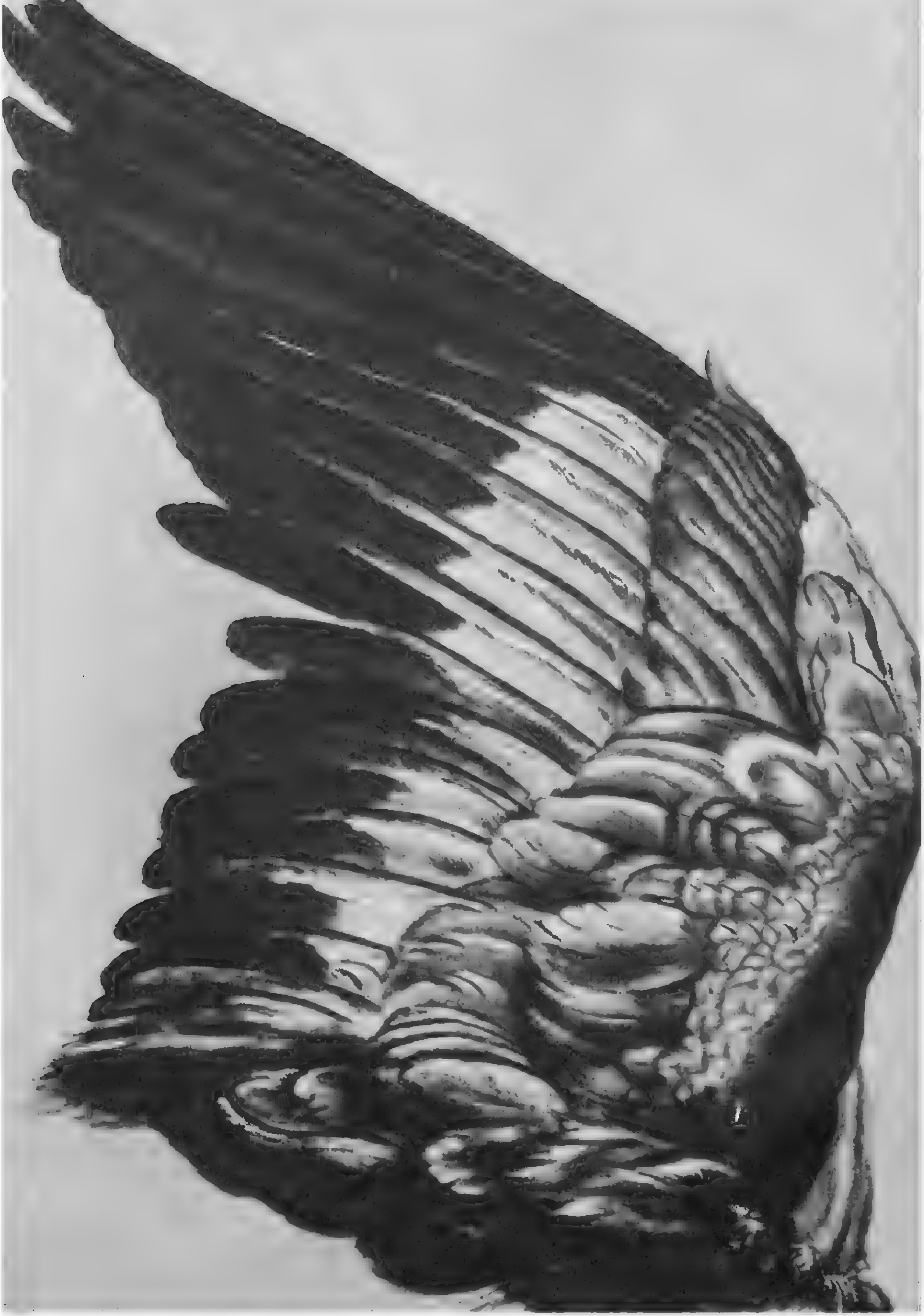


Г. Каспаров — А. Карпов

А эта позиция из 24-й, заключительной схватки (после цейтнотной ошибки белых 33. Фb1—d1), когда А. Карпов получил возможность вернуть себе шахматную корону ходом 33... Kc5! (34. Фd8+ Kph7 35. Ф:c8 Фa1+ и 36... Ф:e5). Правда, белые выигрывали ходом раньше, продолжая 33. Фb5! или 33. Ch5! Компьютеру было предложено разобраться в этой запутанной ситуации. И «Плейматик» блестяще справился с заданием. Сначала он обнаружил спасительную для черных реплику 33... Kc5, а за белых на предыдущем ходу он избрал 33. Ch5! В ответ на 33... g6 машина пожертвовала на g6 фигуру и затем доказала, что во всех вариантах белые берут верх.

Осталось напомнить, что Карпов в цейтноте тоже ошибся, сыграл 33... Ke7? и после 34. Фd8+ Kph7 35. K:f7 Kg6 36. Фe8 Фe7 37. Ф:a4 Ф:f7 38. Ce4 Kpg8 39. Фb5 Kf8 40. Ф:b6 Фf6 41. Фb5 Фe7 партия была отложена в трудном положении для черных. При доигрывании Каспаров взял верх, сравнял счет и сохранил звание чемпиона мира.

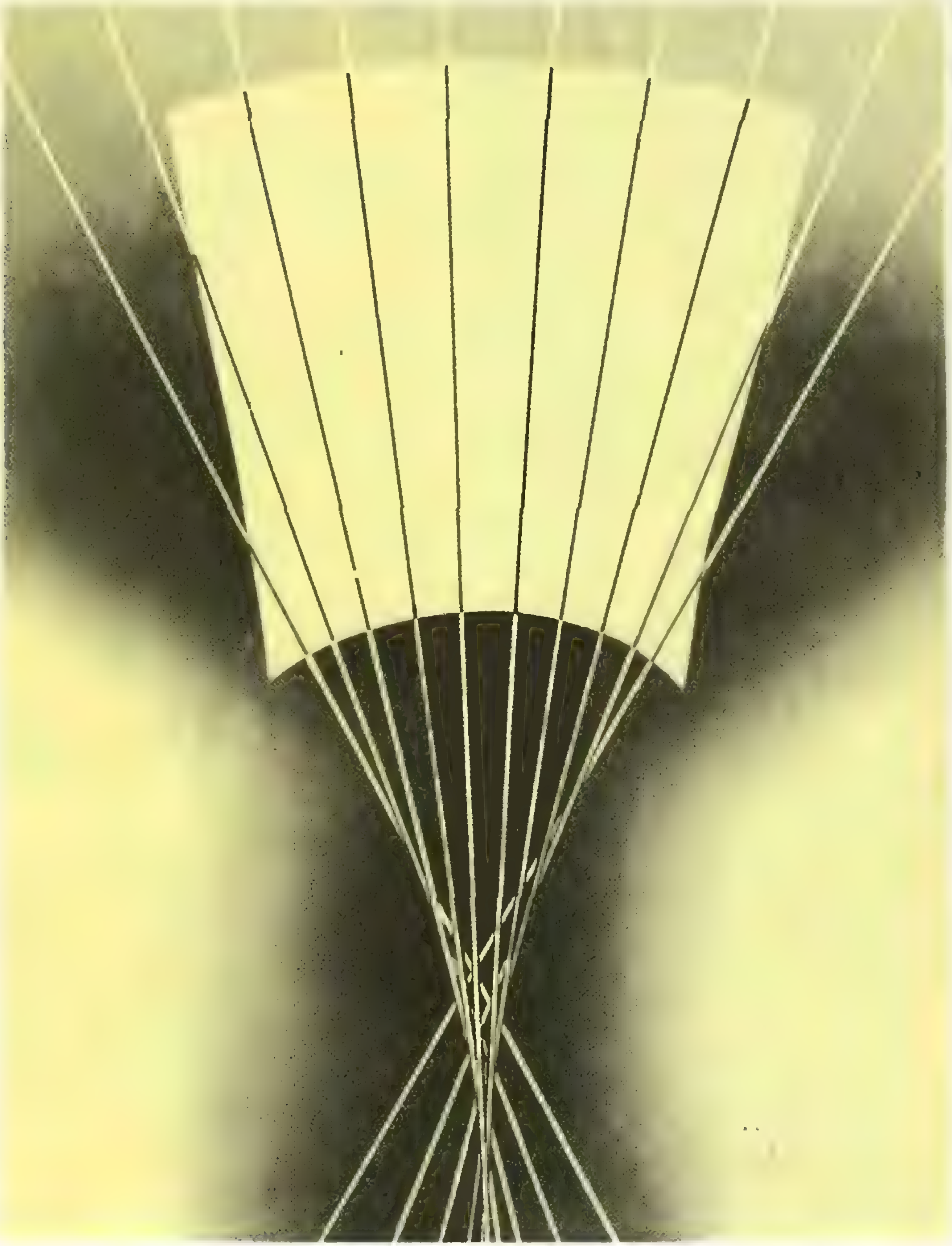
Е. Я. Гик



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Поверхность, представляющая собой изогнутый лист бумаги, вмещает в себя множество прямолинейных отрезков. Если продолжить все эти отрезки, то в пространстве возникает замечательная поверхность, называемая «ласточкин хвост». Подробнее см. в статье «Геометрия листа бумаги», с. 17.



НОМЕР
10

Квант

Основан в 1970 году

10

1988

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 *Р. Пайерлс.* Ранние годы квантовой механики
10 *С. Л. Табачников.* Геометрия уравнений
17 Сергей Львович Соболев
18 *А. В. Бялко.* Химическое разнообразие небесных тел

Задачник «Кванта»

24 Задачи М1126 — М1130, Ф1138 — Ф1142
25 Problems M1126 — M1130, P1138 — P1142
27 Решения задач М1106 — М1109, Ф1118 — Ф1122

32 **Калейдоскоп «Кванта»**

«Квант» для младших школьников

39 Задачи
40 *М. Д. Коваленко.* Градусник для Солнца

Школа в «Кванте»

Математика 9, 10:

45 *А. Д. Бендукидзе.* Ферма ищет экстремумы...
38 Избранные школьные задачи

Практикум абитуриента

49 *С. А. Гордюнин, П. Л. Горьков.* Преломление света

Информация

54 III Научно-техническая конференция школьников в МФТИ
63 Всесоюзный конкурс «Юный программист»

Олимпиады

56 XIV Всероссийская олимпиада школьников

58 **Ответы, указания, решения**
23 **Нам пишут**

Смесь *(16, 48)*

Наша обложка

1 Чтобы увидеть Солнце таким сказочно красивым, достаточно подняться на ... несколько сот километров над поверхностью Земли. Оттуда же можно и измерить температуру Солнца. О том, какими приборами и как это делают, читайте в статье М. Д. Коваленко «Градусник для Солнца».

2 Репродукция картины советского живописца К. С. Петрова-Водкина (1878—1939) «Утренний натюрморт». Не правда ли, она как будто специально иллюстрирует основные законы геометрической оптики? Один из них подробно обсуждается в статье С. А. Гордюнина и П. Л. Горькова «Преломление света».

3 Шахматная страничка.

4 Головоломка «Минус-кубик».

© Издательство «Наука».
Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988

РАННИЕ ГОДЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Имя Рудольфа Пайерлса хорошо известно школьникам 60-х годов. Можно утверждать, и это не будет преувеличением, что его книга «Законы природы» привела многих из них в физику.

Для профессионалов имя профессора Пайерлса, члена Лондонского королевского общества, связано с давно ставшими классическими результатами в области теории твердого тела, математической физики, квантовой механики, ядерной физики. Здесь трудно более подробно перечислить весь спектр проблем, которыми он занимался в течение своей долгой научной деятельности.

Уроженец Берлина, большую часть своей жизни Рудольф Пайерлс провел в Англии. Работал в университетах Манчестера, Кембриджа, Бирмингема, Оксфорда. Во время второй мировой войны вел исследования в области атомной энергии в Лос-Аламосе (США).

Осенью прошлого года Рудольф Пайерлс побывал в Москве в качестве гостя Академии наук СССР. Большое внимание научной общественности привлекла его лекция, посвященная истории создания квантовой механики и ее творцам. Зал Института физических проблем был заполнен физиками разных поколений — от студентов до ровесников Пайерлса. За свою долгую жизнь (сейчас ему 81 год) сэр Рудольф Пайерлс встречался и работал едва ли не со всеми выдающимися физиками XX века. О них — своих учителях и коллегах — он и рассказал в этой лекции. Это был рассказ очевидца, пусть беглый, но насыщенный живыми деталями, меткими доброжелательными характеристиками и тонким юмором. Ученые, чьи имена уже давно вошли в учебники и энциклопедии, предстали перед слушателями живыми людьми, каждый со своими характерными особенностями и причудами. Это дало возможность почувствовать атмосферу того замечательного периода, когда буквально в считанные годы был заложен фундамент современной физики.

Свою лекцию Р. Пайерлс читал на русском языке, и особенности его стиля мы попытались сохранить в литературной записи лекции, сделанной И. Н. Арутюнян.

Р. ПАЙЕРЛС

Может показаться нескромным, что я начну с рассказа о себе. Обычно так не делают, но речь пойдет о моих личных впечатлениях, и потому я должен сначала представиться. В университет я поступил в 1925 году. Сейчас мне хотелось бы иметь возможность сказать, что я выбрал физику, потому что она была интересным предметом и бурно развивалась. Однако это было бы нечестно. На самом деле я хотел быть инженером. То было время, когда развивалась авиация, новые автомобили, и было естественным, что мальчик хочет стать инженером. Но мне отчего-то сказали, что на это я не гожусь, что хорошим инженером не буду. Поэтому я выбрал, как мне казалось, самое близкое к своей мечте — физику.

Я поступил в университет в Берлине — городе, где был мой дом. Родители считали, что я слишком молод, чтобы уезжать далеко. Там я посещал лекции Макса Планка. Это были самые скверные лекции, которые я когда-либо слушал. Он читал из своей книги по теоретической физике буквально. Если у вас был экземпляр, то вы могли проследить текст по строчкам. Планк был очень знаменит, но мы тогда не знали еще, чем именно. Впервые новые слова про постоянную Планка, атом Бора и всякие такие вещи я услышал на лекциях Вальтера Боте (потом он стал ядерным физиком). Там мне стало ясно, что в физике происходит что-то новое, весьма интересное.

Через год я решил, что стал уже достаточно взрослым, чтобы покинуть Берлин. Я переехал в Мюнхен, где тогда работал самый лучший учитель по теоретической физике — Арнольд Зоммерфельд. Для теоретической физики это было замечательное время. Создавалась квантовая механика, и сейчас очень трудно представить, насколько быстро все произошло — фактически за два года.

Именно в этот период я поступил в университет и уже через год мог читать работы по квантовой механике. Но к ее формированию я опоздал. Если бы можно было повторить жизнь, то я хотел бы родиться на год или на два раньше. Феликс Блох потом мне объяснил, что не всякий человек способен создавать новые теории и что мы появились как раз вовремя, чтобы их применять. По-моему, он был прав. Это было самое подходящее время, чтобы взять какую-нибудь проблему, при решении которой старая физика приводила к противоречиям, и применить к ней новые методы.

Итак, я приехал к Зоммерфельду. Зоммерфельд был маленького роста, но имел огромные усы. Мы иногда называли его «верхняя половина и немного еще». Зоммерфельд выглядел довольно важным и у него было звание Geheimrat — тайный советник. Это можно сравнить с современным званием академика, и он любил, когда его так называли. Один американский студент сначала этого не знал и обращался к Зоммерфельду просто «герр профессор». Через неделю или две ему все объяснили, и при очередной встрече он уже обратился к Зоммерфельду «Herr Geheimrat». Зоммерфельд это отметил, сказав, что его немецкий заметно улучшился за последнее время.

Но у нас в институте Зоммерфельд совершенно не был Geheimrat, мы никогда его так не называли. Он был замечательным учителем и для студентов, и для аспирантов, читал замечательно ясные лекции. Они опубликованы и до сих пор интересны; их и теперь полезно читать. Зоммерфельд всегда настаивал, что теоретическая физика как наука должна все-таки основываться на экспериментальных данных. Он никогда не давал нам забыть, на каких именно данных основан тот или иной теоретический закон.

Зоммерфельд очень хорошо знал математику, написал множество чисто математических работ, очень полезных, но никогда не был слишком педантичным. Помню, как он читал лекцию по электронной теории ме-

Зоммерфельд (слева) и Паули. Паули выглядит очень вежливым и скромным (обычно это бывало не так!). Таким он был всегда со своим бывшим профессором. Сам Паули это называл «школьным комплексом».

Зоммерфельд на лыжах в горах. Во всем его облике нет и следа титула Geheimrat.

таллов и в вычислениях на доске пропустил множитель 2. Мы это заметили, нам казалось это не очень важным. Наконец, он подошел к закону Видемана — Франца, численный коэффициент в котором общеизвестен. Тут-то он и увидел, что получается неправильный результат. Мы же с интересом наблюдали, что произойдет. Заметив ошибку, Зоммерфельд не останавливаясь произнес, что теперь надо учесть как электроны, движущиеся слева направо, так и электроны, движущиеся справа налево, — и поставил в нужном месте недостающий коэффициент 2.

...Зоммерфельд имел в горах маленькую хижину для отдыха, куда он приглашал иногда аспирантов и преподавателей. Там он дал мне возможность выступить на моем первом семинаре. Как раз появились работы Дирака и Йордана по теории преобразований. Зоммерфельд сказал: «Мы еще не успели понять эти работы, и, может быть, вы сумеете их нам объяснить». Это было все-таки тяжелой задачей для студента, который провел в университете всего два года. Однако я с удовольствием за это взялся. Не знаю, чему научились другие участники семинара, но сам я научился многому.

В Мюнхене в это время был аспирантом Ханс Бете. Он был на год старше меня, а в таком возрасте это — большая разница. Бете казался мне мудрым человеком, у которого можно многому научиться. Мы с ним очень подружились. Он до сих пор старше меня на один год. Сейчас это не так уж важно, но я все еще могу многому у него научиться.

Я провел в Мюнхене полтора года и с удовольствием остался бы еще, но Зоммерфельда пригласили в Америку на полгода-год. Я же по совету Зоммерфельда уехал в Лейпциг работать у Гейзенберга.

Гейзенберг был совершенно не похож на Зоммерфельда. Никакого Geheimrat там и в помине не было. На вид, во всяком случае, он был очень скромным человеком. Типично то, что раз в неделю устраивался семинар, а перед семинаром всегда был чай. Сам профессор шел в кондитерскую и выбирал подходящие пирожные. По крайней мере я запомнил это именно так. Правда, впоследствии один наш коллега, бывший тогда ассистентом у Гейзенберга, уверял меня, что ходить за пирожными было его задачей. В этом есть смысл, так как он был родом из Вены и знал толк в таких вещах. Наверное, я помню тот период, когда его не было в Лейпциге.

Гейзенберг очень любил играть в пинг-понг и был очень хорошим игроком. В свободное время мы все играли. Один раз приехал китайский физик, который смог побить Гейзенберга. Это стало сенсацией. Я потом слышал, что когда Гейзенберг ехал на пароходе из Америки в Японию, то всю дорогу упражнялся, чтобы больше такая ужасная вещь не повторилась.

Гейзенберг не любил чистую математику и рассматривал ее только как необходимый инструмент. Его метод состоял в следующем. Размышляя над проблемой, он сначала угадывал, каким будет решение, а потом подбирал математический метод, который именно это решение дает. Хороший метод, если у вас такая же мощная интуиция, как у Гейзенберга. Для других такой подход немного опасен.

В Лейпциге мне удалось написать свою первую работу. Она касалась так называемого аномального эффекта Холла.

Когда по кусочку металла идет ток и все это помещается в магнитное поле, то появляется поперечное напряжение. Ясно, что так происходит из-за отклонения электронов в магнитном поле. Но в некоторых металлах эффект имеет противоположный знак. Сейчас мы объясняем это тем, что в таких веществах ток переносится не электронами, а дырками. Но в то время ясности в этом вопросе не было, и Гейзенберг мне просто сказал, что Блох построил электронную теорию металлов, и не мог бы я ее применить к этой проблеме. К моему большому удовольствию оказалось, что все это действительно можно было сделать, я и решил поставленную задачу.

В Лейпциге я провел год. Гейзенберга пригласили в Америку, и он взял отпуск. По его совету я переехал в Цюрих, чтобы работать у Паули. У него я и написал свою диссертацию. Должен сказать, что я очень благодарен этой системе отпусков и приглашений в Америку, благодаря которой у меня получилась такая замечательная комбинация учителей.

Как известно, Паули был знаменит еще и тем, что делал всем очень невежливые замечания. Один из самых острых выпадов был сделан Паули в разговоре с Эрнстом Штюкельбергом. Тот сказал: «Паули, не говорите так быстро, я не могу так быстро думать, как вы». Паули ответил: «Это ничего, что вы думаете медленно. Я возражаю, когда вы публикуетесь быстрее, чем можете думать».

Кто-то показал ему работу молодого теоретика, зная, что работа не слишком хороша, но желая все-таки узнать мнение Паули; тот прочел работу и сказал грустно: «Это даже не неверно».

Цюрих, 1930 год. Ландау (слева) по своему обыкновению делает смешные гримасы. В середине В. А. Амбарцумян, справа — М. П. Бронштейн (?).

У Паули была такая привычка: ходить вечером в кино, на концерт или что-нибудь такое. Возвращался он часов в 11 и сразу же садился работать. Работал Паули довольно долго и потому поздно вставал. Однажды его пригласили на заседание в 9 часов утра, но он отказался, сказав: «Нет, нет, так долго без сна я не могу оставаться».

Как-то раз Паули был в чужом городе и спросил местного физика, как ему найти кинотеатр. Тот объяснил и на следующий день спросил у Паули, удалось ли ему добраться. Паули ответил: «Вы выражаетесь вполне понятно, если не говорите о физике».

Я провел у Паули три года, и мне не раз приходилось выслушивать подобные вещи. Но это было уже не очень тяжело. Никто долго на Паули не обижался, вероятно оттого, что он так же критически относился к самому себе, к своим собственным идеям. Один раз он объяснил мне, почему он это делает. По его мнению, есть настолько чувствительные люди, с которыми можно жить, только наступив достаточное число раз на их «больную мозоль». Правда, я не думаю, чтобы это было настоящей причиной.

Гамов и Ферми.

...У нас в Цюрихе два раза был Ландау. Первый раз он приехал в январе 30-го года. В то время не было дипломатических отношений между Швейцарией и СССР. Ему дали разрешение на две недели, потом продлили срок еще на две недели. Все очень старались этого добиться. Но в конце концов он вынужден был уехать. Тогда он пошутил: «Ленин был в Швейцарии несколько лет, но революция здесь не началась. Очевидно, они боятся, что это смогу сделать я». Через год он приехал со стипендией Рокфеллера, и тогда уже никаких проблем не было: он мог оставаться столько, сколько хотел. Мы работали вместе. Ландау был еще очень молодым, но уже очень тщательным физиком. Когда появлялась какая-нибудь работа, которая его интересовала, то он ее не читал, а сразу начинал вычислять сам. И если он соглашался с тем, что там написано, то считал работу хорошей. Он все любил систематизировать. Например, он разделил физиков на разные классы: в первый класс у него попали Бор, Зоммерфельд; Эйнштейн был в специальном классе, сам по себе. Себя же Ландау скромно поместил во второй класс. Так же «систематически» он относился и к другим вопросам жизни.

Ландау очень не любил бороду, говорил, что это — пережиток викторианских времен, особенно у молодых людей. Среди нас был один физик, который не носил бороды, но имел очень длинные бакенбарды. Ландау это тоже считал буржуазным и, позвонив его жене, спросил: «Когда вы убедите своего мужа сбрить эти смешные бакенбарды?» Он утверждал, что на Западе, в Цюрихе, больше бород, чем в России, в Ленинграде. Мы заключили пари и сосчитали на улице, сколько бород мы встретили. Потом, когда я приехал в Ленинград, мы провели такой же подсчет и нашли, что в Ленинграде бород оказалось больше.

У Нильса Бора в Копенгагене. Бор справа с мячом в руках. Он был очень хорошим футболистом, хотя и не таким хорошим, как его брат математик Харольд Бор. Тот был почти профессионал. Рассказывают, что Х. Бор ехал как-то со своей матерью в трамвае. Они во время поездки не общались, и вышел Харольд раньше нее. Тогда к ней обратился один из пассажиров и сказал: «Знаете, кто сейчас с нами ехал? Это знаменитый футболист Харольд Бор!»
На лужайке видны дети Бора и среди них — Оге Бор, тоже будущий Нобелевский лауреат.

Я выиграл пари, а Ландау пытался объяснить это тем, что шла коллективизация и много крестьян переехало в город.

Ландау был уверен, что только молодые теоретики могут сделать полезные вещи. Правда, позже он изменил этой идее. Как-то мы разговаривали, и выплыло имя одного теоретика, о котором он не слышал. Узнав, что ему 27 лет, Ландау сказал: «Такой молодой и уже такой неизвестный!»

Кроме Ландау, в Цюрихе были другие люди, включая Георгия Гамова. Гамов тогда уже был знаменит, он тоже был большим юмористом и любил всяческие шутки. Как-то мы пошли в горы и попали на вершину пика с довольно интересным названием. Там Гамов вытащил из кармана листок бумаги — это было письмо в журнал «Nature» о какой-то ядерной реакции, которое он не совсем закончил. Гамов сидел на вершине и кончал свое письмо. Написав последние строчки, он поставил название пика, где они были написаны, и поблагодарил своих спутников за предоставленную возможность там работать.

...В те времена, точно так же, как и сейчас, физики любили путешествовать, ездить на конференции, сессии. Дорога тогда, правда, не оплачивалась, поэтому зачастую приходилось сидеть всю ночь в углу железнодорожного вагона третьего класса. Но когда я получил приглашение на съезд Физического общества в Одессе, то по крайней мере внутри страны ездил с большим комфортом, как гость. Меня позвал туда Яков Ильич Френкель, который прочел мои работы.

Одним из любимых мест для поездок был Копенгаген, где работал Нильс Бор. Он был замечательным человеком. Бор ненавидел обижать людей, но в то же время не мог

Моя жена, я и Дирак в зоологическом саду. Дирак совершенно серьезно бьется над проблемой, каких еще животных нам следует посмотреть.

позволить, чтобы было сказано что-либо, противоречащее истине. И из этих двух качеств получалось странное сочетание. Так, один раз Бор сказал: «Я говорю это не для критики, но это — полная ерунда». Еще как-то он сказал, что ясность и истина — дополнительные понятия, и действительно в своих работах он скорее приблизился к границам истины.

Процесс написания работ у Бора был довольно сложным. Начинался он с того, что Бор диктовал, а кто-то из гостей должен был все записывать. Потом начиналась правка, изменялись выражения, чтобы все написанное было безусловно верным. Изменений было много, страницы переписывались, потом перепечатывались на машинке, затем снова правились и т. д. Наконец, все посылалось в журнал датской Академии, где работы Бора, разумеется, очень ценились. После чего начиналась работа над корректурами, число которых доходило иногда до 16.

Очевидно, так Бор относился не только к словам. Как-то он пришел посмотреть новое здание, которое строилось для института. Мастер, который его хорошо знал, сказал: «Профессор Бор, вы видите эту стену? Если вы хотите ее опять передвинуть, то решайте скорее, так как через три часа бетон застынет».

Как и полагается профессору, Бор был довольно рассеянным. Я помню, что во время разговора он все время курил сигары. Курит — и вдруг спрашивает, есть ли спички. Ему дают спички. Он пытается зажечь сигару, не прерывая разговора, а это довольно трудно. Потом он клал спички в карман, а через пять минут снова задавал тот же вопрос, и все начиналось сначала. Я долго хранил закопченный кусочек мела: он как-то держал сигару и мел в одной руке.

...В это время начались неприятности в Германии, и в Копенгагене велись разговоры не только о физике, но и о том, как найти работу для ученых из Германии и Австрии. Для ученых это вообще было нелегкое время. Был экономический кризис, университеты не расширялись, и место освобождалось, когда кто-то уходил в отставку или умирал. Докторская диссертация совсем не гарантировала места для научных исследований. У меня была стипендия Рокфеллера на год, и я мог, уезжая из Цюриха, половину времени провести в Риме, а половину — в Кембридже. До меня так уже сделал Ханс Бете, который провел зиму в Кембридже, а лето — в Риме. Я поступил наоборот, и до сих пор считаю, что нашел лучшее решение.

В Риме мне довелось встретиться с Энрико Ферми, который тоже был замечательным физиком. Когда его спрашивали о какой-то проблеме, то почти всегда он доставал с полки книгу, где эта проблема уже была им решена. В основном они были простые — Ферми не любил сложных проблем. Но тут встает вопрос: что называть простыми проблемами? Не становились ли они простыми уже после того, как Ферми их решил?

Самое большое впечатление от Ферми создалось у меня позже, уже в Лос-Аламосе, во время испытания атомной бомбы. Всем, конечно, хотелось узнать, какова мощность бомбы. Для ее определения была масса инструментов, но на это требовалось какое-то время. А Ферми приготовил маленькие кусочки бумаги, и, когда к нам пришла взрывная волна (мы находились примерно в 15 километрах от места взрыва), он отпустил эти кусочки. По расстоянию, на которое они улетели, он сумел довольно быстро определить мощность взрыва. Я не знаю, что меня больше всего тогда поразило: идея метода или то, что он точно определил момент, когда надо отпускать бумажки. Уверен, что я на его месте или отпустил бы кусочки слишком рано, или забыл бы отпустить их вообще.

После Рима, как я уже говорил, мы с женой поехали в Кембридж, где самым интересным был контакт с Полем Дираком. Дирак был очень вежлив и к нам отнесся с исключительным гостеприимством. У нас не было машины, и он, зная это, возил нас на своей, которой очень гордился. Шутили, что у Дирака-водителя была особенность: скорость его машины принимала только два значения — нулевое и максимальное.

Дирак всегда удивлял своими странными реакциями. Однако, если потом как следует подумать, то оказывалось, что его слова или поступки абсолютно логично вытекали из предыдущего. Вот один из примеров. Как-то раз в Кембридж приехал один историк науки и захотел познакомиться с Дираком. Его привезли в колледж. Дирак обедал, возникло некоторое молчание, которое надо было как-то разрядить. Историк завел разговор про погоду, отметив, что на улице ветрено. Дирак помолчал, затем поднялся, подошел к двери, открыл ее и прислушался. Только убедившись в истинности сказанного, он выразил свое согласие односложным «да».

...Заканчивая выступление, хочу напомнить, что я говорил не как историк науки, точно взвешивающий слова и расставляющий правильные акценты. Это были впечатления свидетеля славного периода создания одной из величайших физических теорий — квантовой механики и воспоминания о ее творцах, с которыми мне посчастливилось встречаться и работать.

ГЕОМЕТРИЯ УРАВНЕНИЙ

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Читатель, вероятно, видел забавные картинки, глядя на которые трудно решить, что же именно на них изображено. Вот перед вами ваза причудливой формы; вдруг вместо вазы вы видите два профиля, обращенные друг к другу... В математике тоже порой удается взглянуть по-новому на привычную вещь и этот новый взгляд часто оказывается плодотворным.

Уравнение $x^2+px+q=0$

Что вы видите, глядя на равенство $x^2+px+q=0$? Ну конечно, квадратное уравнение с параметрами p и q, т. е. семейство квадратных уравнений, по одному для каждой пары значений p и q. Посмотрим на уравнение $x^2+px+q=0$ иначе — как на линейное относительно переменных p и q; x в таком случае будет параметром. Например, при $x=-1$ получится уравнение $1-p+q=0$, а при $x=2$ — уравнение $4+2p+q=0$. Вообще, при каждом x получится свое линейное уравнение с переменными p и q. Линейное уравнение задает на плоскости с координатами (p, q) прямую. Следовательно, уравнение $x^2+px+q=0$ задает на (p, q)-плоскости семейство прямых — по одной для каждого значения x.

Нарисуем несколько прямых этого семейства — рисунок 1. Глядя на этот рисунок, трудно удержаться от соблазна провести кривую, которая касается всех изображенных прямых. Такая кривая, похожая на параболу, изображена на рисунке 2. Эта кривая называется *огибающей* данного семейства прямых. Что огибающая в данном случае действительно будет параболой, мы увидим чуть позже. А пока будем рассматривать семейство прямых $x^2+px+q=0$ на (p, q)-плоскости как семейство касательных к этой огибающей.

Кстати, существование огибающей не является специфическим свойством семейства прямых, изображенных на рисунке 1. Для любого однопараметрического семейства прямых общего положения, т. е. такого семейства, в котором прямые с близкими значениями параметра не параллельны и не проходят по три через одну точку, можно построить огибающую. Более того, огибающая существует не только у семейства прямых, но и у семейства кривых на плоскости.

На рисунке 1 на каждой прямой написан ее «номер», т. е. то значение x, при котором уравнение $x^2+px+q=0$ задает именно эту прямую. Удобнее написать номер прямой на огибающей в точке ее касания с этой прямой. Тогда на огибающей появится шкала, «нумерующая» прямые нашего семейства (рис. 2).

Рисунок 2 можно использовать, как «машину» для решения квадратного уравнения $x^2+px+q=0$: если заданы значения p и q, нужно провести через точку с координатами (p, q) касательную к огибающей и прочитать значение корня уравнения $x^2+px+q=0$ на шкале в точке касания. В частности, число корней для данных p и q равно числу касательных, которые можно провести из точки (p, q) к огибающей (рис. 3).

Ясно, что если точка (p, q) лежит под огибающей, то таких касательных две; а если выше, то ни одной. А как обстоит дело с точками самой огибающей? Через эти точки можно провести только одну касательную. Поэтому соответствующие квадратные уравнения имеют по одному (кратному) корню.

Итак, огибающая нашего семейства прямых — это множество таких точек (p, q), что уравнение $x^2+px+q=0$ имеет кратный корень. Пора вспомнить, что мы умеем решать квадратные уравнения; в частности, знаем, что у уравнения $x^2+px+q=0$ кратный корень бывает в случае, когда $p^2=4q$. Это уравнение квадратичной параболы и задает огибающую. Поэтому кривая на рисунке 2 — парабола. Окончательный итог исследования квадратного уравнения представлен на рисунке 4.

Упражнения

1. Пусть x — число, написанное в некоторой точке шкалы на огибающей, изображенной на рисунке 2. Чему равна абсцисса этой точки?

2. Исследуйте геометрически число решений уравнения $x^2+px+q=0$ на отрезке $[-1;\ 1]$. Подсказка: проведите касательные к огибающей через точки -1 и 1.

Уравнение $x^3+px+q=0$

У читателя, возможно, возник вопрос: «А стоит ли огород городить? Ведь и так ясно, что число корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта!». Дело в том, что наш метод позволяет исследовать кубическое уравнение, решить которое гораздо труднее. Более того, он годится *для определения числа корней* и таких уравнений, которые вообще невозможно решить в радикалах. (Попутно заметим, что задача о числе корней уравнения, в отличие от задачи об их вычислении, всегда имеет решение: существует алгоритм, который по коэффициентам уравнения определяет число его корней.)

Итак, рассмотрим уравнение $x^3+px+q=0$. Оно задает на (p,q)-плоскости некоторое семейство прямых. На рисунке 5 эти прямые построены для $x=0, \pm 1/3, \pm 1/2, \pm 1, \pm 3/2$. Огибающая этого семейства прямых *изображена на рисунке 6*. Как видите, для кубического уравнения огибающая получается не гладкой кривой, а кривой с острием, или «клювом». В остальном же рисунок 6 аналогичен рисунку 2 (как и выше, на огибающую нанесена шкала значений).

Пусть заданы значения p и q. Как узнать, сколько решений имеет уравнение $x^3+px+q=0$? Нужно провести через точку (p,q) касательные к огибающей; их число равно

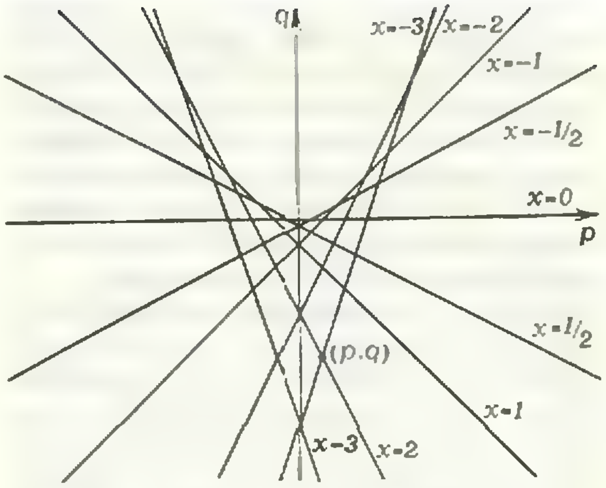


Рис. 1.

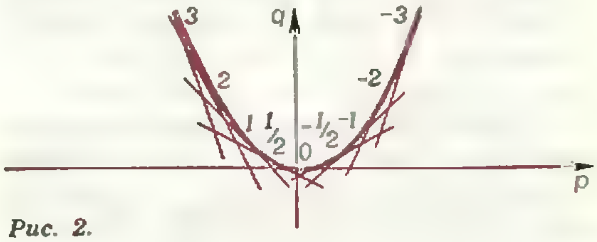


Рис. 2.

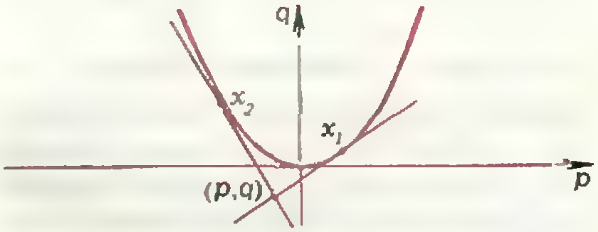


Рис. 3.

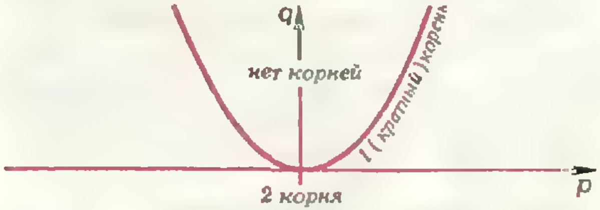


Рис. 4.

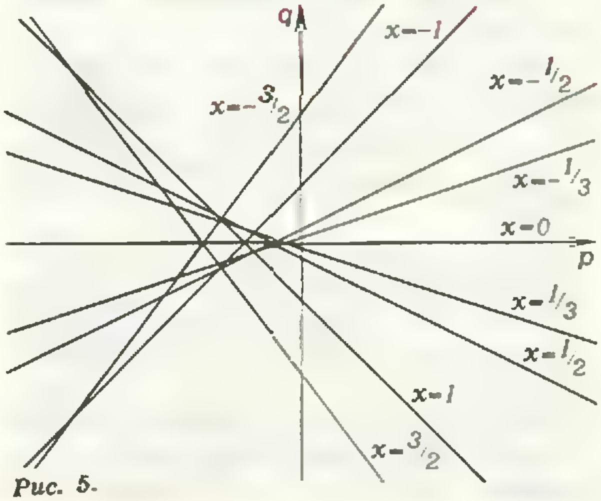


Рис. 5.

числу корней уравнения, а номера этих прямых равны корням. Следовательно, рисунок 6 — это машина для решения кубического уравнения.

Рисунок 7 показывает, как зависит число решений от положения точки (p, q). Мы видим, что в любом случае хотя бы одна касательная к огибающей найдется, поэтому

Кубическое уравнение имеет хотя бы один корень.

Окончательный итог исследования представлен на рисунке 8. На этом можно было бы поставить точку в исследовании кубического уравнения, если бы не одно обстоятельство: мы так и не знаем, каким уравнением задается кривая на рисунках 6—8.

Упражнения

3. Докажите, что любой многочлен нечетной степени имеет корень. Подсказка: найдите знак многочлена при $x=-\infty$ и $x=+\infty$.

4. Исследуйте геометрически число корней многочлена x^3+px+q на отрезке $[-1; +1]$.

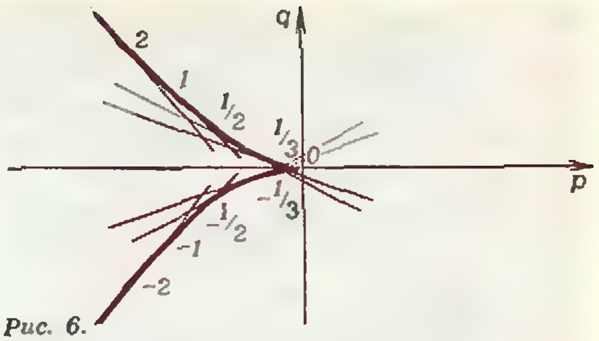


Рис. 6.

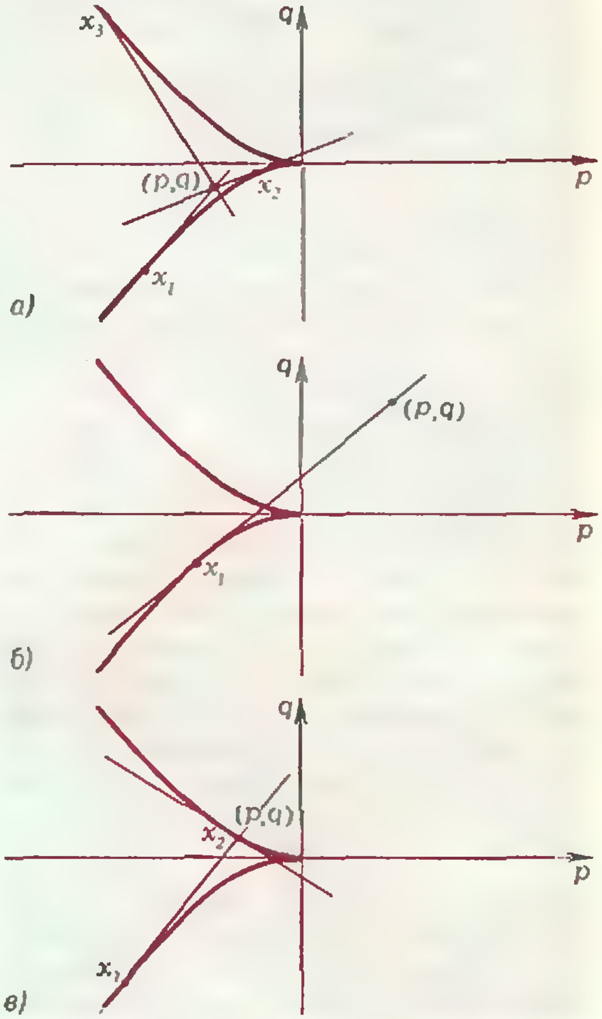


Рис. 7.

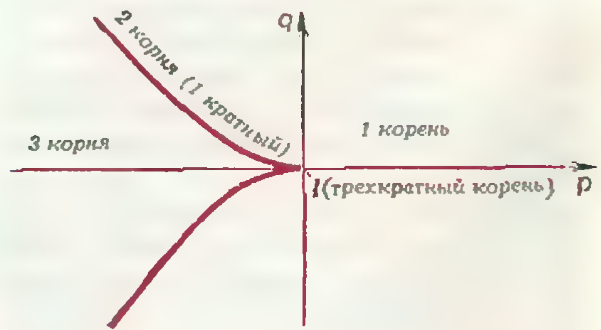


Рис. 8.

Отступление о кратных корнях

Кривая, изображенная на рисунках 6—8, состоит из таких точек (p, q), что уравнение $x^3+px+q=0$ имеет кратный корень. При таких же p и q это происходит?

Если число t — корень многочлена $f(x)$, то $f(x)$ делится на $x-t$. Если число t — *кратный корень*, то $f(x)$ делится на $(x-t)^2$. Например, 1 — кратный корень многочлена $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$.

Запишем равенство $f(x)=(x-t)^2g(x)$ и вычислим производную:

$$f'(x)=2(x-t)g(x)+(x-t)^2g'(x).$$

Если в это равенство подставить $x=t$, то правая часть обратится в нуль. Значит, $f'(t)=0$. Следовательно,

Число t является кратным корнем многочлена тогда и только тогда, когда t является общим корнем этого многочлена и его производной.

(Честно говоря, мы доказали только половину этой теоремы: если t — кратный корень, то $f'(t)=0$. Попробуйте сами доказать вторую половину теоремы.)

Применим признак кратного корня к многочлену x^3+px+q. Если число t — кратный корень, то $t^3+pt+q=0$ и $3t^2+p=0$. Выражая p из второго, а q — из первого уравнения, мы получим

$p=-3t^2$, $q=2t^3$ (t — любое число). Эти уравнения задают огибающую на рисунках 6—8 параметрически: при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ точка $(-3t^2, 2t^3)$ пробегает всю кривую с клювом. Если вам приятнее задать кривую одним уравнением, то надо избавиться от t (возводя первое уравнение в куб, а второе — в квадрат):

$$4p^3+27q^2=0.$$

Это уравнение тоже задает нашу кривую с клювом. Из уравнения видно, что q пропорционально $p^{3/2}$. Поэтому кривая называется *полукубической параболой* (если $q\sim p^3$, то парабола кубическая; у нас показатель степени вдвое меньше, поэтому парабола полукубическая).

Выражение $4p^3+27q^2$ называется *дискриминантом кубического уравнения*. От знака дискриминанта и зависит число корней уравнения.

Упражнения

5. Сколько корней у многочлена $x^3-10x+12$?

6. Исследуйте геометрически зависимость числа корней многочлена x^5+px^2+q от его коэффициентов.

7. Докажите, что уравнение $x^{1988}+px+q=0$ имеет не больше двух, а уравнение $x^{1989}+px+q=0$ — не больше трех корней.

Двойственные кривые

Рассмотрим уравнение

$$l+kp+q=0. \qquad (*)$$

Для каждой пары значений k и l это уравнение задает невертикальную прямую на плоскости с координатами p и q, причем таким образом получаются все невертикальные прямые. Значит, множество невертикальных прямых (p, q)-плоскости можно отождествить с множеством пар (k, l), т. е. с точками (k, l)-плоскости. Посмотрим на уравнение (*) еще раз. Для каждой пары значений p и q это уравнение задает невертикальную прямую на (k, l)-плоскости. Значит, точки (p, q)-плоскости можно отождествить с невертикальными прямыми (k, l)-плоскости.

Итак, у нас есть две плоскости — с координатами (p, q) и с координатами (k, l). Точки каждой из них можно воспринимать, как невертикальные прямые другой. Эти плоскости называются *двойственными*. На рисунках мы будем изображать (p, q)-плоскость синим цветом, а двойственную (k, l)-плоскость — красным. Точки на синей плоскости обозначаются заглавными буквами, прямые — строчными буквами. На красной плоскости все наоборот: прямые, соответствующие синим точкам, обозначаются теми же заглавными буквами, а точки, соответствующие синим прямым,— теми же строчными буквами. Посмотрите на рисунок 9. На нем изображены простые фигуры, состоящие из точек и прямых, и соответствующие им фигуры на двойственной плоскости.

Упражнение 8. Какие фигуры двойственны двум последним фигурам на рисунке 9?

Пусть на синей плоскости нарисована кривая γ. Хорошо бы определить соответствующую ей двойственную кривую на красной плоскости. Точки красной плоскости — это прямые синей; поэтому нужно связать с кривой γ семейство прямых синей плоскости. Вы, наверное, уже догадались, как это сделать: *с кривой γ нужно связать семейство ее касательных прямых*. Итак, определение:

Пусть γ — некоторая кривая. Двойственной кривой (на двойственной плоскости) называется кривая, состоящая из всех касательных прямых кривой γ.

Двойственная кривая обозначается через γ^*.

Конечно, в этом определении предполагается, что γ не имеет вертикальных касательных.

Определение дано, но как им пользоваться — неясно. Например, какие кривые двойственны квадратичной и кубической параболам? Можно было бы, конечно, задать параболы уравнениями, выписать уравнения касательных, найти их угловые коэффициенты k и свободные члены l и построить соответствующие кривые на (k, l)-плоскости. Однако такой путь мало привлекателен. Попробуем разобраться в поведении двойственных кривых без вычислений.

Пусть кривая γ плавно поворачивается в одну сторону (см. рис. 10,*а*). Касательная к γ тоже поворачивается, т. е. двойственная кривая движется в одном направлении. Но вот кривая γ начинает поворачиваться в другую сторону — в точке возникает *перегиб*. Что происходит с касательной? До момента перегиба касательная двигалась в одну сторону, а после перегиба — в другую. Значит, двойственная кривая γ^* меняет в момент перегиба направление движения на противоположное (см. рис. 10,*б*). На двойственной кривой возникает острие! Этих соображений уже достаточно, чтобы изобразить кривые, двойственные квадратичной и кубической параболам (рис. 11).

Упражнения

9. Как отразится на двойственной кривой наличие у кривой γ двойной касательной — рисунок 12,*а*?

10. Нарисуйте кривую, двойственную кривой на рисунке 12,*б*.

Двойственные плоскости совершенно равноправны — каждая из них отождествляется с множеством невертикальных прямых другой. А как обстоит дело с двойственными кривыми? Верно ли, что если построить по синей кривой γ красную кривую γ^*, а затем по красной кривой γ^* — двойственную ей синюю кривую $(\gamma^*)^*$, то получится исходная кривая γ? Интуиция подсказывает утвердительный ответ; чтобы обосновать его, разберемся, как устроена кривая $(\gamma^*)^*$.

Рассмотрим кривую γ^*. Чтобы построить двойственную ей кривую, нужно рассмотреть касательные к γ^*. Вместо касательной мы возьмем на γ^* две близкие точки l и m и проведем через них прямую A — см. красную часть рисунка 13. Какая картинка возникает на синей плоскости? Точкам l и m отвечают прямые l

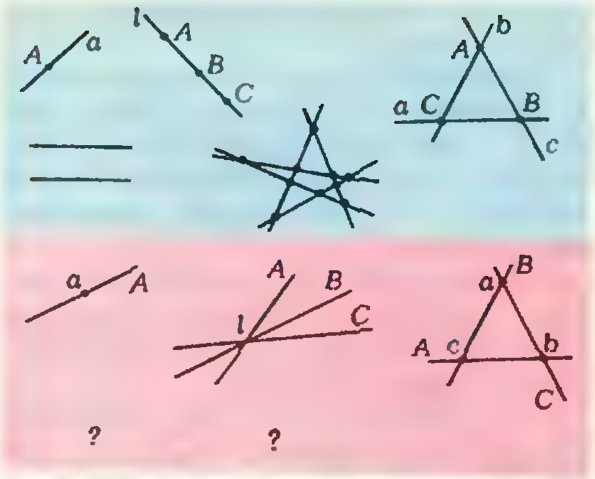


Рис. 9.

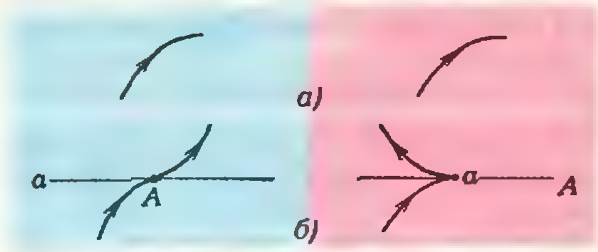


Рис. 10.

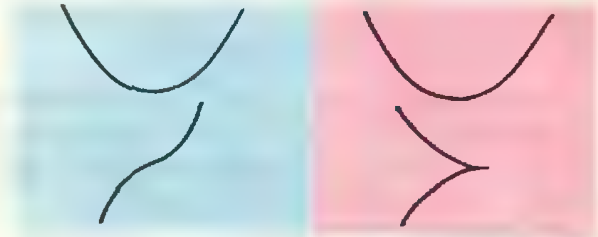


Рис. 11.

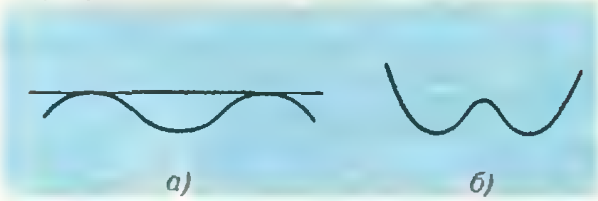


Рис. 12.

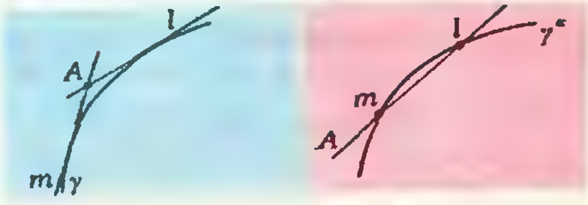


Рис. 13.

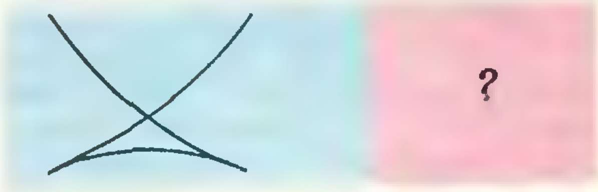


Рис. 14.

и m — см. синюю часть рисунка 13. Точки l и m на красной плоскости лежат на кривой γ^*. По определению это значит, что прямые l и m на синей плоскости касаются кривой γ. Если теперь начать сближать точки l и m справа, то прямая A будет стремиться к касательной к кривой γ^*, а точка A слева будет стремиться к точке кривой γ. Это и значит, что множество касательных прямых к γ^* определяет на синей плоскости исходную кривую γ.

Наше рассуждение закончено. Мы доказали, что

Кривая, двойственная к двойственной, совпадает с исходной: $(\gamma^*)^*=\gamma$.

Теперь можно «прочитать» рисунок 11 справа налево: кривая, двойственная параболе,— парабола; кривая, двойственная полукубической параболе,— кубическая парабола.

Упражнение 11. Какая кривая двойственна кривой на рисунке 14? Подсказка: сравните с упражнением 10.

А при чем же здесь уравнения $x^2+px+q=0$ и $x^3+px+q=0$? Возьмем второе уравнение. Оно получается из уравнения $l+kp+q=0$ при $k=x$, $l=x^3$. Значит, кубическое уравнение задает на красной (k, l)-плоскости кубическую параболу $l=k^3$. Двойственная кривая на синей плоскости — огибающая семейства прямых $x^3+px+q=0$, т. е. полукубическая парабола. Так что наше исследование кубического уравнения состояло в построении кривой, двойственной кубической параболе. В частности, появление клюва мы можем объяснить теперь тем, что у кубической параболы в нуле имеется точка перегиба.

Кстати, некоторые читатели, возможно, восприняли появление острия у огибающей, как «несчастный случай», т. е. как случайное, редкое явление. Двойственность показывает, что клювы встречаются столь же часто, сколь точки перегиба. Но ясно, что наличие у кривой точки перегиба,— довольно типичное свойство. Например, если слегка пошевелить кривую, то точки перегиба не исчезнут. Специальным является, скорее, случай кривых, не имеющих точек перегиба; такие кривые называются *выпуклыми*. Двойственные к выпуклым кривым являются *гладкими* и не содержат клювов.

Уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$ и ласточкин хвост

До сих пор мы имели дело с уравнениями, зависящими от двух параметров. Что будет, если параметров больше? Рассмотрим уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$. Это уравнение задает семейство линейных уравнений с тремя переменными p, q, r — по одному линейному уравнению для каждого значения x. Каждое линейное уравнение задает в пространстве с координатами (p, q, r) плоскость, а семейство таких уравнений — семейство плоскостей, зависящих от x как от параметра. Огибающей этого семейства служит поверхность, которой касается каждая плоскость семейства. Эта поверхность состоит из таких точек (p, q, r), что уравнение $x^4+px^2+qx+r=0$ имеет кратный корень. Ее дополнение в пространстве состоит из трех кусков; эти куски отвечают случаям, когда уравнение имеет 4, 2 или 0 корней. Описание этих кусков вы найдете в конце статьи Д. Б. Фукса «Геометрия листа бумаги» («Квант» № 9 за 1988 год).

Как же построить огибающую поверхность семейства плоскостей? Выберем некоторое значение параметра x и возьмем две плоскости нашего семейства, отвечающие двум значениям параметра, очень близким к x. Эти плоскости пересекаются в пространстве по некоторой прямой, положение которой определяется числом x. Значит, каждому значению x соответствует прямая в пространстве; совокупность этих прямых и образует огибающую поверхность семейства плоскостей. Следовательно, огибающая семейства плоскостей — *линейчатая поверхность*. Более того, все построенные прямые касаются некоторой пространственной кривой. Чтобы построить эту кривую, нужно для каждого значения парамет-

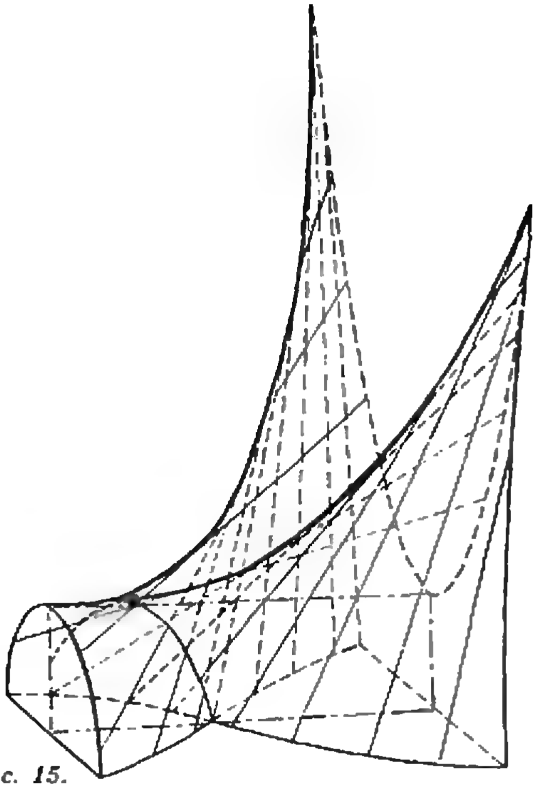


Рис. 15.

ра x найти точку пересечения трех плоскостей нашего семейства, которые отвечают трем значениям параметра, очень близким к x. Тогда каждому x будет соответствовать точка в пространстве; совокупность этих точек и образует нужную пространственную кривую.

Итак, огибающая поверхность семейства плоскостей $x^4+px^2+qx+r=0$ состоит из прямых, которые касаются кривой в пространстве. Такие *развертывающиеся поверхности* — главные действующие лица названной выше статьи Д. Б. Фукса. Построенная нами поверхность называется *ласточкин хвост*. В статье Д. Б. Фукса эта поверхность изображена так, как ее принято рисовать в наше время; на рисунке 15, заимствованном из книги Ф. Клейна «Элементарная математика с точки зрения высшей», она изображена в другом ракурсе. Посмотрите на рисунок 15 и сравните его с рисунком ласточкиного хвоста из статьи «Геометрия листа бумаги». Узнаете ли вы на нашей картинке ласточкин хвост?

Вниманию наших читателей!

Магазин № 1 «Академкнига» г. Уфы высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Батурин Ю. М. *Право и политика в компьютерном круге.*— 1987.— 40 к.

Гинзбург В. Л. *О физике и астрофизике. Статьи и выступления.* (Наука. Мировоззрение. Жизнь).— 1985.— 1 р. 80 к.

Капица П. Л. *Эксперимент. Теория. Практика. Статьи и выступления.* Изд. 4-е, испр. и доп. (Наука. Мировоззрение. Жизнь). — 1987.— 2 р.

Клейн Ф. *Элементарная математика с точки зрения высшей:* В 2-х т. Пер. с нем. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ.— 1987.— 1 р. 40 к.— Т. 2. Геометрия.— 1987.— 1 р. 40 к.

Климишин И. А. *Открытие Вселенной.*—1987.— 1 р. 50 к.

Козел С. М., Рашба Э. И., Славатинский С. А. *Сборник задач по физике.* Учебное пособие для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп.— 1987.— 75 к.

Марочник Л. С. *Свидание с кометой.* (Библиотечка «Квант»).— 1985.— 35 к.

Рыбасенко В. Д., Рыбасенко И. Д. *Элементарные функции. Формулы, таблицы, графики.*— 1987.— 2 р.

Силин А. А. *Трение и мы.* (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 35 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: *450059 г. Уфа, ул. Р. Зорге, 10, магазин «Академкнига».*

Сергей Львович Соболев

(к 80-летию со дня рождения)

6-го октября 1988 года исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося математика Сергея Львовича Соболева.

Работы С. Л. Соболева оказали существенное влияние на развитие математики XX века, им был внесен фундаментальный вклад в теорию уравнений с частными производными, функциональный анализ, теорию функций, математическую физику, вычислительную математику.

Самостоятельно освоив программу средней школы (Сергей Львович учился в школе всего один год — в последнем классе), Соболев в 1925 году поступил на физико-математический факультет Ленинградского университета. Его математическое дарование проявилось необычайно рано. Достаточно сказать, что в 25 лет он был избран членом-корреспондентом Академии наук СССР, а в 31 год — академиком.

Годы после окончания университета были для Сергея Львовича очень плодотворными. Совместно с В. И. Смирновым им был создан ставший классическим метод решения волнового уравнения, описывающего колебания в упругой среде. Изучение «соболевских пространств» функций, введенных С. Л. Соболевым в 30-е годы, составляет сейчас целый раздел функционального анализа. Особенно важным оказалось предложенное Сергеем Львовичем понятие обобщенной функции; развитое позднее в работах французского математика Лорана Шварца и советского математика академика И. М. Гельфанда, оно стало одним из центральных понятий математики.

Переехав в Москву, С. Л. Соболев вскоре начал преподавать в Московском университете, в котором он проработал более двадцати лет. С 1952 по 1957 год он руководил первой в нашей стране кафедрой вычислительной математики. Вклад С. Л. Соболева в эту науку отражен в его монографии «Введение в теорию кубатурных формул».

В 1957 году С. Л. Соболев переехал в Новосибирск, став одним из организаторов Сибирского отделения АН СССР. С 1960 по 1978 год он также был профессором Новосибирского университета.

У С. Л. Соболева много учеников и последователей. Он избран членом французской Академии наук, Национальной академии деи Линчеи в Риме, а также многих других научных обществ. Он — Председатель Национального комитета советских математиков.

Редакция журнала «Квант» сердечно поздравляет члена редакционного совета «Кванта» Сергея Львовича Соболева с юбилеем и желает ему здоровья и новых творческих успехов.

ХИМИЧЕСКОЕ РАЗНООБРАЗИЕ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

В прошлом номере мы остановились на трагическом эпизоде, связанном с вулканическим кратером Ниос. Сегодня вернемся к кратерам ударного происхождения.

Ударные кратеры на Земле

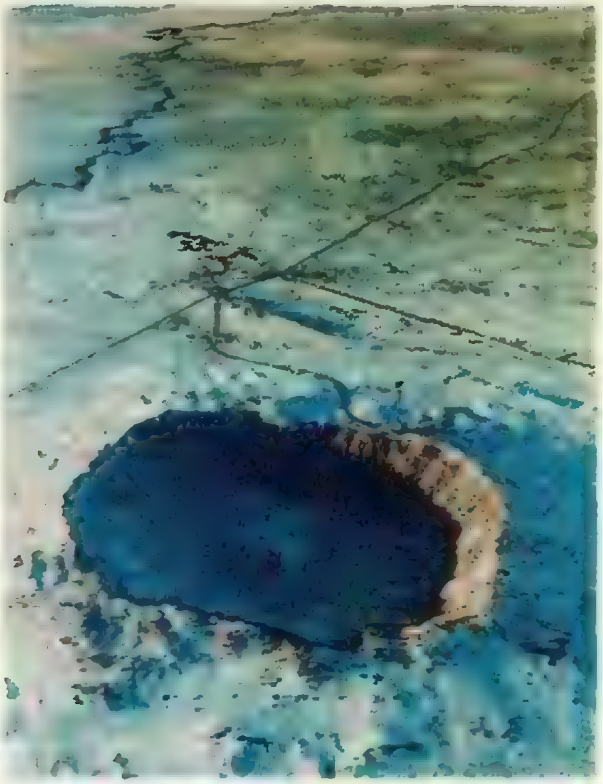
На Земле кратеров такой древности, как на Луне, сейчас не существует. Подвижные атмосфера и океан нашей планеты размывают очертания кратеров. Кроме того, поверхность нашей планеты довольно быстро (за 200—300 миллионов лет) обновляется — посреди океанов постоянно рождается новая кора, а старая погружается на краях океанов в воду. С помощью контрастных фотографий из космоса удалось все же обнаружить на Земле около сотни сильно сглаженных временем кольцевых структур диаметром до ста километров. Оказалось, например, что Калуга расположена в древнем кратере диаметром 15 км. Наибольший отчетливый кратер находится в Аризоне (США). Он имеет диаметр 1265 м и глубину 175 м, а образовался всего 25—30 тысяч лет назад.

Как связаны между собой размер кратера и масса метеорита и его скорость? Нет нужды пояснять, насколько важен ответ на этот вопрос для восстановления картины катастрофических событий в истории Земли, Луны, планет.

При первом, интуитивном взгляде, основанном на повседневном опыте, может показаться, что след от падения тела по размерам должен быть примерно равным размерам упавшего тела. Однако, этот пример — хорошая иллюстрация того, что в физике можно полагаться на повседневный опыт лишь с осторожностью и что интуиция срабатывает не всегда. Оказывается, что масса извлекаемого из кратера вещества в сто — триста раз превосходит массу самого метеорита.

Из-за чего же столь различны результаты падения брошенного камня и метеорита? Ответ: в первом случае скорость столкновения много меньше скорости звука в породе $v_{зв} \approx 5 \times 10^3$ м/с, во втором же случае — больше ее.

Радиус R кратера, который образуется при сверхзвуковом столкновении, можно оценить из энергетического подсчета. На что расходуется



Аризонский кратер.

кинетическая энергия $E_0 \sim mv^2$ метеорита? Во-первых, на разрушение, дробление горных пород в объеме кратера и на разрушение (вплоть до испарения) самого метеорита. Сразу скажем, что при сверхзвуковом ударе размер кратера окажется значительно больше размера метеорита, поэтому затраты энергии практически будут связаны только с образованием кратера. Во-вторых, часть начальной энергии переходит в кинетическую энергию выбрасываемых из кратера горных пород. В-третьих, есть еще расход на энергию звуковых волн, уходящих вглубь Земли и в атмосферу. Есть, наконец, тепловая энергия, уходящая на нагревание, а при мощных ударах — на частичное плавление и даже испарение горных пород. Однако учитывать ее как независимое слагаемое при подсчете энергетического баланса было бы неверно. Ведь вся (практически вся) энергия метеорита уходит в конечном счете именно на нагревание горных пород, пройдя перед этим через другие, механические, формы. (Оговорка «практически» связана с изменениями в результате столкновения скорости движения всей Земли и скорости ее вращения, которые ничтожны даже при столкновении Земли с большим астероидом.)

Оценим теперь эти энергетические затраты по порядку величины.

Расход энергии E_1 на разрушение пород пропорционален объему кратера, т. е. $E_1 \sim R^3$. На что следует его (объем) умножить, чтобы получить работу разрушения? Нетрудно понять, что энергия разрушения породы есть объем, умноженный на предел прочности породы $\sigma_{\text{п}}$, т. е. $E_1 \sim \sigma_{\text{п}} R^3$.

Оценим энергию E_2, которая идет на выброс горных пород из кратера. Перемещение большей части массы при образовании кратера происходит на расстояние порядка радиуса R. Для такого перемещения масс в поле тяжести начальная скорость разлета должна по порядку величины быть равной $u_0 \sim \sqrt{gR}$. Полная масса выброшенных из кратера горных пород есть $m_{\text{к}} \sim \varrho R^3$. Поэтому затраты на выброс — $E_2 \sim m_{\text{к}} u_0^2 \approx \varrho g R^4$.

Поверьте на слово: энергетические расходы на звуковые волны E_3 всегда бывают малы по сравнению с E_1 и E_2. Физическая причина этого состоит в том, что при любом сверхзвуковом столкновении сперва возникает ударная волна. Что это такое? Это сильное сжатие, распространяющееся в материалах со скоростью, большей скорости звука, и тем большей, чем сильнее это сжатие, чем больше перепад плотности. Именно ударная волна производит и разрушение, и ускорение вещества. Только тогда, когда основная энергия ударной волны окажется израсходованной, когда сжатие в волне станет слабым, а скорость — равной скорости звука, ударная волна переходит в обычную акустическую, звуковую. Волна является ударной примерно в объеме кратера, а звук убегает с малым затуханием на большие расстояния (по всей планете).

Итак, главные первичные энергетические затраты есть E_1 и E_2. Напишем теперь приближенное уравнение энергетического баланса при падении метеорита (оно позволит определить порядок величины радиуса кратера):

$$E_0 \approx E_1 + E_2, \text{ т. е. } mv^2 \sim \sigma_{\text{п}} R^3 + \varrho g R^4.$$

Обратите внимание: в кинетической энергии пропущен коэффициент 1/2. Это связано с тем, что наша цель — получить оценку только по порядку величины. Коэффициенты перед членами правой части равенства могут быть получены только точным решением задачи.

По этой же причине приведенное уравнение надо и писать несколько иначе. Посудите сами. В сумме всегда одно из слагаемых окажется много больше другого, а если они и будут одного порядка величины, то достаточно и оставить только один член. Какой из них? — Тот, что больше. А это, в свою очередь, зависит от радиуса кратера, пока неизвестного. Посмотрим, при каком радиусе оба члена в правой части будут одинаковы: при $R \sim R_0 = \sigma_{\text{п}}/\varrho g$. Для оценки будем считать $\sigma_{\text{п}}$ равным пределу прочности осадочных пород $\sigma_{\text{п}} \sim 10^7$ Н/м^2, для плотности примем значение $\varrho \sim 3 \times 10^3$ кг/м^3. Тогда

$$R_0=\sigma_п/\varrho g\sim 3\cdot 10^2\ м$$

(мы оставляем тройку в результатах численных оценок — ее надо воспринимать не как коэффициент, а как полпорядка: $10^{0,5}\approx 3$).

При радиусах кратеров много меньших R_0 в уравнении для R будет доминировать первое слагаемое, а в обратных случаях — второе. Поэтому уравнение можно переписать так:

$$mv^2\sim\sigma_п R^3\ \text{при}\ R\ll R_0,$$
$$mv^2\sim\rho g R^4\ \text{при}\ R\gg R_0.$$

Кратеры первого типа ($R\ll R_0$) называют прочностными, а второго ($R\gg R_0$) — гравитационными.

Скорость вхождения метеорита в атмосферу Земли превышает вторую космическую скорость 11,2 км/с, затем она несколько снижается от торможения в атмосфере. Поэтому для наших грубых оценок будем считать скорость столкновения с земной поверхностью порядка 10^4 м/с. Энергия метеорита E_0 зависит, таким образом, в основном от его массы, которая может изменяться в очень широких пределах. Для массы метеорита, образующего кратер критического радиуса, получаем:

$$m_0\approx\sigma_п R_0^3/v^2\approx 3\cdot 10^6\ кг.$$

Падение таких и бóльших метеоритов — достаточно редкое событие, но зато след его остается на земной поверхности на времена геологических масштабов, и потому общее число обнаруженных на Земле гравитационных кратеров около сотни.

Тепловой баланс

Посмотрим теперь, как разогреваются горные породы при образовании кратеров. Надо, конечно, иметь в виду, что этот разогрев происходит крайне неравномерно, и мы сможем оценить только среднее повышение температуры.

Вся начальная энергия метеорита E_0 в конечном счете переходит в тепловую энергию: $E_0=E_т$. Без учета частичного плавления и испарения горных пород тепловую энергию можно считать по порядку величины равной

$$E_т\sim c\varrho R^3\cdot\Delta T.$$

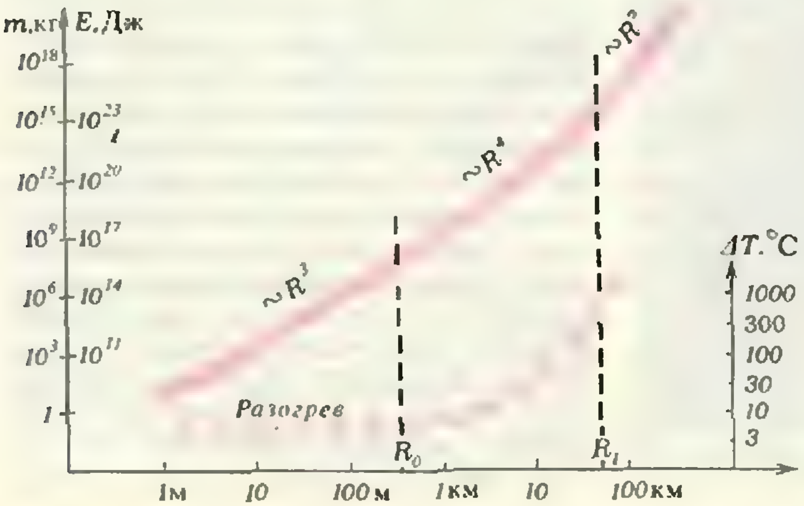
Здесь $c\approx 10^3$ Дж/(кг · К) есть характерная величина теплоемкости горных пород, а ΔT — среднее возрастание температуры горных пород. Для гранитной породы и не слишком больших метеоритов (когда $E_0\sim\sigma R^3$) средний нагрев по объему кратера, как легко видеть, не зависит от массы и энергии метеорита и равен

$$\Delta T=\sigma_п/c\varrho\approx 3\ К.$$

Всего-то. Поскольку средний разогрев так мал, ясно, что доля расплавленного и тем более испаренного вещества при образовании любых малых кратеров ничтожна.

При падении метеоритов с размерами, бóльшими критического (когда $E_0\approx\varrho g R^4$), температура разогрева горных пород растет пропорционально радиусу кратера:

$$\Delta T=gR/c.$$

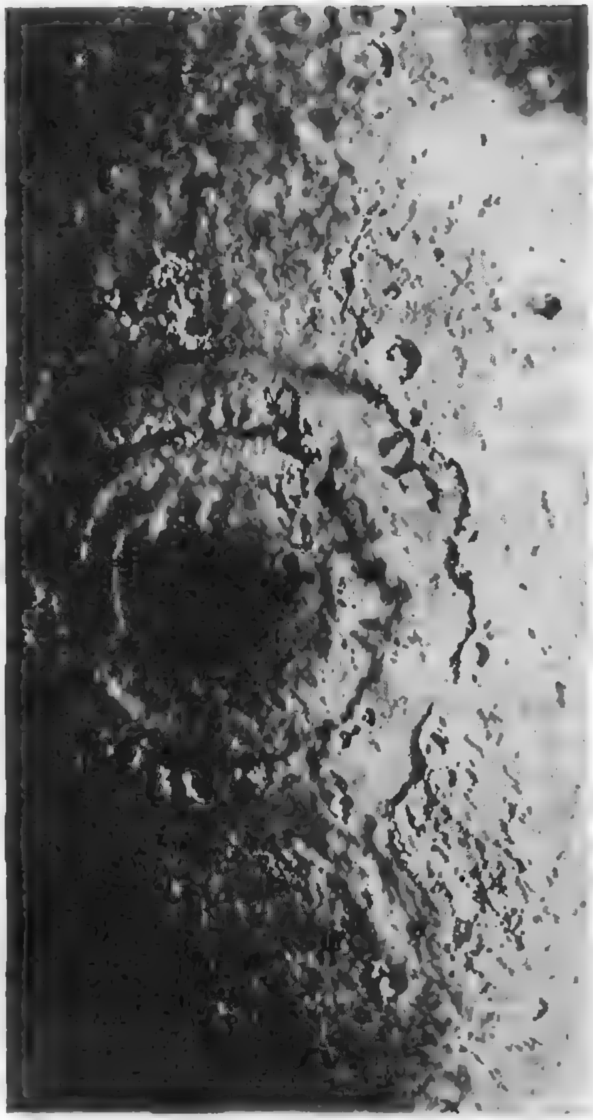


Зависимость радиуса R кратера от массы m метеорита (или от его кинетической энергии E при входе в атмосферу). При образовании малых кратеров энергия метеорита расходуется на разрушение горных пород. При R бóльших R_0 начинает преобладать расход энергии на выброс пород из кратера.

Нижняя кривая демонстрирует среднюю температуру разогрева горных пород при образовании кратера. При образовании кратеров с радиусом больше R_1 происходит размягчение и расплавление значительной части пород из кратера.

Доля расплавленного материала растет с ростом размера кратера. Когда средний разогрев достигнет характерной температуры размягчения или химического преобразования горных пород — примерно 300 градусов, эта доля станет подавляющей. Массовое плавление происходит при образовании на Земле кратеров с радиусами, превышающими 30 км (на Луне — 10 км). Соответственно масса метеорита для образования такого кратера по порядку величины должна превышать $3 \cdot 10^{11}$ кг. Такие кратеры — свидетельства редчайших событий. Их размытые следы сохраняются в течение почти всей геологической истории Земли, однако на всей планете пока обнаружено только несколько кратеров с радиусом, бо́льшим 30 км.

Начиная примерно с этого размера, формула $R \sim E^{1/4}$ становится неприменимой, поскольку учет теплоты плавления делает более сложным баланс энергии метеорита. Кратеры с массовым размягчением пород и внешне выглядят иначе. С ростом размера становится все более заметной новая особенность — застывшие концентрические волны. Уже у кратеров с радиусом более 1 км есть отчетливое центральное поднятие, а отпечатки грандиозных катастрофических столкновений — кратеры с радиусами, бо́льшими 30 км, имеют 3—4 гребня и впадины. Отчетливо видны не размытые эрозией и не скрытые осадками многокольцевые структуры гигантских кратеров на Луне. Посмотрите на фотографию лунного кратера Ориентале — концентрические кольца в его рельефе похожи на волны, бегущие по воде от упавшего камня.



Лунный кратер Ориентале (Море Восточное).

Даже при образовании малых кратеров часть горной породы и самого метеорита *разлетается в виде расплава*. Такие застывшие в полете каменные капли называются тектитами. При образовании больших кратеров тектиты разлетаются на сотни и тысячи километров, образуя вокруг кратеров тектитные поля. Особенно четко очерчиваются границы тектитных полей на дне океанов, там, где осадочный слой нарастает достаточно медленно. Так, например, от кратера Босумтви (радиус 5 км), образовавшегося чуть более миллиона лет назад на берегу Гвинейского залива, простирается в океан тектитное поле в *форме овала 2000×1000 км.* Есть на Земле тектитное поле, которое занимает почти весь Индийский океан! Однако следы его кратера (подводного?) пока не обнаружены.

Попробуем представить, что произойдет, если крупный метеорит упадет в океан. В этом случае его кинетическая энергия E_0 будет затрачена, *главным образом,* на нагрев и испарение объема воды $\sim R^3$:

$$E = (\lambda + c \cdot \Delta T)\rho R^3.$$

Теплота испарения воды $\lambda \approx 2{,}5 \times$

$\times 10^5$ Дж/кг, но величину $\lambda + c \cdot \Delta T$ можно оценить лишь грубо в 3×10^6 Дж/кг, поскольку значительная часть пара окажется сильно перегрета. Если объем по порядку величины превысит H^3, где $H = 4000$ м — характерная глубина океана, то на океанском дне образуется кратер с размером порядка H, в обратном же случае на дне следа от падения метеорита не останется. Значит, граничная масса метеорита, начиная с которой он может образовать кратер на дне океана, есть

$$m \approx (\lambda + c \cdot \Delta T)\rho H^3 / v^2 \sim 2 \cdot 10^{12} \text{ кг.}$$

Примеров уверенного отождествления кольцевых структур на океанском дне с метеоритными кратерами пока нет.

«Источник» неоднородности

Наконец, есть еще вопрос, который может возникнуть у дотошного читателя.

Известно, что в замкнутых системах температуры с течением времени выравниваются, а разные по химическому составу части системы перемешиваются до полной однородности. Этот физический принцип называется вторым началом термодинамики. Почему этот принцип оказывается нарушенным при формировании планет, при гравитационной дифференциации?

Гравитационная дифференциация есть планетный аналог процессов, давших нашей Вселенной возможность избежать «тепловой смерти». (Если вы прочитали статью И. Д. Новикова «Вселенная как тепловая машина» в апрельском номере «Кванта», вам эта аналогия, возможно, уже приходила на ум; если не читали — очень советуем прочитать.) Температура и в присутствии гравитации выравнивается, просто для Земли и даже для Луны еще не прошло достаточно времени для полного остывания недр. Для остывания, например, Земли нужно 50 миллиардов лет, а прошло с момента образования лишь около 4,5 миллиардов лет. Неоднородность же состава в конечном состоянии как раз и есть следствие законов термодинамики с учетом гравитационной энергии системы.

Все-таки поразительно изобретательна природа в ее стремлении к разнообразию. Из всего двух элементарных частиц — протона и нейтрона (или из трех кварков, если угодно) — она ядерными силами создает сотню разных химических элементов и несколько тысяч изотопов. Добавился один электрон — и с помощью электромагнитных сил возникают миллионы химических соединений. Наконец, с помощью гравитации все это вещество неоднородно, разнообразными способами распределяется по Вселенной.

От редакции

Эта статья — ее первая часть была опубликована в предыдущем номере — появилась в процессе работы автора над вторым изданием (переработанным и дополненным) книги «Наша планета — Земля». Книга будет выпущена Главной редакцией физико-математической литературы издательства «Наука» в серии «Библиотечка «Квант» в 1989 году.

В книге рассматривается широкий круг вопросов — от происхождения химических элементов до климата Земли и его воздействия на цивилизацию. Центральная тема книги — осознание того, почему наша планета при очевидной общности со всей Солнечной системой все же настолько уникальна, что стала единственно известным источником жизни.

Мы советуем нашим читателям не пропустить эту интересную книгу.

Нам пишут

Два обобщения классических формул

В школе изучаются формулы разности квадратов и разности кубов:

$$(x^2-y^2)=(x-y)(x+y),$$
$$(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2).$$

Эти формулы являются частными случаями общей формулы:

$$(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\ldots+xy^{n-2}+y^{n-1}),$$

где n — натуральное число. Оказывается, что имеется дальнейшее обобщение этой формулы:

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)-(y-a_1)(y-a_2)\ldots(y-a_n)=$$
$$=(x-y)((x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+(y-a_1)(x-a_3)\ldots(x-a_n)+\ldots$$
$$\ldots+(y-a_1)(y-a_2)\ldots(y-a_{n-2})(x-a_n)+(y-a_1)(y-a_2)\ldots(y-a_{n-1})),$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — заданные числа. Эта формула превращается в предыдущую при $a_1=a_2=\ldots=a_n=0$. Доказательство этой формулы можно провести по индукции.

С. Ф. Алексей

* * *

В журнале «Квант» не раз писалось о формуле бинома Ньютона, частные случаи которого —

$$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2,$$
$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

изучаются в школе. Для произвольного числа n формула бинома Ньютона записывается в виде:

$$(x+y)^n=x^n+C_n^1x^{n-1}y^1+C_n^2x^{n-2}y^2+\ldots+C_n^kx^{n-k}y^k+\ldots+C_n^{n-1}x^1y^{n-1}+y^n,$$

где коэффициенты C_n^k выражаются следующим образом:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot k}.$$

Введем новую операцию, аналогичную операции возведения в степень: $x^{\langle k\rangle}=x(x-1)\ldots(x-k+1)$. Заметим, что $x^{\langle 1\rangle}=x$, $x^{\langle 2\rangle}=x(x-1)$, $x^{\langle 3\rangle}=x(x-1)(x-2)$ и т. д.

Рассмотрим выражение $(x+y)^{\langle n\rangle}$. Оказывается, что для него имеет место в точности такое же разложение в сумму, как и для бинома Ньютона:

$$(x+y)^{\langle n\rangle}=x^{\langle n\rangle}+C_n^1x^{\langle n-1\rangle}y^{\langle 1\rangle}+\ldots+C_n^kx^{\langle n-k\rangle}y^{\langle k\rangle}+\ldots+C_n^{n-1}x^{\langle 1\rangle}y^{\langle n-1\rangle}+y^{\langle n\rangle}.$$

Эту формулу для $n=2$ и $n=3$ несложно проверить непосредственно. Доказательство для произвольного натурального n довольно сложно.

А. А. Новожилов

Обобщение теоремы Птолемея для произвольных четырехугольников

Обозначим через a, b, c, d стороны, через e, f — диагонали, через S — площадь и через α — полусумму противоположных углов выпуклого четырехугольника. Тогда

$$4S^2=e^2f^2-\frac{1}{4}(a^2+c^2-b^2-d^2)^2.$$

Данный четырехугольник можно шарнирно продеформировать во вписанный (не меняя при этом длин его сторон). Пусть S_0 — площадь полученного четырехугольника (ее можно найти по формуле $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$, являющейся обобщением формулы Герона). Выполнены следующие замечательные равенства:

$$S_0^2-S^2=abcd\cos^2\alpha;\quad 4(S_0^2-S^2)=(ac+bd)^2-e^2f^2.$$

В качестве следствия получаем: среди четырехугольников с данными длинами сторон наибольшую площадь имеет вписанный. Кроме того, выполнено неравенство $ef\leqslant ac+bd$, которое, по теореме Птолемея, превращается в равенство для вписанного четырехугольника. Приведенные формулы могут быть выведены из теоремы косинусов. Попробуйте сделать это самостоятельно.

О. А. Иванов, А. К. Кетлер

Задачник „Кванта"

[redacted]

Задачи

M1126—M1130, Ф1138—Ф1142

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 января 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» №10—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1126» или «Ф1138». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1126—M1130 предлагались в этом году на Ленинградской городской математической олимпиаде.

Задачи Ф1138—Ф1142 предлагались на заключительном этапе XXII Всесоюзной олимпиады по физике.

M1126. В трапеции $ABCD$ (с основаниями BC и AD) на сторонах AB и CD выбраны точки K и M. Докажите, что если $\angle BAM=\angle CDK$, то $\angle BMA=\angle CKD$.

А. С. Меркурьев

M1127. Микрокалькулятор «Чебурашка» умеет складывать, вычитать и находить по данному числу x обратное число $1/x$. Можно ли с помощью этого микрокалькулятора получить единицу, если исходное число а) $\sqrt{19+88}$; б) $\sqrt[12]{88}$; в) $\sqrt{19}+\sqrt{88}$? (Вводить в микрокалькулятор числа, отличные от исходного или от полученных в результате вычислений на нем, запрещается.)

А. В. Богомольная

M1128. На шахматной доске расставлено несколько фишек. За один ход одна из фишек передвигается на соседнее (по горизонтали или вертикали) свободное поле. После нескольких ходов оказалось, что каждая фишка побывала на всех полях ровно по одному разу и вернулась на исходное поле. Докажите, что был момент, когда ни одна фишка не стояла на своем исходном поле.

Е. В. Абакумов

M1129*. В лесу барона Мюнхаузена растут елки и березы. Барон утверждает, что на расстоянии ровно 1 км от каждой елки растет в точности 10 берез, причем елок в его лесу больше, чем берез. Может ли это быть?

Ф. Л. Назаров

M1130. На плоскости дан выпуклый n-угольник, у которого длина k-й стороны равна a_k, а длина проекции многоугольника на прямую, содержащую эту сторону, равна d_k ($k=1, 2, ..., n$). Докажите неравенство

$$2\leqslant\frac{a_1}{d_1}+\ldots+\frac{a_n}{d_n}\leqslant 4.$$

Д. В. Фомин

Ф1138. Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от 10,0 м/с до 10,5 м/с за время 0,1 с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом 30 м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.

Ф1139. U-образная трубка частично заполнена водой (рис. 1). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры +100 °С, а левое — до +99,5 °С. Определить установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на уровне земли. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь.

Ф1140. Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная ско-

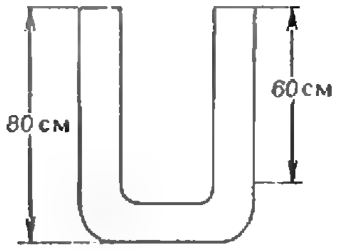


Рис. 1.

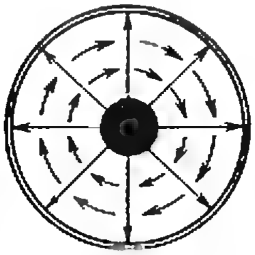


Рис. 2.

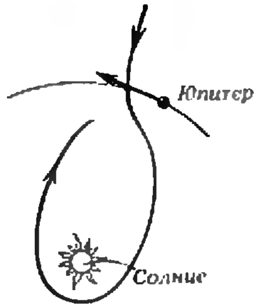


Рис. 3.

рости. До полной остановки частица проходит путь $s=10$ см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости остановится на расстоянии $l_1=6$ см от точки входа в среду. На каком расстоянии l_2 от точки входа частица остановилась бы, если бы поле было в два раза меньше?

А. И. Буздин

Ф1141. В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке 2. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения $B_{\max}$, иначе разрушается сверхпроводимость, а напряженность электрического поля не должна превышать $E_{\max}$, иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определить, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочек увеличить в два раза. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см, $d=3$ см, если $E_{\max}=20$ кВ/см и $B_{\max}=5\cdot10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I:

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r}$$

($\mu_0=4\pi\cdot10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная).

С. М. Козел

Ф1142. Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает невдалеке от Юпитера (рис. 3). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии $R=5{,}2$ а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?

В. Е. Белонучкин

Problems

M1126—M1130, P1138—P1142

M1126. The points K and M are chosen on sides AB and CD of a trapezium with bases BC and AD. Prove that $\angle BAM=\angle CDK$ implies $\angle BMA=\angle CKD$.

A. S. Mercuryev

M1127. The microcomputer "Cheburashka" (the name of popular toy) can add and subtract numbers and calculate the number

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope

of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 1st, 1989 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (In Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

$1/x$ inverse to any given number $x \neq 0$. Is it possible to finally get 1 on this microcomputer being given at the start a) $\sqrt{19}+88$; b) $\sqrt[19]{88}$; c) $\sqrt{19}+\sqrt{88}$? (One can only use the initial number and the numbers already obtained in the computer.)

A. V. Bogomolnaya

M1128. A certain number of pawns is placed on a chessboard. In one move one of the pawns shifts to any free adjacent square (a square with a common side). After a few moves it turns out that every pawn had visited each of the squares once and only once and returned to its initial position. Prove that there was a moment when none of the pawns occupied their initial positions.

E. V. Abakumov

M1129*. There are birches and firs in baron Munchausen's wood. The baron claims that there are exactly 10 birches at the distance of exactly 1 km from each fir; moreover he says that there are more firs than birches in his wood. Can the baron be right?

F. L. Nazarov

M1130. The length of the k-th side of a convex plane n-sided polygon equals a_k; the length of the projection of this polygon onto the lines containing the k-th side equals d_k ($k=1, 2, ..., n$). Prove that

$$2 \leqslant \frac{a_1}{d_1}+\frac{a_2}{d_2}+...+\frac{a_n}{d_n} \leqslant 4.$$

D. V. Fomin

P1138. Accelerating at highest power along a rectilinear stretch of the road, a racing car increases its speed from 10.0 m/s to 10.5 m/s in time 0.1 s. In how long can it do the same on a circular stretch of the road of radius 30 m? For what radius of the circular stretch is it impossible for the racing car to increase its speed beyond 10 m/s? The road is assumed horizontal.

P1139. A U-shaped pipe is partially filled with water (see figure Рис. 1). The upper extremities are sealed, the left curved part is heated to 100 °C, the right curved part to 99.5 °C. Find the established difference of levels between the water in the left and right sides of the pipe. Note: on the 23rd floor (70 m above the ground) water boils at a temperature of 0.25 degrees less than at ground level. Thermic expansions of glass are negligible.

P1140. A charged particle penetrates into a medium where a force of resistance, proportional to its velocity, acts on it. The particle travels a distance of $s=10$ cm before it stops. If there is a magnetic field perpendicular to the particle's velocity in the medium, it stops at $l_1=6$ cm from the point of entry (coming in with the same initial velocity). At what distance l_2 from the entry point would it stop if the field were twice less?

A. I. Buzdin

P1141. A present, the discovery of high-temperature superconductivity has stimulated research to devise electric power lines without energy losses due to Joule heating. It is proposed to use a coaxial cable consisting of an inner cylindrical string and a cylindrical cover both made out of superconductors. The electric and magnetic fields of such a system are shown on the figure Рис. 2. It is known that the induction of the surface of the superconductor cannot exceed a certain value B_{max} (beyond which superconductivity is lost), while the electric field cannot exceed the value E_{max} (beyond which an electric breakout through the cable's isolation takes place). Estimate by how many

times will the maximal power of direct current which can be transmitted along this cable change if the diameters of the inner and outer covers are doubled. What maximal power may be transmitted along a cable with cover diameters $D=8$ cm, $d=3$ cm, if $E_{\max}=20$ kV/cm and $B_{\max}=5\cdot 10^{-2}$ Tl? Note: magnetic induction in the space between cylindrical conductors coincides with the field of a direct conductor with current I:

$$B=\frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{I}{r}$$

($\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ N/A^2 is the magnetic constant).

S. M. Kozel

P1142. Jupiter's family of comets can be described according to the following scheme. A comet falls from a high distance with zero initial velocity on the Sun and flies past Jupiter near the latter (see figure Рис. 3). After noticeable attraction of Jupiter's gravitational force ceases, the comet continues to move in the Sun's gravitational field, its velocity being opposite to that of Jupiter, while tha aphelius of the comet's new orbit is near Jupiter's orbit, i. e. at the distance of $R=5.2$ from the Sun. At what distance from the Sun will the perihelius of such an orbit be located?

V. E. Belonuchkin

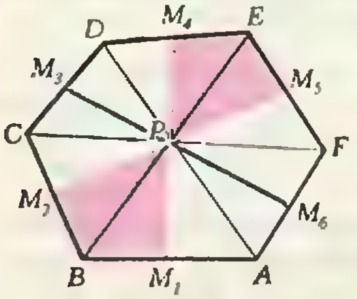
Решения задач

М1106 — М1109, Ф1118 — Ф1122

М1106. *Каждая из трех прямых, соединяющих середины противоположных сторон выпуклого шестиугольника, делит его площадь пополам. Докажите, что эти три прямые пересекаются в одной точке.*

Пусть $ABCDEF$ — данный шестиугольник, $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины его сторон (см. рисунок). Отрезки M_1M_4 и M_2M_5 делят площадь шестиугольника пополам, поэтому четырехугольники PM_1BM_2 и PM_4EM_5, где P — точка пересечения M_1M_4 и M_2M_5, равновелики (каждый из этих четырехугольников в сумме с пятиугольником PM_2CDM_4 дает половину площади шестиугольника). Площади четырехугольников $PABC$ и $PDEF$ вдвое больше, соответственно, площадей четырехугольников PM_1BM_2 и PM_4EM_5, и поэтому они также равны между собой (мы пользуемся тем, что медиана треугольника делит его площадь пополам). Отсюда следует, что ломаная M_3PM_6 делит площадь шестиугольника пополам, как и отрезок M_3M_6. А это значит, что точка P лежит на отрезке M_3M_6, что и требовалось доказать.

В. В. Произволов



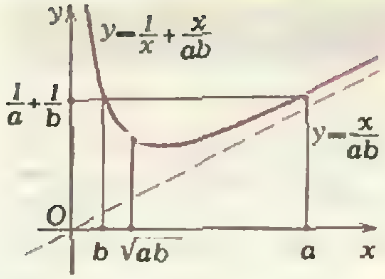
М1107. *Докажите, что если a, b и c — длины сторон треугольника, то*

$$2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geqslant \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+3.$$

Перепишем доказываемое неравенство в виде

$$\frac{2a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{2b-a}{c}+\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\right)c\geqslant 3. \qquad (*)$$

Фиксируем a и b и найдем минимум суммы двух последних слагаемых левой части как функции от c; при этом можно считать, что c не превосходит a и b, так как исход-



ное неравенство не меняется при циклических перестановках величин a, b, c. Имеем:

$$\frac{2b-a}{c}+\left(\frac{2}{a}-\frac{1}{b}\right)c=(2b-a)f(c),$$

где $f(x)=1/x+x/ab$. Поскольку $2b-a\geqslant b+c-a>0$, а функция $f(x)$ убывает при $0<x\leqslant\sqrt{ab}$ (график $f(x)$ для $a>b$ приведен на рисунке) и $f(a)=f(b)=1/a+$ $+1/b$, при $c\leqslant\min(a, b)\leqslant\sqrt{ab}$

$$(2b-a)f(c)\geqslant(2b-a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{2b}{a}-\frac{a}{b}+1.$$

Таким образом, левая часть неравенства (*) не меньше чем $\frac{2a}{b}-\frac{b}{a}+\frac{2b}{a}-\frac{a}{b}+1=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1$, а это число, очевидно, не меньше 3.

Л. Д. Курляндчик

М1108. *В выпуклом n-угольнике ($n>4$) никакие три диагонали не проходят через одну точку внутри многоугольника. Какое наибольшее число диагоналей в нем можно провести так, чтобы все части, на которые они разобьют n-угольник, оказались треугольниками?*

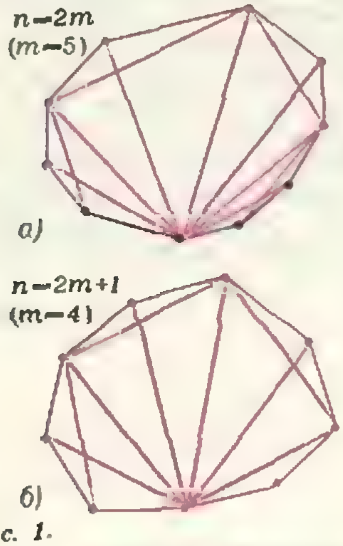


Рис. 1.

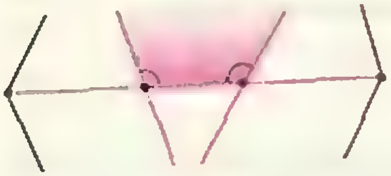


Рис. 2.

Ответ: $[3n/2]-4$ (где $[x]$ — целая часть x). Разбиения, приведенные на рисунке 1, показывают, что максимальное число $f(n)$ диагоналей, удовлетворяющих условию задачи, при $n=2m$ не меньше $3m-4=[3n/2]-$ -4, а при $n=2m+1$ не меньше $3m-3=[3n/2]-4$. Теперь осталось доказать, что

$$f(n)\leqslant[3n/2]-4. \qquad (*)$$

Для этого нам понадобится следующая

Лемма. *Если некоторый набор диагоналей n-угольника ($n\geqslant5$) разбивает его на треугольники, то хотя бы одна из этих диагоналей не пересекается с остальными. (Пересечения в вершинах многоугольника мы не учитываем.)*

Для доказательства леммы заметим, что никакая диагональ не может пересекаться более чем с одной другой диагональю: в противном случае один из кусков разбиения, примыкающих к участку диагонали между соседними точками пересечения, не был бы треугольником, так как сумма его углов оказалась бы больше 180° (рис. 2). Допустим теперь, что любая диагональ пересекается с какой-то из остальных, причем только с одной. Пусть AC и BD — такие пересекающиеся диагонали (рис. 3). Поскольку $n\geqslant5$, хотя бы одна из сторон четырехугольника $ABCD$, например AB, является диагональю (а не стороной) данного n-угольника. Диагональ AB входит в наш набор, так как в противном случае кусок многоугольника, примыкающий к ломаной AOB, где O — точка пересечения AC и BD, не будет треугольником. Следовательно, существует диагональ, пересекающая AB. Но эта диагональ обязана пересечь также AC или BD, что противоречит сделанному выше замечанию.

Пользуясь леммой, неравенство (*) можно доказать индукцией по n (при $n=3$ и $n=4$ оно очевидно). Пусть оно доказано для всех k, $3\leqslant k<n$, где $n\geqslant5$. Рассмотрим n-угольник, разбитый диагоналями на треуголь-

ники. По лемме одна из диагоналей не пересекается с остальными. Предположим, что она делит n-угольник на p-угольник и q-угольник (рис. 4). Тогда $3 \leqslant p$, $q < n$, $p+q=n+2$, и число проведенных диагоналей по предположению индукции не превосходит

$$1+f(p)+f(q) \leqslant \left[\frac{3p}{2}\right]+\left[\frac{3q}{2}\right]-7 \leqslant$$
$$\leqslant \left[\frac{3(p+q)}{2}\right]-7=\left[\frac{3n}{2}+3\right]-7=\left[\frac{3n}{2}\right]-4,$$

что и требовалось доказать.

М. Хованов

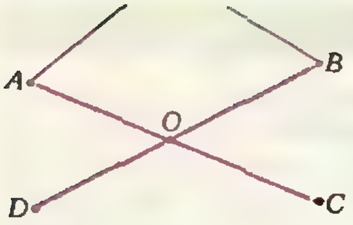


Рис. 3.

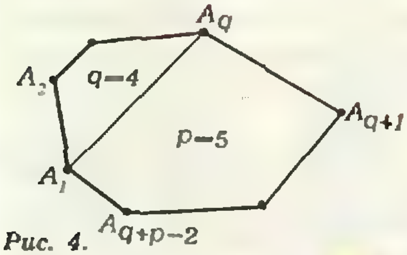


Рис. 4.

M1109. *В одном старом задачнике по геометрии была помещена такая задача: вычислить длину стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y=x^2$. В указании к задаче говорилось, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы. Верно ли такое указание? Может ли длина стороны правильного треугольника, вписанного в эту параболу, быть равной а) 3; б) 1988?*

Ответ: Указание в старом задачнике неверно. Правильный треугольник со стороной 3 вписать в параболу нельзя; со стороной 1988 — можно.

Возьмем произвольную точку $A(a, a^2)$ параболы (пусть для определенности $a \geqslant 0$) и повернем параболу на 60° вокруг A (рис. 1). Обозначим через B одну из точек пересечения повернутой параболы с исходной, а через C — прообраз точки B при повороте. Тогда ABC — *правильный треугольник, вписанный в параболу.* Если $a=0$, то координаты точек B и C равны $(\pm\sqrt{3}, 3)$, а сторона треугольника равна $2\sqrt{3}$. Легко видеть, что это единственный из *рассматриваемых* треугольников с вершиной в начале координат. При $a \neq 0$ наше построение дает от одного до трех треугольников — в зависимости от числа точек пересечения двух парабол. Условимся *выбирать в качестве* B точку пересечения с наибольшей ординатой, тогда ясно, что длина стороны треугольника ABC непрерывно зависит от a, причем $AB > 2a$. Действительно, эта точка лежит на пересечении *левой ветви параболы* с образом при повороте части правой ветви, лежащей выше точки A, и, следовательно, сама лежит выше A. Существование точки пересечения следует из того, что часть правой ветви параболы, *лежащую* выше точки A, можно заключить в угол, обе стороны которого после поворота пересекают левую ветвь параболы. Следовательно, AB может принимать все значения из промежутка $[2\sqrt{3};\ \infty$, в частности 1988.

Остается доказать, что правильный треугольник со стороной 3 вписать в параболу нельзя. Предположим, напротив, что такой треугольник ABC существует, и a, b, c — абсциссы его вершин A, B и C, причем, для *определенности,* $a^2 < b^2 \leqslant c^2$, $b > 0$ *(рис. 2). Легко видеть,* что тогда $c < 0$ и $b \leqslant BC/2 = 3/2$. Оценим величину

$$BA^2=(b-a)^2+(b^2-a^2)^2$$

при $|a| \leqslant b$. Ясно, что ее наибольшее значение растет с ростом b, *поэтому можно считать,* что $b=3/2$. Пользуясь производной, находим, что максимум функции $f(x)=(3/2-x)^2+(9/4-x^2)^2$ на отрезке $[-3/2;\ 3/2]$ достигается при $x=-1/2$ и равен 8. Таким образом, $BA \leqslant \sqrt{8} < 3$, т. е. *искомого треугольника* не существует.

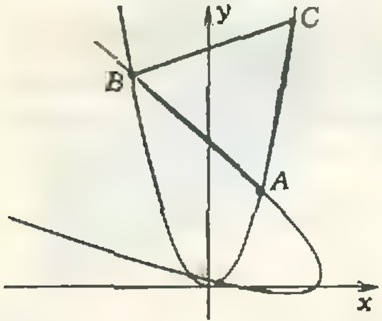


Рис. 1.

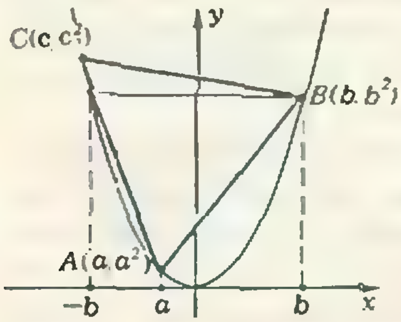


Рис. 2.

Можно показать, что длина стороны правильного треугольника, вписанного в параболу $y=x^2$, может принимать лишь значение, большее или равное $2\sqrt{3}$. Наметим план одного поучительного решения, дающего такой результат. Здесь полезно заметить, что все параболы подобны: парабола $y=ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$ получается переносом параболы $y=ax^2$ и подобна параболе $y=x^2$ с коэффициентом $1/\sqrt{|a|}$ (парабола с большим коэффициентом a только кажется «острее»). Мы должны убедиться, что около правильного треугольника со стороной d можно описать параболу с любым коэффициентом a, где $|a|\geqslant 2\sqrt{3}/d$. Через три не лежащие на одной прямой точки (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) с различными абсциссами x_1, x_2, x_3 можно провести параболу $y=ax^2+bx+c$; коэффициенты a, b, c находятся из линейной системы уравнений $ax_i^2+bx_i+c=y_i$ ($i=1, 2, 3$); в частности,

$$(x_3-x_2)a=\frac{y_1-y_1}{x_3-x_1}-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

откуда

$$a=\frac{(y_3-y_1)(x_2-x_1)-(y_2-y_1)(x_3-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_2-x_1)}.$$

Числитель по модулю равен $2S$, где S — площадь треугольника с вершинами $(x_i; y_i)$; таким образом, $|a|=2S/P_l$, где P_l — произведение проекций сторон треугольника на прямую l, перпендикулярную оси параболы. (Это верно для любого треугольника.) Если треугольник — правильный со стороной D ($S=\sqrt{3}d^2/4$) и прямая l образует с одной из его сторон угол φ, то $P_l=|d^3\cos\varphi\cos(\varphi+\pi/3)\cos(\varphi-\pi/3)|=\left|\frac{1}{4}d^3\cos 3\varphi\right|\leqslant\frac{d^3}{4}$, и $|a|=2S/P_l\geqslant 2\sqrt{3}/d$. В частности, мы видим, что при $a=1$ длина d принимает значения $d\geqslant 2\sqrt{3}$; равенство здесь соответствует случаю $\varphi=0$, когда одна из сторон треугольника перпендикулярна оси параболы (а вершина треугольника лежит в вершине параболы).

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

Ф1118. *Рыбак, живший в устье впадающей в океан реки, перебрался на новое место жительства на несколько километров вверх по течению. К своему удивлению, он обнаружил, что время между началом прилива и началом отлива уменьшилось*), и*

Как известно, океанские приливы и отливы связаны, в основном, с действием сил тяготения со стороны Луны. Время между приливами и отливами в океане одно и то же и равно примерно 6 часам, что и наблюдал рыбак, живя на берегу океана.

Иная ситуация может сложиться в низовьях впадающих в океан рек (или в мелководных заливах). Дело в том, что по реке распространяются приливно-отливные волны, приход которых, безусловно, влияет на интересующие нас времена. (На Амазонке, например, эти волны даже представляли опасность для судоходства.) Важным обстоятельством является тот факт, что скорость этих волн зависит от глубины — она тем меньше, чем меньше глубина (попро-

---

*) В опубликованном ранее условии этой задачи допущена опечатка.

время между началом отлива и началом прилива увеличилось. Как объяснить это обстоятельство?

буйте это показать самостоятельно, например из соображений размерностей). Поэтому, если высота приливно-отливных волн сравнима с глубиной реки (залива), то скорость приливной волны будет меньше, чем отливной.

Это и объясняет явление, обнаруженное рыбаком на новом месте жительства.

А. С. Бутов

Ф1119. *В узкую кювету с параллельными вертикальными стенками налили некоторое количество жидкости (рис. 1). Затем кювету начали вращать вокруг вертикальной оси симметрии O—O. При некоторой скорости вращения обнажается k-я часть площади дна. Как при этом изменилась сила давления на дно и на узкие боковые стенки (по сравнению со случаем неподвижной кюветы)? При вращении жидкость не выплескивается. Поверхностным натяжением пренебречь.*

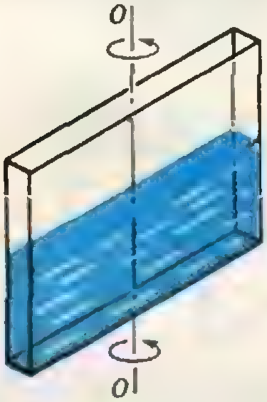


Рис. 1.

Прежде всего введем обозначения: пусть $2l$ — длина кюветы, a — ее ширина, h_0 — начальная высота налитой в кювету жидкости.

Горизонтальная поверхность жидкости во время вращения искривляется. Так как по условию $a \ll 2l$, можно считать, что поверхность жидкости приобретает цилиндрическую форму. Определим, какой вид имеет граница поверхности на боковой стенке.

Мысленно выделим в поверхностном слое вращающейся жидкости маленький объем на расстоянии x от оси вращения (рис. 2). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $\vec{N}$ реакции всей остальной жидкости на этот объем, которая направлена по нормали к поверхности жидкости в данной точке. Эти две силы создают центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 x$, направленное к оси O—O. Из рисунка 2

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ma_ц}{mg} = \frac{\omega^2}{g} x,$$

где α — угол наклона силы $\vec{N}$ к вертикали, равный углу наклона к оси X касательной к поверхности жидкости в данной точке.

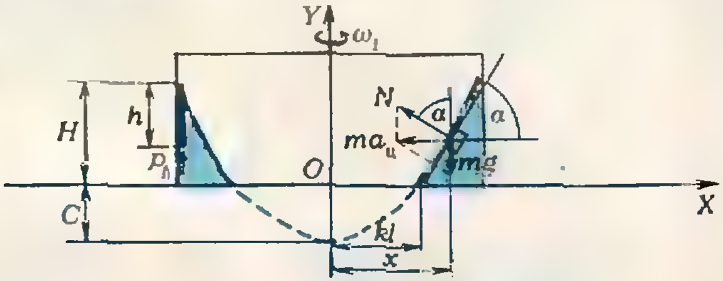


Рис. 2.

Тангенс угла α есть $f'(x)$, и можно найти первообразную функцию $y = f(x)$, которая и является уравнением искомой линии:

$$y' = f'(x) = \frac{\omega^2}{g} x,$$

$$y = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + C. \qquad (1)$$

Здесь C — константа первообразной. Ее смысл — высота столба жидкости по оси Y при $x = 0$. Свободной от жидкости k-я часть площади дна $(0 \leqslant k < 1)$ будет, если при $x = kl$ $y = 0$. Отсюда определим C:

(Продолжение см. на с. 34)

Калейдоскоп „Кванта"

А так ли хорошо знаете вы,

Насколько малы молекулы ?

> *...начала вещей недоступны для глаза...*
>
> Лукреций Кар

> *...вследствие малости частичек вещества движение скрывается от взоров.*
>
> М. В. Ломоносов

Вопросы и задачи

1. Почему объем раствора спирта в воде меньше объемов воды и спирта, взятых по отдельности?

2. Отчего сильно надутый и плотно завязанный резиновый шарик окажется через несколько дней «сдутым»?

3. Если по микропористой трубе, окруженной герметическим резервуаром, из которого откачан воздух, пропускать смесь газов, то в резервуаре будет накапливаться газ с бо́льшим, чем в трубе, относительным содержанием «легких» молекул. Как это объяснить?

4. Водород имеет три изотопа с массовыми числами 1, 2 и 3. Ионы какого из этих изотопов медленнее других продвигаются к катоду при электролизе воды?

5. Стеклянную пластинку

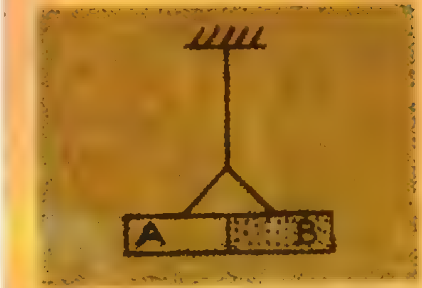
Вопросы и задачи

6. Чтобы «приварить» один кусок железа к другому, нагревают оба куска добела в пламени горна, накладывают один на другой на наковальне и обрабатывают сильными ударами кузнечного молота. Почему в этом случае получается прочное соединение?

7. На равноплечих весах установлены два одинаковых сосуда. Один заполнен сухим воздухом, дру-

гой — влажным, имеющим такие же давление

5. Стеклянную пластинку покрывают с одной стороны (В) слоем меди и подвешивают на нити, как показано на рисунке. В воздухе пластинка неподвижна, а в хлоре поворачивается на некоторый угол омедненной стороной «вперед». Объяснить явление, учитывая, что молекулы хлора поглощаются медью, а стеклом отражаются.



Вот несколько штрихов к обобщенному портрету молекул.

Они так малы, что если бы у каждого человека на земном шаре потребовать по миллиарду молекул, то набралось бы всего несколько миллиардных долей грамма...

Их так много, что если вылить в Мировой океан стакан воды с «помеченными» молекулами, то через длительное время в том же стакане с зачерпнутой из океана водой окажется не менее 200 «меченых»...

Им так «тесно», что при обычных условиях каждая молекула газа испытывает до 10 миллиардов столкновений в секунду со своими соседками...

Они так быстры, что молекула газа поднялась бы, не сталкиваясь, на высоту около 5 километров, прежде чем сила тяжести остановила бы ее...

Однако, несмотря на такую малость и «юркость», молекулы очень многим «выдают» себя. Надеемся, решение предложенных задач не позволит молекулам ускользнуть от вашего вооруженного знаниями взора.

и температуру, что и сухой. Какой из этих сосудов тяжелее?

8. В каких слоях атмосферы воздух ближе к идеальному газу: у поверхности Земли или на больших высотах?

9. Магнитное поле в камерах Вильсона — Скобельцына однородно. Почему же трек частицы имеет в них непостоянный (постепенно уменьшающийся) радиус кривизны?

Любопытно, что...

...в долине реки Теннесси (США) был воздвигнут гигантский завод по разделению изотопов, где два урановых газа (уран-238 и уран-235) непрерывно циркулировали через пористые камеры, в которых более легкий газ диффундировал быстрее, в результате чего газовая смесь постоянно обогащалась легким изотопом урана.

Любопытно, что...

...в газопылевых облаках межзвездной среды были обнаружены не только сравнительно простые молекулы, например воды и аммиака, но и сложные органические соединения. «Выдали» их спектральные линии испускания или поглощения в диапазоне радиочастот.

Микроопыт

Доведите воду в чайнике до кипения и выключите газовую горелку. Почему из чайника сразу же вырывается сильная струя пара, хотя до этого пара не было видно?

«Квант» о молекулах

1. *«К 175-летию закона Авогадро» — 1986, № 12, с. 12;*
2. *«Силы молекулярного взаимодействия» — 1987, № 1, с. 31;*
3. *«Давление газа в сосуде» — 1987, № 9, с. 41;*
4. *«Из жизни молекул» — 1988, № 7, с. 46;*
5. *«Абсолютная температура» — 1988, № 9, с. 60.*

$$0=\frac{\omega_1^2}{2g}(kl)^2+C\Rightarrow C=-\frac{\omega_1^2}{2g}k^2l^2.$$

Окончательно уравнение (1) перепишется в виде:

$$y=\frac{\omega_1^2}{2g}(x^2-k^2l^2). \qquad (2)$$

Это — уравнение параболы; здесь под ω_1 обозначена та угловая скорость, при которой обнажается k-я часть площади дна.

Для определения ω_1 воспользуемся свойством несжимаемости жидкости. Первоначальный объем жидкости $V=2lh_0a$ во время вращения распределится поровну по обе стороны от оси вращения: $V/2=Sa$, где S — площадь под поверхностью жидкости, т. е. часть плоскости, под графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $kl\leqslant x\leqslant l$. Эта площадь криволинейной трапеции соответствует определенному интегралу, взятому в пределах от kl до l:

$$S=\int\limits_{kl}^{l}y\,dx=\frac{\omega_1^2}{2g}\left(\int\limits_{kl}^{l}x^2dx-k^2l^2\int\limits_{kl}^{l}dx\right)=$$

$$=\frac{\omega_1^2l^3}{6g}(1-3k^2+2k^3).$$

Теперь из равенства

$$lh_0\,a=a\,\frac{\omega_1^2l^3}{6g}(1-3k^2+2k^3)$$

получаем

$$\omega_1=\frac{1}{l}\sqrt{\frac{6gh_0}{1-3k^2+3k^3}} \qquad (3)$$

Сила давления на дно во время вращения не меняется. Она по-прежнему равна силе тяжести налитой в кювету жидкости. Сила давления на боковую стенку возрастает. Покажем это.

Мысленно выделим тонкий пристеночный столб жидкости высотой h. Из условия его равновесия по вертикали следует, что давление жидкости на этот столб у его нижнего основания равно $p_h=\varrho gh$ (см. рис. 2). Но давление в данной точке жидкости изотропно (закон Паскаля). Следовательно, давление жидкости на стенку при вращении кюветы линейно зависит от глубины. Если жидкость у боковой стенки во время вращения со скоростью ω_1 поднимется до высоты H, то силу давления на стенку можно будет выразить через среднее давление $p_{\text{ср}}=\varrho gH/2$:

$$F_1=p_{\text{ср}}Ha=\frac{\varrho ga}{2}H^2.$$

В покоящейся кювете было

$$F_0=\frac{\varrho ga}{2}h_0^2.$$

Таким образом, увеличение силы давления будет в $n=(H/h_0)^2$ раз.

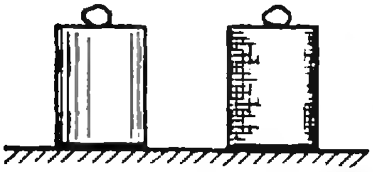
Для определения H у стенки нужно в уравнение (2) подставить $x=l$. Окончательно, с учетом (3), получим

$$n=\left(\frac{3(1-k^2)}{1-3k^2+2k^3}\right)^2.$$

Интересный и неожиданный результат: n есть функция только k и не зависит ни от рода жидкости, ни от ее количества, ни от размеров кюветы. И самое главное — n не зависит от g, т. е. от того, где во Вселенной вращать кювету: на Земле, на Юпитере или на астероиде. (За исключением лишь одного места: на космическом корабле. Почему там «нельзя вращать» кювету, читатель сможет объяснить сам.) Наконец, если положить $k=0$, т. е. вращать до той скорости, при которой донышко «только проглянет», то «всегда и везде» будет $n=9$ (!).

Г. С. Лапидус

Ф1120. *Для сравнения теплопроводностей различных материалов предлагалось использовать следующий метод. На горячую плиту ставятся два одинаковых цилиндра из исследуемых материалов (см. рисунок). На цилиндры кладут по кусочку воска. Где скорее воск начнет таять — тот цилиндр и обладает лучшей теплопроводностью. Верен ли этот метод?*



К сожалению, этот простой метод сравнения теплопроводностей нельзя считать правильным. И вот почему.

Время, за которое верхняя часть цилиндрического образца нагреется до температуры плавления воска, конечно же, тем меньше, чем больше теплопроводность. Однако это время зависит также и от *теплоемкости* материала цилиндра — чем она больше, тем большее время (большее количество теплоты) потребуется, чтобы нагреть образец до соответствующей температуры. Таким образом, цилиндр из материала с большой теплоемкостью будет разогреваться медленнее, чем цилиндр из материала с небольшой теплоемкостью и чуть меньшей теплопроводностью. Именно так происходит, например, в случае с висмутом и железом.

Оказывается, предлагаемый метод позволяет сравнивать другие тепловые характеристики материалов, а именно — их *температуропроводности*. Это тоже важная физическая величина, которая характеризует скорость изменения температуры вещества. Коэффициент температуропроводности пропорционален отношению коэффициентов теплопроводности и теплоемкости.

А. И. Буздин

Ф1121. *Металлический шар радиусом ϱ, удаленный от других предметов, заземлен через резистор сопротивлением R. На шар налетает пучок электронов, скорость которых вдали от шара была v. В секунду*

Рассмотрим два решения этой задачи.

Первое решение — обычное.

Полная энергия, приносимая электронами за единицу времени, есть

$$W=n\frac{mv^2}{2}.$$

Через резистор течет ток $I=n\varrho$ (число уходящих в зем-

на шар попадает n электронов. Какое количество теплоты выделяется на шаре за секунду? Каков заряд шара?

лю электронов равно числу попадающих на шар за то же время), так что в резисторе переходит в тепло энергия (в единицу времени)

$$P=I^2R=(ne)^2R.$$

В силу закона сохранения энергии, количество теплоты, выделяемое на шаре в единицу времени, равно

$$Q=W-P=n\frac{mv^2}{2}-(ne)^2R=\frac{nmv^2}{2}\left(1-n\frac{2e^2R}{mv^2}\right).$$

Потенциал шара (точнее, разность потенциалов между шаром и землей)

$$\varphi=IR=neR.$$

С другой стороны,

$$\varphi=k\frac{q}{\varrho}.$$

Таким образом, заряд шара

$$q=\frac{\varphi\varrho}{k}=\frac{neR\varrho}{k}=4\pi\varepsilon_0 neR\varrho.$$

Заметим, что электроны *попадают* на шар, если их кинетическая энергия больше работы, затраченной на преодоление отталкивания от шара:

$$\frac{mv^2}{2}>e\varphi.$$

Подставляя $\varphi=neR$, перепишем это условие в виде:

$$n<\frac{mv^2}{2e^2R}.$$

При этом выражение в скобках для определения Q положительно: $Q>0$. Таким образом, видно, что подбор чисел в условии не может быть произвольным.

Если первоначально число попадающих электронов было больше n, то потенциал шара постепенно увеличивался, так что начиная с какого-то момента часть электронов перестала попадать на шар (из-за электрического отталкивания). Если первоначально потенциал шара был больше или равен φ, то электроны не попадали на шар, а заряд стекал с него до тех пор, пока не установился режим, описанный в задаче.

Второе решение позволит глубже почувствовать, что́ такое электродвижущая сила источника.

Представим нашу систему как электрическую цепь, состоящую из источника с ЭДС $\mathscr{E}$ и нулевым внутренним сопротивлением и двух последовательно соединенных «резисторов». Сопротивление одного из них — это эффективное сопротивление шара $R_ш$, другого — известное сопротивление R. Источником тока мы назовем устройство, разгоняющее электроны (например, известная электронная пушка). Здесь электрон набирает энергию $mv^2/2=e\mathscr{E}$. Отсюда ЭДС источника равна

$$\mathscr{E}=\frac{mv^2}{2e}.$$

Цепь замыкается через заземление (можно считать, что в ускоряющее устройство попадают именно те электроны, которые ушли в заземление).

Теперь наша задача — определить эффективное сопротивление шара $R_{ш}$, так как искомое количество теплоты, выделяющееся на шаре, можно найти из формулы

$$Q=I^2R_{ш}=(ne)^2R_{ш}.$$

Запишем закон Ома для нашей цепи:

$$\mathscr{E}=I(R+R_{ш}),$$

откуда, зная $\mathscr{E}$, I и R, найдем $R_{ш}$:

$$R_{ш}=\frac{\mathscr{E}}{I}-R=\frac{mv^2}{2ne^2}-R.$$

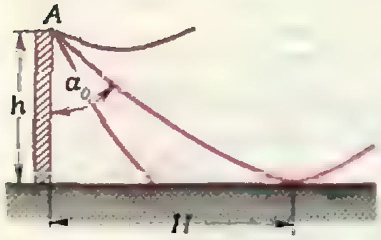
Подставляя $R_{ш}$ в выражение для Q, после простых преобразований получаем уже знакомое выражение

$$Q=n\frac{mv^2}{2}\left(1-n\frac{2e^2R}{mv^2}\right).$$

Заряд шара находим так же, как и в первом решении.

И. Ф. Гинзбург

Ф1122. *Известны случаи наблюдения миража моря в пустыне. На каком расстоянии от наблюдателя возникает такой мираж? Считать, что скорость света в приземном слое в пустыне меняется по закону $c(z)=c_0(1-az)$, где c_0 — скорость света у поверхности земли, z — высота над поверхностью.*



Изменение скорости света в воздухе (а значит, и его показателя преломления) с высотой приводит к искривлению световых лучей (к рефракции).*) Это явление и обусловливает возникновение миража моря в пустыне.

Пусть наблюдатель, рост которого h, стоит на земле (см. рисунок). Рассмотрим световые лучи, выходящие из точки A. Луч, составляющий угол α_0 с вертикалью, касается поверхности земли и затем уходит вверх. Углам $\alpha>\alpha_0$ соответствуют лучи, также уходящие вверх. Лучи же, идущие под углами $\alpha<\alpha_0$, упираются в землю. Воспользовавшись свойством обратимости световых лучей, мы получим, что до угла α_0 наблюдатель видит землю, а начиная с α_0 — небо. Но поскольку «небесные» лучи приходят к наблюдателю снизу, ему кажется, что он видит голубое море (ведь человек подсознательно считает распространение света прямолинейным).

Теперь найдем искомое расстояние H.

Согласно обобщенному закону преломления света для слоистой среды,

$$\frac{\sin\alpha_0}{\sin\beta_0}=\frac{c(h)}{c_0},$$

где $c(h)$ — скорость света на высоте h, β_0 — угол исследуемого луча с вертикалью у поверхности земли.

---

*) Подробнее об этом явлении можно прочитать в статье А. А. *Варламова* и А. И. *Маляровского* «Переговорная трубка длиной в экватор?» («Квант», 1985, № 2) и в статье С. А. Гордюнина и П. Л. Горькова «Преломление света» в этом номере журнала.

Поскольку $\beta_0 \approx 90°$, получаем

$$\sin\alpha_0 = \frac{c(h)}{c_0} = 1 - ah.$$

Далее учтем, что изменение скорости света с высотой очень мало и поэтому искривление лучей также очень мало. Так что для расчета расстояния H луч можно считать прямым. Из рисунка видно, что $H = h\,\mathrm{tg}\,\alpha_0$. Отсюда, используя закон преломления, получим

$$H = \frac{h(1-ah)}{\sqrt{ah(2-ah)}}.$$

Б. И. Клячин

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Числа p и q простые. Найдите их, если известно, что уравнение $x^4 - px^3 + q = 0$ имеет целый корень.

2. Докажите, что если $xyz = 1$, то

$$\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx} = 1.$$

3. Две окружности разных радиусов касаются друг друга внутренним образом в точке P. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке A. Докажите, что PA — биссектриса угла BPC.

4. В прямоугольнике $ABCD$ опущен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N — середины отрезков AK и CD соответственно. Докажите, что угол BMN прямой.

5. Внутри данного треугольника ABC постройте такую точку M, что площади треугольников ABM, BCM, CAM будут относиться как $k:l:m$, где k, l, m — данные отрезки.

Девятый класс

6. Докажите, что уравнение

$$x^{1987} + y^{1987} = x^{1988} + y^{1988}$$

имеет бесконечно много решений в рациональных числах.

7. Последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет соотношению $x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Каким должно быть x_1, чтобы члены последовательности x_{100} и x_{1000} были равны?

8. Бесконечная геометрическая прогрессия с положительными членами и знаменателем q обладает тем свойством, что каждый ее член, начиная со второго, больше суммы всех предыдущих. Какие значения может принимать q?

9. Из каждой вершины пятиугольника проведи векторы к серединам трех несмежных с этой вершиной сторон. Докажите, что сумма всех 15 построенных таким образом векторов равна 0.

10. В треугольнике ABC проведена биссектриса AF угла A. Пусть D, E — точки пересечения AF с вписанной в треугольник окружностью. Докажите, что $AD > EF$.

Десятый класс

11. Решите неравенство

$$|x^9 - x| + |x^8 - x^7| \leqslant |x^9 - x^8 + x^7 - x|.$$

12. Пусть M — произвольная точка основания ABC тетраэдра $SABC$. Через точку M проведены отрезки, параллельные боковым ребрам, до пересечения с боковыми гранями. Пусть длины боковых ребер равны a, b, c, а длины параллельных им отрезков соответственно равны x, y, z. Докажите, что $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

13. Дан тетраэдр $ABCD$. Один шар касается ребер AB и CD в точках A и C, а другой — в точках B и D. Докажите, что проекции ребер AC и BD на прямую, проходящую через центры этих шаров, равны.

14. Решите уравнение $\mathrm{tg}\,x - 2[\mathrm{tg}\,x] - 3 = 0$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа).

15. Докажите, что при любом a уравнение

$$10ax^4 - 4ax^3 + a^2x^2 + 6x - 2 = 0$$

имеет по крайней мере один корень в промежутке $[0;\ 1]$.

Публикацию подготовили
Ю. В. Томилов, В. А. Ясинский

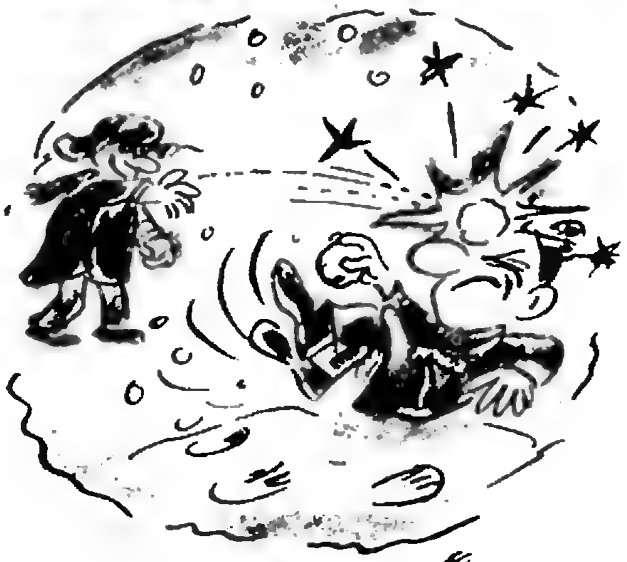
„Квант" для младших школьников

Задачи

1. Ира, Витя и Коля взяли по порции всех сортов мороженого: фруктового, сливочного и шоколадного. Однако трех порций каждому оказалось мало, и Ира взяла еще порцию фруктового, Витя — сливочного, а Коля — шоколадного мороженого. Уходя, они уплатили: Ира — 70 коп., Витя — 80 коп., Коля — 90 коп. Сколько стоит порция каждого мороженого?

2. Расставьте числа $a=2^{45}$, $b=3^{36}$, $c=4^{27}$, $d=5^{18}$ в порядке возрастания.

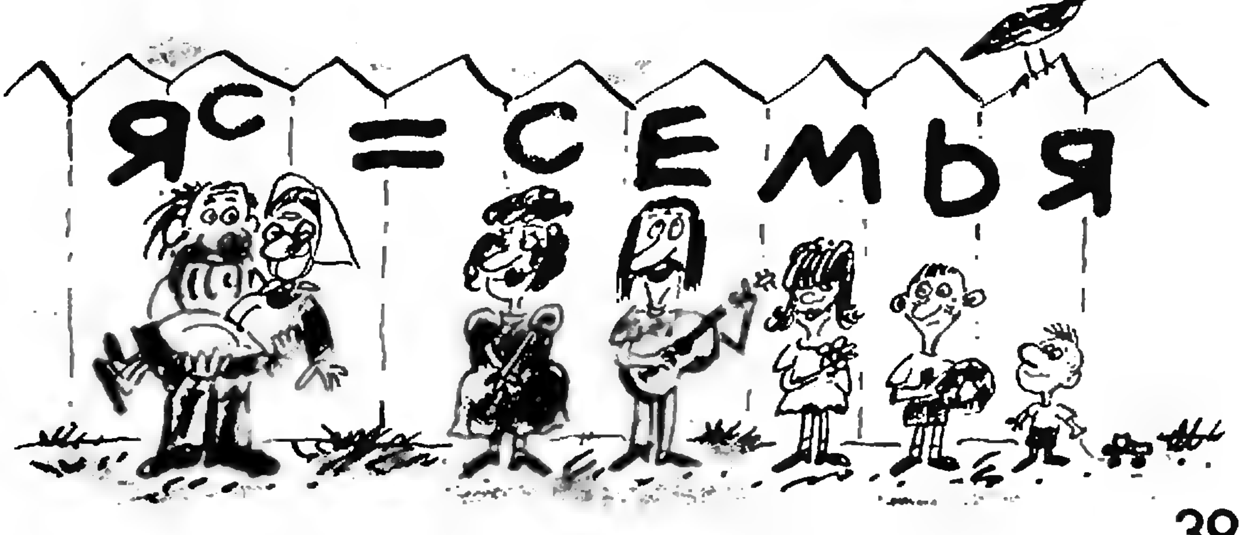
3. Часто со словом «снег» употребляют эпитет «искрящийся». Чем это вызвано?



4. Расшифруйте арифметический ребус на рисунке. (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.)

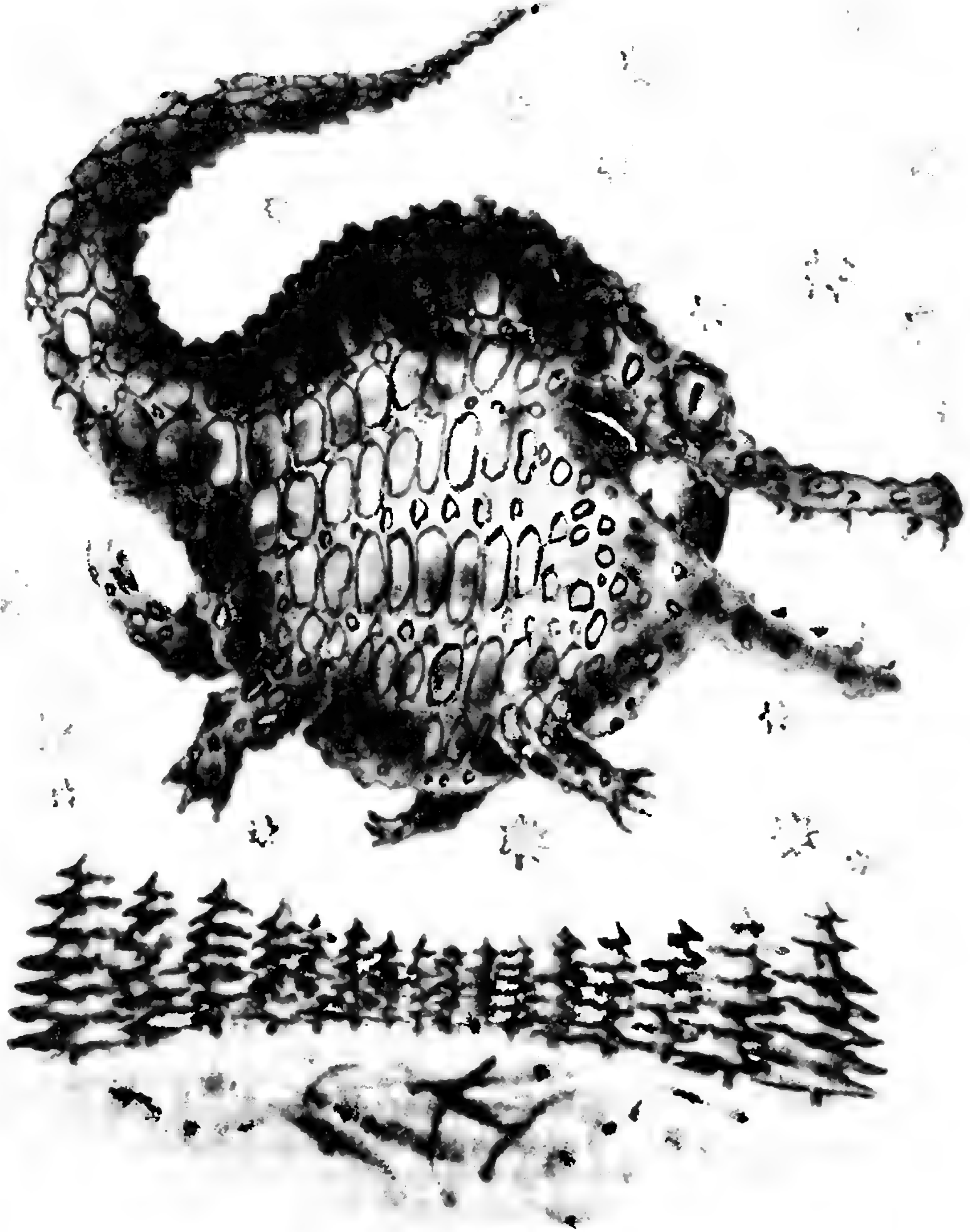
5. Диагональ выпуклого четырехугольника делит пополам отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон этого четырехугольника. Покажите, что эта диагональ делит пополам и площадь четырехугольника.

Эти задачи нам предложили: *В. Д. Вьюн, А. П. Савин, А. А. Панов, С. Мадримов, Н. Ю. Нецветаев.*



ГРАДУСНИК ДЛЯ СОЛНЦА

Кандидат физико-математических наук
М. Д. КОВАЛЕНКО



Если вы думаете, что название статьи — шутка, то ошибаетесь. Такие градусники существуют. Но не спешите представлять себе, как космические ракеты забрасывают их прямо в огнедышащее светило. Это не так. Впрочем, без космоса дело все-таки не обходится, но об этом немного позже. Как вы скоро узнаете, температура на поверхности Солнца достаточно велика, чтобы расплавился прибор из любого тугоплавкого металла. Да и ракеты пока не дешевы. Значит, надо уметь измерять температуру на расстоянии, нужны безконтактные методы. Потребность в таких методах возникает и в более земных делах. Металлурги должны знать температуру жидкого металла в печи и температуру раскаленного слитка, быстро несущегося по прокатному стану. Авиаинженерам необходимо измерять температуру лопаток стремительно вращающейся газовой турбины. Таких примеров, когда нельзя «пощупать» измеряемый объект, много. К счастью, делать это не обязательно, и вот почему.

Все тела постоянно испускают в окружающее пространство энергию в виде теплового излучения. По своей природе тепловое излучение — это электромагнитные волны, т. е. связанные между собой колебания электрического и магнитного полей, которые распространяются в вакууме со скоростью света $c = 300\,000$ км/с. По аналогии с волнами на воде расстояние между двумя соседними «гребнями» колебаний называют длиной волны. Испускаемое телом тепловое излучение несет в себе сведения о температуре тела. При высоких температурах мы видим часть теплового излучения в виде свечения (такое свечение испускают все достаточно горячие тела — и слиток металла, и Солнце, и звезды). Почему только часть? Дело в том, что тепловое излучение представляет собой «смесь» колебаний с различными длинами волн — от $\lambda \approx 0{,}1$ мкм до $\lambda \approx 100$ мкм. А человеческий глаз реагирует на электромагнитные колебания с длинами волн, лежащими в узком видимом диапазоне: 0,4—0,7 мкм. При температурах ниже 600 °С тела не светятся, но тепловое излучение испускают, только длины волн этого излучения лежат в не видимой глазом так называемой инфракрасной области: 0,7—100 мкм. Человек может ощущать инфракрасное излучение по его воздействию на кожу. Например, хорошо протопленная печь «пышет жаром», обжигает лицо и руки на расстоянии 2—3 метра — это действует инфракрасное излучение. Если же температура тела превышает 3000 °С, то в тепловом излучении появляются длины волн 0,1—0,4 мкм; это так называемый ультрафиолетовый диапазон (тоже невидимый).

Теперь осталось выяснить, каким образом в тепловом излучении «зашифрована» температура и как ее оттуда извлечь. Для этого нам надо знать, как измеряют спектр излучения — зависимость излучаемой мощности от длины волны. Именно в спектре и содержится вся информация о температуре. Понятно, что прежде всего надо как-то «разделить» тепловое излучение, выделить из «смеси» излучение с определенной длиной волны. Впервые спектр излучения Солнца исследовал великий английский физик Исаак Ньютон. Он пропускал тонкий луч Солнца сквозь стеклянную призму, и поскольку свет с разными длинами волн преломляется в материале призмы по-разному, на экране за призмой получалась радуга (цветам раду-

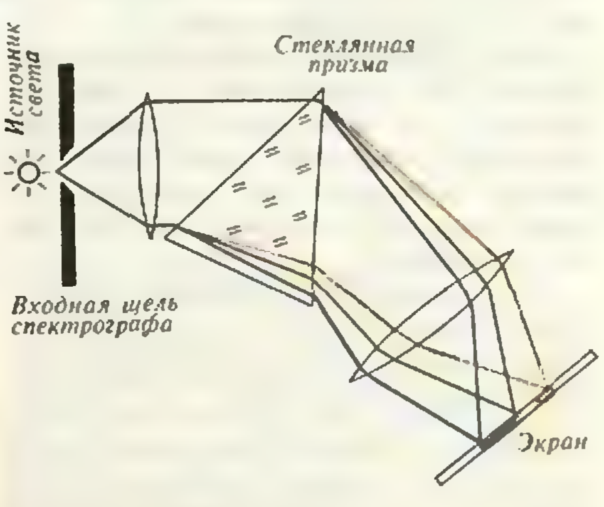


Рис. 1. Разложение теплового излучения в спектр с помощью спектрографа.

ги соответствуют разные длины волн света). Призмы применяют и в современных приборах для изучения спектров — спектрографах (рис. 1). В наше время для повторения опыта Ньютона в качестве источника излучения можно использовать обычную лампу накаливания. Видимая часть теплового излучения источника предстает на экране в виде радужной полосы. Если прямо перед экраном поместить непрозрачную пластинку с узкой щелью, то на экран будет попадать излучение, длины волн которого лежат в узком интервале. Перемещая щель, мы можем увидеть излучение любого цвета радуги — красное, оранжевое, желтое, зеленое и т. д.

Теперь надо измерить, какая энергия приходится на разные длины волн. Для спектральных измерений используют фотоэлектрические приемники, или фотоприемники,— приборы, способные преобразовывать падающее на них излучение, в том числе и невидимое, в электрический ток. Фотоприемник помещают за выходной щелью спектрографа и присоединяют к какому-нибудь регистрирующему устройству (самописцу). Специальный электродвигатель равномерно перемещает фотоприемник вместе с щелью, и перед фотоприемником последовательно проходят все участки спектра, а вырабатываемый при этом ток, пропорциональный мощности излучения, записывается с помощью самописца. В результате самописец отображает зависимость мощности излучения от длины волны, т. е. спектр излучения.

Я чувствую, что нетерпеливый читатель уже спрашивает: а как же насчет градусника для Солнца? Еще немного терпения — нам осталось только выяснить, как связаны температура тела и спектр его теплового излучения.

Если навести спектрометр на нить лампы накаливания, то в результате измерений получится кривая с максимумом — как кривая *1* на рисунке 2. Такой же вид имеет спектр излучения любых конденсированных (твердых и жидких) веществ и плотных газов. При изменении температуры тела общий вид спектра остается тем же, но максимум в спектре будет смещаться. Одно из замечательных свойств теплового излучения состоит в том, что длина волны λ_m, соответствующая этому максимуму, и температура излучающего тела T связаны простым соотношением *)

$$\lambda_m T = A, \text{ где } A = 3000 \text{ мкм} \cdot \text{К}.$$

По фамилии первооткрывателя этого соотношения его называют законом смещения Вина, а постоянную величину A — постоянной Вина (точное значение этой постоянной — $A = (2897{,}5 \pm 0{,}3)$ мкм·К).

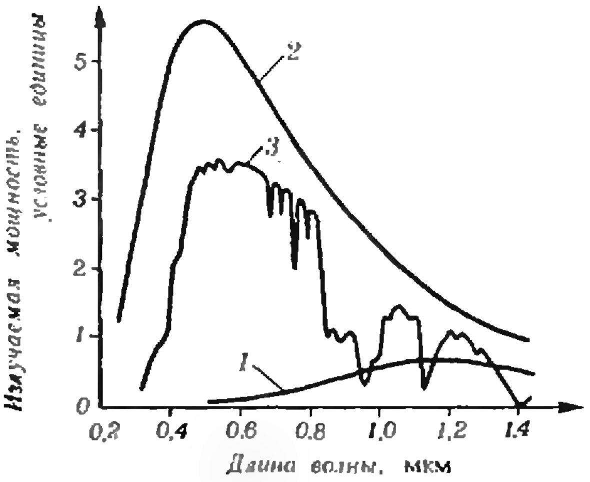


Рис. 2. Спектр теплового излучения: 1 — нити лампы накаливания; 2 — Солнца (внеатмосферные измерения); 3 — Солнца (измерения на поверхности Земли).

Ну вот, теперь мы все знаем для того, чтобы измерить температуру поверхности Солнца по спектру излучения. Максимум излучаемой энергии в солнечном спектре приходится на длину волны $\lambda_m \approx 0{,}5$ мкм (кривая *2* на рисунке 2). Подставляя эту величину в закон Вина, получим температуру поверхности Солнца:

$$T = \frac{3000}{0{,}5} \text{ К} = 6000 \text{ К} \approx 5700 \text{ °С}.$$

Это значительно выше температуры

---

*) Температура T подразумевается выраженной по шкале Кельвина — в кельвинах (К). В шкалу Цельсия (t, °С), ее переводят по формуле $t = T - 273$. Физики пользуются шкалой Кельвина, так как многие законы имеют наиболее простой вид, если входящая в них температура выражается в кельвинах.

плавления рекордсмена тугоплавкости — карбида тантала: $T_{пл}=3900$ °С.

Итак, вы убедились, что «пощупать» Солнце можно только на расстоянии. Но лучше не с поверхности Земли. При прохождении сквозь земную атмосферу часть солнечного излучения поглощается водяным паром, кислородом, углекислым газом, причем поглощение происходит в узких участках длин волн. В результате спектр солнечного излучения, достигающего поверхности Земли, сильно искажен по сравнению с исходным (кривая *3* на рисунке 2). Для получения неискаженного спектра аппаратуру помещают в высотные ракеты, стратостаты, достигающие верхних разреженных слоев земной атмосферы. Наилучшие условия для измерений имеются, конечно, на борту орбитальных станций, находящихся выше атмосферы Земли. И «градусники» для Солнца — спектрометры — в космосе действительно летают.

Теперь от проблем небесных вернемся к земным. Что дозволено Юпитеру, то не дозволено быку,— говорили древние римляне. Так бывает и в науке — метод измерения температуры по закону Вина подходит для оценки температуры Солнца, звезд, но не пригоден, скажем, в металлургии. При температурах горячей обработки металла, обычно не превышающих 2000 °С, максимум излучения находится в невидимой инфракрасной области, а это усложняет измерения. Кроме того, погрешность определения длины волны, соответствующей максимуму, составляет до 10 %, и с такой же погрешностью определяется значение температуры. А металлургам нужна точность на уровне 1 %. Поэтому для измерений температуры они используют специальные приборы — оптические пирометры. Самый простой из них — визуальный яркостный пирометр. Температура в этом приборе измеряется по яркости теплового излучения — с ростом температуры яркость растет, тут все ясно. Но пирометр «визуальный», значит, измерения ведутся «на глазок»; так откуда же высокая точность? Действительно, человек может определить температуру по яркости излучения лишь очень приближенно. Однако при сравнении яркостей человеческий глаз работает чрезвычайно точно — он замечает различия, соответствующие долям градуса. На этом свойстве глаза и основано действие прибора. Пирометр (рис. 3) состоит из телескопа *Т*, в корпусе которого помещены фильтр *Ф* из красного стекла и специальная электрическая лампа *Л*. Оператор наблюдает изображение нити лампы на фоне нагретой поверхности *П* тела, температуру которого надо определить. Лампа подключена к батарее *Б* и реостату *Р*. Если ток через лампу не идет, то нить видна как темная полоска на фоне светящейся поверхности тела. Регулируя реостатом ток через нить лампы, а следовательно, и ее яркость, оператор добивается того, чтобы яркость нити и нагретой поверхности сравнялась. В этот момент нить становится не различимой на фоне поверхности, она как бы исчезает (отсюда и происходит другое название прибора — пирометр с исчезающей нитью). Теперь остается измерить ток лампы с помощью амперметра, и по предварительно сделанной градуировочной кривой (т. е. по кривой, выражающей зависимость тока лампы от температуры поверхности) определяется температура изучаемой нагретой поверхности. (Несколько слов о том, зачем нужен фильтр *Ф*. Спект-

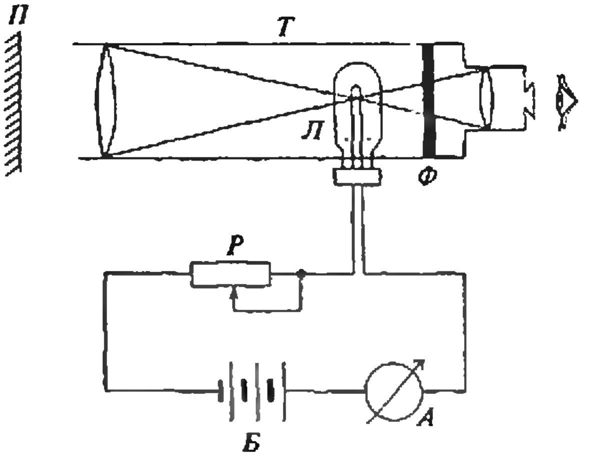


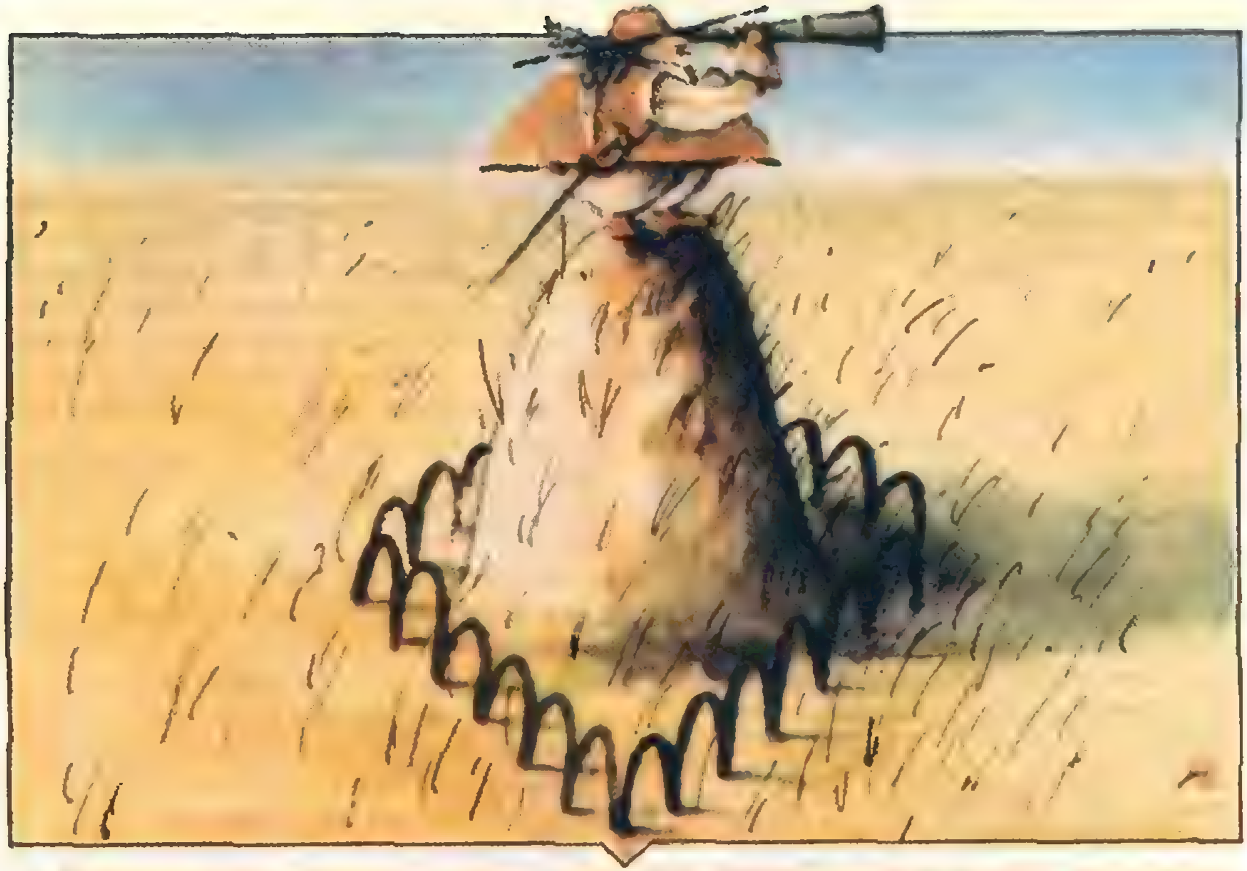
Рис. 3. Схема визуального яркостного пирометра.

ры излучения разных веществ при одной и той же температуре не всегда совпадают, т. е. у нити и измеряемой поверхности могут быть одинаковые яркости, но несколько различающиеся цвета. В таком случае нить может не «исчезнуть» при совпадении яркости. А фильтр пропускает только излучение одного цвета, т. е. очень узкого интервала длин волн, и при одинаковых яркостях нить «исчезает».)

Пирометр с исчезающей нитью — прибор точный, но медленный. Даже если заменить глаз оператора фотоприемником, а уравнивание яркостей доверить электронике, как это сделано в самых современных пирометрах, то быстродействие составляет в лучшем случае доли секунды. В пирометрах для наиболее быстрых измерений используют только фотоприемник и фильтр и вовсе не используют лампу сравнения. Температуру определяют прямо по вырабатываемому фотоприемником току, который пропорционален яркости теплового излучения. К сожалению, это только кажущаяся простота. Такой фотоэлектрический пирометр буквально «набит» электроникой, но в точности все-таки уступает пирометру с исчезающей нитью. Зато быстродействие таких приборов достигает миллионов измерений в секунду. Именно с помощью фотоэлектрических пирометров измеряют температуру в быстрых процессах, например температуру лопаток работающей газовой турбины.

Есть и совершенно другой тип пирометров, называемых цветовыми. Их действие основано на том, что при изменении температуры раскаленных тел меняется не только яркость теплового излучения, но и цвет. По цвету свечения в прошлом определяли температуру при обработке металлов, так как глаз человека различает цвет точнее, чем яркость (красное каление, оранжевое каление, желтое каление, белое каление — этим цветовым оттенкам нагретого металла соответствуют вполне определенные диапазоны температур). Изменение цвета легко понять из закона смещения Вина: с ростом температуры максимум в спектре излучения смещается в более коротковолновую область (от красной к фиолетовой). Кстати, по этой причине самые холодные звезды — красные, самые горячие — голубые. В промышленных пирометрах для измерения температуры по цвету обычно используется только видимый диапазон длин волн. Зачем нужны цветовые пирометры? Они нечувствительны к поглощающей среде между измеряемой поверхностью и пирометром. В этом случае уменьшается яркость излучения, но не изменяется цвет. Такие приборы используют в задымленных цехах, при измерениях сквозь полупрозрачные смотровые окна — во всех случаях, когда из-за ослабления излучения яркостный пирометр дает заниженные показания.

Существуют еще десятки типов пирометров на все случаи жизни. Общее у них одно — измерение температуры по спектру теплового излучения. Даже температуры в десятки миллионов градусов, до которых нагревается плазма в экспериментальных термоядерных установках, тоже измеряют по тепловому излучению. Правда, при таких температурах максимум в спектре излучения сдвигается в рентгеновскую область, а рентгеновский спектрометр, кроме названия, не имеет ничего общего с обычным спектрометром. И это уже тема для отдельного разговора...



Школа в „Кванте"

Математика 9, 10

Публикуемая заметка адресована девятиклассникам и десятиклассникам.

Ферма ищет экстремумы...

Кандидат физико-математических наук
А. Д. БЕНДУКИДЗЕ

Существует множество задач, требующих нахождения наибольшего или наименьшего значения некоторой переменной величины. Возьмем, к примеру, следующую задачу. *Забором длиной $4a$ нужно огородить прямоугольный участок наибольшей площади. Каковы должны быть размеры участка?*

Решить эту задачу не трудно. В самом деле, пусть длина участка x. Тогда ширина его будет $2a-x$, а площадь $x(2a-x)$. Дело сводится к нахождению x, для которого функция $S(x)=2ax-x^2$ принимает наибольшее значение. А для этого достаточно заметить, что

$$S(x)=a^2-(x-a)^2\leqslant a^2,$$

причем равенство достигается лишь при одном значении x: при $x=a$. Но тогда и $2a-x=a$, т. е. участок должен иметь форму квадрата.

Не всегда, однако, при решении подобных задач удается обойтись элементарными методами. Вот пример: *найти размеры прямого параллелепипеда наибольшего объема с квадратным основанием, если сумма длин стороны этого квадрата и высоты параллелепипеда равна a.*

Ясно, что если длину стороны основания обозначить через x, то объем параллелепипеда будет равен $x^2(a-x)$. Итак, необходимо найти такое значение x $(0<x<a)$, при котором функция

$$v(x)=x^2(a-x)$$

принимает наибольшее значение. Как

решить эту задачу элементарным путем, не видно. Что же делать?

Читатель, наверное, думает: к чему мудрить? Вычислим $v'(x)$, решим уравнение $v'(x)=0$, найдем критические точки и посмотрим, в какой из найденных точек наша функция имеет наибольшее значение — все очень просто!

Согласен, проще всего действовать по схеме, изложенной в учебном пособии «Алгебра и начала анализа». Конечно, привлечение производной существенно облегчает исследование функции — нахождение промежутков возрастания и убывания, экстремумов, а также наибольших и наименьших значений.

А все же, нельзя ли обойтись без производной? Неужели раньше, до изобретения производной, ученые не решали задачи подобного типа? Решали, как не решали! Но часто приходилось прибегать к очень хитроумным преобразованиям или к геометрическим построениям. Иными словами, до поры до времени не существовало единого метода, пригодного если не для всех, то хотя бы для достаточно обширного класса задач.

Первым, кто нашел такой метод, был гениальный французский математик Пьер Ферма, о жизни и творчестве которого не раз рассказывалось в «Кванте». Например, в статье И. Г. Башмаковой «Пьер Ферма» («Квант», 1976, № 8) приведено известное правило Ферма для нахождения экстремумов, которое сам автор успешно применял и для проведения касательных. Если воспользоваться современной символикой, это правило можно записать следующим образом.

Для нахождения экстремума некоторой функции f, зависящей от x, следует найти $f(x+h)$, где h достаточно мало, и написать приближенное равенство $f(x+h)\approx f(x)$. Упростив полученное равенство и разделив его на h или на высшую возможную степень h, следует отбросить члены, которые еще содержат h, и приближенное равенство заменить точным. Получим уравнение, корнями которого будут именно те значения x, для которых f может иметь экстремум.

Сформулировав это правило, а произошло это не позднее 1629 года, Ферма решает в качестве примера следующую задачу: «Разделить отрезок AC точкой E так, чтобы прямоугольник со сторонами AE и EC был наибольшим по площади». Читатель, конечно же, догадался, что это именно та задача, которую мы решили в начале статьи.

Посмотрим, как она решается при помощи правила Ферма.

Сохраним прежние обозначения: пусть длины отрезков AC и AE равны соответственно $2a$ и x. Приравняв (в смысле Ферма!) $S(x+h)$ и $S(x)$, где S — площадь прямоугольника, получим:

$$(x+h)(2a-x-h)\approx x(2a-x).$$

После перенесения правой части в левую, раскрытия скобок и сокращения на $-h$ получим: $2x-2a+h\approx 0$. Отбросив член, содержащий h, и заменив приближенное равенство точным, найдем: $x=a$. Искомый прямоугольник — квадрат.

Познакомимся еще с одной задачей, рассмотренной Ферма: «Рассечь данную линию AC в точке B так, чтобы тело, построенное на квадрате со стороной AB и с высотой BC, было наибольшим».

Ясно, что Ферма ищет прямой параллелепипед наибольшего объема с квадратным основанием при условии, что сумма стороны основания и высоты дана. А это — выше сформулированная задача! Для нее $v(x)=x^2(a-x)$, и, согласно указаниям Ферма, имеем:

$$(x+h)^2(a-x-h)\approx x^2(a-x),$$
$$2axh-3x^2h-3xh^2+ah^2-h^3\approx 0,$$
$$2ax-3x^2=0.$$

Итак, $x=0$ или $x=2a/3$. Первый корень не годится — ведь выше было сказано, что $0<x<a$. Остается второй, т. е. параллелепипед имеет наибольший объем, если сторона основания вдвое больше высоты.

Верен ли полученный результат? Чтобы ответить на этот вопрос, мы прежде всего должны установить, верно ли само правило Ферма. Следует заметить, что Ферма сначала дал только формулировку своего правила, но позже и обосновал его. Проследим на примере функции v ход рассуждений Ферма.

Пусть v достигает своего наибольшего значения при значении аргумента x_0. Тогда для любого сколь угодно малого положительного h должно быть:

$$\begin{cases} v(x_0)\geqslant v(x_0-h),\\ v(x_0)\geqslant v(x_0+h).\end{cases}$$

Вспомнив, что $v(x)=ax^2-x^3$, после элементарных преобразований и сокращения на h систему можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases}(2ax_0-3x_0^2)-(a-3x_0+h)h\geqslant 0,\\ (2ax_0-3x_0^2)+(a-3x_0-h)h\leqslant 0.\end{cases}\qquad(1)$$

Докажем, что из этих соотношений следует равенство $2ax_0-3x_0^2=0$. В самом деле, пусть $2ax_0-3x_0^2\neq 0$. Возьмем h настолько малым, чтобы было

$$h|a-3x_0\pm h|<|2ax_0-3x_0^2|.$$

Этого, в силу произвольной малости h, всегда можно добиться. Но тогда выражения

$$(2ax_0-3x_0^2)-(a-3x_0+h)h$$

и

$$(2ax_0-3x_0^2)+(a-3x_0-h)h$$

либо оба положительны (если $2ax_0-3x_0^2>0$), либо оба отрицательны (если $2ax_0-3x_0^2<0$). А это противоречит системе (1). Итак, x_0 должно быть корнем уравнения $2ax-3x^2=0$, что и доказывает верность полученного результата (существование искомого параллелепипеда не вызывает сомнения!).

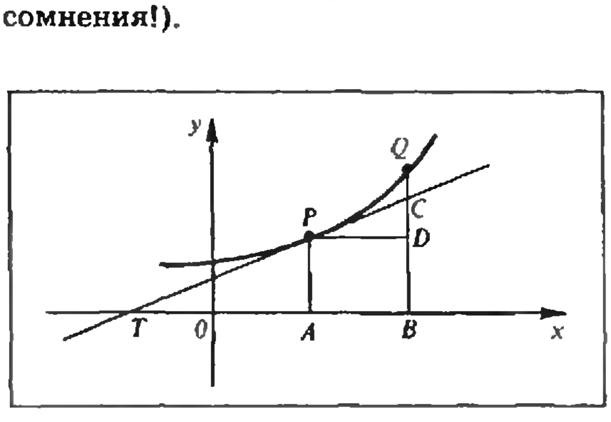


Рис. 1.

Как видим, правило Ферма довольно просто и при этом эффективно. Но важнее то, что этим правилом Ферма фактически ввел производную!

В самом деле, ведь он после приравнивания нулю выражения

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\qquad(2)$$

отбрасывает члены, содержащие h или его высшие степени, и приближенное равенство заменяет точным. А это равносильно переходу к пределу в выражении (2) при условии, что h стремится к нулю, т. е. нахождению производной $f'(x)$. Иными словами, правило Ферма поэтапно можно представить в виде следующей схемы:

$$f(x+h)\approx f(x),$$

$$f(x+h)-f(x)\approx 0,$$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\approx 0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0,$$

$$f'(x)=0.$$

Итак, необходимое условие существования экстремума, высказанное упомянутым правилом, есть не что иное, как хорошо известная нам... теорема Ферма!

Между прочим, Лагранж, Лаплас и Фурье считали, что правило Ферма послужило началом создания дифференциального исчисления. Им не было известно мнение великого Ньютона — дело в том, что в одном письме, впервые опубликованном лишь в тридцатых годах нашего столетия (более двухсот лет после смерти его автора!), Ньютон недвусмысленно заявляет: «Намек на метод я получил из способа Ферма проведения касательных; применяя его к абстрактным уравнениям прямо и обратно, я сделал его общим». Здесь необходимо отметить, что метод, упомянутый Ньютоном, есть его метод флюксий, т. е. то, что мы сейчас называем дифференциальным и интегральным исчислением, а способ Ферма — не что иное, как его правило, о котором мы беседовали выше. Познакомимся с тем, как оно может быть применено для проведения касательных.

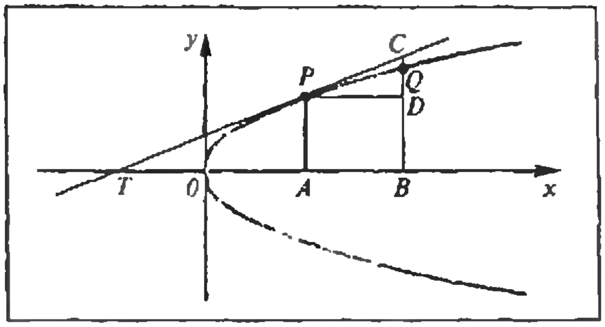


Рис. 2.

Пусть дана линия $y=f(x)$ и точка $P=(x_0, y_0)$ на ней и требуется провести касательную к линии в этой точке. Предположим, что касательная PT уже проведена (рис. 1). Возьмем на линии другую точку $Q=(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ и точку пересечения вертикальной прямой BQ с касательной обозначим через C. Из подобия треугольников TAP и TBC имеем:

$$\frac{TB}{TA}=\frac{BC}{AP}.$$

В этой пропорции отрезок BC заменим на BQ. Получим:

$$\frac{TB}{TA}\approx\frac{BQ}{AP},$$

или, что то же самое,

$$\frac{TA+AB}{TA}\approx\frac{BD+DQ}{AP}.$$

Но $BD=AP$, и значит,

$$\frac{AB}{TA}\approx\frac{DQ}{AP}.$$

Учитывая, что $AB=\Delta x$, $AP=y_0$, $DQ=\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, полученное приближенное равенство можно переписать так:

$$\frac{y_0}{TA}\approx\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Остается применить правило Ферма. Именно, в выражении

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

произвести деление, отбросить члены, которые после этого еще содержат Δx, и приближенное равенство (3) заменить точным. Тем самым мы найдем длину отрезка TA, а значит, и точку T, после чего проведение касательной не представляет никакого труда.

Рассмотрим конкретный пример. Пусть данная линия — это парабола $y^2=2px$ (рис. 2). Для нее равенство (3) имеет следующий вид*):

$$\frac{y_0}{TA}\approx\frac{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}-\sqrt{2px_0}}{\Delta x}. \tag{4}$$

Преобразуем правую часть этого равенства:

$$\frac{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}-\sqrt{2px_0}}{\Delta x}=$$

$$=\frac{2p(x_0+\Delta x)-2px_0}{\Delta x(\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}+\sqrt{2px_0})}=$$

$$=\frac{2p}{\sqrt{2p(x_0+\Delta x)}+\sqrt{2px_0}}.$$

Отбрасывая в последнем выражении член, содержащий Δx, подставляя результат в (4), заменяя при этом приближенное равенство точным, получим:

$$\frac{y_0}{TA}=\frac{p}{\sqrt{2px_0}}.$$

Но $y_0=\sqrt{2px_0}$, а значит, $TA=2x_0$, т. е. $T=(-x_0, 0)$; остается провести прямую через точки P и T. Задача решена!

---

*) Для определенности, пусть $y_0>0$.

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1989 год.

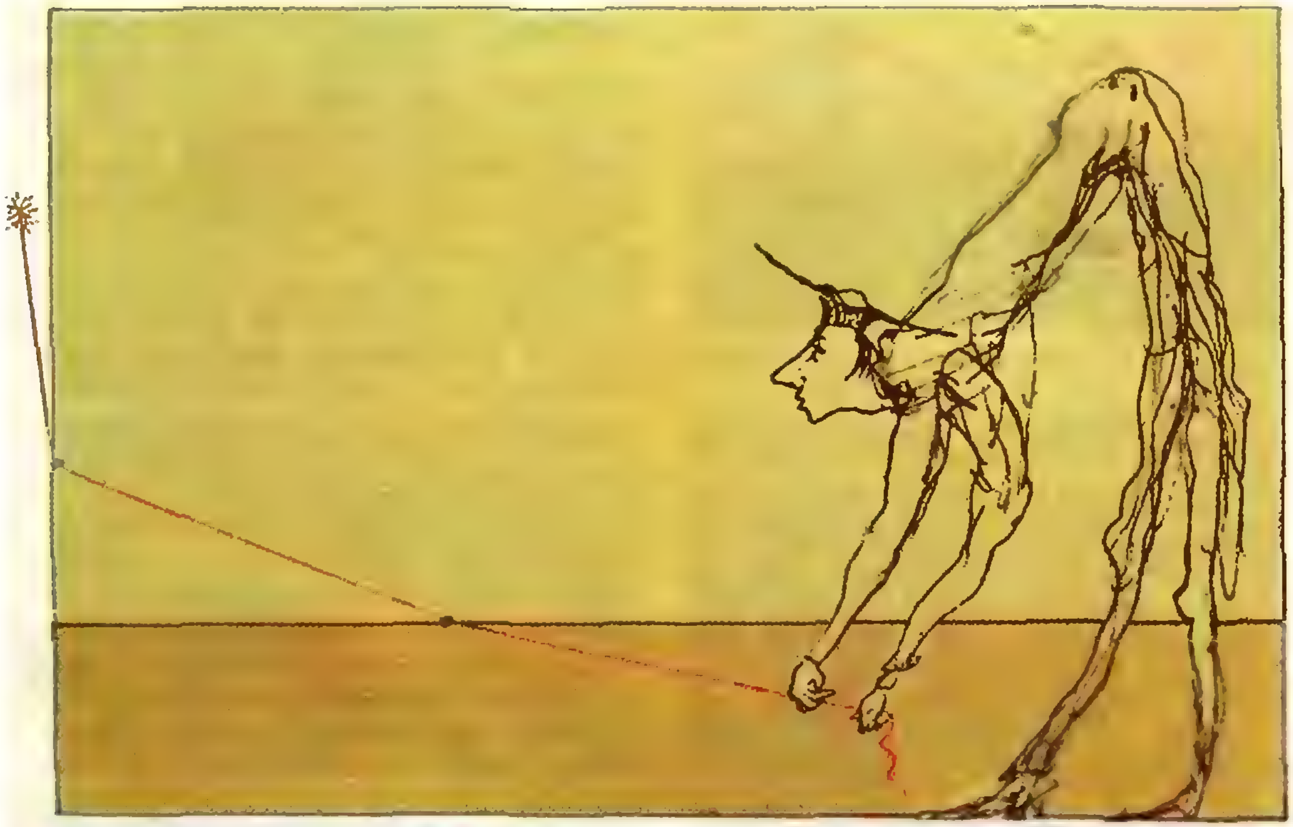
Журнал рассчитан на учеников 6—10 классов. Он полезен учителям, особенно тем, кто ведет кружки и факультативные занятия, и всем любителям математики и физики.

В новом году объем журнала увеличивается и рубрики расширяются.

Индекс журнала в каталоге «Союзпечати» 70465.

Подписная цена одного номера 45 копеек.

Подписка принимается без ограничений в течение всего года и с любого номера в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи.



Практикум абитуриента

Преломление света

Кандидат физико-математических наук
С. А. ГОРДЮНИН,
П. Л. ГОРЬКОВ

Вспомним основные законы геометрии световых лучей.

В однородной прозрачной среде свет распространяется прямолинейно. Оптической характеристикой среды является ее показатель преломления $n>1$, указывающий, во сколько раз скорость света в среде меньше скорости света в вакууме. Среда с бо́льшим показателем преломления называется оптически более плотной (или просто более плотной).

При падении луча света на границу раздела двух сред он разделяется на два луча (в общем случае разной интенсивности) — на отраженный и преломленный (лучи *1'* и *2* на рисунке 1), лежащие в одной плоскости с падающим. При этом угол γ между нормалью к границе раздела и отраженным лучом (угол отражения) равен углу α_1 между нормалью и лучом падающим (углу падения). Угол падения α_1 с углом преломления α_2 (т. е. углом между нормалью и преломленным лучом) связаны соотношением, называемым законом Снеллиуса:

$$n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2. \qquad (*)$$

В этом законе очевидным образом содержится факт обратимости световых лучей: если луч падает из первой среды под углом α_1, то он пойдет во второй среде под углом α_2, а если луч падает из второй среды под углом

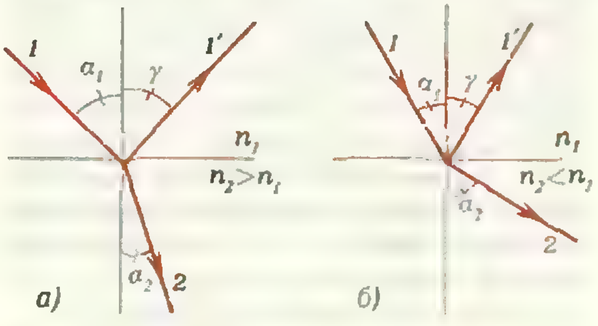


Рис. 1.

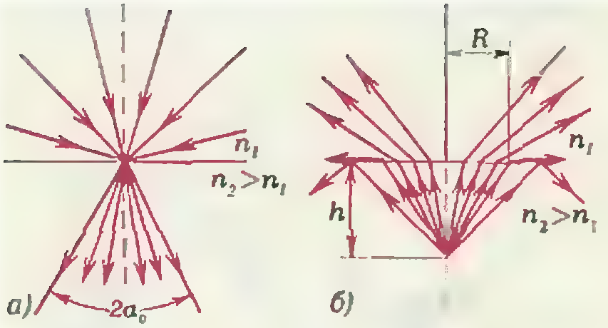


Рис. 2.

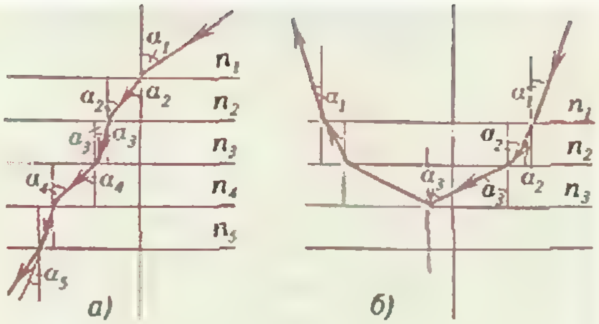


Рис. 3.

α_2, то он пойдет в первой среде под углом α_1.

Если луч переходит из менее плотной среды в более плотную (рис. 1, *а*), он прижимается к нормали ($\alpha_2<\alpha_1$), а если из более плотной в менее плотную (рис. 1, *б*), то удаляется от нормали ($\alpha_2>\alpha_1$). Наибольший угол падения (90°) имеют скользящие лучи, поэтому преломленный луч в более плотной среде ($n_2>n_1$) не может составлять с нормалью угол, больший $\alpha_0=\arcsin(n_1/n_2)$. Наоборот, при переходе из более плотной среды в менее плотную лучи, падающие под углами, бо́льшими α_0, будут полностью отражаться. Вот почему этот угол называется углом *полного* отражения. Математически это проявляется в том, что уравнение (*) не имеет решений для α_1 при $\alpha_2>\alpha_0$ и $n_2>n_1$.

Эти явления наглядно можно представить себе следующим образом. Если закрыть непрозрачным экраном всю поверхность раздела сред, оставив лишь небольшое отверстие, и освещать экран рассеянным светом, содержащим лучи всех направлений, то в более плотной среде все лучи, проходящие через отверстие, будут сосредоточены в конусе с углом $2\alpha_0$ (рис. 2, *а*). Его часто называют конусом полного отражения. Вне этого конуса будет темно. Если же на некотором расстоянии h от плоской границы в более плотной среде поместить точечный источник света, то наблюдатель, смотрящий из менее плотной среды, увидит освещенной не всю поверхность раздела, а только круг радиусом (рис. 2, *б*)

$$R=h\,\mathrm{tg}\,\alpha_0=\frac{hn_1}{\sqrt{n_2^2-n_1^2}}.$$

Итак, из закона преломления световых лучей (*) следуют два фундаментальных факта — наличие полного отражения и непрямолинейное распространение света в неоднородной среде. Рассмотрим второй факт подробнее.

Наиболее просто исследовать ход луча в слоистой среде, в которой показатель преломления меняется вдоль одной какой-то оси координат (например, X). Такую среду можно представить как набор тонких пластинок с определенными показателями преломления n_i. На границах раздела выполняются соотношения

$$n_1\sin\alpha_1=n_2\sin\alpha_2=\ldots=n_N\sin\alpha_N,$$

поскольку угол преломления в каждом слое является углом падения для следующего слоя (рис. 3, *а*). Другими словами, вдоль выбранного направления выполняется соотношение

$$n(x)\sin\alpha(x)=\mathrm{const}.$$

Этот важный и красивый закон (его называют обобщенным законом Снеллиуса) указывает на то, что наличие промежуточных слоев не сказывается на связи между углом падения из первой среды и углом преломления в последней. Если, конечно, луч вообще доходит до последней среды, а не поворачивает, испытав полное отражение (рис. 3, *б*). Именно поэтому при расчете различных оптических систем можно не учитывать наличие тонких прослоек между средами — слоев клея между линзами в сложных объективах, стеклянных стенок сосудов, в которые налита вода, и т. п.

Теперь решим несколько конкретных задач. Большинство из них взяты из вариантов приемных экзаменов в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Луч света падает на плоскопараллельную пластину толщиной $H=1$ см из стекла с показателем преломления $n=1{,}73$ (рис. 4). Из-за многократных отражений от граней пластинки на экране Э образуется ряд светлых пятен. Найдите расстояние между пятнами, если угол падения $\alpha=60°$, а падающий луч перпендикулярен плоскости экрана. Плоскость падения луча совпадает с плоскостью рисунка.*

После однократного преломления на обеих гранях пластинки луч выходит из пластинки параллельно падающему лучу. Поскольку при дальнейших отражениях и преломлениях углы падения на грани одинаковы, все попадающие на экран лучи параллельны падающему. Расстояние d между этими лучами, равное расстоянию между пятнами на экране, найдем из рисунка:

$$d=AC\cos\alpha,\quad AC=2H\operatorname{tg}\beta,$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}},\quad \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n},$$

откуда

$$d=\frac{H\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\approx 0{,}58\ \text{см}.$$

Задача 2. *Оцените ошибку при фиксировании углового положения звезды, видимой с Земли под углом $\beta=45°$ над горизонтом. Показатель преломления воздуха у поверхности Земли $n=1{,}0003$.*

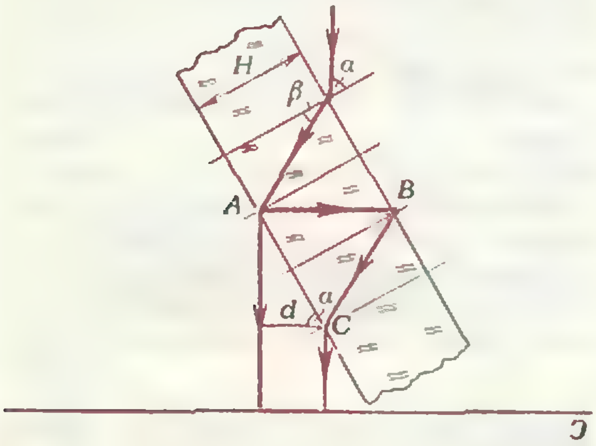


Рис. 4.

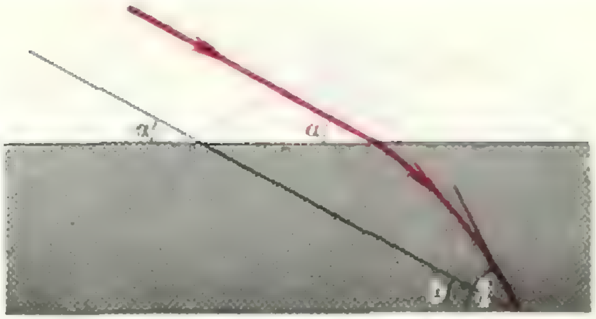


Рис. 5.

Положение звезды, видимое с Земли, отличается от истинного из-за преломления лучей атмосферой. Толщина атмосферы, т. е. высота, на которой практически нет воздуха и поэтому показатель преломления равен единице, составляет несколько десятков километров. Это гораздо меньше, чем радиус Земли, поэтому в данном случае можно считать атмосферу плоской. Ее показатель преломления послойно изменяется от единицы у верхних слоев до значения $n>1$ у поверхности Земли. От звезды идут параллельные лучи, падающие на верхние слои атмосферы под углом $\pi/2-\alpha$, где α — истинное угловое положение звезды над горизонтом. А мы видим звезду под углом $\beta>\alpha$ (рис. 5). По закону преломления в слоистой среде

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=n\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right),$$

или

$$\cos(\beta-(\beta-\alpha))=(1+(n-1))\cos\beta.$$

Учитывая, что $n-1\ll 1$ и поэтому $\beta-\alpha\ll\beta$, приближенно имеем:

$$\cos\beta+(\beta-\alpha)\sin\beta=\cos\beta+\\+(n-1)\cos\beta.$$

Таким образом,

$$\beta-\alpha=(n-1)\operatorname{ctg}\beta=3\cdot 10^{-4}\ \text{рад}\approx 1'.$$

Это и есть ошибка при определении положения звезды с Земли.

Задача 3. *В равнобедренной прямоугольной стеклянной призме, сделанной из стекла с показателем преломления n, основание AC и боковая грань BC — гладкие, а грань AB — матовая (рис. 6). Призма стоит на газете. Какую часть текста (по площади) будет видеть наблюдатель, смотрящий через гладкую грань BC?*

В этой задаче речь идет о рассматривании предмета, находящегося сра-

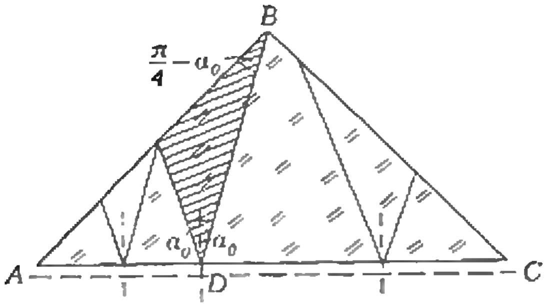


Рис. 6.

зу за границей раздела двух сред — стекла и воздуха. Неправильно было бы считать, что предмет находится непосредственно в стекле. Если бы это было так, то предмет можно было бы увидеть при любых значениях показателя преломления стекла, поскольку в этом случае лучи от предмета идут в стекле во все стороны и какая-то их часть, не претерпев полного отражения, обязательно выйдет через прозрачную грань.

От предмета *под* стеклом лучи, конечно, тоже идут во все стороны, но они *пересекают границу* стекло — воздух и преломляются. В стекло они входят только внутри конуса полного отражения. При растворах этого конуса $2\alpha_0 = 2\arcsin(1/n)$ часть лучей не попадут на грань BC (см. рис. 6). Если $\alpha_0 > \pi/4$, т. е. $n < 1/\sin(\pi/4) = \sqrt{2}$, через BC будет виден весь текст. Действительно, даже из точек вблизи вершины A часть лучей конуса будут падать на BC, причем их углы падения будут меньше, чем $\pi/4$, т. е. они, преломляясь, будут выходить наружу. При бо́льших n и соответственно меньших α_0 из некоторых точек вблизи вершины A все лучи конуса попадут на матовую грань AB. Чтобы найти невидимый участок AD, заметим, что $\angle ABD = \pi/4 - \alpha_0$, и воспользуемся теоремой синусов для треугольника ABD, откуда найдем долю видимого текста $k = DC/AC$:

$$\frac{1-k}{\sin(\pi/4-\alpha_0)} = \frac{1/\sqrt{2}}{\sin(\pi/2+\alpha_0)},$$

$$k = \frac{1}{2}(1+\operatorname{tg}\alpha_0) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right).$$

Но для того чтобы попадающие на грань BC лучи хотя бы частично выходили из нее, наименьший угол падения на грань ($\pi/4-\alpha_0$) должен быть меньше α_0, т. е. α_0 должен быть больше, чем $\pi/8$, а $n < 1/\sin(\pi/8) = 2{,}61$. При предельном n

$$k_{\min} = \frac{1}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\right) \approx 0{,}7.$$

Итак,

при $n < \sqrt{2}$ виден весь текст;

при $\sqrt{2} < n < \frac{1}{\sin(\pi/8)}$ видна часть текста $k = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{n^2-1}}\right)$;

при $n > \frac{1}{\sin(\pi/8)}$ текста не видно совсем.

Задача 4. *Узкий пучок света, проходящий через центр стеклянного шара радиусом R, фокусируется на расстоянии $2R$ от его центра. Определите показатель преломления стекла.*

В этой задаче используются законы так называемой параксиальной оптики, т. е. оптики малых углов падения и преломления лучей. Для малых углов $\sin\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$, и закон преломления принимает вид

$$n_1\alpha_1 = n_2\alpha_2.$$

Рассмотрим произвольный луч пучка, падающего на шар на расстоянии h от оси (рис. 7). Так как $h \ll R$ (пучок узкий), угол падения этого луча на шар $\alpha \approx h/R \ll 1$. Построив дальнейший ход этого луча, найдем все углы в треугольниках AOB, OBD и BDC:

$$\angle OAB = \angle OBA = \frac{\alpha}{n},$$

$$\angle BOD = \frac{2\alpha}{n} - \alpha,$$

$$\angle BCD = \alpha - \left(\frac{2\alpha}{n} - \alpha\right) = 2\alpha\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Тогда

$$BD = R\left(\frac{2\alpha}{n} - \alpha\right),$$

$$DC = \frac{BD}{2\alpha(1-1/n)} = \frac{R\alpha(2/n-1)}{2\alpha(1-1/n)} = R\,\frac{2-n}{2(n-1)}.$$

По условию задачи $DC = R$, откуда получаем

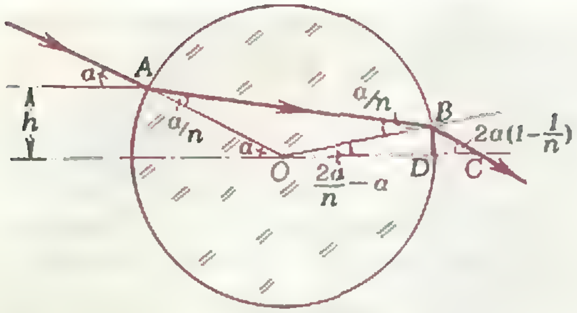


Рис. 7.

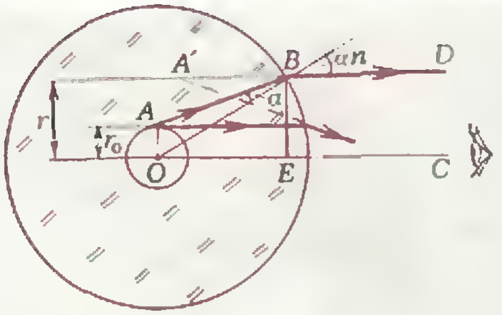


Рис. 8.

$$n=\frac{4}{3}$$

Очень существенно, что в окончательное выражение величина угла падения α не вошла; значит, все лучи пучка соберутся в одной точке. Это один из законов параксиальной оптики — узкие пучки параллельных лучей собираются преломляющей системой в одну точку — фокус (или в одной точке собираются их продолжения — мнимый фокус). Второй закон оптики параксиальных лучей состоит в том, что расходящиеся из одной точки под малыми углами лучи фокусируются преломляющей системой тоже в одну точку (с той же оговоркой относительно мнимого изображения). На этих законах основано решение задач, где одним из оптических элементов является глаз, который из-за малой величины зрачка фокусирует лучи, падающие на него под малыми углами. В сущности поэтому мы и видим точку как точку, а не как протяженный источник.

Задача 5. *Если смотреть на капиллярную стеклянную трубку сбоку, то видимый внутренний радиус будет равен r. Каково истинное значение этого радиуса? Показатель преломления стекла n. Внешний радиус капилляра много больше внутреннего.*

Пусть OC — линия, соединяющая глаз и центр трубки, A — крайняя точка внутреннего диаметра капилляра (рис. 8). Расстояние от изображения (мнимого) точки A до оси OC равно видимому радиусу внутреннего канала r.

Мы знаем, что все лучи, расходящиеся из точки A под малыми углами, после преломления соберутся в одной точке. Поскольку нас интересует не точное местоположение этой точки, а только ее расстояние от OC, достаточно рассмотреть ход только одного луча ABD, такого, который на выходе из капилляра идет параллельно оси OC — ведь изображение точки A будет лежать на его продолжении (см. рис. 8). Расстояние между лучами BD и OC равно r, искомое расстояние $AO=r_0$. Так как внешний диаметр велик по сравнению с внутренним, угол падения α будет мал. Из треугольника OEB

$$r=R\alpha n$$

(R — внешний радиус трубки). Из треугольника OAB, с учетом малости α,

$$r_0=R\alpha.$$

Таким образом,

$$r_0=\frac{r}{n}.$$

Упражнения

1. В толще стекла с показателем преломления $n=1{,}4$ создана плоскопараллельная пластина толщиной $d=3$ см с другими оптическими свойствами. Зависимость показателя преломления этой пластины от координаты x показана на графике (рис. 9). При каких углах падения α узкого пучка света на эту пластину пучок пройдет пластину насквозь?

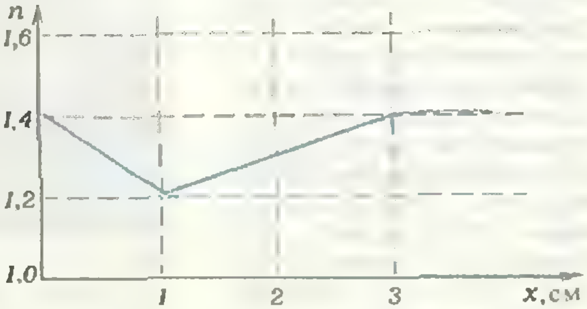


Рис. 9.

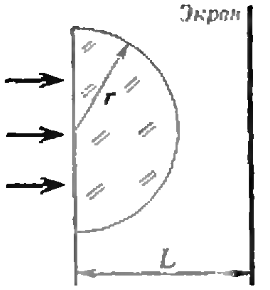


Рис. 10.

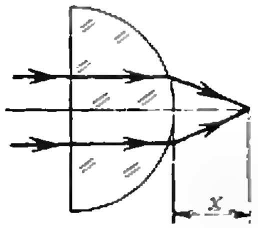


Рис. 11.

2. Стеклянная пластинка, показатель преломления которой n_1, касается поверхности жидкости с показателем преломления $n_2 < n_1$. Покажите, что ни один из лучей, падающих на верхнюю поверхность стеклянной пластинки, не испытывает полного отражения на границе между стеклом и жидкостью.

3. На половину шара радиусом $r = 2$ см, изготовленного из стекла с показателем преломления $n = 1{,}41$, падает параллельный пучок лучей (рис. 10). Определите радиус светлого пятна на экране, расположенном на расстоянии $L = 4{,}82$ см от центра шара.

4. На каком расстоянии от центра стеклянного шара радиусом R должен находиться муравей, чтобы его изображение за шаром было натуральной величины? Показатель преломления стекла n.

5. Узкий пучок света, пройдя через полушарие из стекла с показателем преломления n, собирается на расстоянии x от выпуклой поверхности (рис. 11). На каком расстоянии от плоской поверхности соберутся лучи, если пучок пустить с противоположной стороны?

Информация

III Научно-техническая конференция школьников в МФТИ

Третью Научно-техническую конференцию школьников провел 2—3 апреля 1988 года Московский физико-технический институт. Работа оргкомитета конференции началась намного раньше: с января в МФТИ стали поступать работы школьников со всего Советского Союза. Оргкомитет конференции намеренно не предлагал даже примерного перечня тем рефератов. Это вызвало, правда, большое количество звонков: просили либо предложить тему, либо спрашивали, подходит ли такая-то тема. Самое сложное в решении задачи — постановка вопроса. Школа этому, к сожалению, не учит, мы же часто не можем рекомендовать какую-либо тему, поскольку не знаем личных интересов школьника, его возможностей ставить сложный эксперимент. На второй вопрос всегда следовал ответ: любая тема подходит для реферата, если подойти к ней достаточно серьезно, любая задача и сложна, и интересна. В результате присланные работы более 400 школьников 6—10 классов из 10 союзных республик порадовали оргкомитет разнообразием тем.

Все поступившие рефераты рецензировались специалистами. Авторитетные предметные жюри отобрали из присланных работ лучшие, чтобы пригласить авторов для выступления в МФТИ.

И вот 2 апреля физтех принимал гостей. Еще не улеглись страсти после празднования студентами МФТИ первого апреля, а лаборатории и аудитории заполнили школьники. До открытия конференции прошли экскурсии в научные лаборатории МФТИ, студенты рассказали о специализации факультетов физтеха.

На открытии конференции выступил ректор МФТИ, член-корреспондент Академии наук СССР Н. В. Карлов. После этого состоялось пленарное заседание, на котором ребятам прочитали лекции ведущие ученые. Самой интересной, пожалуй, была лекция члена-корреспондента АН СССР Л. Б. Окуня, посвященная теории относительности.

Школьники докладывали результаты своих исследований во второй день работы конференции. Заседания проводились одновременно на шести секциях: физики-1, физики-2, молекулярной физики, аэрокосмической физики, математики и информатики. В тот же день состоялось закрытие конференции и награждение ее участников.

Выступая на закрытии конференции, академик-секретарь АПН СССР В. Г. Разумовский выразил удовлетворение уровнем работ и надежду, что в дальнейшем те же фамилии встретятся в сборниках научных трудов, среди авторов открытий и изобретений.

Все работы, предложенные на конференцию, можно разделить на две большие группы. К первой, большей, относятся наблюдения и исследования, проведенные школьниками самостоятельно. Такие работы оценивались наиболее высоко, даже если автор допускал небольшие ошибки. Так, жюри секции физики-1 отметило доклад Д. Самборского (г. Киев) «Почему звучат органные трубы». При демонстрации использовалась детская флейта, которая в соответствии с физическими законами звучала то выше, то ниже. Девятиклассники из ФМШ № 18 г. Москвы В. Кравченко и Н. Кобляков демонстрировали созданный ими приемник инфракрасного излучения. Отличную установку для демонстрации движения кольцевых вихрей в воздухе сконструировали красноярские школьники Д. Коваль, А. Киселев, И. Носков, Д. Рашевский.

Лекцию по теории относительности читает член-корреспондент АН СССР Л. Б. Окунь.

К другой группе можно отнести чисто реферативные работы. Среди лучших работ, отмеченных жюри, можно назвать рефераты девятиклассников В. Суворова (г. Тольятти) «Лазеры» и Е. Рыжиковой (г. Полтава) «Сверхтекучие жидкости и их свойства». Некоторые рефераты представляли собой раздел, переписанный из научно-популярной книги или учебника для вузов. Такие рефераты оценивались невысоко. Самые лучшие работы планируется опубликовать в «Кванте» или «Физике в школе». Две работы с конференции уже публиковались в «Кванте», это «Оптимальная кодировка почтового индекса» (1987, № 11) и «Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов» (1988, № 2).

Мы ждем новые работы по физике, математике и информатике на IV Научно-техническую конференцию школьников, которая состоится в апреле 1989 года. Принять участие в конференции могут все желающие. Для этого надо написать реферат (7—25 страниц, по возможности, напечатать на машинке) и один экземпляр не позднее 1 февраля 1989 года выслать по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, МФТИ, Оргкомитет IV Научно-технической конференции школьников. Реферат не возвращается. Дополнительные справки можно получить по телефону ЗФТШ при МФТИ: 408—51—45.

А. В. Сапожников,
член оргкомитета конференции

Установку для демонстрации движения кольцевых вихрей в воздухе показывают Д. Коваль, А. Киселев, И. Носков и Д. Рашевский (г. Красноярск).

XIV Всероссийская олимпиада школьников

По сложившейся традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов.

Ниже приводятся условия задач по математике и физике заключительного этапа олимпиады.

Математика

8 класс

1. Найдите какие-нибудь натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению

$$x^2-51y^2=1.$$

2. К двум окружностям, пересекающимся в точках M и K, проведена общая касательная. Докажите, что если A и B — точки касания, то $\angle AMB+\angle AKB=180^\circ$.

3. Известно, что $a^5-a^3+a=2$. Докажите, что $3<a^6<4$.

4. На листе клетчатой бумаги с клетками размером 1×1 нарисована окружность радиусом R с центром в узле сетки. Докажите, что если на ней лежит ровно 1988 узлов сетки, то либо R, либо $R\sqrt{2}$ — целое число.

5. В турнире по волейболу каждая команда играет с каждой другой командой ровно один раз (ничьих не бывает). Будем говорить, что команда A превосходит команду B, если A выиграла у B или если A выиграла у некоторой команды C, которая выиграла у B. По окончании турнира чемпионом объявляется любая команда, которая превосходит все другие команды. Может ли в турнире оказаться ровно два чемпиона?

9 класс

1. Для некоторого натурального n числа 2^n и 5^n начинаются с одной и той же цифры. Какая это цифра?

2. См. задачу 3 для 8 класса.

3. На координатной плоскости xOy рассматриваются всевозможные равнобедренные треугольники OAB ($OA=AB$), у которых вершина A лежит на графике функции $y=\frac{2x^2}{x^2-1}$ ($x>1$), а вершина B лежит на оси Ox. Докажите, что прямые AB касаются одной и той же окружности.

4. От вершин A и C выпуклого четырехугольника $ABCD$ отложили векторы $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{CR}$, а от вершин B и D — векторы $\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{DT}$. Оказалось, что четырехугольник $PQRT$ — выпуклый. Докажите, что четырехугольники $ABCD$ и $PQRT$ равновелики.

5. Дана последовательность из n чисел: $a_1, a_2, \ldots, a_n$. За один шаг ее заменяют на последовательность $|a_1-a|, |a_2-a|, \ldots, |a_n-a|$, где a — произвольное действительное число (числа a могут быть различными на разных шагах).

а) Докажите, что за несколько шагов можно получить последовательность, состоящую из одних нулей.

б) За какое наименьшее число шагов этого можно добиться?

10 класс

1. Пусть

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots+\cfrac{1}{1}}}}=\frac{m}{n},$$

где m и n — взаимно простые натуральные числа, а в левой части равенства содержится 1988 дробных черт. Вычислите значение выражения m^2+mn-n^2.

2. Дан треугольник ABC. Окружность проходит через вершины A, B и пересекает стороны AC и CB в точках P и Q соответственно. На стороне AB взяты точки R и S так, что $QR\parallel CA$, $PS\parallel CB$. Докажите, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

3. На доске выписаны все натуральные числа от 1 до 1988 включительно. С этими числами поочередно производятся операции A и B: сначала — A, затем — B, снова — A, после чего — снова B, и так далее. Операция A: из каждого написанного на доске числа вычитается одно и то же натуральное число (вычитаемые числа могут быть различными при различных применениях операции A). Операция B: стираются два из имеющихся на доске чисел и пишется их сумма. Операции A и B проводились до тех пор, пока после очередного выполнения операции B на доске не осталось одно число. Оказалось, что это число — неотрицательное. Чему оно равно?

4. В пространстве дано несколько точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Данные точки обладают тем свойством, что если сфера проходит через какие-нибудь четыре из них, то все остальные точки лежат на этой сфере или внутри нее. Докажите, что все данные точки лежат на одной сфере.

5. Двое играющих по очереди закрашивают клетки доски размером 8×8. Первый игрок своим ходом закрашивает любые две соседние клетки в черный цвет, а второй — любую клетку в белый цвет. Сначала все клетки доски были белыми. Может ли второй игрок добиться того, чтобы после каждого его хода были окрашены в белый цвет

а) хотя бы одна угловая клетка,

б) хотя бы две угловые клетки

любого квадрата размером 5×5? (Клетки называются соседними, если они имеют общую сторону; одна и та же клетка по ходу игры может перекрашиваться по нескольку раз.)

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Из тонкой проволоки длиной L намотана спираль с постоянным шагом и закреплена так, что ее ось оказалась вертикальной. Маленькая бусинка может скользить по спирали без трения. За какое время бусинка, отпущенная из верхней точки без начальной скорости, достигнет конца спирали, если высота спирали H?

2. Фонарик испускает пучок лучей, сходящихся на расстоянии $R_0=1$ м от него в маленькое пятно. На пути лучей поместили два плоских зеркала квадратной формы так, что линия их соприкосновения находится на оси пучка на расстоянии $r=70$ см от фонарика и перпендикулярна оси пучка. Плоскости зеркал перпендикулярны друг другу, а одно из зеркал составляет угол $\alpha=30°$ с осью пучка. На каком расстоянии от фонарика сойдется теперь пучок?

3. При разомкнутых ключах K_1 и K_2 схема, изображенная на рисунке 1, потребляет мощность P_0. При одном замкнутом ключе K_1 потребляется мощность P_1, а при K_2 — P_2. Какая мощность будет потребляться цепью, если замкнуты оба ключа? Сопротивления резисторов не известны.

4. В изогнутой трубке постоянного сечения находятся две разные жидкости, плотности которых относятся как 2 : 1. Пока трубка неподвижна, граница раздела жидкостей проходит по оси симметрии трубки (рис. 2). Куда и на сколько сместится граница раздела, если трубку привести во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью $\omega=5$ с$^{-1}$? Расстояние $R=20$ см.

9 класс

1. К концу вертикальной водопроводной трубы при помощи короткого отрезка резиновой трубки прикреплена стальная насадка массой M, как показано на рисунке 3. При каком расходе воды насадка будет горизонтальной? Площадь сечения насадки S, длина ее L. Трением пренебречь.

2. Моль одноатомного идеального газа расширяется из начального состояния с температурой T двумя различными способами — изобарически и адиабатически (т. е. без подвода или отвода тепла) так, что конечные объемы газа в обоих случаях одинаковы. Найдите сумму работ, совершенных газом в этих процессах, если известно, что конечные давления в них различаются в 1,5 раза.

3. На поверхность воды бросают три нитки, связанные концами (рис. 4). Две нитки имеют общую длину 3 см, одна — 1 см. В точку A капают поверхностно-активное вещество, которое снижает коэффициент поверхностного натяжения в 2,5 раза. Каким будет натяжение каждой нитки? Затем капают в точку B. Каким теперь станет натяжение каждой нитки? Считать коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}07$ Н/м.

4. В схеме, изображенной на рисунке 5, ключ первоначально разомкнут, а конденсаторы емкостями $C_1=20$ мкФ и $C_2=40$ мкФ заряжены одинаковыми зарядами $q=10^{-2}$ Кл (знаки зарядов обкладок показаны на рисунке). Сопротивление резистора $R=5$ кОм, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V=20$ кОм. Определите показание вольтметра сразу после замыкания ключа и затем после установления равновесия зарядов в цепи.

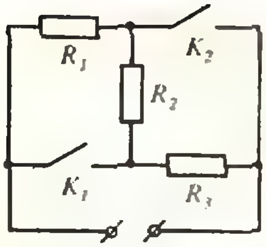


Рис. 1.

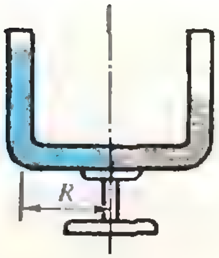


Рис. 2.

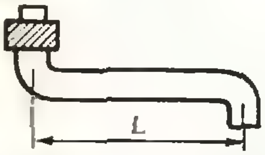


Рис. 3.

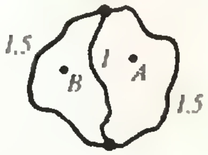


Рис. 4.

10 класс

1. Тонкостенную трубу массой m закрутили вокруг ее оси и положили рядом с такой же трубой, первоначально покоящейся на горизонтальном полу (рис. 6). Коэффициент трения скольжения между всеми соприкасающимися поверхностями одинаков и равен $\mu=2$. Куда и с каким ускорением начнет двигаться первоначально закрученная труба?

2. В горизонтально расположенном теплоизолированном цилиндре находится одноатомный идеальный газ: слева от подвижного поршня — 1 моль, справа — 3 моля (рис. 7). С помощью одинаковых нагревателей начинают медленно нагревать обе порции газа, подводя к ним одинаковое количество теплоты в единицу времени. Каким будет отношение объемов левой и правой частей после длительного нагревания?

3. В схеме, изображенной на рисунке 8, конденсатор заряжен до некоторого напряжения U. После замыкания ключа и прекращения тока в цепи оказалось, что напряжение на конденсаторе поменяло знак на противо-

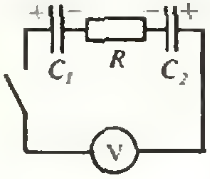


Рис. 5.

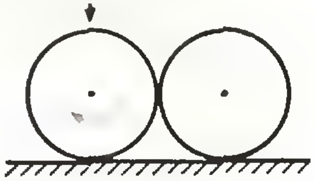


Рис. 6.

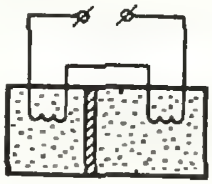


Рис. 7.

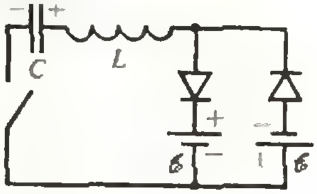


Рис. 8.

положный и стало равным 1 В. Найдите напряжение U. Батарейки, диоды, катушка — идеальные. ЭДС батареек равны 1,5 В.

4. См. задачу 2 для 8 класса.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Исследуйте зависимость периода колебаний линейки от расстояния между центром масс линейки и точкой подвеса.

Оборудование: метровая линейка с отверстиями через каждые 5 см, штатив с муфтой и стержнем для подвеса линейки, секундомер.

2. Определите коэффициент трения между деревянной линейкой и пластмассовым шариком.

Оборудование: линейка деревянная, шарик пластмассовый, лист миллиметровой бумаги.

9 класс

1. Определите коэффициент жесткости пружины динамометра.

Оборудование: динамометр с заклеенной шкалой, суровая нить, шарик, линейка, штативы, лист копировальной бумаги, лист белой бумаги.

2. Сделайте шунт к гальванометру, чтобы получился миллиамперметр с пределом измерений 200 мА на всю шкалу.

Оборудование: батарейка (4,5 В), гальванометр (100—300 мкА) с известным сопротивлением рамки, ограничительный резистор (переменный, 4,7 кОм), точный резистор (100 Ом, 5 %), провод медный (длиной 1,5—2 м, диаметром 0,1—0,15 мм), линейка, карандаш.

10 класс

1. Соберите систему из трех плоских зеркал, которая позволяет получить горизонтальное изображение вертикального предмета в плоскости, параллельной данному предмету.

Оборудование: три плоских зеркала, штатив, призма, лист миллиметровой бумаги, пластилин.

2. Постройте вольтамперные характеристики полупроводникового диода при комнатной температуре и температуре +60 °С. Исследуйте зависимость обратного тока диода от температуры в доступном вам диапазоне температур.

Оборудование: диод (типа Д9 с любой буквой), изолирующая поливинилхлоридная трубочка, батарейка (1,5 В, типа 373 или 343), ограничительный резистор (50—70 Ом), микроамперметр (100—300 мкА), вольтметр (0,5—1 В), потенциометр (1 кОм), калориметр, термометр, сосуд с горячей водой, штатив, миллиметровая бумага.

Публикацию подготовили Л. П. Купцов,
О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко

Ответы, указания, решения

[illegible]етрия уравнений

1. $p=-2x$.

2. На рисунке 1 число в кружке соответствует числу решений уравнения в данной области.

3. Пусть $f(x)=x^n+ax^{n-1}+\ldots$; n нечетно. Тогда $f(x)=x^n\left(1+\frac{a}{x}+\ldots\right)$. При больших $|x|$ выражение в скобках близко к 1, поэтому знак $f(x)$ совпадает со знаком x^n. Следовательно, при больших отрицательных x получаем $f(x)<0$, а при больших положительных x получаем $f(x)>0$. Поэтому при некотором x будет $f(x)=0$.

4. См. рисунок 2.

5. $4p^3+27q^2<0$. Поэтому корня три.

6. Условие кратного корня: $t^5+pt^2+q=0$, $5t^4+2pt=0$. Значит, $q=0$, p — любое или $p=-{}^5/_2t^3$, $q={}^3/_2t^5$ (рис. 3).

7. Условие кратного корня для первого многочлена: $t^{1988}+pt+q=0$, $1988t^{1987}+p=0$. Значит, $p=-1988t^{1987}$, $q=1987t^{1988}$ (рис. 4). Для второго многочлена: $p=-1989t^{1988}$, $q=1988t^{1989}$ (рис. 5).

8. См. рисунок 6.

9. У двойственной кривой возникает точка самопересечения (рис. 7).

10 и 11. Кривые на рисунках 12,*б* и 14 (с. 14) — двойственные.

[illegible]ранные школьные задачи

1. $p=3$, $q=2$. Решение. Пусть a — целый корень данного уравнения. Тогда $q=a^3(p-a)$. Поскольку q простое, $a^3=1$, т. е. $a=1$. Значит, $q=p-1$. В простых числах это уравнение имеет единственное решение: $p=3$, $q=2$.

2. $$\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}=$$
$$=\frac{z}{z(1+x+xy)}+\frac{xz}{xz(1+y+yz)}+\frac{1}{1+z+zx}=$$
$$=\frac{z+xz+1}{1+z+zx}=1.$$

3. Рассмотрим гомотетию с центром в точке P и коэффициентом, равным R/r, где R и r — радиусы соответственно большей и меньшей окружности. При этой гомотетии меньшая окружность перейдет в бо́льшую, а касательная прямая BC — в прямую B_1C_1 (рис. 8), касающуюся большей окружности в точке A_1 — образе точки A. Поскольку при гомотетии прямые переходят в параллельные прямые, $B_1C_1 \parallel BC$. Далее, так как касательная, параллельная хорде, делит точкой касания дугу, стягиваемую хордой, пополам, A_1 — середина дуги BC, т. е. PA_1 — биссектриса угла BPC. Но точки P, A, A_1 лежат на одной прямой, значит, прямая PA совпадает с прямой PA_1.

4. Проведем $NL \perp AB$ и соединим точки M

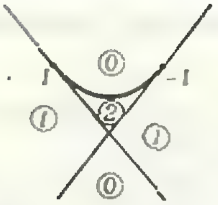


Рис. 1.

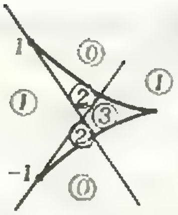


Рис. 2.

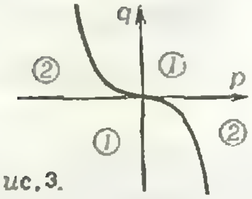


Рис. 3.

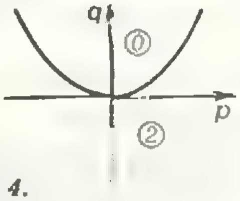


Рис. 4.

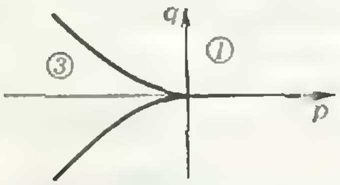


Рис. 5.

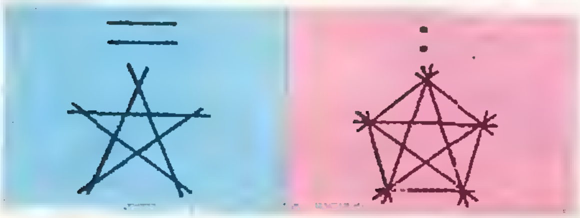


Рис. 6.

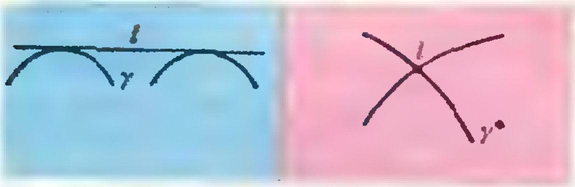


Рис. 7.

и L (рис. 9). Очевидно, что $AL=LB$. Поэтому ML — средняя линия треугольника ABK и, следовательно, $ML \parallel BK$, откуда $\angle LMC=90°$. Так как CL есть диаметр окружности, описанной около прямоугольника $BCNL$, а угол LMC прямой, точка M также принадлежит этой окружности. Но тогда угол BMN также прямой, поскольку он опирается на диаметр BN.

5. Построим точки A_1 и B_1 на сторонах BC и AC соответственно так, чтобы $BA_1:A_1C=k:m$ и $AB_1:B_1C=k:l$. Пусть точка M лежит внутри треугольника. Ясно, что $S_{ABM}:S_{BCM}=k:l$ тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке BB_1, и $S_{ABM}:S_{ACM}=k:m$ тогда и только тогда, когда точка M лежит на отрезке AA_1. Поэтому искомая точка M есть *точка пересечения отрезков AA_1 и BB_1.*

6. Пусть $\frac{x}{y}=\alpha$, где α — произвольное рациональное число. Тогда

$$y^{1987}\alpha^{1987}+y^{1987}=y^{1988}\alpha^{1988}+y^{1988},$$

откуда

$$y=\frac{1+\alpha^{1987}}{1+\alpha^{1988}},\quad x=\alpha\cdot\frac{1+\alpha^{1987}}{1+\alpha^{1988}}.$$

Ясно, что с помощью этих формул мы можем построить сколько угодно рациональных решений нашего уравнения.

7. 0, 1, 2. Решение. Заметим, что $x_{n+1}=(x_n-1)^3+1$, откуда $x_{n+1}-1=(x_n-1)^3$. Поэтому

$$x_m-1=(x_{m-1}-1)^3=(x_{m-2}-1)^{3^2}=\ldots=(x_1-1)^{3^{m-1}}.$$

Равенство $x_m=x_n$ с $m\neq n$ означает, таким образом, что $(x_1-1)^{3^{m-1}}=(x_1-1)^{3^{n-1}}$, что возможно только при $x_1-1=0$ или $x_1-1=\pm1$.

8. $q\geqslant2$. Решение. Наше условие равносильно тому, что при любом $n\geqslant2$ имеет место неравенство $q^n>q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1$, т. е.

$$q^n>\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Так как, очевидно, $q>1$, это равенство можно переписать в виде $q^{n+1}-2q^n+1>0$, т. е. $q^n(q-2)+1>0$. Если $q\geqslant2$, то последнее неравенство выполняется для любого $n\in\mathrm{N}$; если же $1<q<2$, то найдется n, при котором $q^n\geqslant\frac{1}{2-q}$, и для этого n неравенство не выполняется.

9. Выберем на плоскости произвольную точку O и представим каждый вектор $\overrightarrow{MN}$ как разность $\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$. Тогда сумма наших 15 векторов будет равна разности $3(\overrightarrow{OA_1}+\ldots+\overrightarrow{OA_5})-3(\overrightarrow{OB_1}+\ldots+\overrightarrow{OB_5})$, где B_i — вершины пятиугольника, A_i — середины его сторон. Будем считать, что точки A_i, B_i расположены в следующем порядке (при обходе пятиугольника против часовой стрелки): B_1, A_1, B_2, A_2, …, B_5, A_5. Наша сумма равна $3(\overrightarrow{B_1A_1}+\ldots+\overrightarrow{B_5A_5})=\frac{3}{2}(\overrightarrow{B_1B_2}+\ldots+\overrightarrow{B_5B_1})=0$.

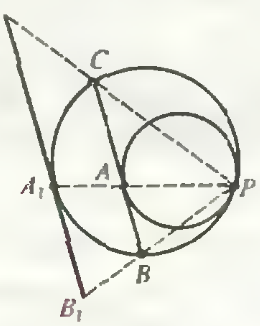


Рис. 8.

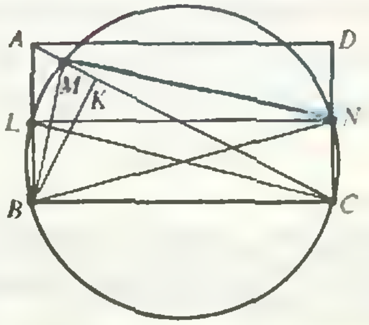


Рис. 9.

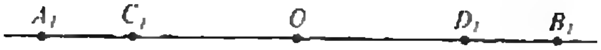


Рис. 10.

10. Требуемое неравенство равносильно неравенству $AO>OF$, где O — центр вписанной окружности, т. е. неравенству $AF>2OF$. Спроектируем отрезки AF и OF на высоту треугольника, опущенную на BC; наше неравенство примет вид $h>2r$ (где h — высота треугольника ABC, r — радиус вписанной окружности), последнее же очевидно: $2S_{ABC}=BC\cdot h=(BC+CA+AB)\cdot r>2BC\cdot r$.

11. $(-\infty; -1]$, 0, 1. У к а з а н и е. Неравенство в точности означает, что x^9-x и x^9-x^7 не являются ненулевыми числами одного знака, т. е. что $(x^9-x)(x^9-x^7)\leqslant 0$.

12. Соединим точку M с вершинами тетраэдра. Пусть V — объем данного тетраэдра, а V_1, V_2, V_3 — объемы тетраэдров $BCMD$, $ACMD$, $ABMD$ соответственно. Поскольку тетраэдры $BCMD$ и $ABCD$ имеют общую грань BCD, а отношение их высот, опущенных на эту грань, равно $\frac{x}{a}$, то $V_1=\frac{x}{a}V$. Аналогично, $V_2=\frac{y}{b}V$ и $V_3=\frac{z}{c}V$. Так как $V=V_1+V_2+V_3$, то $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

13. Пусть M — середина отрезка AB; O_1, O_2 — центры шаров; R_1, R_2 — их радиусы. Тогда

$$MO_1^2-MO_2^2=\left(R_1^2+\frac{AB^2}{4}\right)-\left(R_2^2+\frac{AB^2}{4}\right)=$$
$$=R_1^2-R_2^2.$$

Отсюда следует, что середины всех отрезков общих касательных к данным шарам лежат в одной плоскости, перпендикулярной отрезку O_1O_2. Обозначим проекцию этой плоскости на прямую O_1O_2 через O, а проекции точек A, B, C, D — через A_1, B_1, C_1, D_1. Тогда $OA_1=OB_1$ и $OC_1=OD_1$, откуда $A_1C_1=B_1D_1$ (рис. 10).

14. $-\operatorname{arctg} 3+k\pi$. Р е ш е н и е. Так как $\operatorname{tg} x=2[\operatorname{tg} x]+3$, то $\operatorname{tg} x$ — целое число, откуда $[\operatorname{tg} x]=\operatorname{tg} x$, $\operatorname{tg} x=2\operatorname{tg} x+3$ и $\operatorname{tg} x=-3$.

15. П е р в о е р е ш е н и е. Обозначим левую часть нашего уравнения через $p(x)$. Очевидно,

$$p(0)=-2<0 \text{ и } p\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}a+\frac{1}{4}a^2+1>0.$$

Значит, при любом a решение есть уже в промежутке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. (Прямое применение этого рассуждения к промежутку $[0; 1]$ невозможно, поскольку $p(1)$ может быть отрицательным.)

В т о р о е р е ш е н и е.

$$\int_0^1 p(x)dx=\frac{10a}{5}-\frac{4a}{4}+\frac{a^2}{3}+\frac{6}{2}-2=$$
$$=\frac{a^2}{3}+a+1>0;$$

значит, функция $p(x)$ не может быть всюду отрицательной в промежутке $[0; 1]$. Но $p(0)<0$, значит, в некоторой точке промежутка $[0; 1]$ функция меняет знак.

Всероссийская олимпиада школьников

ематика

8 класс

1. Например, $x=50$, $y=7$. У к а з а н и е. $51y^2+1=(7y+1)^2+2y(y-7)$.

2. У к а з а н и е. Сумма углов AMB и AKB равна сумме углов треугольника AKB (рис. 11).

3. У к а з а н и е. $a^6+1=2\left(a+\frac{1}{a}\right)$, откуда $a^6>3$. Из равенства $\frac{2}{a^3}+1=a^2+\frac{1}{a^2}$ следует, что $a^3<2$.

4. У к а з а н и е. Введем на плоскости прямоугольную систему координат с началом в центре окружности и осями, идущими по линиям сетки. Вместе с точкой $(x; y)$ на данной окружности лежат все точки $(\pm x; \pm y)$ и $(\pm y; \pm x)$. Их восемь, если $x\neq y$ и $xy\neq 0$; в противном случае их четыре. Но 1988 при делении на 8 дает остаток 4. Поэтому среди данных точек найдется точка, для которой реализуется именно второй случай.

5. У к а з а н и е. Докажите, что команда, одержавшая наибольшее число побед, является чемпионом. Из предположения, что в турнире имеется два чемпиона, следует, что есть и третий чемпион, так что двух чемпионов быть не может.

9 класс

1. О т в е т: 3. ($2^5=32$, $5^5=3125$). У к а з а н и е. Если числа 2^n и 5^n начинаются с цифры a, то $a^2<10<(a+1)^2$, в чем можно убедиться, пользуясь равенством $2^n\cdot 5^n=10^n$.

2. См. указание к задаче 3 для 8 класса.

3. О т в е т: все прямые AB касаются окружности радиусом 2 с центром в точке M (0, 2). У к а з а н и е. Прямая MB является биссектрисой угла OBA.

4. У к а з а н и е. Диагонали PR и QT четырехугольника $PQRT$ получаются из диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$ параллельным переносом.

5. Пусть $a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}$ — последовательность, полученная из исходной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ после k шагов, u_k — число, вычитаемое на k-м шаге.

а) Положим $u_1=(a_1+a_2)/2$. Тогда в последовательности $a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \ldots, a_n^{(1)}$ первые два числа будут одинаковыми. Вычитая $u_2=\frac{a_2^{(2)}+a_3^{(2)}}{2}$, получим набор с одинаковыми первыми тремя числами

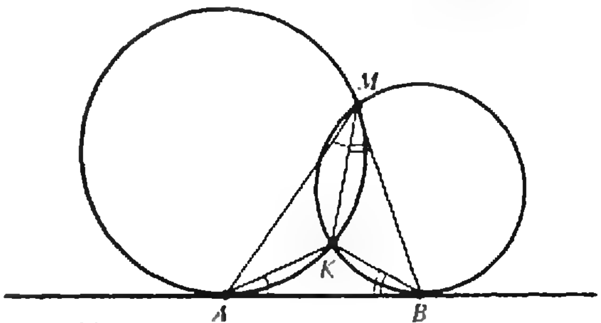


Рис. 11.

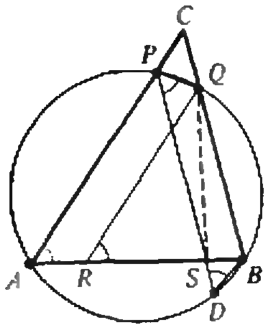


Рис. 12.

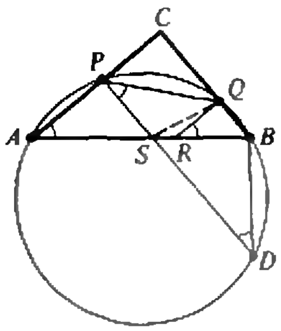


Рис. 13.

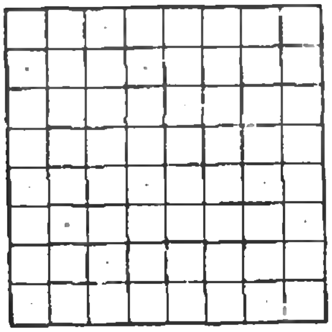


Рис. 14.

и т. д. После n-го шага получим последовательность из одних нулей.

б) Указание. Последовательность 1!, 2!, … …k! переводится в нулевую не меньше чем за k шагов.

10 класс

1. Ответ: — 1. Указание. Воспользуйтесь соотношением $\frac{m_{k+1}}{n_{k+1}}=\frac{n_k}{n_k+m_k}$, где $\frac{m_k}{n_k}$ — дробь, полученная из аналогичного выражения, содержащего k дробных черт.

2. Рассмотрим случай, когда точка R лежит между A и S (рис. 12). Случай, когда точка S лежит между A и R (рис. 13), рассматривается аналогично. Пусть D — точка пересечения данной окружности с прямой PS, отличная от P. Из $QB \parallel PD$ получаем: $\angle QPD=\angle BDP$. Кроме того, $\angle BDP=\angle PAB$, и наконец, $\angle PAB=\angle QRS$. Следовательно, $\angle QPS=\angle QRS$, т. е. из точек P и R отрезок QS виден под одним и тем же углом. Точки P и R лежат по одну сторону от прямой QS; отсюда следует, что точки P, Q, R, S лежат на одной окружности.

3. Ответ: 1. После каждого применения пары операций A и B количество записанных на доске чисел уменьшается на 1. Следовательно, пара операций A и B применялась 1987 раз. Пусть d_k — натуральное число, вычитаемое при k-м применении операции A, $k=1, 2, \ldots$ …1987. Так как после k-го применения операции A сумма записанных на доске чисел уменьшается на $(1989-k)\cdot d_k$, а операция B этой суммы не изменяет, после 1987-кратного применения пары операций A и B на доске будет записано число

$$x=(1+2+\ldots+1988)-1988d_1-1987d_2-\ldots$$
$$\ldots-2d_{1987}=1988(1-d_1)+1987(1-d_2)+\ldots$$
$$\ldots+(1989-k)(1-d_k)+\ldots+2(1-d_{1987})+1.$$

Числа $1-d_k$ неположительны при всех $k=1, 2, \ldots, 1987$. Если при некотором k выполнялось неравенство $d_k\geqslant 2$, то $(1989-k)\times(d_k-1)\geqslant 2$, так что $x\leqslant(1989-k)(1-d_k)+1\leqslant -1$, что противоречит условию задачи. Следовательно, $d_k=1$ при всех $k=1, 2, \ldots, 1987$ и, значит, $x=1$.

4. Выберем среди данных точек три точки A, B, C так, чтобы все остальные точки лежали по одну сторону от плоскости ABC. Пусть D и E — любые две из оставшихся точек. Если бы точка E лежала внутри сферы S, проходящей через точки A, B, C, D, то точка D лежала бы снаружи сферы, проходящей через точки, A, B, C, E, чего не может быть по условию задачи. Но точка E не может лежать снаружи сферы S. Следовательно, точка E лежит на сфере S. Аналогично показывается, что на сфере S лежат и все остальные точки.

5. Ответ: а) может; б) не может.

а) Для любого квадрата размером 5×5 хотя бы одна из клеток, отмеченных на рисунке 14 крестиком, является угловой. Второй игрок всегда может добиться того, чтобы отмеченные клетки были белыми, так как первый игрок никаким своим ходом не может одновременно закрасить две такие клетки.

б) Если клетка является угловой для одного из квадратов размером 5×5, то она не является угловой ни для какого другого такого квадрата. Всего этих квадратов 16. Поэтому для достижения поставленной цели второй игрок должен ходить так, чтобы после каждого его хода на доске было не меньше 32 белых клеток. Первый игрок может ему в этом помешать. Для этого он своими первыми 32 ходами красит все 64 клетки так, чтобы ни одна клетка не красилась им дважды. Второй игрок за свои первые 32 хода вернет белый цвет не более чем 32 клеткам. Если после этого на доске окажутся две соседние белые клетки, то первый игрок своим 33-м ходом их и закрашивает, оставляя белыми только 30 клеток. После 33-го хода второго игрока белыми будут не более 31 клетки, чего для достижения его целей недостаточно. Если же после 32-го хода на доске не окажется соседних белых клеток, то доска будет иметь шахматную раскраску, а значит, найдется квадрат размером 5×5, у которого нет ни одной белой угловой клетки.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $t=\frac{\sqrt{2}\,L}{\sqrt{gH}}$. Указание. Движение бусинки по спирали аналогично движению по наклонной плоскости (высотой H и длиной L).

2. См. решение задачи Ф1127 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

3. $P=P_1+P_2+\frac{P_0P_1P_2}{P_1P_2-P_0(P_1+P_2)}$.

Указание. Во всех случаях напряжение в цепи остается одним и тем же.

4. Перемычка сместится в сторону жидкости с большей плотностью на расстояние $x\approx 1{,}67$ см. Указание. Неизвестное x находится из квадратного уравнения

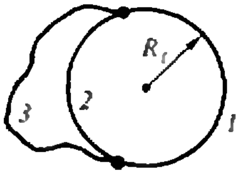


Рис. 15.

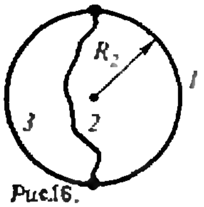


Рис.16.

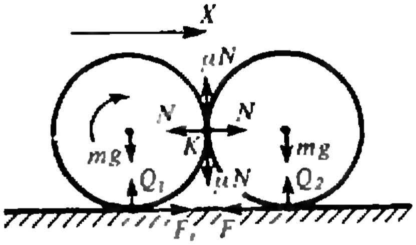


Рис. 17.

$$x^2+\frac{2g(\rho_1+\rho_2)}{\omega^2(\rho_2-\rho_1)}x-R^2=0.$$

9 класс

1. См. решение задачи Ф1123 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

2. $A={}^1/_2\,RT$.

3. В первом случае (рис. 15) две нитки с общей длиной $l_1=1$ см $+\,1{,}5$ см $=2{,}5$ см образуют окружность радиусом $R_1=l_1/(2\pi)$. Из условия равновесия $(\sigma-\sigma/2{,}5)\,2R_1=2T$ находим искомые натяжения ниток:

$$T_1=T_2=T=0{,}3\sigma l_1/\pi\approx1{,}67\cdot10^{-4}\ \text{Н},$$
$$T_3=0.$$

Во втором случае (рис. 16) окружность образуют две нитки с общей длиной $l_2=1{,}5$ см $+\,1{,}5$ см $=$ $=3$ см. Аналогично первому случаю получаем:

$$T_1=T_3=0{,}3\sigma l_2/\pi\approx2\cdot10^{-4}\ \text{Н},$$
$$T_2=0.$$

4. Сразу после замыкания ключа в цепи возникает ток

$$I=\frac{U_1-U_2}{R+R_V}=\frac{q/C_1-q/C_2}{R+R_V}$$

и вольтметр покажет напряжение

$$U_V=IR_V=200\ \text{В}.$$

После установления равновесия ток прекратится и напряжение на вольтметре будет равно нулю.

10 класс

1. Силы, действующие на трубы, показаны на рисунке 17. Ясно, что

$$Q_1=mg-\mu N,$$
$$Q_2=mg+\mu N,$$
$$F_1=\mu(mg-\mu N),$$
$$F\leqslant\mu Q_2=\mu(mg+\mu N).$$

Предположим, что левая труба не отрывается от пола, т. е. $Q_1>0$, а правая труба не проскальзывает относительно пола, т. е. $F<\mu Q_2$. Пусть a — проекция ускорения центров масс труб на ось X. По второму закону Ньютона

$$\mu(mg-\mu N)-N=ma, \qquad (1)$$
$$N-F=ma. \qquad (2)$$

За малое время Δt работа сил N и μN по перемещению малого участка правой трубы (области K) идет на изменение кинетической энергии этой трубы:

$$Nv\Delta t-\mu Nv\Delta t=\Delta(mv^2),$$

где v — скорость оси трубы. Отсюда

$$Nv\Delta t-\mu Nv\Delta t=2mv\Delta v.$$

Поскольку $\Delta v/\Delta t=a$, то

$$N-\mu N=2ma. \qquad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) получаем

$$a=\frac{\mu(1-\mu)}{2\mu^2-\mu+3}\,g,$$

$$N=\frac{2\mu}{2\mu^2-\mu+3}\,mg,$$

$$F=\frac{\mu(1+\mu)}{2\mu^2-\mu+3}\,mg.$$

Легко убедиться, что при $\mu=2$ значения N и F — положительные, т. е. имеют смысл, и при этом выполняются условия $Q_1>0$ и $F<\mu Q_2$. Итак, наше предположение о характере движения труб оказалось верным. При $\mu=2$

$$a=-\frac{2}{9}\,g<0$$

— трубы начнут двигаться влево с ускорением ${}^2/_9\,g$.

2. Предположим, что поршень закреплен, и посмотрим, как изменится давление в каждой части цилиндра при сообщении газу количества теплоты Q:

$$\Delta p=\frac{\nu R\Delta T}{V},\quad Q=\frac{3}{2}\,\nu R\Delta T,$$

откуда

$$\Delta p=\frac{2}{3}\,\frac{Q}{V}.$$

Таким образом, при сообщении одинакового количества теплоты давление растет быстрее в той части цилиндра, где меньше объем. Следовательно, незакрепленный поршень будет смещаться в сторону большего объема до тех пор, пока объемы слева и справа от поршня не станут равными:

$$V_л/V_п\to1.$$

Дополнение. После сообщения газу количества теплоты Q внутренняя энергия газа слева и справа от поршня изменится на

$$\Delta U_л=Q-A\ \text{ и }\ \Delta U_п=Q+A,$$

где A — работа, совершенная расширяющимся газом. Очевидно, что $\Delta U_п>\Delta U_л$. Кроме того, начальная внутренняя энергия газа справа была в 3 раза больше, чем слева. Таким образом, внутренняя энергия газа в правой части цилиндра всегда больше, чем в левой.

С другой стороны, так как $U={}^3/_2\nu RT={}^3/_2\,pV$, то в конечном состоянии, когда давления и объемы одинаковы, должны быть одинаковы и внутренние энергии газа в обеих частях цилиндра. Возникает противоречие. Как его разрешить?

Оказывается, на самом деле между объемами $V_п$ и $V_л$ всегда будет оставаться некоторая разность ΔV, которая и обеспечивает конечную разность внутренних энергий

$$\Delta U={}^3/_2\,p\Delta V.$$

3. См. решение задачи Ф1112 из «Задачника «Кванта», опубликованное в восьмом номере журнала за этот год.

ломление света

1. $\alpha < \arcsin(6/7)$.
3. $R = 2$ см.
4. $x = R/(n-1)$.
5. $y = x/n$.

ант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. Нельзя, так как, с одной стороны, сумма полученных пяти нечетных чисел должна быть нечетна, а с другой стороны, в эту сумму каждое из вписанных в кружки звезды чисел входит ровно два раза, и, следовательно, эта сумма должна быть четной.
2. По крайней мере, две монеты должны быть положены в кассу, и у каждого пассажира должно оставаться не меньше одной монеты. Случай восьми монет возможен: двое имеют по 20-копеечной монете, двое — по 15-копеечной и двое по две монеты — 10-копеечную и 15-копеечную. Пассажиры первой пары отдают свои монеты пассажирам третьей пары; пассажиры второй пары отдают свои монеты пассажирам первой пары, пассажиры третьей пары бросают свои 15-копеечные монеты в кассу, а 10-копеечные монеты отдают пассажирам второй пары.
3. 36+37=73.
4. Заметим, что буквы можно упорядочить следующим образом: Т>И>Р>А>К>В>О>>П>С>Н. Отсюда ТРАНСПОРТИРОВКА = =976012379873456.

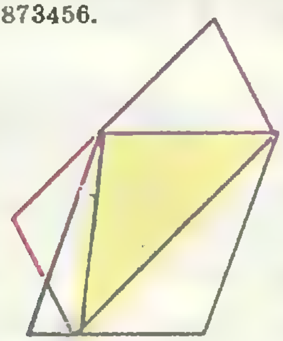


Рис. 18.

5. Заметим, что желтый треугольник занимает половину площади и синего, и красного параллелограммов (рис. 18). Значит, эти параллелограммы равновелики.

ранные задачи Московской дской олимпиады по физике

(см. «Квант» № 9)

8 класс

1. $F_0 = F(1+(l_1/l_2)^2+\sqrt{2}l_1/l_2)^{1/2}$.
2. Шарики будут двигаться влево с прежними скоростями, а расстояния между ними (слева направо) будут равны l_1, l_2, l_3.
3. $\lambda = 10^5$ Дж/кг; $c_p = 2\cdot10^3$ Дж/(кг·К).
4. $n = \left(\frac{\sin(\alpha/3)}{\sin\alpha}\right)^2$; если $\alpha = 135°$, все лучи после одного отражения выйдут обратно.

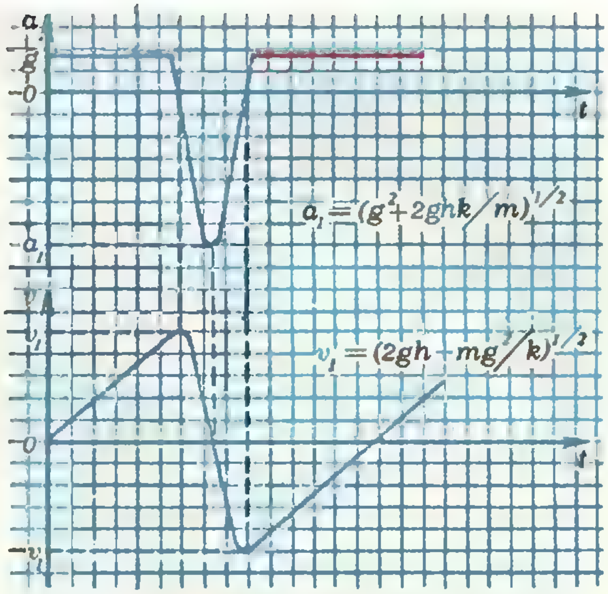


Рис. 19.

9 класс

1. Сначала упадет третий шар, потом второй и последним — первый.
2. Нет, не сможет.
3. $t_2 = 11{,}5$ °С.
4. $E = 9\cdot10^4$ В/м.

10 класс

1. См. рис. 19.
2. Максимальная энергия электрона много меньше энергии, необходимой для вырывания атома меди из кристаллической решетки.
3. $V = 8{,}5$ л.
4. У нижней кромки лампы возникает синяя кайма, а у верхней — красная.

Информация

Всесоюзный конкурс «Юный программист»

Красноярский крайком ВЛКСМ, Вычислительный центр СО АН СССР (г. Красноярск) и Красноярский государственный педагогический институт объявляют Всесоюзный конкурс «Юный программист» на лучшую программу, созданную школьниками для детей младшего возраста (до 12 лет).

На конкурс принимаются клавиатурные тренажеры, демонстрационные, обучающие, контролирующие программы по предметам, исполнители, игровые программы и т. д. При разработке программ следует ориентироваться на школьные персональные ЭВМ: «Электроника БК-0010» в комплекте с ДВК-2М (КУВТ-86), «Корвет», «УКНЦ», «Ямаха», «Агат».

Учреждено 6 главных призов и 10 поощрительных.

Для участия в конкурсе до 1 февраля 1989 года необходимо прислать заявку и подробный сценарий программы. Сценарий должен содержать основные идеи и покадровое описание программы. Заявка пишется по следующему образцу:

Заявка
Ф. И. О. ————————————
Домашний адрес ————————————
Номер и адрес школы (СПТУ) ————————
Класс ————————————
Тип машины ————————————
Язык программирования ————————
Название программы (кому и для чего предназначена) ————————————
Объем программы ————————————
Среднее время работы программы ————

Авторы отобранных сценариев будут приглашены в Красноярск в конце марта 1989 года для участия в заключительном туре конкурса.

Материалы на конкурс направляйте по адресу: 660051 Красноярск, Абонементный ящик № 11533, оргкомитет конкурса «Юный программист».

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова

Номер оформили
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов,
С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, В. Б. Юдин

Фото представил А. Селиверстов (ФфТОР)

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректоры Н. Д. Дорохова, Л. С. Сомова

Сдано в набор 15.08.88 Подписано к печати 28.09.88
Т 17822 Бумага 70×100/16 Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 22,10 Усл. печ. л. 5,2 Уч.-изд. л. 6,42
Тираж 189 947 экз. Цена 40 коп. Заказ 2099

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

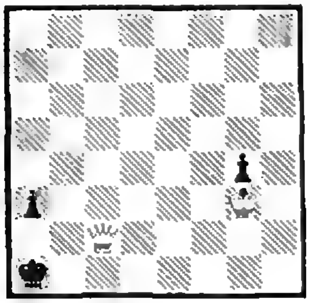
ОДНА ПОЗИЦИЯ — А СКОЛЬКО ЗАДАНИЙ!?

Среди различных жанров шахматных задач есть и такой: позиция придумывается одна, а заданий к ней — несколько. Рассмотрим такой пример, который уже когда-то печатался в «Кванте».

А. Кузнецов, Н. Плаксин. Белые: Крc3, Лa5, п. h6; черные: Крb1, пп. a6, h7. Мат в 2 хода на обычной доске и на вертикальной цилиндрической.

На обычной доске все просто: **1. Л:a6 Крc1 2. Лa1×**. На вертикальном цилиндре (линии «а» и «h» приклеены друг к другу) на 1. Л:a6 следует 1...ha, а на любое отступление ладьи — 1...a5. Решает **1. Лa5—a5!** Ладья проходит по кругу и остается на своем месте. **1...Крc1 2. Лa1×**.

Эта задача привлекла внимание постоянного корреспондента «Шахматной странички» из Донецка В. Попова. Ему удалось сократить число действующих лиц и придать игре большую динамичность.



Мат в 2 хода на обычной доске и на вертикальной цилиндрической.

1. Кр:g4! a2 2. Фc1×; на цилиндре ход 1. Кр:g4 не годится из-за ответа 1...Крh1! Решает **1. Фc2—c2! Крh1 2. Фb1×** (1...a2 2. Фc1×).

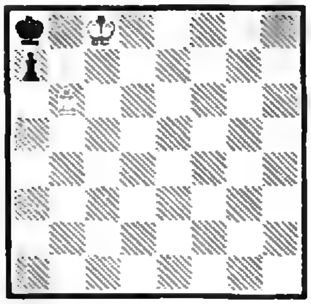
В. Попов не ограничился этим замыслом, а продолжил поиски. Переставив короля с g3 на g2, а пешку с a3 на a4, он сформулировал новое задание (для каждой из досок): мат в 3 хода.

1. Крg3! Теперь ответ 1...a3 приводит к рассмотренной двухходовке, правда, на цилиндре у черного короля освободилось поле h1, но — 1...Крh1 2. Фh2×.

Еще одно усовершенствование: ферзь переставлен на b3, черная пешка с a4 на a5 и задание — мат в 4 хода (на обычной и на вертикальной цилиндрической досках).

После **1. Крg3! a4 2. Фc2 a3** мы приходим к исходной двухходовке. Удлинение решения само по себе не так интересно, но дополнительное изящество задаче придают ложные следы: 1. Фc2? g3! Оказывается, порядок ходов существен: если сейчас 2. Крh3 — на цилиндре, то 2...a4+! 3. Крa3 Крh1! 4. Фh2+gh!

Известны позиции, в которых помимо двух наших заданий добавляются еще два: мат ставится на горизонтальной цилиндрической доске и на торе. А следующая позиция может быть превращена сразу в девять различных задач! Это установили участники конкурса, проводимого журналом «64 — Шахматное обозрение».



1. Выигрыш.

Как показывает простейшее исследование позиции (ретроанализ), очередь хода за черными и верх берут именно они — **1...ab** и т. д.

2. Кооперативный мат в 2 хода.

В задаче-кооперативе начинают черные, которые помогают белым добиться цели. **1. a6 b7+ 2. Крa7 b8Ф×.**

3. Серийный кооперативный мат в 8 ходов.

В серийной задаче-кооперативе ходит одна сторона, а другой разрешается сделать только один заключительный ход — матующий. **1—5. a5—a4—a3—a2—a1C! 6. Ce5 7. Cb8 8. Ca7 b7×.**

4. Обратный мат в 9 ходов. Максимуммер.

Сложное математическое задание! В «обратной» задаче белые заставляют соперника объявить им мат, а максимуммер предусматривает, что черные обязаны делать геометрически самые длинные ходы. **1...a5 2. Крc7 a4 3. Крc8 a3 4. Крc7 a2 5. Крc8 a1Ф 6. b7+ Крa7 7. b8Ф+ Крa6 8. Фb6+ Кр:b6 9. Крb8 Фh8×.**

5. Кооперативный пат в 3 хода. Цирце.

Опять два необычных задания, соединенных вместе. Первое понятно: черные начинают и с помощью белых запатовывают сами себя. А вот с другой темой мы сталкиваемся впервые. В сказочной задаче *цирце* черная фигура, когда ее берут, не покидает доску, а возрождается на своем исходном поле (с учетом цвета поля, на котором стоит в момент взятия; пешка возвращается на начальное поле той же вертикали). **1. a6 b7+ 2. Крa7 b8K! 3. Крa8! K:a6.** Взятая пешка восстанавливается на поле a7, и черным пат.

6. Белые берут обратно последний ход и дают мат в 1 ход.

Вместо Крc7:Кc8 (на c8 стоял именно конь!) следует **1. b7×.**

7. Белые берут обратно последний ход, после чего ставится кооперативный пат белым в 1 ход.

Вместо a5:Фb6 следует **1. a6 Фd6** — пат.

8. Белые берут обратно последний ход, после чего ставится кооперативный пат в 2 хода.

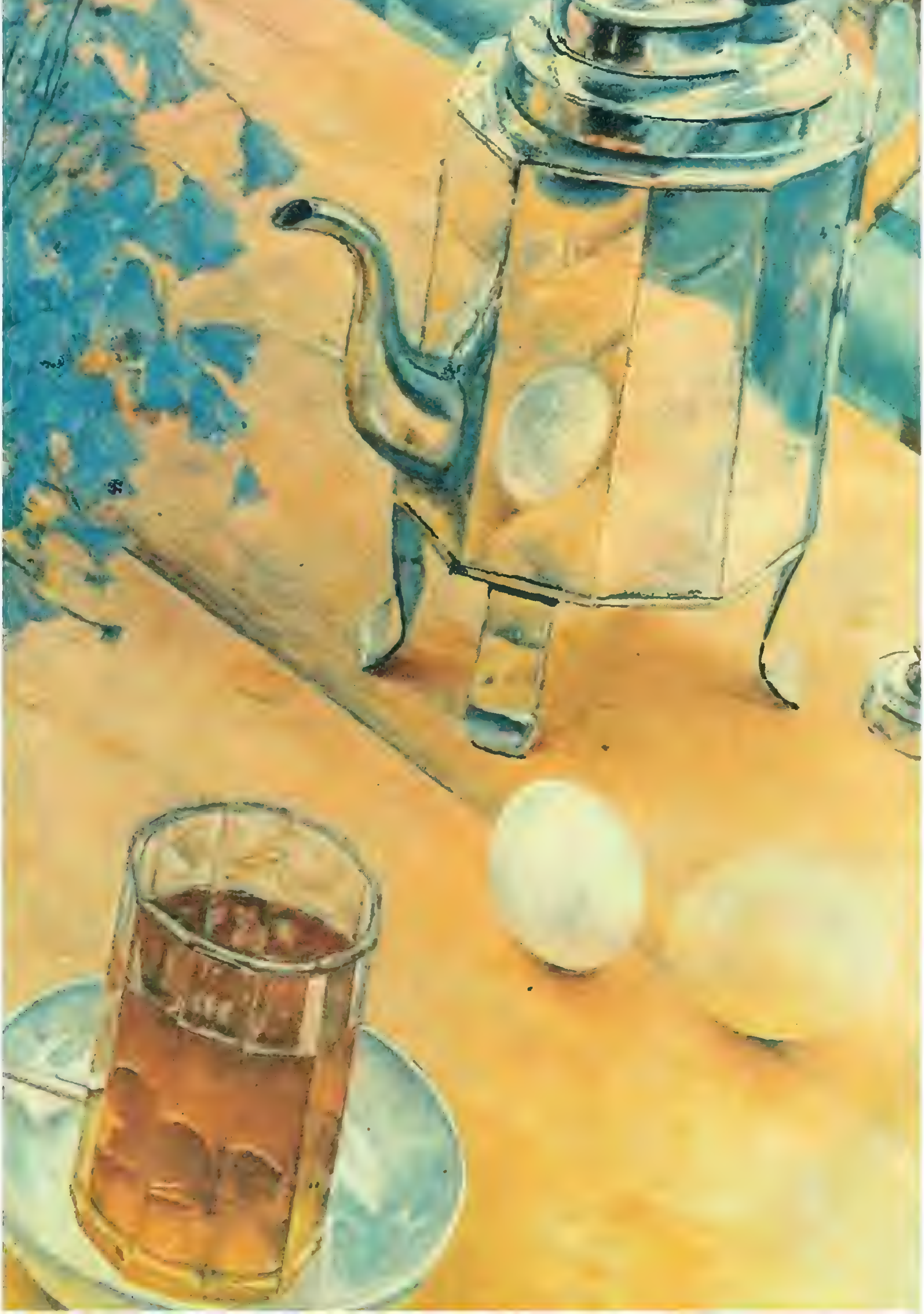
Назад берется ход a5:b6, а дальше все зависит от того, какая фигура была на b6: 1. Фd6 a6 2. Фc7+ Кр:c7; 1. Лb7 a6 2. Лc7+ Кр:c7; 1. Cd8! a6 2. Cc7 Кр:c7; 1. Кd5 a6 2. Кc7 Кр:c7.

9. Пат в 0 ходов.

Это, конечно, задача-шутка. Доска разворачивается на 180°, и черным пат!

А может, есть и десятое задание?

Е. Я. Гик



Цена 40 коп.

Индекс 70465

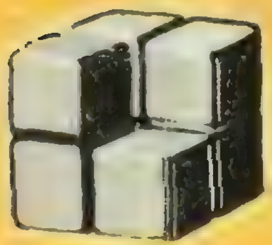
«Минус-кубик» (рис. 1, 3) — это пространственный вариант игры «15»: 7 кубиков, склеенных из двух П-образных половинок, белой и цветной (рис. 4), можно передвигать внутри прозрачной запаянной коробки вдвое больших, чем у кубика, размеров. Требуется расставить их так, чтобы с каждой стороны коробки был виден только один цвет. Итоговое, «правильное» распределение цветов показано на рисунках 1 и 3 (невидимые на них боковые стороны коробки цветные, а дно белое).

Эта простая головоломка привлекла наше внимание тем, что два ее, казалось бы, идентичных варианта — черный, выпускаемый в Москве (рис. 1), и голубой, свердловский (рис. 3),— существенно отличаются по сложности решения. Московский «минус-кубик» можно собрать, действуя почти наобум, а над свердловским приходится поразмыслить. В чем же дело?

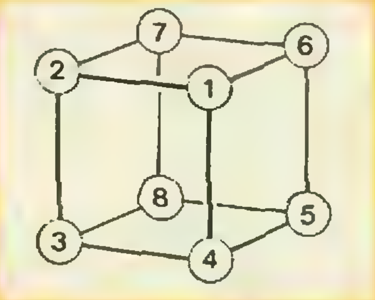
Занумеруем углы коробки (рис. 2; 1-й угол пустой) и выложим правильно расставленные кубики, не поворачивая их, в ряд по номерам. Результаты представлены в двух нижних строчках таблицы: для наглядности от каждого кубика в ней оставлена только темная половинка, а квадратик означает, что на соответствующем месте кубик расположен так, как показано в верхней строке. Мы видим, что московский и свердловский варианты отличаются только в одном месте. Однако этого достаточно, чтобы число расстановок кубиков, удовлетворяющих условию головоломки, для московского варианта оказалось в 12 раз больше, чем для свердловского, так что первый, можно сказать, в 12 раз проще второго. К тому же при правильной расцветке в свердловском «минус-кубике» может быть свободным только один из двух углов (1-й или 8-й), а в московском — любой.

С помощью нашей таблицы можно описать все способы укладки кубиков в коробочку, при которых можно получить правильную расцветку (как на рис. 1, 3): нужно выбрать несколько — от 0 до 5 — положений кубика из первой строки таблицы, причем среди них может быть не более одной пары одинаковых, остальные кубики должны быть ориентированы, как фигурки в нижних строках. Нетрудно подсчитать, что имеется 48 различных вариантов «минус-кубика», допускающих правильную расцветку.

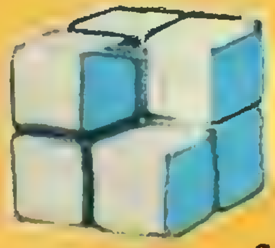
В. Д.



1

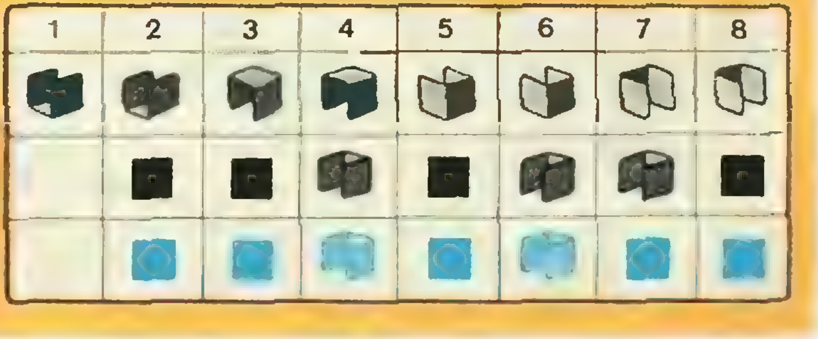


2



3

4



5

номера
11 и 12

Квант
Основан в 1970 году

11 1988
12

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

2 А. Н. Колмогоров в воспоминаниях учеников
12 *Ю. Р. Носов.* Молнии в кристалле
19 *Ф. В. Вайнштейн.* Разбиение чисел
26 *Б. М. Бубнов.* Поговорим немного о погоде...

Новости науки

32 Супервытянутые ядра

Задачник «Кванта»

33 Задачи М1131—М1140, Ф1143—Ф1147
35 Problems M1131—M1140, P1143—P1147
37 Решения задач М1110—М1115, Ф1123—Ф1127

«Квант» для младших школьников

47 Задачи

48 **Калейдоскоп «Кванта»**

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:

50 Равнодействующая — как ее найти?
52 Реальный газ и его уравнение состояния
54 Принцип Гюйгенса

Лаборатория «Кванта»

57 *А. И. Агафонов, С. И. Селицер.* Необычный маятник

Математический кружок

59 *С. Л. Табачников.* О плоских кривых

Практикум абитуриента

64 *Е. Е. Городецкий.* Гармонические колебания

Информация

69 25 лет Новосибирской ФМШ
73 Конференция в Ставрополе

Олимпиады

74 XXII Всесоюзная олимпиада по математике
78 XXII Всесоюзная олимпиада по физике
82 I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике
87 Международные олимпиады

Наша анкета

88 Кто и как читает «Квант»
90 **Ответы, указания, решения**
93 **Напечатано в 1988 году**
«Квант» улыбается *(46)*
Смесь *(11, 58, 68)*

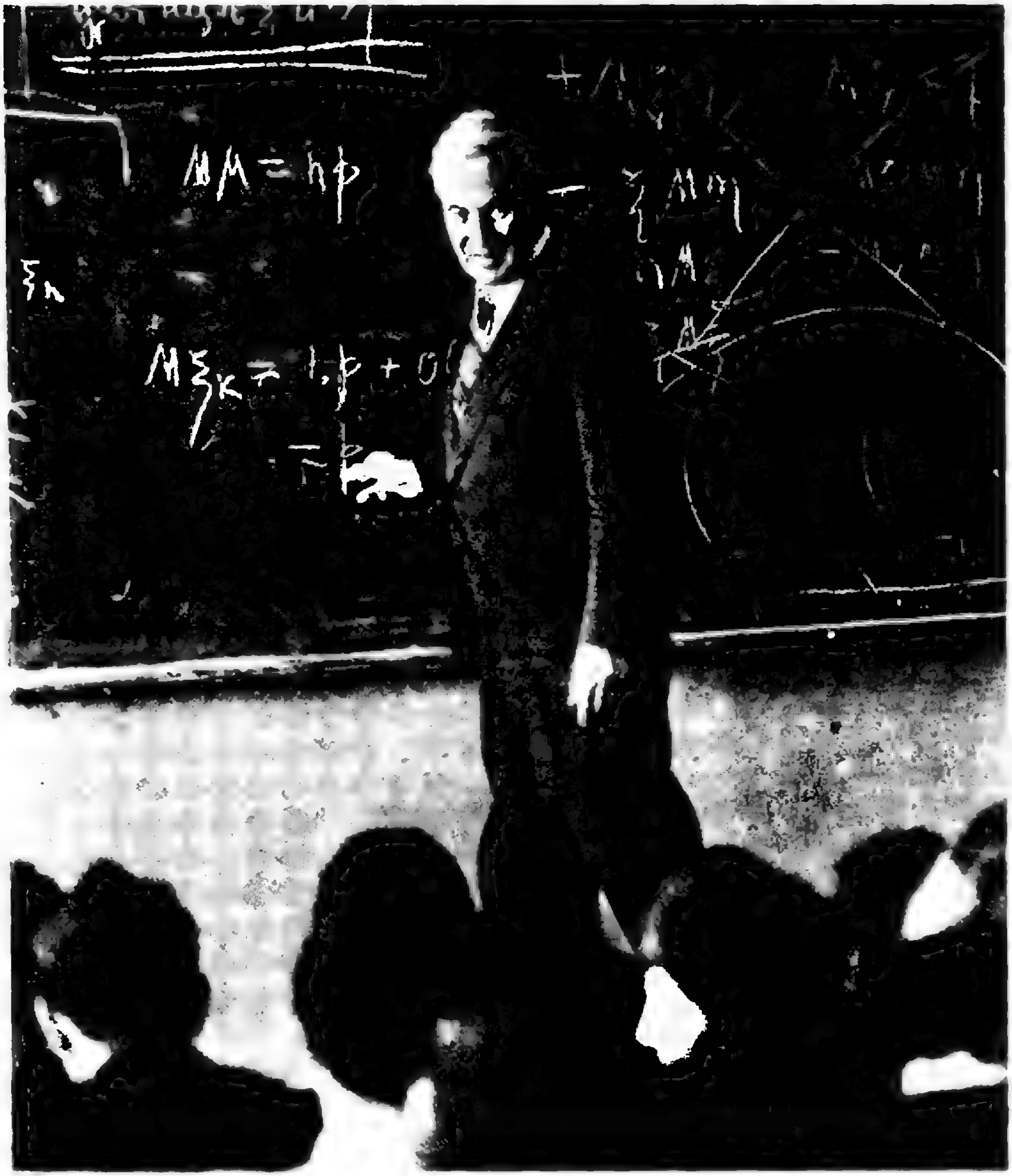
Наша обложка

1,4 Правильные многогранники. Об их прошлом, настоящем и возможном будущем читайте на страницах «Калейдоскопа «Кванта».

2 Картина советского художника А. Г. Тышлера (1898—1980) «Директор погоды» — естественное «предисловие» к статье Б. М. Бубнова «Поговорим немного о погоде...».

3 Шахматная страничка.

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1988



Двадцать пятого апреля 1988 года исполнилось 85 лет со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова. В его подмосковном доме в Комаровке в этот день собралась небольшая группа его учеников и сотрудников, в основном те же, кого ровно за год до этого Андрей Николаевич пригласил на свой день рождения. Как оказалось — на последний, который ему суждено было отметить: А. Н. Колмогоров скончался 21 ноября 1987 года. Собравшиеся были не самыми старшими и титулованными учениками А. Н. Колмогорова (среди его учеников одних академиков — семь человек!), а математиками помоложе — те, кто в последние годы его жизни ближе всего сотрудничал с ним. Мы публикуем воспоминания ближайших учеников А. Н. о том, как они познакомились с ним, совместно с ним работали или просто общались с ним. В этих воспоминаниях вырисовывается не только яркий образ великого ученого, но и образ уникальной личности.

А. Н. КОЛМОГОРОВ В ВОСПОМИНАНИЯХ УЧЕНИКОВ

Вспоминает член-корреспондент АН СССР, профессор Владимир Игоревич **АРНОЛЬД**:

— Андрей Николаевич Колмогоров прожил большую и счастливую жизнь. Колмогоров — Пуанкаре — Гаусс — Эйлер — Ньютон: всего пять таких жизней отделяют нас от истоков нашей науки.

Пушкин заметил как-то, что он оказал на юношество и российскую словесность больше влияния, чем все Министерство народного образования, несмотря на полное неравенство средств. Таким же было влияние Колмогорова на математику.

Я познакомился с Андреем Николаевичем в студенческие годы. Тогда он был деканом мехмата. Это были годы расцвета факультета, расцвета математики. Уровня, которого достиг факультет в 50-е — 60-е годы благодаря прежде всего Андрею Николаевичу Колмогорову и Ивану Георгиевичу Петровскому, он более никогда не достигал и вряд ли когда достигнет.

Андрей Николаевич был замечательным деканом. Он говорил, что надо прощать талантливым людям их талантливость, и спас не одного из очень известных сейчас математиков от исключения из университета. Снимая буйных студентов со стипендии, этот декан сам же помогал им пережить трудное время...

От других известных мне профессоров Андрея Николаевича отличало полное уважение к личности студента. Он всегда ожидал услышать от ученика что-то новое, неожиданное, и в высшей степени обладал той заразительной увлеченностью наукой, которая прежде всего и нужна студентам. «Действительно хорошо преподавать математику,— говорил Андрей Николаевич,— может только человек, который сам ею увлечен и воспринимает ее как живую, развивающуюся науку.»

Менее всего заботясь о формальном совершенстве своих лекций, Андрей Николаевич был замечательным учителем. Мне кажется, он руководствовался в своем преподавании принципами, которые сформулировал Эйнштейн:

«Кажется почти чудом, что современные методы обучения еще не совсем удушили святую любознательность, ибо это нежное растеньице требует, наряду со свободой, прежде всего поощрения. Большая ошибка думать, что чувство долга и принуждение способствуют тому, чтобы находить радость в том, чтобы искать и узнавать. Здоровое хищное животное отказалось бы от пищи, если бы ударами бича его заставляли непрерывно есть мясо, особенно если принудительно предлагаемая еда выбрана не им...»

В наш век больших научных коллективов кажется, что пора крупных индивидуальных достижений в науке ушла в прошлое. Для Андрея Николаевича характерны, однако, именно крупные личные достижения.

В развитии каждой области науки можно различить три стадии. Первая стадия — пионерская: прорыв в новую область, яркое и обычно неожиданное открытие, часто опровергающее сложившиеся представления. Затем следует техническая стадия — длительная и трудоемкая; теория обрастает деталями, становится труднодоступной и громоздкой, но зато охватывает все большее число приложений. Наконец, в третьей стадии появляется новый, более общий взгляд на проблему и на ее связи с другими, по-видимому далекими от нее вопросами; делается возможным прорыв в новую область исследований.

Для математических работ Андрея Николаевича Колмогорова характерно то, что он явился пионером и первооткрывателем во многих областях математики: ему принадлежат яркие достижения в теории вероятностей, теории функций, функциональном анализе, топологии, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, теории турбулентного движения жидкости и т. д.— трудно указать область математического анализа, в которую А. Н. Колмогоров не сделал бы существенного вклада, где бы он не решил старых (порой двухсотлетних) проблем.

Первую свою знаменитую работу — пример ряда Фурье суммируемой функции, расходящегося почти всюду, Андрей Николаевич выполнил в 19 лет. (В качестве курьеза упомяну, что Фреше говорил мне в 1965 году: «О, Колмогоров! Это тот замечательный молодой человек, который построил почти всюду расходящийся ряд Фурье!» Для Фреше все работы Колмогорова по теории вероятностей, динамическим системам, турбулентности имели меньшую цену, чем эта студенческая работа.) Сам Андрей Николаевич всегда высоко ценил «спортивно-математические» достижения и этой первой работой гордился, но самым трудным своим спортивным достижением считал работу о 13-й проблеме Гильберта.

Технического усовершенствования и обобщений построенной теории Андрей Николаевич обычно старался избегать. Зато на третьей стадии работы, когда нужно осмыслить полученные результаты и увидеть новые пути, на стадии создания фундаментальных обобщающих теорий, Андрею Николаевичу принадлежат замечательные достижения.

Среди более чем трех сотен опубликованных им статей имеются исследования по механике, геологии, биологии, кристаллизации металлов, теории стрельбы, теории стихосложения, теории передачи информации, теории автоматов и т. д. В самóй математике Андрей Николаевич всегда старался выбирать такие проблемы, решение которых приближает нас к познанию природы и к овладению ее силами. Сам он сказал о своей прикладной деятельности так:

«Занимаясь с некоторым успехом, а иногда и с пользой, довольно широким кругом практических приложений математики, я остаюсь в основном чистым математиком. Восхищаясь математиками, которые превратились в больших представителей нашей техники, вполне оценивая значение для будущего человечества вычислительных машин и кибернетики, я все же думаю, что чистая математика в ее традиционном аспекте еще не потеряла своего законного почетного места среди других наук. Гибельным для нее могло бы оказаться только чрезмерно резкое расслоение математиков на два течения: одни культивируют абстрактные новейшие отделы математики, не ориентируясь отчетливо в их связях с породившим их реальным миром, другие заняты «приложениями», не восходя до исчерпывающего анализа их теоретических основ... Мне хочется подчеркнуть законность и достоинство позиции математика, понимающего место и роль своей науки в развитии естественных наук, техники, да и всей человеческой культуры, способного развивать свою естественную науку в соответствии с этими общими потребностями».

Эти слова Андрея Николаевича о законности и достоинстве позиции математика, вынесенные в 1963 году на обложку посвященного ему номера «Огонька»,— его кредо и научное завещание. Актуальность его мыслей и предостережений становится все очевидней по мере того, как сбывается предсказание Лагранжа: «Места по математике в Академии сделаются тем, чем уже стали кафедры арабского языка в университетах...»

Вспоминает доктор физико-математических наук, профессор МГУ Владимир Андреевич УСПЕНСКИЙ:

— Еще школьником я узнал, что есть такой математик Колмогоров, и, никогда его не видев и не зная никаких его работ, я уже знал, что самый главный математик, самый великий — это Колмогоров. А потом я участвовал в Московской олимпиаде по математике (скорее всего это была весна 1946 года, когда я учился в 8-м классе), и среди тех, кто приветствовал участников олимпиады, был Колмогоров. На трибуну вышел моложавый человек. На меня произвело очень большое впечатление его выступление: и манера говорить гнусаво, наклонив голову набок к плечу, и текст выступления, который начинался фразой: «Президент Московского математического общества Павел Сергеевич Александров поручил мне приветствовать участников математической олимпиады». Если самый великий математик — Колмогоров, то как же велик тот, кто мог что-то поручить самому Колмогорову?!

Познакомился я с Андреем Николаевичем, когда был на третьем курсе. Он читал специальный курс на мехмате МГУ «Теория меры». На этот спецкурс ходили в основном для удовольствия, так как сдавать этот курс было не нужно. Однажды в перерыве между лекциями я к нему подошел. Мне неловко об этом вспоминать: А. Н. сделал некоторое утверждение, которое я опроверг. На него это произвело впечатление, и он пригласил меня приехать к нему на дачу, спросив, готов ли я только говорить о математике или же могу также кататься на лыжах. Так мы с ним познакомились.

О катании даже и вспоминать не хочется, потому что лыжи просто не держались на мне. До этого я катался на лыжах только в валенках, просовывая носок валенка в петельку, и никаких других креплений просто никогда не видел и не знал, что такие бывают. Андрей Николаевич выдал мне и ботинки, и лыжи, и крепления (жесткие или полужесткие, не помню сейчас). Лыжи постоянно с меня спадали, и академик Колмогоров всякий раз при этом стоял на коленях на снегу, поправляя крепления моих лыж. Первые лыжи уехали от меня совсем под гору, мы вернулись и надели другие. Я в этом, скорее всего, не был виноват, потому что при исправных креплениях лыжи не должны были бы уехать. Это все происходило 22 января 1950 года. С этого времени я стал учеником А. Н.

Работать с А. Н. было очень не просто. Все время ощущалось, что он человек гениальный. В моей жизни было три гениальных человека, с которыми мне доведось общаться,— это Б. Л. Пастернак, А. А. Зализняк и А. Н. Колмогоров. У А. Н. был свой особый стиль. Зимой 1950 года, впервые позвав меня к себе на дачу, он не без некоторой торжественности произвел меня в свои ученики. Тогда же он назначил тему моих занятий. Он сказал, что бывают такие особенные функции, они называются рекурсивными, и о них в нашей стране почти никто ничего не знает. Дал несколько оттисков статей из иностранных журналов и велел разобраться. И сказал: «В крайнем случае, если из вас ничего не выйдет, будете делать нам грамотные рефераты». Одновременно с этим он подарил мне несколько оттисков своих трудов, один из которых — с дарственной надписью. Это очень ранние и уникальные оттиски 20-х годов, которые я берегу.

В чем проявлялась гениальность А. Н., сказать очень трудно. Но вот могу назвать такие две отличительные его черты. Первая. Будучи аспирантом, я встречался с А. Н. еженедельно. И всякий раз, в каждую последующую встречу, он помнил, на чем мы расстались, и вообще всю мою работу (все, что я сделал до этого) он знал лучше и точнее, чем я. Хотя я занимался только этим, а он, как известно, и многим другим. Вторая черта. Часто одновременно со мной в Комаровку ездил Г. И. Баренблатт, с которым А. Н. занимался гидродинамикой (а со мной — математической логикой). На нас с Баренблаттом производило неизгладимое впечатление, с какой легкостью А. Н. переходил от гидродинамики к математической логике и обратно. Для него это было совершенно естественно. А нам казалось чудом.

Как шла работа? Иногда мы оба с А. Н. рассуждали вслух, а иногда я писал ему тексты, которые и вручал (и которые как мне теперь хотелось бы надеяться он просто выбрасывал). Взяв меня в аспирантуру, Колмогоров назначил мне два трудных экзамена по алгебре и по уравнениям математической физики и объявил, что третий экзамен должен быть все же ближе к логике. И велел мне сдавать теорию релейно-контактных схем. Математической литературы по релейно-контактным схемам тогда почти не было, а была литература техническая. Поэтому подготовка к этому экзамену давалась мне труднее всего. Помню, что два месяца я не мог понять, как работает триод. И, только все выучив, понял, что это и не надо было понимать. Помимо трех экзаменов полагались еще и аспирантские отчеты. В качестве одного из них А. Н. дал мне для перевода только что вышедшую на немецком языке книгу венгерского математика Розы Петер «Рекурсивные функции». Немецкий язык я не знал, но сказать об этом Колмогорову не решился. Я взялся за работу и... перевел. Книжка получилась неважная, но предисловие, которое написал А. Н.,— гениальное.

У меня есть две работы, совместные с А. Н., есть и работа, на которой стоит только моя фамилия, но которая полностью инспирирована А. Н. Это статья в «Докладах Академии наук» про доказательство теоремы Гёделя. Когда А. Н. индуцировал у своего ученика некоторый результат, который на самом деле был им почти подсказан, он создавал такую обстановку, будто бы ученик додумался до этого сам, и предлагал писать статью в журнал о результате. Вот такая психологическая поддержка своего младшего партнера — очень существенный момент его деятельности. Происходило ли это инстинктивно или он это обдумывал, я не знаю.

К сожалению, я, наверное, не могу считать себя полноправным учеником А. Н., потому что не обладал ни одним из двух необходимых для этого качеств: ничего не понимал в музыке и не занимался спортом. Тем не менее, он меня не прогонял. А иногда рассуждал со мной об искусстве, поражая меня своими познаниями во всем. Кто сегодня, например, знает шахматный учебник Дюфреня? Никто. Это известный учебник конца прошлого века. Этот учебник у меня дома был (достался от отца), поэтому я его читал. И когда мы заговорили с А. Н. о шахматах, первое слово, которое он произнес, было «Дюфрень», и он рассказал мне содержание учебника.

Еще такой случай. Для меня было неожиданностью, что на гербе правой и левой стороной считаются не то, что мы видим справа и слева, а наоборот. (Это потому, что герб рисовался на щите и рассматривался с точки зрения того, кто нес щит.) Едва я это узнал, как А. Н. по какому-то поводу об этом упомянул.

Вспоминает доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Математического института Академии наук Альберт Николаевич ШИРЯЕВ·

— Об Андрее Николаевиче я впервые услышал, конечно, в школе: учительница по математике очень много говорила о нем. Я учился тогда в 538-й московской школе-интернате, и наша учительница подталкивала нас к участию во всевозможных кружках и олимпиадах. При вручении призов на одной из олимпиад я впервые увидел А. Н. Потом было поступление в университет. Хотя об А. Н. мы слышали и раньше, но общение с ним казалось чем-то недостижимым, нереальным.

Я сначала блуждал по разным кафедрам, и прошло много времени, прежде чем я остановился на кафедре теории вероятности. Впервые некоторое соприкосновение с А. Н. произошло тогда, когда я слушал его курс «Анализ-3». А первый мой разговор с А. Н. произошел, когда я защищал свою дипломную работу. Я ее выполнял между 4-м и 5-м курсами, потому что знал, что в начале 5-го курса мне будет не до дипломной работы, поскольку я входил в студенческую сборную страны по горным лыжам, и в начале февраля 1957 года принял участие во II Зимних студенческих играх в Гренобле.

Защита происходила в конце февраля. После защиты А. Н. вышел со мной в коридор, поговорил со мной о работе, произнес много вещей, которые я не понял. И то ли кто-то сказал ему о моем участии в играх в Гренобле, то ли мой загорелый вид говорил сам за себя, но А. Н. пригласил меня к себе в Комаровку кататься на лыжах.

А. Н. спрашивал о моих математических интересах, но никакого дальнейшего разговора тогда не было. Начиная с 4-го курса я был в спецгруппе, поэтому я никак не мог рассчитывать на работу в Математическом институте. Однако после 5-го курса мы с моим однокурсником Витей Леоновым, к несчастью, рано погибшим, узнали, что А. Н. берет нас по распределению в Математический институт. Мы сразу даже не оценили этого счастья. И тут же началась работа: А. Н. включил нас в исследования по нелинейному спектральному анализу, нелинейной теории случайных процессов. Это были настолько счастливые и плодотворные годы, что я даже забросил горные лыжи. По поводу одной нашей работы, которая сейчас широко известна и которую мы докладывали с Леоновым, А. Н. с улыбкой сказал, что «авторы преисполнены важности разрабатываемой проблемы».

Когда В. Леонов и я были зачислены в МИАН, А. Н. сразу четко определил наши обязанности. В 1956 году был создан журнал «Теория вероятностей», и определенная работа по журналу была возложена на нас: редактирование, разметка чужих работ. Эта деятельность, хоть и была черновой, явилась для нас хорошей школой. Следующее, что мы должны были делать с Леоновым,— ходить на лекции А. Н., в частности по случайным процессам, и записывать их. Кстати, этими записями его лекций я до сих пор пользуюсь; они остались неизданными. На их приведение в порядок В. Леонов затратил много сил, но когда А. Н. увидел получившийся текст, его комментарий был очень краток: «Боже, какой урод получился!».

Что касается научных исследований о нелинейных случайных процессах, то А. Н. заметил в одной работе Черенкова (сына известного академика) некоторые правила вычисления так называемых сéми-инвариантов маленьких порядков. Он решил, что, по-видимому, имеет место некоторое общее правило (для всех порядков), как-то его пояснил и поручил нам его доказать. Ситуация была очень тяжелая. Каждый четверг А. Н. начинал с того, что интересовался, что нами по этому поводу сделано. Мы исписывали фантастическое количество бумаги. И только через год мы доказали сложнейшими комбинаторными путями то, что нужно. А потом мы нашли доказательство, которое уместилось на двух страницах. А. Н. написал введение к этой работе.

Теперь о том, как мы работали. А. Н. так много знал, что мы довольно быстро усвоили правило: не уходить от А. Н. без бумажки, на которой он делал при разговоре пометки. Потом, разглядывая эти бумажки, мы разгадывали их, как ребусы. Часто не покидало ощущение, что он говорит что-то гениальное и по делу, а ты ничего не понимаешь. Магнитофонов тогда не было, а записать все — просто физически не было возможности. И каждый четверг на вопрос А. Н. «что же сделано?» стыдно было отвечать, что ничего, и приходилось не спать, недоедать. Хотя у нас уже начали появляться семьи, мы упорно скрывали это от А. Н.

Даже спустя два года А. Н. создавал такие ситуации, которые были сопряжены с потрясениями. Например, я хорошо помню, как однажды мне позвонили в 9 вечера и сказали, что А. Н. просит приехать к нему в Комаровку. Часам к 11 я добрался в Комаровку. А. Н. оказался больным. Он сказал, что завтра у него должна состояться лекция, где нужно будет читать теорему Блэкуолла о рекуррентных событиях. А. Н. не хочет, чтобы эта лекция пропускалась, и просит меня ее прочесть. И предложил два варианта: либо он немедленно что-то мне рассказывает по теме лекции, либо дает оттиски работы Блэкуолла, в которой я сам должен разобраться. Лекция должна была читаться на первой паре, поэтому у меня была ночь. Блэкуолл писал фантастически сжато. Я поехал домой, просидел всю ночь, прочитал лекцию, а потом вернулся домой спать.

Довольно-таки быстро А. Н. переключил меня на новую тематику. Пришлось изучать книги по радиотехнике, где было описано устройство приемников и ламп, разобраться в принципах радиолокации. Заказчики пришли и объяснили суть задачи. Математическая ее постановка, предложенная А. Н., оказалась удивительно удачной (А. Н. умел так удачно формулировать задачи, что из них потом вырастали совершенно новые направления). Занимаясь этой задачей, я написал свою докторскую диссертацию и книжку по статистическому последовательному анализу.

А. Н. никогда ничего подробно не объяснял. Приходилось до всего доходить самому. Он выдал нам почти инженерную постановку задачи: минимизировать среднее время запаздывания при заданной вероятности ложных тревог. Ответ он, конечно, угадал. А. Н. сказал лишь, что в очень простой ситуации ответ должен быть такой-то, причем его нельзя было получить из какой-либо существующей в то время теории: нам ее просто пришлось придумывать.

А теперь об общей культуре. Поскольку мы были связаны секретарскими обязанностями, лекционной деятельностью, приходилось часто бывать в Комаровке. Ходили в походы, слушали музыку. И в музыке фамильярничать с А. Н. было невозможно.

Типичный пример. После какого-то вечера, когда было очень много музыки, А. Н. спросил: «Ну, что же еще вам сейчас поставить: Шарпантье или Куперена?». Я сказал: «Андрей Николаевич, может быть, что-нибудь полегче?» А. Н. тут же: «Сейчас я вам «Одинокую гармонь» найду». Мне было невдомек, что А. Н. может что-нибудь знать об этой «Одинокой гармони». А однажды, слушая музыку, я сидел и постукивал пальцами по столу. А. Н. быстро подложил салфеточку. Я все понял.

Моя деятельность (сначала нелинейные преобразования, потом последовательный анализ) — пример того, как А. Н. с помощью очень простых формулировок выталкивал людей на самостоятельную орбиту, после чего он считал, что у него есть сотрудники, которые этим занимаются, и знают это лучше него (хотя знать лучше А. Н. можно было только детали, но не общие идеи).

О не математическом общении с А. Н. могу рассказать лишь отдельные эпизоды, отдельные штрихи. Помню такой характерный эпизод. Мы были вместе в Венгрии на конгрессе по теории информации. Получили по 1300 форинтов. Поскольку там нас поили-кормили, у каждого образовалась большая сумма денег. И возник вопрос: что купить? А. Н. сразу спросил про книжный магазин. Пришли туда. Он тут же увидел книгу рисунков Микеланджело, которая стоила 1200 форинтов, купил ее, потратив все что у него было, и сказал: «А билет на трамвай вы уж мне купите».

Впервые со старыми русскими городами я познакомился через А. Н. Иногда заезжали в провинциальные русские города, в глубинку. А. Н. о каждом городе многое знал, и цель у него всегда была определенная: он помнил, что здесь нужно посмотреть такую-то стену или башню. Видимо, на память об этих поездках А. Н. подарил мне на сорокалетие толстую книгу «Древнерусские города».

Я никогда не видел, чтобы А. Н. жаловался. Он никогда, ни в какой форме не искал к себе сочувствия. А на вопрос: «Как вы относитесь ко всякому почету, уважению?» — А. Н. отвечал просто: «Спокойно».

Из спортивных увлечений А. Н. стоит отметить греблю и лыжные походы. В равнинных лыжных походах А. Н. проявлял фантастическую ритмичность движений. 30—40 км похода для нас были недостижимой вещью, мукой, а он даже в 60 лет проходил такие расстояния легко.

Вспоминает доктор физико-математических наук, профессор МГУ Владимир Михайлович ТИХОМИРОВ:

Я познакомился с Андреем Николаевичем на 3-ем курсе, в 1955 году. А. Н. был тогда деканом механико-математического факультета, а я — секретарем комсомольской организации своего курса. Однажды произошел инцидент: один из моих товарищей, человек горячий и гордый, не вытерпел оскорбления, которое нанес ему взрослый человек, и ответил очень грубо. Стал разбираться вопрос о пребывании моего товарища в университете. Тогда я и пришел к А. Н. и изложил существо дела. А. Н. довольно резко сказал, что это, конечно, безобразный поступок, который требует самого сурового осуждения. Я старался защитить своего друга и говорил, что он, разумеется, виноват, но все товарищи знают его как хорошего и способного человека, и потому не следует его отлучать от университета. Андрей Николаевич повторял свои слова осуждения, но когда мне уже казалось, что дело окончательно проиграно, он вдруг сказал: «Ну, мы его, конечно, не исключим». Андрей Николаевич всегда верил в доброе начало в человеке. Он поддерживал многих, и почти во всех случаях те, кому он оказал поддержку, заняли достойное место в науке.

А. Н. никогда мне не ставил персональных задач. Я участвовал в семинаре А. Н. На нем А. Н. предлагал задачи как бы всем. Одна из них мне показалась очень интересной. После того как я решил ее, Андрей Николаевич стал обсуждать со мной перспективы дальнейшей работы. Часть задач предлагал я, и А. Н. одобрял меня, по поводу другой части высказывал свои сомнения, предлагал множество своих задач в развитие всей тематики. Он как бы приоткрывал завесу и показывал отдаленную перспективу, где виделись и конкретные цели и открывался путь, не имеющий конца.

Однажды А. Н. сказал мне: «Вы не должны иметь обо мне представление как о человеке, который знает только математику; я принадлежу к тем людям, кто имеет собственное мнение более или менее по любому вопросу». Я знал всегда, что А. Н.— математик исключительной широты, но не мог и подозревать, в какой мере безграничным является его кругозор в философии, экономике, политике, географии, в вопросах, связанных с искусством и литературой. Он был при этом очень самобытен, почти всегда непредсказуем. В частности, в своих пристрастиях. Как-то зашла речь о крупнейших писателях XX века. Я задумался и стал перебирать наиболее «престижные» тогда (в середине пятидесятых) имена — Горький, Шолохов, Фолкнер, Роллан, Хемингуэй, Ремарк... Андрей Николаевич без колебаний вершинами мировой литературы нашего века назвал творчество А. Франса и Т. Манна, и это было для меня совершенно неожиданно. А когда речь зашла о поэзии, А. Н. также непредсказуемо для меня выделил 24-летнего тогда Евтушенко.

А. Н. был страстным и неутомимым лыжником, очень любил дальние лыжные переходы. Как-то он попросил пригласить к нему с нашего курса кого-нибудь из сильных лыжников, чтобы сделать особенно дальний переход. На нашем курсе был студент с первым юношеским разрядом, ему передали просьбу А. Н., тот с удовольствием согласился. Поначалу наш сокурсник резвился, убегал, поджидал А. Н., потом уже шел рядом, берег силы, а в конце А. Н. просто нес его лыжи: в долгих лыжных походах (особенно без большой тренировки) иногда наступает такой момент, когда человек еще кое-как может ковылять пешком, а на лыжах идти уже не в состоянии.

Вспоминает кандидат педагогических наук, заведующий сектором ВНИИСиМО Александр Михайлович АБРАМОВ:

— Заочно я познакомился с Андре-

ем Николаевичем, когда учился в седьмом классе. Я прочитал его брошюру «О профессии математика». Написана она и доступно, и ярко, поэтому хорошо помню свои впечатления и даже отдельные задачи. А первая встреча произошла в 1963 году, когда А. Н. вручал грамоты призерам Всероссийской олимпиады.

В том же году была организована сначала первая летняя математическая школа в Красновидово, а затем и ФМШ при МГУ. Мы, ученики самого первого выпускного класса, считали, что нам невероятно повезло: и в летней школе, и в ФМШ А. Н. был нашим учителем. Да и он сам, по-видимому, испытывал особые чувства к первым 19-ти выпускникам ФМШ — спустя многие годы он помнил всех.

В студенческие годы, учась на мехмате МГУ, я работал в интернате преподавателем математики и довольно часто встречался с А. Н. Но все же было полной неожиданностью, когда перед распределением он предложил мне профессионально заниматься школьными проблемами и стать его аспирантом. Естественно, я сразу согласился. Событием было и первое посещение Комаровки.

Свою первую научную работу я выполнил в университете под руководством В. М. Тихомирова. Так что в известной мере с характером школы А. Н. я был знаком, и это оказало большую помощь.

Хотя мне предстояло работать над педагогической диссертацией, тема требовала главным образом размышлений в сфере математики. А. Н. кратко поставил задачу: дал список аксиом евклидовой планиметрии, положенной им в основу школьного курса геометрии, и сказал, что надо на их основе дать точное изложение геометрии, исследовать аксиоматику. Каких-либо инструкций (например, как выстраивать последовательность теорем) и подсказок не было. А. Н.

выделил только наиболее интересующий его результат — теорему об измерении углов — и указал несколько работ, которые полезно прочитать.

Таким образом, он предоставлял полную свободу. И дело ограничивалось очень краткими обсуждениями. Но окончательные результаты А. Н. контролировал, внимательно знакомился с итоговым текстом.

Позднее мы много работали над школьными учебниками. Было несколько периодов по 3—4 месяца ежедневной работы при подготовке очередных изданий. А. Н. очень тщательно следил за текстом. Когда его что-то не удовлетворяло (а это происходило постоянно, вплоть до стадии корректуры), рассматривались многие варианты. В итоге возникали горы черновиков.

На мой взгляд, главное, что давал А. Н. как учитель, научный руководитель, это увлеченность делом и веру в собственные силы. Он умел сделать так, что ученик вырастал много выше того потолка, который сам себе отмерял. Как-то стыдно было не выполнить задания, которое давал А. Н. Может быть, поэтому удавалось сделать многое из того, что ранее казалось невозможным. Очень важно иметь такой пример перед глазами — для А. Н., кажется, не было задач, которые нельзя решить, он все знал.

Мне кажется, что А. Н. в какой-то момент своей жизни (очевидно, в ранней юности) решил, что человек просто обязан быть счастлив и для этого ему нужно то-то и то-то. При этом необходимо, чтобы все виды деятельности, которые выбирает себе человек, его по-настоящему увлекали. И А. Н. удалось построить свою жизнь таким образом: его творческие достижения необычайны, он очень многое умел ценить — любил человеческое общение, природу, музыку, литературу...

Внешне рациональная, размеренная, его жизнь была внутренне динамична, наполнена и интересом ко всему сущему, и глубокими переживаниями. Однажды А. Н. заметил, что по его мнению каждый человек, начиная с определенного момента, продолжает как бы оставаться в том возрасте, для которого наиболее характерно свойственное этому человеку мироощущение. На прямой вопрос: «А вам сколько лет, Андрей Николаевич?» — он ответил: «Четырнадцать».

Публикацию подготовил
А. Б. Сосинский

Внимание!

Дорогие читатели! В новом, 1989 году мы увеличиваем количество страниц в журнале на 25 %. Это позволит нам открыть ряд новых рубрик. Большее внимание будет уделено вопросам космических исследований, астрономии, общим вопросам программирования. На страницах журнала чаще будут появляться произведения художественной литературы.

Для компенсации расходов по увеличению объема журнала цена каждого номера увеличивается на 5 копеек. Новая цена журнала — 45 копеек. К сожалению, решение об увеличении объема и стоимости журнала было утверждено после выпуска каталога «Союзпечати» и начала подписки на 1989 год.

Если вы уже оформили подписку, просим вас в соответствующем отделении «Союзпечати» произвести доплату по 5 копеек за каждый номер.

МОЛНИИ В КРИСТАЛЛЕ

Доктор технических наук
Ю. Р. НОСОВ

Спросите специалиста по электронике — инженера, научного работника, руководителя предприятия: что сегодня самое перспективное и многообещающее в этой области? Восемь из десяти ответят: «Оптоэлектроника!»

Давняя мысль об использовании в информатике не только электрических сигналов (как это предлагает традиционная микроэлектроника), но и сигналов световых, оптических — эта мысль оказалась очень плодотворной. Выяснилось, что благодаря слиянию электроники с оптикой возможности устройств вычислительной техники и связи неизмеримо возрастут: в сотни и тысячи раз повысится их быстродействие, устройства станут более надежными, помехоустойчивыми, миниатюрными.

Все это было понято еще в шестидесятые годы. Так почему же, вправе спросить читатель, многое и сейчас остается по-прежнему лишь обещанием? А дело вот в чем. Чтобы «впрячь» свет в работу, надо научиться обращаться с ним так же свободно и просто, как с электрическим током. Научиться усиливать и преобразовывать световые сигналы, без потерь передавать их из точки в точку, записывать и сохранять. Но прежде всего надо научиться их генерировать. Что бы ни говорилось о важности всех элементов оптоэлектронной системы, именно источник световых сигналов, излучатель, является ее первоосновой, «альфой и омегой» оптоэлектроники. И конечно, нужен не просто любой излучатель, как, например, осветительная лампа, а такой, который по миниатюрности, экономичности, долговечности был бы под стать транзисторам и интегральным схемам.

Очевидно, что решение проблемы излучателя могло быть найдено лишь в сфере полупроводников.

Перенесемся мысленно лет на тридцать назад. В те годы полупроводниковая наука работала на нужды транзисторной техники — ведь именно с этими приборами связывались большие надежды электроники. Первые транзисторы изготавливались из германия, но было ясно, что лучшие результаты могут быть достигнуты на кремнии и на таком новом тогда полупроводнике как арсенид галлия — двухкомпонентном соединении мышьяка и галлия (GaAs). «Кремниевое» направление быстро достигло успехов и с 1960 года стало основой не только транзисторной техники, но и микроэлектроники.

А вот из арсенида галлия транзисторы упорно не желали получаться. И миллионные затраты на создание совершенных монокристаллов GaAs уже готовы были списать в убыток, оправдываясь тем, что «наука требует жертв», но... Не всегда известно, где найдешь, где потеряешь. Вдруг и на этом, «тупиковом», направлении засветилась надежда, причем засветилась в буквальном смысле слова.

В 1956 году обнаружили: при пропускании электрического тока через арсенидогаллиевый диод он начинает излучать!*) Так появились светодиоды. Физики и инженеры буквально набросились на интересный эффект. Тотчас же установили, что полупроводниковый кристалл в светодиоде не раскаляется — значит, ответственна за излучение люминесценция, давно известная ученым как «холодное свечение».

Разобрались и в механизме работы светодиода. Используемый в нем

---

*) Вообще говоря, излучение полупроводникового диода впервые наблюдал в 1927 году наш соотечественник О. В. Лосев, но интенсивность свечения была так ничтожна, что практического применения «эффект Лосева» не получил, был забыт, и через 30 лет все пришлось повторить. Ситуация не столь уж редкая в науке.

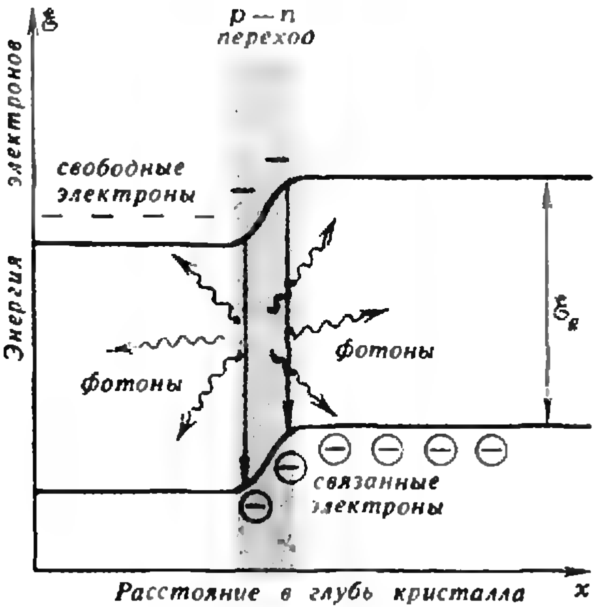


Рис. 1.

кристалл арсенида галлия неоднороден, не все его области одинаковы по свойствам. Легирование различными специальными примесями приводит к тому, что одна половина кристалла (левая на рисунке 1) обогащается подвижными электронами, другая половина (правая) — обедняется. Зато энергия этих электронов в правой половине больше; на границе между двумя частями кристалла (это *p—n*-переход, играющий исключительно важную роль во всей полупроводниковой электронике) энергия изменяется скачкообразно. Этот энергетический барьер «запрещает» электронам «просто так» пересекать *p—n*-переход слева направо. Только когда к кристаллу извне прикладывается электрическое напряжение, барьер несколько понижается, и часть электронов перетекает вправо — происходит инжекция электронов из эмиттера в базу. Вот здесь, поблизости от *p—n*-перехода, и происходит *то, ради чего* мы затеяли это повествование: электрон неожиданно скачком теряет приобретенную энергию, переходя из подвижного состояния в связанное, а отданная им порция энергии может выделяться, в частности, в виде кванта излучения, фотона. Таким образом, энергию электрического тока светодиод преобразовал с некоторым КПД в энергию излучения!

Картина такая, будто тяжелый камень вкатывают на вершину горы, откуда он летит в пропасть и, ударившись на дне ее о такие же камни, высекает искру. От того, с какой высоты упадет камень, зависит цвет свечения искры — чем шире энергетический зазор между подвижным и связанным состояниями электрона (его называют шириной запрещенной зоны полупроводника $\mathscr{E}_g$), тем больше энергия кванта и тем короче длина волны излучения. С ростом $\mathscr{E}_g$ цвет свечения смещается по спектру в направлении к сине-фиолетовому участку. При большом токе, пропускаемом через светодиод, «камнепад» становится столь интенсивным, что отдельные «искры» сливаются в непрерывное свечение.

На этом, пожалуй, стоит оборвать иносказание, памятуя, что если метафора и способствует познанию явления, то отнюдь не тем, что она с этим явлением совпадает. Истинная картина квантовых переходов электронов, вызывающих генерацию фотонов, ни к каким другим процессам не может быть сведена, в чем, собственно, и нет необходимости, потому что, будучи понятой, эта картина столь же проста и наглядна, как и другие физические процессы (во всяком случае, не сложнее реального камнепада в горах).

В те годы, о которых идет речь, теория люминесценции уже была хорошо разработана и позволяла не только рассчитывать процессы в кристаллах с известными свойствами, но и предсказывать новые эффекты. А рассчитывать и предсказывать было что.

Дело в том, что первые GaAs-светодиоды излучали в невидимой инфракрасной области спектра. Конечно, такое излучение воспринимается различными фотоприемниками и находит много важных технических применений. Но все же... Хотелось, чтобы светодиоды работали и для глаза — этого самого главного инструмента человека в постижении окружающего мира. Хотелось, чтобы светодиоды засветились всеми цветами радуги, ярко и чисто. Значит, необходимо было найти другие подходящие полупроводники с большей, чем у арсенида галлия, шириной запрещенной зоны. И как всегда, когда физические механизмы поняты и задача четко сформулирована, средства ее решения нашлись.

Вскоре*) уже никого не удивляло, что светодиоды на фосфиде галлия интенсивно излучают красный или зеленый свет в зависимости от вида вводимых в кристалл примесей. Использование тройного соединения галлия, мышьяка и фосфора позволило получать любое свечение в интервале от темно-красного до оранжевого и почти желтого. Карбид кремния засветился в желто-зеленой и голубой областях спектра, правда очень-очень слабо. И только синий цвет, как метерлинковская ускользающая синяя птица, все никак не дается в руки ученым. А самыми яркими оказались красные светодиоды — именно под «алыми парусами» оптоэлектроника уверенно «вплыла» в технику и в наш быт.

Во многих устройствах используются наборы из большого числа светодиодов, размещаемых в определенном порядке на общем щитке. По команде, поступающей от устройства управления, из отдельных светящихся точек выписывается нужная цифра, буква, график. Это навело на естественную мысль: зачем пластину полупроводника разрезать на отдельные кристаллики, а потом, уже в составе светодиодов, снова собирать их вместе? Так появились знакосинтезирующие индикаторы — внутри общей пластмассовой оболочки размещается несколько кристаллов либо один кристалл с несколькими точками, светящимися независимо друг от друга.

Светодиоды и индикаторы, появившиеся в промышленности в конце 60-х годов, нашли широчайшее применение. Сегодня их мировое производство приближается к 10 миллиардам(!) штук в год. В электронных часах и калькуляторах, на приборных щитках робототехнических комплексов и гибких производственных систем, в кнопках и клавишах самой различной радио- и электротехнической аппаратуры, на пультах управления самолетов и подводных лодок — где только не вспыхивают эти ярко-красные светлячки и цифры.

Правда, возможности светодиодов ограничены, они используются лишь в устройствах индивидуального пользования при небольших расстояниях от индикатора до глаза. Но уже поговаривают о том, чтобы некоторые марки автомашин оснастить стоп-сигналами из наборов сверхинтенсивных светодиодов. Конечно, до светодиодного освещения квартир далеко, хотя кто знает «что день грядущий нам готовит?».

Однако пора и дух перевести, попробуем слегка подытожить. Все, о чем мы здесь говорили, касалось, говоря техническим языком, применения светодиодов в устройствах отображения информации. С их помощью информация, рождающаяся в недрах ЭВМ в виде электрических импульсов, превращается в зримо воспринимаемую и таким образом реально доходит до человека. Нужны, важны такие устройства? Несомненно! Но ведь это только часть тех проблем, в решении которых должна (и может) оптоэлектроника помочь информатике. Ведь еще остаются проблемы переработки, передачи, хранения информации. Какую лепту может здесь внести светодиод? Увы... Дифирамбы невольно затихают, яркая радуга цветов блекнет...

Во-первых, как уже отмечалось, интенсивность светодиодов очень мала — то, что чувствует глаз, не всегда улавливает фотоприемник, да еще удаленный на некоторое расстояние. Во-вторых, оказалось, что излучение светодиода не монохроматично — о количественной оценке этого недостатка мы поговорим ниже, а сейчас лишь укажем, что такое излучение, захватывающее целую полосу длин волн, не годится для многих оптоэлектронных устройств.

---

*) Так, оглядываясь назад, мы говорим сегодня, но вообще-то за этим «вскоре» стоит около десятка лет тончайших аналитических исследований, синтеза сверхчистых полупроводников, разработок новых конструкций и технологий...

И наконец, главное — светодиод светит почти равномерно во все стороны, сконцентрировать его энергию в одном, остронаправленном луче невозможно. Простейшую для электрических цепей задачку — передать сигнал из точки A в точку B и только в нее — светодиод решить не может. Бóльшая часть световой энергии тратится не просто бесполезно, она «засоряет» окружающее пространство, происходит утечка информации. Светодиод — этот беспечный транжир и мот, болтун, не способный держать язык за зубами,— явно не пара информатике, где все точно рассчитано и выверено, и на каждый бит отпущено ровно столько энергии, сколько необходимо.

К счастью, светодиоду как излучателю есть прекрасная альтернатива — это лазер, характеризующийся высокоинтенсивным почти монохроматическим остронаправленным излучением. Сделаем здесь небольшое отступление и поговорим о количественном содержании этих свойств лазера.

Направленность характеризуется телесным углом α, внутри которого лежат генерируемые излучателем лучи; если лучи расходятся, симметрично удаляясь от некоторой оси (направление излучения), то для оценки расходимости используют плоский угол, измеряемый как обычно — в радианах, градусах, минутах.

Строго монохроматических волн в природе не бывает, поэтому для характеристики приближения реального волнового потока к идеальному говорят о степени монохроматичности. Количественно это — отношение полосы длин волн генерируемого излучения $\Delta\lambda$ к длине волны в центре полосы λ_0; чем меньше $\Delta\lambda/\lambda_0$, тем совершеннее лазер. Для примера укажем, что типичный газовый — гелий-неоновый — лазер обеспечивает $\alpha < 1'$ и $\Delta\lambda/\lambda_0 < 0{,}000001$. Такой поток вполне подходит для устройств вычислительной оптоэлектроники — этот термин в последнее время используют для характеристики того направления, которое связано с обработкой информации, представленной в виде оптических сигналов.

Вроде бы все хорошо, однако не будем спешить с окончательным заключением. Представим себе все тот же гелий-неоновый лазер с его почти полуметровой разрядной стеклянной трубкой и с высоковольтным источником питания массой в несколько килограммов. А теперь положим рядом интегральную схему размером с почтовую марку, которая содержит около миллиона (!) транзисторов и требует всего лишь 5-ти вольтового питания. Совместимы ли эти два изделия? Согласитесь, не очень. И эта несовместимость подтвердилась с полной определенностью — многочисленные попытки использовать лазеры в микроэлектронных вычислительных устройствах фактически провалились. Вот уже поистине «в одну упряжку впрячь не можно вола и трепетную лань».

Очевидно, что достигнуть совместимости можно лишь в одном-единственном варианте — если лазер, как и микросхемы, будет полупроводниковым.

...История создания полупроводникового лазера весьма характерна для научных открытий XX века. В 1960 году почти одновременно были изобретены твердотельный (рубиновый) и газовый (гелий-неоновый) лазеры, а вскоре после этого ученые предсказали возможность создания и полупроводникового лазера. По аналогии с другими полупроводниковыми приборами такому лазеру предрекали сверхминиатюрность, долговечность, стойкость к внешним воздействиям, низкую стоимость, высокую воспроизводимость параметров и возможность их изменения в очень широких пределах. Создать подобный прибор было очень заманчиво, и в ведущих физических лабораториях мира буквально наперегонки началась охота за полупроводниковым лазером — каждому хотелось накрыть красивую бабочку своим сачком.

А когда теоретики довольно точно просчитали, какова должна быть квантовая структура исходного кристалла, тогда круг полупроводников, «подозреваемых» в возможной причастности к лазерному эффекту, резко сузился. Судьба «бабочки» была предрешена... В канун 1963 года почти одновременно в лабораториях США и СССР были созданы первые полупроводниковые лазеры.

Как и при экспериментах со светодиодами, в пластине арсенида галлия (снова этот полупроводник явился «пионером») изготавливали p—n-переход; отличие заключалось лишь в том, что при легировании вводилось гораздо больше примесей, вследствие чего образовывалось и больше свободных электронов. Затем, нажимая на пластину острием ланцета, выкалывали из нее крошечные квадратные кристаллики. Пластина колется строго по кристаллографическим плоскостям, поэтому боковые противоположные грани кристаллика оказываются плоскопараллельными и зеркальными; эти два зеркала образуют резонатор, необходимый для лазерной генерации. Затем кристаллик нижней гранью напаивался на массивную медную подложку (для теплоотвода), к верхней грани присоединялся второй, более тонкий электрод — структура готова для исследований.

При пропускании тока кристалл начинал генерировать инфракрасное излучение, причем, как и положено светодиоду, слабо и во все стороны. Но как только ток увеличивали до некоторого значения (его назвали пороговым током), картина существенно менялась — резко возрастала мощность излучения, и интенсивный свет вырывался с боковых граней из тех мест (полосок), где плоскость p—n-перехода пересекает грани резонатора. Исследовали спектр излучения и оказалось, что полоса генерируемых волн резко сжалась. Больше сомнений не оставалось — это лазер!

Быстро разобрались в механизме его работы. Так же как и в светодиоде, приложенное извне электрическое напряжение «загоняет» электрон на «энергетическую горку», только «горка» эта чуть повыше, а количество электронов намного больше. «Накачанные» электроны скапливаются около p—n-перехода (здесь образуется активная зона) и, «падая с горки», порождают кванты излучения. Но на этом аналогия со светодиодом кончается. Световая волна, распространяясь вдоль плоскости p—n-перехода, отражается от зеркальных граней и, многократно проходя через активную зону, вынуждает электроны «упасть с горки». Получается, что огромное количество электронов одновременно и строго одинаковым способом выполняют предписанный им квантовый переход (на рисунке 1 этот переход обозначен черной стрелкой). Поэтому-то луч лазера имеет высокую степень монохроматичности, а также вполне определенную поляризацию. По механизму своего возникновения такое излучение называют вынужденным, стимулированным, индуцированным (это все — синонимы), тогда как излучение светодиода — спонтанное (случайное по направлению и поляризации и в какой-то степени — по длине волны).

О новом приборе заговорили. Казалось очевидным, что вот-вот в оптоэлектронике начнутся большие перемены. Но время шло, а реального применения хоть в какой-нибудь аппаратуре только что родившийся лазер не находил. И вскоре эйфория сменилась удивленным разочарованием, в которое пока еще не хотелось верить.

Лазер работал лишь при низкой, «азотной» температуре (—196 °C) и только при условии, что ток пропускали короткими редкими импульсами. При этом долговечность его (как-то неловко даже употреблять здесь этот термин) не превышала нескольких десятков часов. Во всех других случаях он мгновенно перегревался и выходил из строя. Оказалось также, что по степени монохроматичности он лишь в 10—20 раз был лучше светодиода ($\Delta\lambda/\lambda \approx 0{,}005$ против 0,05 у светодиода) и в тысячи раз хуже газового лазера. Да и по угловой расходимости ($\alpha \approx 30°$) полупроводниковый лазер скорее походил

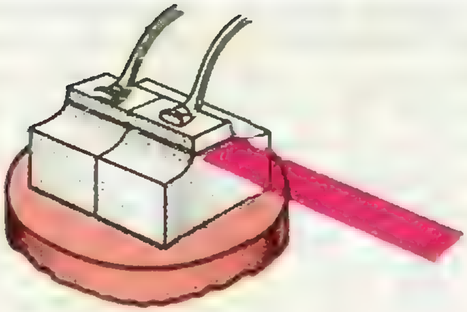


Рис. 2.

на улучшенный светодиод. «Какой же это лазер?» — воскликнули обманутые в своих ожиданиях «оптоэлектронщики-примененцы», обиженно прекратили эксперименты с новым прибором и вновь обратились к теоретизированию по поводу ослепительного будущего «идеальной» оптоэлектроники.

Самое страшное заключалось в том, что недостатки полупроводникового лазера получили вполне строгое и, казалось бы, непреодолимое физическое обоснование. Электроны, инжектируемые $p—n$-переходом, не *желали задерживаться* в тонкой активной зоне, а разбегались по всему кристаллу; то же происходило и со световой волной. Потерянные» электроны и кванты, не давая вклада в лазерный эффект, лишь бесполезно разогревали кристалл. Как удержать этих неугомонных переносчиков электрического тока и светового излучения в какой-то одной части кристалла? Ведь заслонку или экран внутрь не введешь — это все-таки монокристалл, в решетке которого атомы располагаются в идеальном порядке. Когда начинали погоню за «*красивой бабочкой*», обо всем этом как-то не думалось. А теперь стало казаться, что «бабочке» уготовлена судьба заспиртованного экспоната кунсткамеры физических диковин.

И все-таки — в который раз! — изворотливость человеческого разума восторжествовала. Дело решили гетероструктуры. Если в кристалле арсенида галлия часть атомов галлия заменить на атомы алюминия, то структура кристаллической решетки совершенно не изменится — настолько атомы этих двух элементов идентичны по физическим свойствам. Однако при этом образуется новый полупроводник — арсенид галлия-алюминия, у которого ширина запрещенной зоны больше, чем у чистого арсенида галлия. Граница между двумя этими полупроводниками внутри единого монокристалла и представляет собой гетеропереход; в этой области имеется энергетический барьер и одновременно с ним образуется «оптический барьер» — граница раздела двух полупроводников с разными показателями преломления. Активная зона с бо́льшим показателем преломления, «ограненная» гетерограницами, стала идеальной ловушкой для электронов и световодом для света.

А дальше слово было за «Ее Величеством Технологией». Прошло не так уж много времени, и научились внутри монокристалла изготавливать пары гетеропереходов, расположенных параллельно друг другу на расстоянии, выдержанном с фантастической точностью в несколько атомных слоев. Пороговый ток снизился до десятков миллиампер, верхняя граница рабочей температуры достигла 100 °С, долговечность (правда, у отдельных образцов) достигла десятков лет. С этого начался «Ренессанс» полупроводниковых лазеров. Изобретения и усовершенствования посыпались как из рога изобилия. Надо еще больше снизить пороговый ток? Пожалуйста, используйте структуру, в которой активная зона «зажата» гетеропереходами не только сверху и снизу, но и с боков. Тончайшая микронная нить активного полупроводника возбуждается током всего в 1 мА! Надо сузить *спектр излучения? И это пожа*луйста. Если одну из гетерограниц сделать волнистой, то избирательность резонатора резко возрастает и степень монохроматичности становится такой же, как у газового лазера. Хочется продвинуться еще дальше по этому пути — используйте структуру с двумя «связанными» кристаллами (рис. 2).

(Окончание см. на с. 31)

РАЗБИЕНИЕ ЧИСЕЛ

Ф. В. ВАЙНШТЕЙН

Разбиением называется представление натурального числа в виде суммы натуральных слагаемых, а сами слагаемые — *частями разбиения*. Порядок слагаемых не играет роли; так разбиения $3=1+2$ и $3=2+1$ не различаются. Мы будем записывать разбиения, перечисляя их части через запятую в невозрастающем порядке. Например, разбиение $4=2+1+1$ записывается как $(2, 1, 1)$.

Пусть $p(n)$ обозначает количество всех разбиений натурального числа n. Для небольших n легко вычислить $p(n)$, просто выписав все разбиения. Например, $p(5)=7$. Вот все 7 разбиений числа 5: (5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1). Однако получить таким способом, скажем, $p(100)=190\,569\,292$ без помощи компьютера немыслимо. Между тем $p(100)$ было известно еще в прошлом веке. Мы познакомим вас со многими интересными свойствами разбиений и научим находить $p(n)$, не выписывая всех разбиений числа n.

Задача вычисления $p(n)$ имеет почтенный возраст. Впервые она была сформулирована Лейбницем в 1654 году, а в 1740 — предложена немецким математиком Филиппом Ноде Леонарду Эйлеру. Занимаясь разбиениями, Эйлер открыл целый ряд их свойств, среди которых главное место занимала знаменитая «пентагональная теорема». С исследований Эйлера начинается история теории разбиений, в развитии которой принимали участие крупнейшие математики последующих поколений.

Две теоремы Эйлера

Изучение функции $p(n)$ Эйлер начинает с рассмотрения бесконечного произведения

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots\ldots(1+x^k+x^{2k}+\ldots)\ldots$$

Каждый член произведения получается в результате умножения мономов, взятых по одному из каждой скобки. Если в первой скобке взять x^{m_1}, во второй — x^{2m_2} и т. д., то их произведение будет равно $x^{m_1+2m_2+3m_3+\ldots}$. Значит, после раскрытия скобок получится сумма мономов вида $x^{m_1+2m_2+3m_3+\ldots}$.

Сколько раз в этой сумме встретится x^n? Столько, сколькими способами можно представить n как сумму $m_1+2m_2+3m_3+\ldots$ Каждому такому представлению отвечает разбиение числа n на m_1 единиц, m_2 двоек и т. д. Так получаются все разбиения, так как каждое из них, конечно, состоит из нескольких единиц, нескольких двоек и т. д. Поэтому коэффициент при x^n равен числу разбиений $p(n)$.

Посмотрим теперь на выражения в скобках. Каждое из них — бесконечная геометрическая прогрессия. По формуле суммирования $1+x+x^2+x^3+\ldots=1/(1-x)$, $1+x^2+x^4+\ldots=1/(1-x^2)$ и т. д.

Теперь наш результат можно записать так:

$$p(0)+p(1)x+p(2)x^2+p(3)x^3+\ldots=\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots}. \qquad (1)$$

Эта формула была открыта Эйлером в 1740 году. Ряд, стоящий в левой части, называется *производящей функцией последовательности чисел* $p(0)$, $p(1)$, $p(2)$, ... Производящая функция позволяет компактно записать информацию о последовательности, хотя извлечение этой информации из производящей функции порой требует большого искусства. Сейчас вы увидите, как это делал Эйлер.

Обозначим через $d(n)$ количество разбиений числа n на различные слагаемые, а через $l(n)$ — на нечетные. Например, среди выписанных выше разбиений числа 5 различные части имеют (5), (4,1) и (3,2), а нечетные — (5), (3,1,1) и (1,1,1,1,1). Значит, $d(5)=l(5)=3$.

Такие же рассуждения, как при выводе формулы (1), позволяют выписать производящие функции последовательностей $d(n)$ и $l(n)$:

$$d(0)+d(1)\cdot x+d(2)\cdot x^2+\ldots=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots,$$

$$l(0)+l(1)\cdot x+l(2)\cdot x^2+\ldots=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\ldots$$

Упражнение 1. Докажите эти формулы.

Воспользуемся формулой $1+x^k=(1-x^{2k})/(1-x^k)$, верной при всех k:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ldots=\frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\ldots$$

В правой части равенства все числители сокращаются со знаменателями, содержащими x в четной степени. Поэтому в знаменателе останутся только сомножители вида $1-x^{2k-1}$. Итак,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)=\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\ldots \qquad (2)$$

Значит, производящие функции последовательностей $d(n)$ и $l(n)$ совпадают! Мы доказали *теорему Эйлера:* $d(n)=l(n)$. Это доказательство хорошо иллюстрирует силу метода производящих функций.

Но вернемся к вычислению $p(n)$. Изучая производящую функцию последовательности $p(n)$, Эйлер сосредоточил внимание на произведении $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots$, т. е. на знаменателе правой части формулы (1). Раскрывая в нем скобки, Эйлер получил удивительный результат:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots=1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-x^{35}-x^{40}+\ldots$$

Показатели в правой части — *пятиугольные числа*, т. е. числа вида $(3q^2\pm q)/2$, а знаки при соответствующих мономах равны $(-1)^q$. Исходя из этого наблюдения, Эйлер предположил, что должна быть верна

Пентагональная теорема:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)=\sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{\frac{3q^2+q}{2}}$$

Пентагональная теорема оказалась «крепким орешком» — Эйлер сумел доказать ее лишь 14 лет спустя. Эта теорема позволяет сравнительно просто вычислять значения $p(n)$. Вот как это делается.

Умножим обе части равенства (1) на $\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ и воспользуемся пентагональной теоремой:

$$(p(0)+p(1)\cdot x+p(2)\cdot x^2+\ldots)\times$$
$$\times(1-x-x^2+x^5+x^7-$$
$$-x^{12}-x^{15}+\ldots)=1.$$

Раскрыв скобки в левой части, получим, что коэффициенты при ненулевых степенях x равны нулю. Отсюда мы получаем замечательную *формулу Эйлера*, позволяющую последовательно находить числа $p(n)$:

$$p(n)=p(n-1)+p(n-2)-p(n-5)-$$
$$-p(n-7)+\ldots$$
$$\ldots+(-1)^{q+1}\left(p\left(n-\frac{3q^2-q}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+p\left(n-\frac{3q^2+q}{2}\right)\right).$$

(Мы считаем, что $p(n)=0$ при $n<0$.)

Упражнение 2. Найдите $p(10)$.

Пользуясь формулой Эйлера, можно составить таблицу значений $p(n)$ для $n\leqslant 200$, что и проделал в начале нашего века известный английский специалист по комбинаторике майор Мак-Магон. В то время это была наиболее полная таблица чисел $p(n)$.

Итак, мы сформулировали две теоремы, одну из которых — $d(n)=l(n)$ — доказали. Согласитесь, что при всей элегантности этого доказательства, оно все же оставляет чувство неудовлетворенности. Два множества разбиений — на нечетные и на неравные части — неожиданно оказались состоящими из одинакового числа элементов, но причина этого равенства осталась скрытой от нас. Хотелось бы думать, что существует какой-то естественный способ каждому элементу одного множества ставить в соответствие элемент другого.

Соответствия Глэйшера и Сильвестра

Приведем еще два доказательства теоремы Эйлера: $d(n)=l(n)$.

Первое соответствие между разбиениями на различные слагаемые и разбиениями на нечетные слагаемые строится так:

Каждую часть разбиения нужно поделить на максимально возможную степень двойки. Частное будет нечетным числом и нужно включить это число в новое разбиение столько раз, каков делитель.

Например, разбиению (6, 2, 1) соответствует разбиение (3, 3, 1, 1, 1). Это остроумное соответствие придумано в конце XIX века английским математиком Дж. Глэйшером.

Чтобы доказать взаимную однозначность соответствия Глэйшера, достаточно построить обратное соответствие между разбиениями с нечетными частями и разбиениями с неравными частями. Вот это соответствие:

Пусть в разбиении некоторая нечетная часть r встречается k раз. Запишем k в виде суммы различных степеней двойки $k=2^{a_1}+2^{a_2}+\ldots,\ a_1>a_2>\ldots$ *и заменим* $(\ldots r,\ r,\ \ldots,\ r,\ \ldots)$ *(k раз) на* $(\ldots 2^{a_1}r,\ 2^{a_2}r,\ \ldots)$.

То, что получится, будет разбиением с различными частями. Например, разбиение (5,5,5,1,1,1,1,1,1) соответствует разбиению (10,5,4,2), поскольку число пятерок равно $3=2^1+2^0$, а число единиц равно $6=2^2+2^1$.

Упражнения

3. Докажите, что в результате второго преобразования получается разбиение с различными частями.

4. Докажите, что если сначала выполнить преобразование Глэйшера, а затем обратное, то получится исходное разбиение.

Существует другое, не менее интересное и совершенно неожиданное доказательство теоремы Эйлера, принадлежащее американскому математику XIX века Дж. Сильвестру. Вот конструкция Сильвестра: пусть имеется разбиение числа n на нечетные части: $(2k_1+1,\ 2k_2+1,\ \ldots,\ 2k_q+1)$, где $k_1\geqslant k_2\geqslant\ldots\geqslant k_q$. На листе клетчатой бумаги в некотором ее узле поставим точку x_1. Справа от x_1 в узлах поставим k_1 точек и столько же в узлах, расположенных под точкой x_1. Затем то же проделаем с числом k_2, взяв в качестве исходной точку x_2, расположенную в следующем за точкой x_1 по диагонали направо вниз уз-

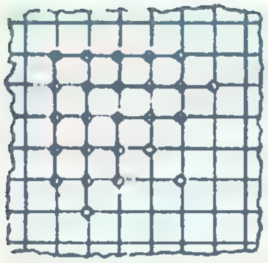


Рис. 1.

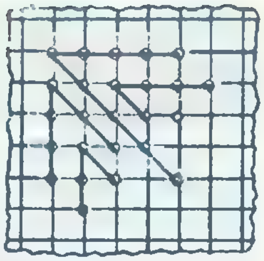


Рис. 2.

ле, и т. д., пока не дойдем до числа k_q.

Например, разбиению на нечетные части (9, 9, 5, 1, 1) числа 25 будет отвечать картинка, изображенная на рисунке 1. Она состоит из симметричных относительно диагонали уголков, так что в самом верхнем уголке $2k_1+1$ точек, в следующем $2k_2+1$ точек и т. д., а всего точек будет n. Теперь проведем на той же картинке линии так, как показано на рисунке 2, подсчитаем количество точек на каждой из этих линий и образуем из полученных таким образом чисел разбиение. Оказывается, *все части этого разбиения различны.*

Упражнение 5. Докажите это утверждение.

В нашем примере получится разбиение (9,6,5,4,1). Подумайте, как построить по разбиению на различные части разбиение на нечетные, т. е. восстановить по такому разбиению исходную симметричную картинку.

Отступление: решение задачи М1065

В этом разделе используется более сложная техника, чем в остальной части статьи. При желании вы можете пробежать его, не вникая в детали, и продолжить чтение со следующего раздела. Итак, займемся решением задачи М1065 из «Задачника «Кванта» (1987, № 9). Напомним ее формулировку.

Будем рассматривать векторы (x, y) с целыми неотрицательными координатами, причем хотя бы одна из координат отлична от 0. Назовем такой вектор образующим, если $|x-y|=1$.

а) Докажите, что рассматриваемый вектор (x, y) можно представить в виде суммы различных образующих (или он сам — образующий) тогда и только тогда, когда величина $k(x, y)=x+y-(x-y)^2$ неотрицательна.

б) Докажите, что число $N(x, y)$ различных (с точностью до порядка) представлений вектора (x, y) в виде суммы различных образующих зависит только от числа $k=k(x, y)$. Найдите $N(13, 18)$.

Решение задачи начнем с того, что найдем общий вид целочисленных решений неравенства $k(x, y)\geqslant 0$. Числа $x+y$ и $x-y$ имеют одинаковую четность, поэтому $k(x, y)$ при любых целых x, y — четное число. Следовательно, для любого целого $m\geqslant 0$ достаточно найти целочисленные решения уравнения $x+y-(x-y)^2=2m$. Положим $x-y=q$. Тогда $x+y=2m+q^2$. Из этих двух равенств немедленно получаем:

$$(x, y)=(m+q(q+1)/2,\ m+q(q-1)/2), \tag{3}$$

где q — любое целое число, а $m\geqslant 0$.

Смысл чисел m и q станет более наглядным, если представлять себе векторы вида (3) при $m=0$ как точки с целыми координатами параболы $k(x, y)=0$, лежащей в плоскости (x, y). (Вы понимаете, почему это парабола?) Тогда полученные нами целочисленные решения неравенства $k(x, y)\geqslant 0$ показывают, что все точки с целыми координатами, лежащие на параболе $k(x, y)=0$ и внутри нее, получаются сдвигами целых точек этой параболы на векторы (m, m) (рис. 3). Удобно считать, что число m ($m=0, 1, 2, \ldots$) — номер параболы, на которой лежит точка (x, y), а $q=x-y=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ — номер точки на этой параболе.

Поскольку условия задачи симметричны относительно перестановки координат векторов, достаточно доказать все утверждения для таких векторов (x, y), что $x\geqslant y$, т. е. для векторов вида (3) с $q\geqslant 0$.

Докажем достаточность условия в пункте а) задачи. По формуле суммы арифметической прогрессии

$$1+2+\ldots+(q-1)+m+q= =m+q(q+1)/2;$$

$$0+1+\ldots+q-2+m+(q-1)= =m+q(q-1)/2.$$

Поэтому формулы $(x, y)=(1, 0)+(2, 1)+\ldots+(q-1, q-2)+(m+q, m+q-1)$ при $q>0$ и $(m, m)=(1, 0)+(m-1, m)$ при $q=0$, $m>0$ дают представления (x, y) в виде суммы различных образующих.

Доказать необходимость условия тоже несложно. Пусть

$$(x, y)=(r_1, r_1-1)+\ldots+(r_a, r_a-1)+(s_1, s_1+1)+\ldots(s_b, s_b+1)$$

— представление вектора (x, y) с $x\geqslant y$ в виде суммы различных образующих, где

$$r_1>r_2>\ldots>r_a>0, \quad s_1>s_2>\ldots>s_b\geqslant 0. \tag{4}$$

Для такого вектора

$$x=r_1+\ldots+r_a+s_1+\ldots+s_b,$$

$$y=r_1+\ldots+r_a-a+s_1+\ldots+s_b+b,$$

поэтому $x-y=a-b$. Положим $q=x-y$ и

$$m=(r_1-q)+(r_2-(q-1))+\ldots$$
$$\ldots+(r_q-1)+r_{q+1}+\ldots+r_a+$$
$$+s_1+\ldots+s_b=x+y-q(q+1)/2$$

(здесь мы снова воспользовались формулой суммы арифметической прогрессии). Из неравенств (4) следует, что $r_a\geqslant 1$, $r_{a-1}\geqslant 2$, $r_{a-2}\geqslant 3$, ... и вообще $r_i\geqslant q-i+1$. Поэтому $m\geqslant 0$, т. е. (x, y) — вектор вида (3), что и требовалось.

В геометрических терминах утверждение б) означает, что число $N(x, y)$ зависит лишь от номера m параболы и не зависит от номера q точки на параболе.

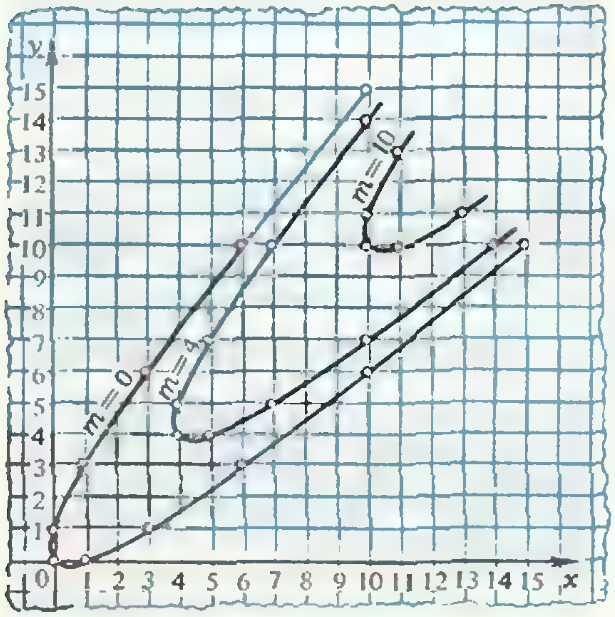


Рис. 3.

Пусть $T(m, q)$ — множество представлений вектора (3) в виде суммы различных образующих и $t(m, q)$ — число таких представлений. Задача будет решена, если мы докажем, что для любого целого q имеет место равенство $t(m, q)=t(m, q-1)$ (это и значит, что $t(m, q)$, а вместе с ним $N(x, y)$, не зависит от q). Мы отождествили выше множество $T(m, q)$ с множеством таких пар последовательностей, удовлетворяющих неравенствам (4), что $r_1+\ldots+r_a+s_1+\ldots+s_b=m+q(q+1)/2$ при $q=a-b$. Такую пару мы будем записывать в виде $(r_1, \ldots, r_a | s_1, \ldots, s_b)$.

Рассмотрим отображение φ множества $T(m,q)$ в множестве $T(m, q-1)$, заданной формулой

$$\varphi(r_1, \ldots, r_a | s_1, \ldots, s_b)=\begin{cases}(r_1-1, \ldots, r_a-1 | s_1+1, \ldots, s_b+1, 0), & \text{если } r_a>1,\\ (r_1-1, \ldots, r_{a-1}-1 | s_1+1, \ldots, s_b+1), & \text{если } r_a=1.\end{cases}$$

Упражнение 6. Проверьте, что $\varphi(r_1, \ldots, r_a | s_1, \ldots, s_b)\in T(m, q-1)$.

Чтобы доказать, что φ — взаимно однозначное отображение, построим обратное отображение $\psi: T(m, q-1)\to T(m, q)$, прочитав правило, задающее φ, слева направо:

$$\psi(r_1, \ldots, r_a | s_1, \ldots, s_b)=\begin{cases}(r_1+1, \ldots, r_a+1, 1 | s_1-1, \ldots, s_b-1), & \text{если } s_b>0,\\ (r_1+1, \ldots, r_a+1 | s_1-1, \ldots, s_{b-1}-1), & \text{если } s_b=0.\end{cases}$$

Построенные отображения взаимно обратны, поэтому φ — взаимно однозначное соответствие. Значит, $t(m, q)=t(m, q-1)$, что и утверждалось.

Чтобы научиться вычислять значения $N(x, y)$, установим связь между числами $t(m, q)$ и $p(m)$.

Утверждение: $t(m, q)=p(m)$. Мы уже знаем, что $t(m, q)=t(m, 0)$, поэтому достаточно доказать, что $t(m, 0)=p(m)$. Воспользуемся простым и полезным графическим средством, называемым *диаграммой Юнга раз-*

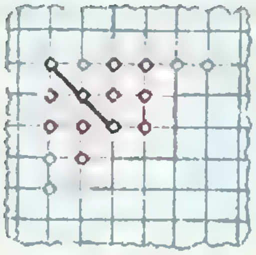


Рис. 4.

биения. Рассмотрим, например, разбиение (6, 4, 4, 2, 1). Его диаграмма Юнга изображена на рисунке 4 (в первой строчке стоят 6 точек, во второй — 4, в третьей — 4, в четвертой — 2, в пятой — 1). Всякое разбиение можно изобразить в виде диаграммы Юнга и по всякой диаграмме Юнга — записать разбиение.

Проведем на диаграмме Юнга диагональ — черная линия на рисунке 4. Пусть r_1 — число точек в первой строке, лежащих на диагонали и справа от нее, r_2 — число точек второй строки, лежащих на диагонали и справа от нее, и т. д.; s_1 — число точек первого столбца под диагональю, s_2 — число точек второго столбца под диагональю и т. д. Поставим в соответствие диаграмме Юнга, изображающей разбиение числа m, пару последовательностей

$$(r_1, r_2, \ldots | s_1, s_2, \ldots),$$

$$r_1+r_2+\ldots+s_1+s_2+\ldots=m,$$

т. е. элемент множества $T(m,0)$. Например, диаграмме на рисунке 4 соответствует пара $(6, 3, 2 | 4, 2, 0)$. Зная пару последовательностей, можно легко восстановить диаграмму Юнга. Следовательно, мы установили взаимно однозначное соответствие между множеством разбиений и множеством $T(m, 0)$. Утверждение доказано.

Теперь ничего не стоит ответить и на последний вопрос задачи — о значении $N(13, 18)$. Поскольку $13=3+5\cdot 4/2$, $18=3+6\cdot 5/2$, точка $(13, 18)$ лежит на третьей параболе. Значит, $N(13, 18)=t(3, 0)=p(3)=3$.

Следующие упражнения — на применение диаграмм Юнга.

Упражнения

7. Число разбиений n не более чем с k частями, равно числу разбиений n с частями, не превосходящими k. Подсказка: отразите диаграмму Юнга относительно диагонали.

8. Число разбиений n с различными нечетными частями равно числу разбиений n, диаграмма Юнга которых симметрична относительно диагонали. Подсказка: вспомните соответствие Сильвестра.

Формула Гаусса — Якоби

Решая задачу М1065, мы проделали большую работу. Нельзя ли снова воспользоваться производящими функциями и извлечь из равенства $t(m, q)=p(m)$ какое-нибудь красивое тождество?

$N(x, y)$ — это число способов, которыми можно представить вектор (x, y) как сумму различных образующих вида $(k, k-1)$ и $(k-1, k)$. Рассуждая так же, как при выводе формулы производящей функции числа разбиений с различными частями, мы запишем производящую функцию для $N(x, y)$ (это ряд от двух переменных u и v):

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^k)(1+u^kv^{k-1})=$$
$$=\sum_{x,y=0}^{\infty}N(x, y)u^xv^y.$$

Поскольку $N(x, y)=t(m, q)$, где $x=m+q(q+1)/2$, $y=m+q(q-1)/2$, равенство можно продолжить:

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}t(m, q)u^mv^m\right)\times$$
$$\times u^{q(q+1)/2}v^{q(q-1)/2}.$$

Воспользуемся теперь тем, что $t(m, q)=p(m)$ и продолжим равенство:

$$=\sum_{q=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}p(m)u^mv^m\right)\times$$
$$\times u^{q(q+1)/2}v^{q(q-1)/2}.$$

Ряд, стоящий в скобках,— производящая функция чисел разбиения $p(m)$, которую мы знаем (формула (1)), поэтому продолжаем:

$$=\prod_{k=1}^{\infty}(1-u^kv^k)^{-1}\sum_{q=-\infty}^{\infty}u^{q(q+1)/2}v^{q(q-1)/2}.$$

Теперь приравняем левую часть первого и правую часть последнего равенства, умножив обе части на $\Pi(1-u^kv^k)^{-1}$. Получим окончательный результат:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+u^{k-1}v^k)(1+u^kv^{k-1})(1-u^kv^k)=$$

$$= \sum_{q=-\infty}^{\infty} u^{q(q+1)/2} v^{q(q-1)/2}.$$

Это тождество — цель наших преобразований. Оно называется *формулой Гаусса—Якоби*. Из этого замечательного тождества с двумя переменными можно получить много разных тождеств с одной переменной.

Упражнение 9. Подставьте в формулу Гаусса—Якоби $u=-t$, $v=-t^2$ и получите пентагональную теорему Эйлера.

Теперь подставим в формулу Гаусса—Якоби $u=v=-t$. В левой части получится:

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{2k-1})^2(1-t^{2k})= \\ =\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^{2k-1})\prod_{k=1}^{\infty}(1-t^k).$$

Заменяя произведение $\Pi(1-t^{2k-1})$ на $\Pi(1+t^k)^{-1}$ по формуле (2), мы преобразуем левую часть в

$$(1-t)(1-t^2)(1-t^3).../ \\ /(1+t)(1+t^2)(1+t^3)...$$

Правая часть формулы Гаусса—Якоби при подстановке $u=v=-t$ превращается в $\sum_{-\infty}^{\infty}(-1)^{q^2}t^{q^2}$. Мы получаем следующую формулу:

$$\frac{(1-t)(1-t^2)(1-t^3)...}{(1+t)(1+t^2)(1+t^3)...}= \\ =1-2t+2t^4-2t^9+2t^{16}-...$$

Подстановка $u=t$, $v=1$ в формулу Гаусса—Якоби аналогичным образом приводит к формуле:

$$\frac{(1-t^2)(1-t^4)(1-t^6)...}{(1-t)(1-t^3)(1-t^5)...}= \\ =1+t+t^3+t^6+t^{10}+...$$

Эти две формулы получены Гауссом. Нечего и говорить, что это удивительно красивые формулы!

Тождества Роджерса — Рамануджана

В заключение я хочу познакомить вас с двумя знаменитыми тождествами теории разбиений, для которых до сих пор не найдено прозрачных доказательств, хотя эта задача и по сей день остается в сфере интересов многих математиков.

Первое тождество. *Число разбиений натурального числа n, в которых разность между любыми двумя частями превосходит единицу, равно числу разбиений числа n на части, дающие при делении на 5 остаток 1 или 4.*

Второе тождество. *Число разбиений натурального числа n, в которых разность между любыми двумя частями и каждая часть превосходят единицу, равно числу разбиений числа n на части, дающие при делении на 5 остаток 2 или 3.*

Конечно, закономерность, утверждаемая этими тождествами, в высшей степени красива и нетривиальна, и неудивительно, что крупнейший английский математик начала нашего века Г. Харди, узнавший о них из письма Рамануджана датированного 16 января 1913 года, пришел в восхищение.*)

При чтении этой статьи у вас, может быть, сложилось впечатление, будто теория разбиений напоминает кунсткамеру, в которую заботливо собраны различные экзотические экспонаты, никак или почти никак между собой не связанные. До недавнего времени так оно и было. Ситуация коренным образом изменилась лишь в 70-х годах нашего века, когда английскому математику И. Макдональду удалось найти единый подход к доказательству большого класса тождеств теории разбиений и открыть много новых, объединив их в стройную теорию (тождество Гаусса — Якоби включается в нее).**) Для тождеств Роджерса — Рамануджана и многих аналогичных тождеств общего подхода не найдено, хотя в последнее время и появились алгебраические методы их доказательств. Так что, понимание истинной природы этих тождеств, вероятно, еще впереди.

---

*) О жизни и творчестве замечательного индийского математика вы можете прочитать в статье С. Г. Гиндикина «Загадка Рамануджана» («Квант», 1987, № 10).

**) Более детальную информацию об этом вы можете найти в статье Д. Б. Фукса «О раскрытии скобок, об Эйлере, Гауссе и Макдональде и об упущенных возможностях» («Квант», 1981, № 8).

ПОГОВОРИМ НЕМНОГО О ПОГОДЕ...

Кандидат физико-математических наук
Б. М. БУБНОВ

В давние времена правила хорошего тона предписывали при первом знакомстве затевать разговор о погоде. Поговорим о ней и мы, а именно о той стороне вопроса, которая касается движения атмосферы как некоторого физического объекта; ведь, в конце концов, погода в любой точке нашей планеты определяется движением атмосферных масс. Однако такое движение является настолько сложным, что точное предсказание поведения атмосферы на длительный срок не представляется возможным. Для получения достаточно удовлетворительного прогноза погоды требуется гармоническое развитие двух направлений. Первое направление — увеличение частоты измерений основных параметров атмосферы (температура, давление, влажность, скорость ветра и т. д.) и уменьшение расстояний между точками, в которых эту информацию снимают. Второе направление, которое является предметом изучения физики атмосферы,— исследование основных физических закономерностей, определяющих атмосферные процессы.

Модель Хэдли

При рассмотрении очень сложных объектов (а атмосфера безусловно относится к таким объектам) физики стараются построить модель и в рамках этой модели рассматривать поведение объекта. Переход от объекта к модели является наиболее важным шагом любого исследования. С одной стороны, модель должна отражать те характеристики объекта, которые мы изучаем, т. е. удовлетворять экспериментальным и натурным данным, с другой — она должна быть достаточно простой для понимания и теоретического описания. Какая же самая простая модель удовлетворяет этим требованиям при рассмотрении крупномасштабных движений атмосферы?

Прежде всего, модель должна учитывать основные факторы, определяющие эти движения.

Первым фактором следует назвать силу гравитационного взаимодействия. Эта сила в значительной степени регулирует газовый состав атмосферы и определяет способность планеты удерживать свою атмосферу. Чем больше масса планеты, тем проще ей удерживать легкие газы; при малой массе вращающееся тело может совсем лишиться атмосферы (возможно, именно поэтому нет атмосферы у Луны).

Вторым важным фактором является облучение планеты солнечной радиацией. Количество энергии, поступающей к планете от Солнца, зависит от времени суток, а также от наклона орбиты (зима — лето, экватор — полюс). В среднем на каждый квадратный метр земной поверхности от Солнца ежесекундно поступает энергия 1372 Дж. (Зная радиус Земли, легко вычислить суммарный поток энергии, поступающий от Солнца.) Падающие на Землю лучи частично отражаются; отношение отраженной радиации к падающей называется альбедо поверхности. Альбедо сильно меняется в зависимости от вида поверхности, принимая значение от 0,1—0,15 для океана до 0,6—0,8 для чистого снега; в среднем для Земли альбедо примерно 0,3. Чем больше энергии приходит в данное место планеты, тем сильнее оно нагревается. Нагретый воздух стремится вверх, холодный —опускается, и в результате в атмосфере возникают вертикальные воздушные потоки. Если бы Земля вращалась вокруг своей оси очень медленно, то основные температурные контрасты, которые создают движение атмосферы, возникли бы между нагретым дневным и охлажденным ночным полушарием. Кроме различия между дневными и ночными температурами, существуют различия между температурами на полюсах и на экваторе.

Третий определяющий фактор — собственное вращение Земли — делает несущественным для глобальных атмосферных течений суточный нагрев, так как время их образования и движения значительно больше времени вращения, т. е. больше суток. Преобладающим становится поднятие воздуха на экваторе, движение его в верхних слоях к полюсу, опускание там и движение от полюса к экватору. Образуется так называемая меридиональная конвективная ячейка. (Напомним, что конвекцией называется перенос тепла посредством движения различных по плотности частей газа или жидкости. Теплопроводный механизм передачи тепла, обусловленный столкновением молекул, не играет существенной роли в процессе движения атмосферы.)

В результате вращения Земли меридиональная ячейка принципиальным образом трансформируется. Рассмотрим массу воздуха *M*, перемещающуюся от экватора к полюсу. Ее скорость v складывается из скорости движения воздуха относительно Земли и линейной скорости вращения Земли в данной точке. Что будет происходить по мере перемещения этой массы в более высокие широты? На этот вопрос дает ответ один из фундаментальных законов механики — закон сохранения момента импульса. Момент импульса — важная механическая характеристика вращающейся системы. Для материальной точки это вектор, определяющийся произведением ее радиуса-вектора и вектора импульса. Если сумма моментов сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса остается неизменным. Что это означает для рассматриваемой нами массы воздуха? На экваторе ее момент импульса был равен $L_0 = R_э \cdot Mv_э$. При перемещении от экватора к полюсу уменьшается расстояние до оси вращения Земли. Чтобы момент L_0 сохранялся, должна увеличиваться скорость перемещения. Поэтому масса воздуха при движении от экватора к полюсу отклоняется от направления «на полюс». В умеренных широтах северного полушария воздух, который движется с экватора, «поворачивается» на восток (западные ветры, из-за которых полет из Москвы в Новосибирск занимает меньше времени, чем обратный перелет), а воздух, который движется к экватору, отклоняется на запад (нижнее пассатное течение).

Впервые такая упрощенная схема атмосферной циркуляции была предложена в 1735 году Дж. Хэдли и часто называется зональной циркуляцией Хэдли (рис. 1). Аналогичное объ-

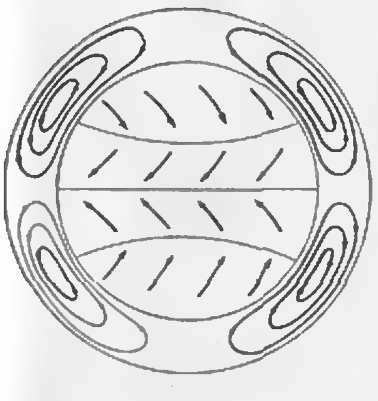


Рис. 1. Схема циркуляции атмосферы по Дж. Хэдли (1735).

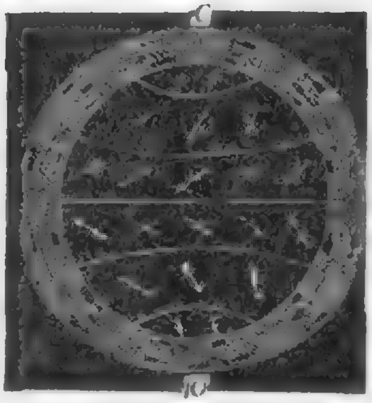


Рис. 2. Общая циркуляция атмосферы по У. Феррелу (1859).

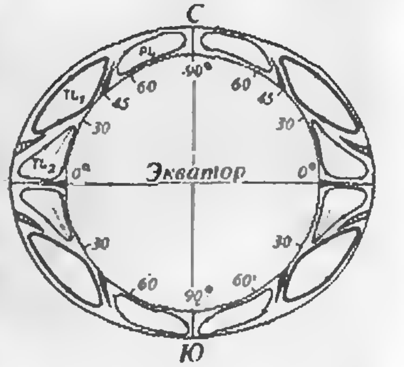


Рис. 3. Схематическое представление меридиональной циркуляции по Т. Бержерону (1928).

яснение, не зная о работе Хэдли, дали знаменитый философ Иммануил Кант (1756 год) и Джон Дальтон (1793 год). Естественно, что за прошедшие 250 лет наши знания о земной атмосфере сильно изменились, и в связи с этим неоднократно изменялась и дополнялась схема общей циркуляции (рис. 2 и 3), однако и сейчас она еще далека от совершенства.

Циклоны и антициклоны

Всякий раз, слушая прогноз погоды, мы узнаем о передвижении или взаимодействии циклонов и антициклонов, т. е. вихревых образований, размеры которых сотни километров. Как связать наличие этих образований с общей циркуляцией атмосферы? Оказывается, что в зависимости от основных определяющих параметров (скорости вращения Земли, перепада температур в направлении экватор — полюс и т. д.) конвективная ячейка может быть как устойчивой — и в этом случае развивается циркуляция Хэдли, так и неустойчивой, как это наблюдается на Земле, где образуется волновое движение, состоящее из различного числа вихрей. В атмосфере обычно наблюдаются пять-шесть крупных вихрей. Если же все вихревые движения осреднить за достаточно большой промежуток времени, то осредненное движение будет аналогично рассмотренной нами зональной циркуляции.

Проще всего схему образования крупномасштабных вихрей рассмотреть в лабораторном эксперименте. Берутся два металлических цилиндра и устанавливаются соосно. Внутренний цилиндр соответствует полюсу — его охлаждают, внешний соответствует экватору — его нагревают. Между цилиндрами налита жидкость. Если система вращается с постоянной угловой скоростью, то в ней могут наблюдаться различные режимы движения. При малой скорости вращения частицы двигаются от внешнего цилиндра к внутреннему по спирали, так что жидкость относительно неподвижного наблюдателя вращается быстрее, чем цилиндры (рис. 4). Если увеличить скорость вращения системы, то такое спиральное движение станет неустойчивым, разрушится и возникнет новый режим (рис. 5). Этот режим характеризуется струйным течением, которое попеременно касается то внутреннего, то внешнего цилиндров. Кроме струйного течения возникают дополнительные к нему вихри (дополнительными они называются потому, что вихрь вращается так, чтобы в том месте, где он подходит к струе, их скорость имела одно направление). Количество вихрей в системе зависит от внешних параметров.

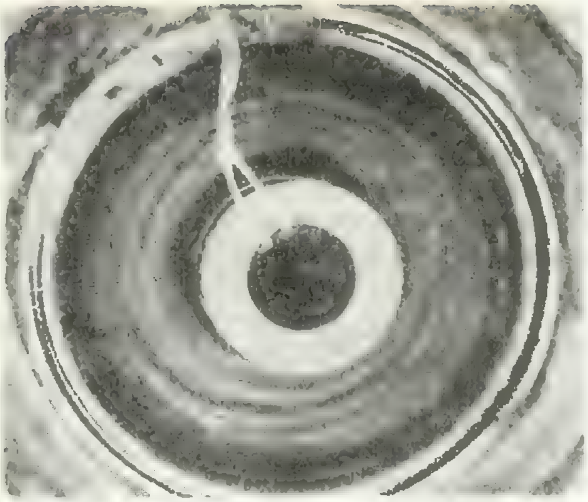


Рис. 4.

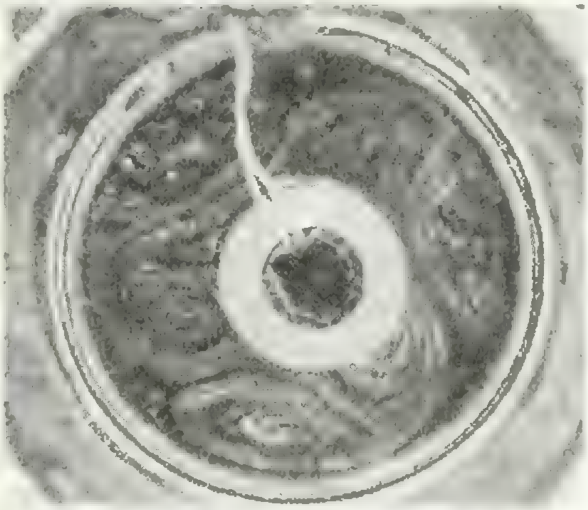


Рис. 5.

Аналогичная вихревая картина постоянно наблюдается на картах погоды, особенно в южном полушарии, в котором влияние материков не столь велико, как в северном. Одна из таких карт приведена на рисунке 6.

Если принципиальная схема образования циклонов и антициклонов достаточно проста, то детальное описание их движений развито слабо и прежде всего потому, что слишком много факторов определяют это движение. До сих пор мы рассматривали идеализированную атмосферу, а теперь рассмотрим возможное влияние материков на общую циркуляцию атмосферы. Материки выше океанов, и особенно сильно изменяют движение атмосферы высокие горные хребты. Кроме того, средние температуры материков и океанов сильно различаются, так как океаны более инертны, они медленнее нагреваются, но зато и медленнее охлаждаются. На рисунке 7 представлены среднегодовая и средняя температура поверхности на широте 55° в северном полушарии для разных периодов года. Различие температур материка и океана в зимнее время лишь немного меньше различия между температурами полярных и тропических областей. Такая тепловая неоднородность и влияние рельефа приводят к тому, что крупные вихри перестают передвигаться вместе с волной и в течение нескольких недель вихрь может не менять своего положения. Это состояние атмосферы получило название «блокирующей ситуации» и приводит к многочисленным катастрофическим последствиям, в первую очередь — к засухам.

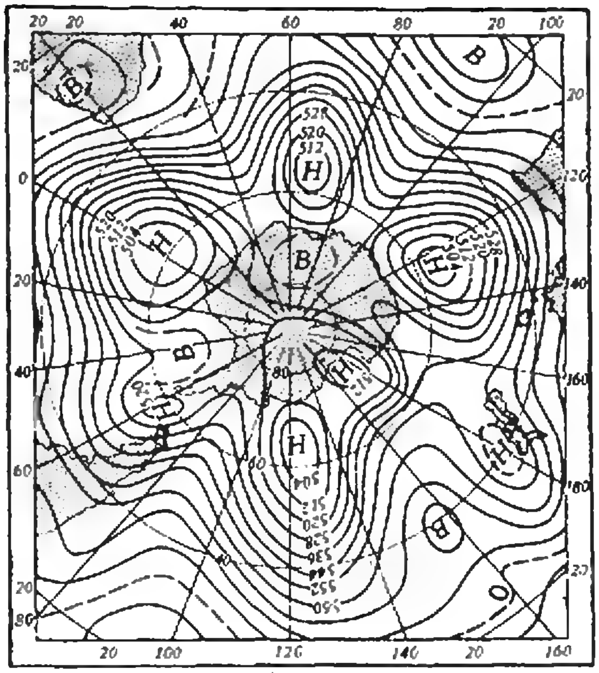


Рис. 6.

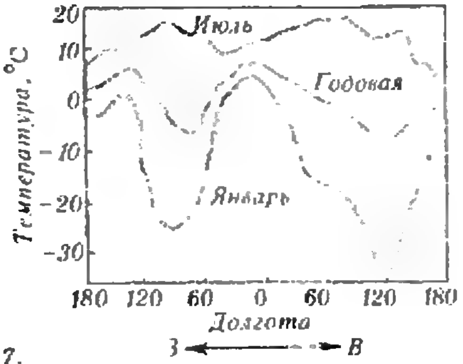


Рис. 7.

Парниковый эффект и ядерная зима

Внешние факторы, определяющие движение атмосферы, практически не меняются со временем, но изменения, происходящие в атмосфере, в первую очередь вызванные влиянием человека, могут принципиальным образом изменить суммарное действие этих факторов. Рассмотрим это на примере так называемого парникового эффекта и явления «ядерной зимы».

Что такое парниковый эффект? Как известно, всякие нагретые тела излучают тепло, и длина волны этого теплового излучения тем меньше, чем выше температура тела. От Солнца к Земле приходит коротковолновое тепловое излучение, Земля же испускает длинноволновое. Если бы атмосфера одинаково пропускала эти виды излучения, то установилось бы определенное тепловое равновесие. Однако коротковолновое излучение слабо поглощается атмосферой, а длинноволновое сильно. В результате температура атмосферы выше, чем это можно было ожидать, не учитывая поглощения в толще атмосферы. Каким же образом действие человека может сказаться на изменении температуры атмосферы?

В основном тепловое излучение Земли поглощается водяным паром, облаками и углекислым газом. За последние 150 лет относительная концентрация CO_2 в атмосфере увеличилась на 25 % и достигла 345 молекул на 1 миллион молекул воздуха. За счет

Торнадо возникают вдоль границ грозовых фронтов, там, где теплый и влажный воздух встречается с холодным и сухим воздушным потоком.

этого за последние 100 лет средняя температура поднялась на 0,5 градуса. Аналогичными поглощающими свойствами обладают метан, фреоны и другие газы, концентрация которых за счет деятельности человека растет в последние десятилетия. В итоге к середине будущего столетия можно ожидать существенное потепление климата планеты.

Ядерной зимой называют возможный вариант изменения климата в результате ядерной катастрофы. Рассмотрим, как будет реагировать атмосфера на большое количество ядерных взрывов. После взрывов, за счет пожаров и поднятия большого количества пыли и сажи в атмосферу, солнечные лучи не смогут достигать поверхности Земли, и она охладится на 10—15 градусов. За счет поглощения непрозрачными частицами солнечных лучей верхняя часть атмосферы нагреется на десятки градусов. В результате образуется большая разница температур между верхними и нижними слоями атмосферы. Это может принципиальным образом изменить атмосферную циркуляцию. Вместо циклонического движения, аналогичного изображенному на рисунке 5, может возникнуть зональная циркуляция — типа той, что изображена на рисунке 4. А время восстановления вихревой циркуляции может достигать нескольких месяцев. Отметим, что аналогичная ситуация наблюдается в атмосфере Марса, где в период сильных пыльных бурь образуется большая разница температур между верхними и нижними слоями атмосферы, в результате чего циклоны перестают существовать (а в обычной ситуации на Марсе наблюдается вихревая циркуляция с четырьмя крупными вихрями) и возникает однородное зональное вращение атмосферы. Все эти процессы достаточно легко моделируются как в лабораторных установках с вращающимися цилиндрами, так и в численных экспериментах.

Тайфуны, торнадо и другие «дьяволы»

Кроме глобальных циклонических вихрей, охватывающих всю земную атмосферу, в ней существуют вихри самых различных масштабов. Часто прохождение таких интенсивных вихрей бывает катастрофическим. К этим вихрям относятся тайфуны, смерчи, «пыльные дьяволы». Заметно различаясь по размерам — от сотен километров до десятка метров,— эти интенсивные вихри имеют много общего. Для образования интенсивного вихря требуется большой подвод энергии. Самые сильные и большие из них — тайфуны образуются в экваториальной зоне в результате интенсивного поднятия теплого и влажного воздуха над нагретым океаном. Возможно образование вихрей и над землей; для этого нужна или сильно нагретая поверхность (пустыня), или встреча теплого и влажного воздуха с холодным и сухим, как это имеет место в случае торнадо. Интенсивное струйное движение редко бывает устойчиво; аналогично тому как разбивается зональная циркуляция на циклонические вихри, на границе различных фронтов при интенсивном поднятии образуются интенсивные вихри. В частности, такое явление можно наблюдать на поверхности горячего чая, над которой непрерывно образуются и срываются маленькие вихорьки влажного воздуха. Взаимодействия со струйными течениями, общая завихренность системы также влияют на образование вихрей. После образования вихря в действие вступают два противоположных механизма: механизм подпитки вихря, т. е. получение энергии от того района, над которым вихрь находится (чаще всего это приток тепла снизу), и механизм диссипации, или ослабления, вихря, обусловленный в первую очередь трением о воздух. Время существования вихря определяется тем, какой из механизмов преобладает. А траектории движения вихрей определяются закономерностями движения вихревых образований, которые в настоящее время интенсивно изучаются. В частности, понятно, что при рассмотрении движения тайфунов, траектория которых достигает тысячи километров, нельзя не учитывать вращения Земли, но можно им пренебречь при рассмотрении движения смерчей и «пыльных дьяволов» — вихрей с относительно коротким временем жизни.

Мы рассмотрели небольшой круг вопросов, касающихся в первую очередь крупномасштабных движений атмосферы. Эти вопросы составляют лишь малую часть физики атмосферы — науки, изучающей климат, атмосферы различных планет, турбулентность и многое другое. И каждый из этих вопросов — тема для отдельной статьи.

Молнии в кристалле

(Начало см. на с. 12)

Гетеролазеры изготавливаются миллионами штук в год, их применение перевернуло наши устоявшиеся представления во многих областях техники. Лазерная волоконно-оптическая линия связи способна за одну секунду передать такое количество цифровой информации, которым могут быть закодированы все 30 томов БСЭ! Лазерное дисковое запоминающее устройство, объемом с тумбочку письменного стола, способно «вместить» более миллиона книг. Оптические интегральные схемы, использующие гетеролазеры, разрабатываются с прицелом на суперкомпьютеры, которые по производительности в тысячи раз будут превосходить все существующие ЭВМ.

Ну а почему «молнии в кристалле»? Да потому, что плотность тока в светодиодах и лазерах может в несколько, а иногда и в десятки раз превышать плотность тока в разряде молнии. Значит, десятки «микромолний» сверкают в кристаллах, только управляются они волей человека и служат не разрушению: их вспышки вдохнули жизнь в оптоэлектронику.

Тому, кто сегодня или завтра посвятит себя светодиодам и лазерам, посчастливится работать на пределе мыслимых для твердого тела физических и технологических возможностей. Уже создана аппаратура, позволяющая выращивать такие полупроводниковые структуры, в которых состав и свойства меняются через каждый моноатомный слой. Создатель таких сверхрешеток поистине обладает «могуществом бога» — он может по своему усмотрению распоряжаться судьбой каждого электрона: одного «посадить» в «квантовую яму», другого «замуровать» в «квантовый ящик», третьего пустить беспрепятственно «гулять» по всему кристаллу. Но... это уже приятней проделывать, чем об этом писать. Поверьте мне. А еще лучше — подрастайте и проверьте сами.

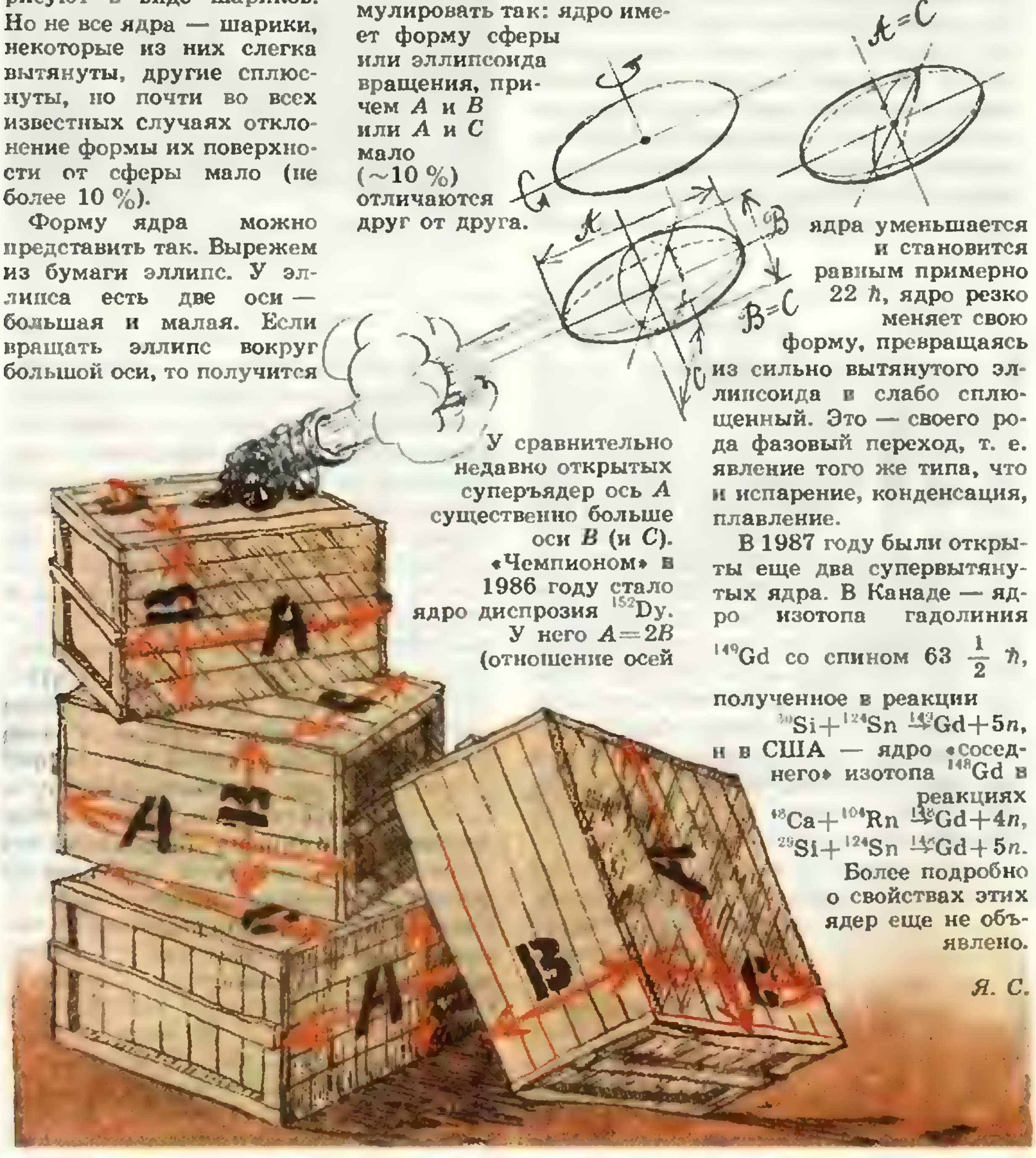
Супервытянутые ядра

В семье физических «сверхобъектов» — сверхпроводник, сверхновая звезда, сверхтекучий гелий — появились сверхъядра — супервытянутые ядра.

Обычно атомные ядра рисуют в виде шариков. Но не все ядра — шарики, некоторые из них слегка вытянуты, другие сплюснуты, но почти во всех известных случаях отклонение формы их поверхности от сферы мало (не более 10 %).

Форму ядра можно представить так. Вырежем из бумаги эллипс. У эллипса есть две оси — большая и малая. Если вращать эллипс вокруг большой оси, то получится вытянутый эллипсоид; если вращать вокруг малой оси — получится сплющенный эллипсоид. У вытянутого эллипсоида две одинаковые малые оси и одна большая ось. У сплющенного — две одинаковые большие оси и одна малая.

То, что было сказано о форме ядра, можно сформулировать так: ядро имеет форму сферы или эллипсоида вращения, причем A и B или A и C мало (~ 10 %) отличаются друг от друга.



У сравнительно недавно открытых суперъядер ось A существенно больше оси B (и C). «Чемпионом» в 1986 году стало ядро диспрозия ^{152}Dy. У него $A=2B$ (отношение осей 2:1:1). Такое ядро было получено в Дарсбери (Англия) в результате обстрела палладиевой мишени пучком ядер кальция:

$$^{48}\text{Ca}+{}^{108}\text{Pd}\to{}^{152}\text{Dy}+4n.$$

Ядро ^{152}Dy имеет очень большой спин, оно вращается вокруг одной из малых осей так, что его угловой момент доходит до 60 $\hbar$ (напомним, что спин электрона равен $\hbar/2$). Замечательно, что когда спин ядра уменьшается и становится равным примерно 22 $\hbar$, ядро резко меняет свою форму, превращаясь из сильно вытянутого эллипсоида в слабо сплющенный. Это — своего рода фазовый переход, т. е. явление того же типа, что и испарение, конденсация, плавление.

В 1987 году были открыты еще два супервытянутых ядра. В Канаде — ядро изотопа гадолиния ^{149}Gd со спином $63\frac{1}{2}\hbar$, полученное в реакции

$$^{30}\text{Si}+{}^{124}\text{Sn}\to{}^{149}\text{Gd}+5n,$$

и в США — ядро «соседнего» изотопа ^{148}Gd в реакциях

$$^{48}\text{Ca}+{}^{104}\text{Rn}\to{}^{148}\text{Gd}+4n,$$

$$^{29}\text{Si}+{}^{124}\text{Sn}\to{}^{148}\text{Gd}+5n.$$

Более подробно о свойствах этих ядер еще не объявлено.

Я. С.

Задачник „Кванта"

Задачи

М1131—М1140, Ф1143—Ф1147

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 1 февраля 1989 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—12—88» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1131» или «Ф1143». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1131 — М1135 предлагались на XXIX Международной математической олимпиаде.

М1131. Пусть n — натуральное число и $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ подмножества некоторого множества B. Предположим, что

а) каждое множество A_i $(i=1, 2, \ldots, 2n+1)$ содержит ровно $2n$ элементов;

б) каждое множество $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ содержит ровно один элемент;

в) любой элемент множества B принадлежит не менее чем двум из множеств A_i $(i=1, 2, \ldots, 2n+1)$.

Для каких значений n можно поставить в соответствие каждому элементу множества B одно из чисел — 0 или 1 — так, чтобы каждое из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ содержало ровно n элементов, соответствующих числу 0?

М1132. Функция f определена на множестве целых положительных чисел и удовлетворяет следующим условиям:

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),\quad f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n).$$

Найдите число всех таких значений n, для которых $f(n)=n$ и $1 \leqslant n \leqslant 1988$.

М1133. Докажите, что множество решений неравенства

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

является объединением непересекающихся промежутков, сумма длин которых равна 1988.

М1134. Пусть AD — высота в прямоугольном треугольнике ABC, $\angle A=90^\circ$. Прямая, проходящая через центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD, пересекает стороны AB и AC соответственно в точках K и L. Докажите неравенство $S_{ABC} \geqslant 2S_{AKL}$.

М1135. Пусть a и b — целые положительные числа такие, что a^2+b^2 делится на $ab+1$ без остатка. Докажите, что $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ — квадрат целого числа.

М1136*. Докажите для неотрицательных чисел A, M, S неравенство

$$3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

Д. П. Мавло

Эту задачу автор посвятил 100-летию Американского математического общества (American Mathematical Society — *AMS*), которое отмечается в этом году.

М1137. В выпуклом n-угольнике все углы равны и из некоторой точки, расположенной внутри n-гольника, все его стороны видны под равными углами. Докажите, что этот n-угольник правильный.

К. П. Кохась

Задачник „Кванта"

M1138*. Докажите, что для любого натурального n между числами n^2 и $n^2+n+3\sqrt{n}$ найдутся три натуральных числа, произведение двух из которых делится на третье.

Л. Д. Курляндчик

M1139. а) Поверхность выпуклого многогранника можно разрезать на несколько квадратов. Докажите, что у этого многогранника не больше 8 вершин.

б) Какое наибольшее число вершин может иметь выпуклый многогранник, поверхность которого можно разрезать на правильные треугольники?

В. Э. Матизен

M1140. Нарисуем на плоскости одну или несколько пересекающихся кривых (кривые могут иметь точки самопересечения, рис. 1). В каждой точке пересечения можно двумя способами выполнить «перестройку» (рис. 2). Если проделать перестройку во всех точках пересечения, то получится несколько непересекающихся кривых (рис. 3).

а) Докажите, что число непересекающихся кривых, которые могут получиться, не больше числа областей, на которые делили плоскость исходные кривые (на рисунке 1 таких областей 7).

б) Всегда ли можно сделать перестройки так, чтобы в результате получалась одна кривая?

в) Выберем на каждой кривой направление обхода и будем производить перестройки в соответствии с этими направлениями так, чтобы стрелки «отталкивались» друг от друга (рис. 4). Может ли в результате получиться одна кривая?

С. Л. Табачников

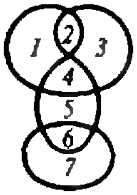


Рис. 1.

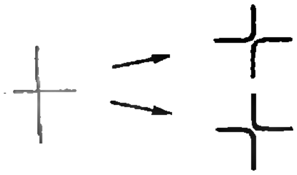


Рис. 2.

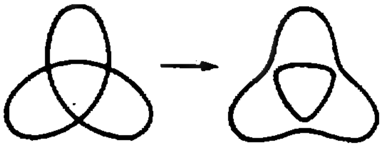


Рис. 3.

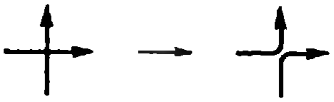


Рис. 4.

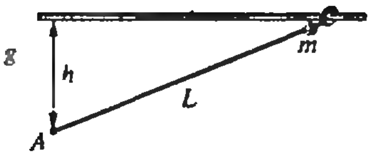


Рис. 5.

Ф1143. Имеется очень большое количество цилиндрических сосудов с водой, погруженных один в другой так, что каждый следующий плавает в предыдущем. Площадь дна самого маленького сосуда равна s_0 и много меньше площади дна самого большого. В самый маленький сосуд доливают объем воды v_0. На сколько опустится этот сосуд относительно земли? (После долива воды все сосуды продолжают плавать.)

Г. В. Григорьев

Ф1144. На плоскости расположено N одинаковых бильярдных шаров. Один шар толкнули, и, испытав несколько соударений, он остановился в той же точке, из которой начал движение. При каком минимальном N это возможно? Соударения считать абсолютно упругими.

А. А. Белопольский

Ф1145. Один конец нерастяжимой невесомой нити, продетой через маленькую бусинку массой m, закреплен в точке A, а другой привязан к невесомому кольцу, которое может свободно скользить вдоль горизонтального стержня (рис. 5). В начальный момент бусинку удерживают у кольца, нить прямолинейна и не натянута. Бусинку отпускают. Найти скорость бусинки в момент разрыва нити, если известно, что нить выдерживает максимальное натяжение T_0. Длина нити L, расстояние от точки A до стержня равно h. Трением в системе пренебречь.

В. Т. Карапетян

Ф1146. Найдите сопротивление между точками A и B в бесконечной последовательности элементов, изображенной на рисунке 6. Все элементы одинаковы, сопротивление каждого элемента равно r.

С. Здравкович (СФРЮ)

Ф1147*. На площадке, наклоненной под небольшим углом α к горизонту, на расстоянии l от ее нижнего края лежит маленький грузик, масса которого много меньше массы площадки (рис. 7). Площадка совершает гармонические колебания вдоль оси OO'; частота колебаний равна ω, амплитуда — L. Коэффициент трения между грузиком и площадкой равен k. За какое время грузик свалится с площадки? (Считать, что это время много больше периода колебаний площадки.)

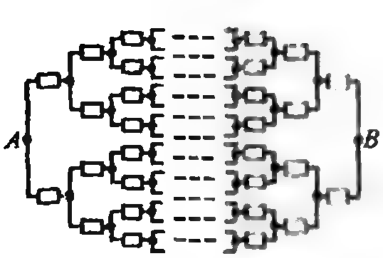


Рис. 6.

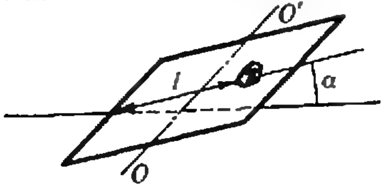


Рис. 7.

Problems

M1131—M1140, P1143—P1147

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 1 st 1989, to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: 'KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies

M1131. Let n be a positive integer and let $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$ be subsets of a set B. Suppose that

a) each A_i has exactly $2n$ elements,

b) each $A_i \cap A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ contains exactly one element,

c) every element of B belongs to at least two of the A_i.

For which values of n can one assign to every element of B one of the numbers 0 and 1 in such a way that each A_i has 0 assigned to exactly n of its elements?

M1132. A function f is defined on the positive integers by

$$f(1)=1,\ f(3)=3,\ f(2n)=f(n),$$
$$f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n),\ f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n),$$

for all positive integers n. Determine the number of positive integers n, less than or equal to 1988, for which $f(n)=n$.

M1133. Show that the set of real numbers x which satisfy the inequality

$$\sum_{k=1}^{70} \frac{k}{x-k} \geqslant \frac{5}{4}$$

is a union of disjoint intervals, the sum of whose lengths is 1988.

M1134. ABC is a triangle right-angled at A, and D is the foot of the altitude from A. The straight line joining the incentres of the triangles ABD, ACD intersects the sides AB, AC at the points K, L respectively. S and T denote the areas of the triangles ABC and AKL respectively. Show that $S \geqslant 2T$.

M1135. Let a and b be positive integers such that $ab+1$ divides a^2+b^2. Show that $(a^2+b^2)/(ab+1)$ is the square of an integer.

M1136*. Prove that for all nonnegative numbers A, M, S the following inequality holds:

$$3+(A+M+S)+\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{M}+\frac{1}{S}\right)+\left(\frac{A}{M}+\frac{M}{S}+\frac{S}{A}\right) \geqslant$$

(in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in block letters.

Problems M1131—M1135 were proposed at the XXIX th International Matematical Olimpiad (Canberra, Australia).

Задачник „Кванта"

$$\geqslant \frac{3(A+1)(M+1)(S+1)}{AMS+1}.$$

D. P. Mavlo

This problem is dedicated to the Centennial of the American Mathematical Society (AMS).

M1137. The angles of a convex polygon are equal and all ist sides can be seen under equal angles from some point inside the polygon. Prove that this polygon is regular.

K. P. Kohas

M1138*. Prove that for every natural n there are three different natural numbers between n and $n^2+n+3\sqrt{n}$ such that the first one divides the product of the second and third.

L. D. Kurliandchik

M1139. a) One can cut the surface of a convex polyhedron into several squares. Prove that the number of vertices of this polyhedron is not greater than 8.

b) One can cut the surface of a convex polyhedron into regular triangles. What ist greatest possible number of vertices?

V. E. Matizen

M1140. Draw a number of intersecting curves on a plane (the curves may have double points; fig. 1). There are two ways to perform „surgery" at an intersection point (fig. 2). If one performs such surgery at every intersection point the initial picture falls apart into a number of disjoint curves (fig. 3).

a) Prove that the number of resulting disjoint curves is not greater than the number of (bounded) domains seen on the initial picture (there are 7 such domains on fig. 1).

b) Is it always possible to choose such a set of surgeries in the points of intersection that there will be only one resulting curve?

c) Orient every initial curve and perform sungery so that the arrows push away from each other (fig. 4). Can the result of such surgery be a single curve?

S. L. Tabachnikov

P1143. A large number of cylindrical receptacles containing water are placed one the other so that each floats in the next largest one. The area of the bottom of the smallest one is s_0, which is much less than that of the largest. A volume of water equal to v_0 is poured into the smallest cylinder. How far down (with respect to the qround) will this cylinder move? (After the water has been added, none of the receptacles sink).

G. V. Grigoriev

P1144. N identical billiard balls are placed on the plane. One of them is set into motion and, after several collisions, it stops at the same point where it began its motion. For what minimal N is this possible? The collisions are assumed absolutely elastic.

A. A. Belopolski

P1145. One extremity of an unstrechable weightless string, on which a small bead of mass m is threaded, is fixed at the point A, while the other extremity is tied to a weightless ring which can freely slide along a horizontal rod (see figure Рис. 5). At the initial moment the bead is held right next to the ring, the string is rectilinear but unstretched. Then the bead is released. Find the velocity of the bead when the string breaks, if it is known that the string can withstand the maximal tension T_0. The length of the string is L, the distance from A to the rod is h. Friction in the system is negligible.

V. T. Karapetian

P1146. Find the resistance between the points A and B in the infinite sequence of elements shown on figure Рис. 6. All the elements are identical, the resistance of each is r.

S. Zdravkovich (Yougoslavia)

P1147*. A small weight lies on a platform which is inclined by the small angle α to the horizontal plane. The platform's mass is much greater than that of the weight, whose distance from the lower edge of the platform is l (see figure Рис. 7). The platform oscillates harmonically about the OO' axis with frequency ω and amplitude L. The friction coefficient between the weight and the platform is k. How much time will it take the weight to fall of the platform? (This time is assumed much greater than $2\pi/\omega$.)

Решения задач

М1110 — М1115, Ф1123 — Ф1127

М1110. *Для каждого натурального $n>1$ выпишем наибольшие общие делители всевозможных пар различных чисел от 1 до n. Докажите, что а) среднее арифметическое всех $n(n-1)/2$ выписанных чисел неограниченно растет с ростом n, но не превосходит $\ln n+1$; б) их среднее геометрическое не превосходит 10 при любом n.*

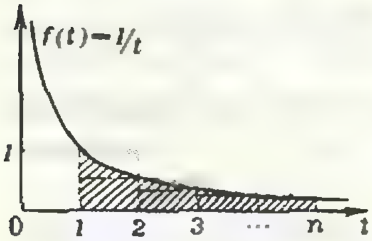


Рис. 1.

а) Обозначим через $P_n(d)$ количество пар (a, b) натуральных чисел $a<b\leqslant n$ с наибольшим общим делителем $d=$НОД (a, b). Каждую такую пару можно представить в виде $a=dx$, $b=dy$, где $x<y\leqslant k=[n/d]$, причем x и y взаимно просты. Количество $P_k=P_k(1)$ таких пар (x, y) взаимно простых чисел нетрудно оценить сверху:

$$P_k\leqslant 1+2+\ldots+(k-1)=k(k-1)/2,$$

поскольку при каждом $y\leqslant k$ число $x<y$ принимает не больше $y-1$ значений. Отсюда

$$P_n(d)=P_{[n/d]}\leqslant \frac{n}{2d}\left(\frac{n}{d}-1\right)\leqslant \frac{n(n-1)}{2d^2}.$$

В конце решения мы докажем оценку снизу $P_k\geqslant k(k-1)/4$; из нее получается оценка для $P_n(d)$:

$$P_n(d)\geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{n}{d}-1\right)\left(\frac{n}{d}-2\right)=$$

$$=\frac{n^2-3nd+2d^2}{4d^2}>\frac{n(n-1)}{4d^2}-\frac{3n}{4d}.$$

Сумма чисел $d=$НОД (a, b) по всем парам (a, b) равна $\sum\limits_{d=1}^{n-1} dP_n(d)$, а их среднее арифметическое A равно $\frac{2}{n(n-1)}\sum\limits_{d=1}^{n-1} dP_n(d)$. Используя оценки для $P_n(d)$, получаем:

$$A\leqslant \frac{2}{n(n-1)}\sum_{d=1}^{n-1} d\,\frac{n(n-1)}{2d^2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}, \qquad (1)$$

$$A>\frac{2}{n(n-1)}\sum_{d=1}^{n-1} d\left(\frac{n(n-1)}{4d^2}-\frac{3n}{4d}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)-\frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Далее нам потребуется следующая

Лемма. *Для любого натурального n*

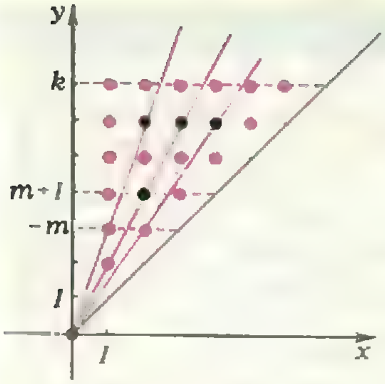


Рис. 2.

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}<\ln n<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}.$$

Для ее доказательства можно воспользоваться тем, что $\ln n=\int\limits_1^n 1/t\,dt$ — площадь под гиперболой $f(t)=1/t$ на участке $1\leqslant t\leqslant n$ (рис. 1); можно не пользоваться интегралом, а, например, убедиться в справедливости неравенств

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\leqslant\ln(1+\alpha)\leqslant\alpha \quad \text{при } \alpha\geqslant 0$$

(заметив, что при $\alpha=0$ все три члена равны 0 и сравнив производные), затем подставить в них $\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$, ..., $\alpha=\frac{1}{n-1}$ и сложить все полученные неравенства.

Применяя лемму к оценкам (1) и (2), получим

$$\frac{1}{2}\ln n-\frac{3}{2}<A\leqslant\ln(n-1)+1<\ln n+1.$$

б) Логарифм среднего арифметического нескольких чисел равен среднему арифметическому их логарифмов. Поэтому для решения задачи достаточно доказать, что среднее арифметическое чисел вида $\ln d$ (где $d=$НОД (a, b), $a<b\leqslant n$) меньше 2: ведь $e^2<10$, т. е. $2<\ln 10$. Действуя так же, как и выше, получим

$$\frac{2}{n(n-1)}\sum_{d=1}^{n}\ln d\cdot P_n(d)\leqslant\sum_{d=2}^{n}\frac{\ln d}{d^2}<\sum_{d=2}^{n}\left(\frac{1}{d^2}\sum_{h=1}^{d}\frac{1}{h}\right).$$

Здесь мы применили лемму: $\ln d\leqslant 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{d}$.

В образовавшейся двойной сумме чисел вида $\frac{1}{d^2}\frac{1}{h}$ $(1\leqslant h\leqslant d,\ 2\leqslant d\leqslant n)$ удобно собрать вместе члены с одинаковыми h $(1\leqslant d\leqslant n$ при $h=1$, $h\leqslant d\leqslant n$ при $h>1)$ и оценить $\sum\limits_{d=h}^{n}\frac{1}{d^2}$ с помощью легко сворачивающейся суммы

$$\sum_{d=h}^{n}\frac{1}{d(d-1)}=\sum_{d=h}^{n}\left(\frac{1}{d-1}-\frac{1}{d}\right)=\frac{1}{h-1}-\frac{1}{n}<\frac{1}{h-1}$$

(эта оценка понадобится сейчас еще раз для $h=2$).

Окончательно получаем

$$\sum_{d=2}^{n}\frac{\ln d}{d^2}<\sum_{d=2}^{n}\frac{1}{d^2}+\sum_{h=2}^{n}\left(\frac{1}{h}\sum_{d=h}^{n}\frac{1}{d^2}\right)<1+\sum_{h=2}^{n}\frac{1}{h(h-1)}<2.$$

Докажем теперь оценку $P_k\geqslant k(k-1)$, использованную в решении пункта а). Положим $m=[k/2]$. Среди всех целых точек $(x,\ y)$, где $0<x<y\leqslant k$, назовем *красными* те, для которых x и y взаимно просты (рис. 2). Проведем через каждую красную точку в треугольнике $x<y\leqslant m$ луч из начала координат (0, 0). Эти P_m лучей содержат, конечно, все $m(m-1)/2$ целых точек в треугольнике $x<y\leqslant m$.

Рассмотрим целые точки на любом из P_h лучей.

Их количество на участке $h+1 \leqslant y \leqslant k$ может превосходить их количество на участке $1 \leqslant y \leqslant h$ не более, чем на единицу (ведь целые точки (x, y) встречаются на луче через равные промежутки). Поэтому в трапеции $m+1 \leqslant y \leqslant k$, $x<y$ из всех $k(k-1)/2-m(m-1)/2$ целых точек на проведенных лучах лежат не более $m(m-1)/2+P_m$ точек. Все остальные целые точки в трапеции — красные; таким образом, их число

$$P_k-P_m \geqslant \frac{k(k-1)}{2}-m(m-1)-P_m,$$

откуда

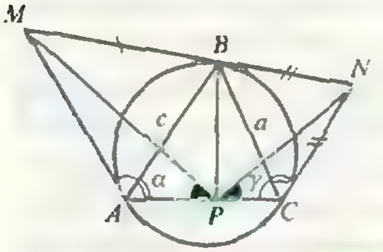
$$P_k \geqslant \frac{k(k-1)}{2}-m(m-1) \geqslant \frac{k(k-1)}{4}$$

(последнее неравенство нетрудно проверить для $k=2m$ и $k=2m+1$).

Можно показать, что $\lim (P_k/k^2)=3/\pi^2$, т. е. вероятность, что случайно взятые натуральные числа (x, y), не превосходящие k, окажутся взаимно простыми, стремится к $6/\pi^2$ при $k \to \infty$ (см., например, задачу 30 к главе III в книге И. М. Виноградова «Введение в теорию чисел», М.: Наука, 1965).

Н. Б. Васильев, В. Ф. Лев

M1111. *Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, соответственно в точках M и N. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN.*



Докажем, что треугольники APM и CPN подобны (см. рисунок),— отсюда следует, что $\angle APM=\angle CPN$, т. е. $\angle MPB=\angle NPB$. Положим $AB=c$, $BC=a$, $\angle BAC=\alpha$, $\angle BCA=\gamma$. В равнобедренном треугольнике AMB угол MAB между касательной AM и хордой AB данной окружности равен половине величины дуги AB, как и вписанный угол ACB, т. е. $\angle MAB=\gamma$. Следовательно, $\angle MAP=\alpha+\gamma$, $AM=c/(2 \cos\gamma)$. Аналогично, $\angle NCB=\alpha$, $\angle NCP=\gamma+\alpha$, $CN=a/(2 \cos\alpha)$. Кроме того, $AP=c \cos\alpha$, $PC=a \cos\gamma$. Таким образом, в треугольниках APM и CPN равны углы MAP и NCP и отношения сторон:

$$AP/AM=2 \cos\alpha \cos\gamma=CP/CN,$$

что и доказывает их подобие.

Отметим, что утверждение задачи и его доказательство с небольшими изменениями сохраняются и для тупоугольного треугольника.

Б. И. Чиник

M1112. *На доске написаны два числа: 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то*

Ответ: в случае *а*) — можно, в случае *б*) — нельзя

Заметим, что если $c=a+b+ab$, то $c+1=(a+1)(b+1)$. Поэтому вместо чисел, записанных на доске, удобно рассматривать числа, на 1 большие. Тогда каждое новое число равно произведению двух уже имеющихся. Вначале имелись числа $2=1+1$ и $3=2+1$; значит, *можно написать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить а) число 13121; б) число 12131? Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде в) $x+y+xy$, г) $x+y+2xy$ с натуральными x и y.*

все последующие числа имеют вид $2^n\cdot 3^m$ (n и m — натуральные). Остается проверить данные числа: $13121+1=2\cdot 3^8$, а $12131+1=2^2\cdot 3^2\cdot 337$.

в) В силу сказанного выше, достаточно доказать, что имеется бесконечно много натуральных чисел $n>1$, не представимых в виде $(x+1)(y+1)$ с натуральными x и y. Но этому условию удовлетворяют все простые числа (и только они), а их, как известно, бесконечно много. (Напомним евклидовскую идею доказательства бесконечности множества простых чисел: если $p_1, ..., p_k$ — простые, то число $p_1\cdot ...\cdot p_k+1$ имеет делителем простое число, отличное от p_i.)

г) Если $z=x+y+2xy$, то $2z+1=(2x+1)(2y+1)$. Рассуждая так же, как в задаче в), мы убеждаемся, что наше утверждение эквивалентно тому, что множество простых чисел вида $2z+1$ (т. е. нечетных) бесконечно.

Докажите самостоятельно утверждения задач в) и г); *для любого натурального a множество чисел, не представимых в виде $x+y+axy$, бесконечно.*

А. А. Берзиньш, В. Г. Ильичев

M1113*. *В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых обслуживает 10 беспосадочных авиалиний, связывающих попарно некоторые пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?*

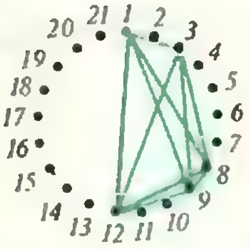


Рис. 1.

Ответ: При 21. Поскольку число пар городов равно $21\cdot 20/2=210$, каждая пара обслуживается хотя бы одной компанией, а каждая компания обслуживает 10 пар, число компаний не может быть меньше 210:10—21.

Остается привести пример схемы обслуживания городов 21-й авиакомпанией. Изобразим города вершинами правильного 21-угольника и занумеруем их по часовой стрелке (рис. 1). Пусть 1-я компания обслуживает города с номерами 1, 3, 8, 9, 12, 2-я — города с номерами 2, 4, 9, 10, 13, получающиеся из первого набора поворотом на угол $360°/21$ (по часовой стрелке) и, вообще, k-я компания — города, которые получаются из первого набора поворотом на $(k-1)\cdot 360°/21$. Любая пара вершин многоугольника попадет в один из этих наборов, так как среди расстояний между точками первого набора встречаются по разу длины всех сторон и диагоналей 21-угольника.

Легко проверить, что построенная нами схема удовлетворяет следующим условиям: 1) любые две точки входят хотя бы в один набор (это требуется в задаче), 2) любые два набора имеют одну и только одну общую точку. Если заменить здесь слово «набор» словом «прямая» и добавить еще одно условие — 3) имеется 4 точки, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой,— мы получим аксиомы так называемой (абстрактной) *проективной плоскости*: по определению, это произвольное множество точек, в котором выделены некоторые подмножества — «прямые», удовлетворяющие условиям 1) — 3). В частности, наша схема — это конечная проективная плоскость из 21-й точки. Нетрудно доказать, что любые две прямые конечной проективной плоскости состоят из одинакового числа точек, причем если это число равно n, то число точек на плоскости равно n^2-n+1 и таково же число прямых. На рисунке 2 показана схема самой маленькой проективной плоскости — из семи точек.

Д. В. Фомин, В. Н. Дубровский

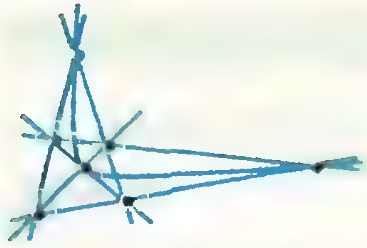


Рис. 2.

М1114. *Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство*

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

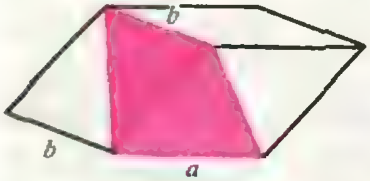


Рис. 1.

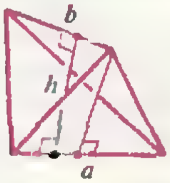


Рис. 2.

Заметим, что радиус r вписанной в тетраэдр сферы равен $3V/S$, где V — его объем, а S — площадь поверхности. (Для доказательства достаточно представить объем тетраэдра как сумму объемов четырех тетраэдров, основаниями которых являются грани данного тетраэдра, а вершины совпадают с центром сферы.) Оценим V и S через длины ребер a, b и расстояние h между содержащими эти ребра скрещивающимися прямыми. Опишем вокруг тетраэдра параллелепипед, для которого a является ребром нижнего основания, а b — верхнего (рис. 1). Его высота, очевидно, равна h, поэтому его объем не превосходит abh. В то же время, этот объем в 6 раз больше объема тетраэдра, что становится ясным, если принять за основание параллелепипеда его боковую грань, содержащую грань тетраэдра. Таким образом, $V\leqslant abh/6$.

С другой стороны, расстояние от концов ребра b тетраэдра до ребра a не меньше h и хотя бы одно из них больше h (рис. 2), поэтому сумма площадей граней, примыкающих к ребру a, больше ah. Аналогично, сумма площадей двух других граней больше bh, т. е. $S>(a+b)h$, а

$$r=\frac{3V}{S}<\frac{abh}{2(a+b)h}=\frac{ab}{2(a+b)}.$$

Н. Б. Васильев

М1115*. *а) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел в них равны.*
б) Пусть n, m, k — натуральные числа, $m\geqslant n$. Докажите, что если

$$1+2+\ldots+n=mk,$$

то числа 1, 2, ..., n можно разбить на k групп так,

а) Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{19}$ — числа первой строки, $b_1, b_2, \ldots, b_{88}$ — второй, $A(i)=a_1+\ldots+a_i$, $B(i)=b_1+\ldots+b_i$. Предположим, что $A(19)\geqslant B(88)$ (случай $A(19)<B(88)$ рассматривается аналогично). Для каждого i обозначим через n_i наименьшее из чисел n таких, что $A(n)-B(i)\geqslant 0$; такое n_i существует в силу нашего предположения. Рассмотрим 88 разностей $A(n_i)-B(i)$; они могут принимать значения от 0 до 87, так как $A(n_i)-B(i)=A(n_i-1)-B(i)+a_{n_i}<a_{n_i}\leqslant 88$. Если эти разности различны, то среди них есть 0 и наше утверждение выполнено. В противном случае какие-то две разности — скажем, для $i=l$ и $i=k$, $k<l$ — совпадают. Тогда

$$A(n_l)-A(n_k)=B(l)-B(k),$$

т. е. искомые отрезки — это $a_{n_k+1}, \ldots, a_{n_l}$ и $b_{k+1}, \ldots, b_l$.

Ясно, что числа 19 и 88 в этой задаче можно заменить на любые натуральные.

б) Доказательство проведем индукцией по n. Для $n=1$ доказывать нечего. Допустим, что наше утверждение *чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.*

верно для всех значений параметра, меньших n, и рассмотрим множество $S_n=\{1, 2, \ldots, n\}$.

Если $m=n$, то $(n+1)/2=k$ — целое и нужное разбиение таково:

$$\{n\}, \{1, n-1\}, \{2, n-2\}, \ldots, \{(n-1)/2, (n+1)/2\};$$

если $m=n+1$, то n четно и разбиение имеет вид

$$\{1, n\}, \{2, n-1\}, \ldots, \{n/2, n/2+1\}.$$

Теперь рассмотрим 3 случая.

Случай 1: $n+1<m<2n$, *m нечетко*. Выделим из набора S_n набор S_{m-n-1}; остальные $2n-m+1$ чисел можно разбить на пары с суммой m: $\{m-n, n\}$, $\{m-n+1, n-1\}$, ..., $\{(m-1)/2, (m+1)/2\}$. Сумма чисел набора S_{m-n-1} равна

$$\frac{(m-n-1)(m-n)}{2}=\frac{m^2-m(2n+1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$=m\left(\frac{m-2n-1}{2}+k\right)$$

и делится на m, причем $m\geqslant m-n-1$, поэтому эти числа по предположению индукции также можно разбить на группы с суммой m в каждой группе.

Случай 2: $n+1<m<2n$, *m четно*. Здесь мы тоже выделим набор S_{m-n-1}, а остальные числа разобьем на пары с суммой m: $\{m-n, n\}$, $\{m-n+1, n-1\}$, ..., $\{m/2-1, m/2+1\}$, и еще одно число $m/2$. Сумму чисел набора S_{m-n+1} представим в виде $(m-2n-1+2k)(m/2)$. Она делится на $m/2$, причем $m/2\geqslant m-n-1$, так как $m/2<n$. Поэтому набор S_{m-n-1} можно разбить на нечетное число $m-2n-1+2k$ групп с суммой $m/2$, к одной из них присоединить $m/2$, а остальные объединить попарно — получатся группы с суммой m.

Случай 3: $m\geqslant 2n$. Будем разбивать набор S_n на k групп с равной суммой, которая уже автоматически будет равна m. Заметим, что $k=n(n+1)/2m\leqslant(n+1)/4$, и потому $n-2k\geqslant 2k-1>0$.

Выделим из S_n набор S_{n-2k}. Сумма чисел этого набора

$$\frac{(n-2k)(n-2k+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-k(2n+1)+2k^2$$

делится на k, причем частное от этого деления не меньше $n-2k$ так как $(n-2k)(n-2k+1)/2(n-2k)=$ $=(n-2k+1)/2\geqslant k)$.

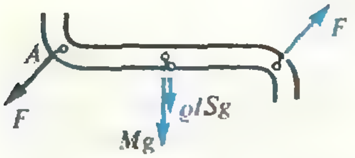
Следовательно, S_{n-2k} можно разбить по предположению индукции на k равных по сумме групп. Остальные $2k$ чисел разбиваются на k пар с равной суммой: $\{n-2k+1, n\}$, $\{n-2k+2, n-1\}$, ... Остается объединить каждую группу с одной из пар.

А. В. Анджанс

Ф1123. *К концу вертикальной водопроводной трубы при помощи короткого отрезка резиновой*

Рассмотрим силы, действующие на горизонтальную насадку (см. рисунок). Это две силы F давления воды в изгибах насадки, сила веса воды ρlSg и сила тяжести самой насадки Mg.

трубки прикреплена стальная насадка массой M. При каком расходе воды насадка будет горизонтальной? Площадь сечения насадки S, длина ее l. Трением пренебречь.



Для силы F из второго закона Ньютона, записанного для массы воды Δm, которая движется со скоростью v, получаем

$$F=\frac{\Delta m}{\Delta t}v\sqrt{2}=\frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{\Delta m}{\Delta t}\frac{1}{\rho S}\sqrt{2}=\frac{Q^2\sqrt{2}}{\rho S},$$

где $Q=\Delta m/\Delta t$ — искомый расход воды.

При равновесии сумма моментов всех действующих на насадку сил относительно оси вращения, проходящей через точку A, равна нулю:

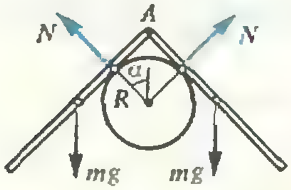
$$(Mg+\rho lSg)\frac{l}{2}-\frac{F}{\sqrt{2}}l=0.$$

Отсюда, с учетом выражения для F, получаем

$$Q=\sqrt{\rho Sg(M+\rho lS)/2}.$$

М. Г. Гаврилов

Ф1124. *На гладкое горизонтальное бревно радиусом R кладут сверху «книжку», составленную из двух однородных тонких квадратных пластинок со стороной l=4R. Пластины скреплены при помощи невесомого шарнирного стержня. Какой угол образуют пластины в положении равновесия? Будет ли это равновесие устойчивым?*



На рисунке показаны внешние силы, действующие на «книжку»: две силы тяжести mg пластинок и две силы реакции N со стороны бревна. Запишем условия равновесия «книжки» для сил в проекциях на вертикальную ось —

$$2mg-2N\cos\alpha=0$$

и для моментов сил относительно оси, проходящей через точку A,—

$$NR\,\mathrm{tg}\,\alpha-mg\frac{l}{2}\cos\alpha=0.$$

Учитывая, что $l=4R$, получаем уравнение

$$\mathrm{tg}^3\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha-2=0,$$

или

$$(\mathrm{tg}\,\alpha-1)(\mathrm{tg}^2\alpha+\mathrm{tg}\,\alpha+2)=0.$$

Решение этого уравнения дает

$$\mathrm{tg}\,\alpha=1,\ \alpha=45^\circ,\ 2\alpha=90^\circ.$$

Таким образом, в равновесии пластинки составляют друг с другом прямой угол. При этом равновесие устойчивое.

С. С. Кротов

Ф1125. *Вертикальный теплоизолированный сосуд, в котором находится одноатомный газ, закрыт поршнем массой M. В сосуде включают нагреватель мощностью N, и поршень начинает медленно двигаться вверх. За какое время он поднимется на высоту H относительно на-*

За искомое время τ к газу подводится количество теплоты $Q=N\tau$. Оно расходуется на работу по расширению газа при постоянном давлении, равную работе по равномерному поднятию поршня,—

$$A=p\Delta V=\nu R\Delta T=MgH$$

и на увеличение внутренней энергии ν молей одноатомного газа —

$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R\Delta T=\frac{3}{2}MgH.$$

Из уравнения

чального положения? Теплоемкостью поршня, трением и давлением атмосферы пренебречь.

Ф1126. *В схеме, изображенной на рисунке 1, ключ К «колеблется» между положениями 1 и 2 с частотой $f=100$ Гц; в каждом положении ключ находится одинаковое время. Найти ток через резистор. $C_1=10$ мкФ, $C_2=30$ мкФ, $R=100$ кОм.*

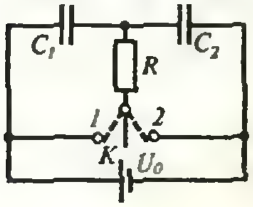


Рис. 1.

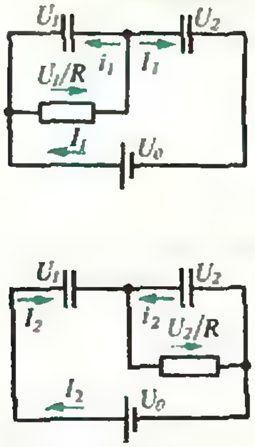


Рис. 2.

$$N\tau=MgH+\frac{3}{2}MgH$$

получаем

$$\tau=\frac{5}{2}\frac{MgH}{N}.$$

А. Р. Зильберман

Ответ на вопрос задачи очевиден: средний ток через резистор должен быть равен нулю. В самом деле, при любом отличном от нуля токе потенциал точки соединения конденсаторов со временем возрастал бы неограниченно.

Больший интерес представляет отыскание тока через батарею, считая напряжение батареи равным $U_0=10$ В.

Легко проверить, что за время нахождения переключателя в одном из положений — *1* или *2* — конденсаторы перезаряжаются незначительно. Действительно, пусть конденсатор емкостью C заряжен до напряжения U. Замкнем его на резистор сопротивлением R. По цепи пойдет ток $I=U/R$, в результате за малое время τ заряд конденсатора изменится на

$$\Delta q=I\tau=U\tau/R,$$

а напряжение — на

$$\Delta U=\Delta q/C=U\tau/(RC),$$

так что

$$\frac{\Delta U}{U}=\frac{\tau}{RC}\ll 1.$$

На самом деле изменение напряжения еще меньше, так как от батареи тоже притекает некоторый заряд.

Итак, напряжения конденсаторов можно считать постоянными. Тогда для схем, изображенных на рисунке 2, получим

$$\frac{U_1}{R}-i_1=I_1,\quad \frac{U_2}{R}-i_2=I_2.$$

Но

$$i_1\tau_1=I_2\tau_2 \text{ и } i_2\tau_2=I_1\tau_1,$$

или учитывая, что $\tau_1=\tau_2=1/(2f)$,

$$i_1=I_2 \text{ и } i_2=I_1.$$

Следовательно, в установившемся режиме

$$U_1=U_2=\frac{U_0}{2},$$

$$I_1+I_2=\frac{U_0}{2R},$$

и ток через батарею

$$I=\frac{I_1+I_2}{2}=\frac{U_0}{4R}=25 \text{ мкА}.$$

Любопытно, что в ответ не вошли значения емкостей конденсаторов. Они нам понадобились лишь для подтверждения условия $RC \gg 1/f$.

А. Р. Зильберман

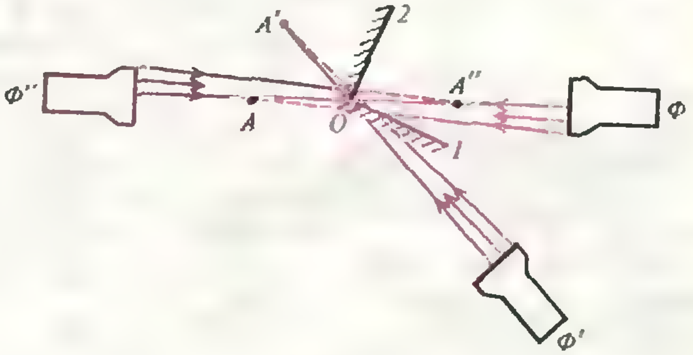
Ф1127. *Фонарик испускает пучок лучей, сходящихся на расстоянии $R_0=1$ м от него в маленькое пятно. На пути луча поместили два плоских зеркала квадратной формы так, что линия их соприкосновения пересекает ось пучка на расстоянии $r=70$ см от фонарика и перпендикулярна этой оси. Плоскости зеркал перпендикулярны друг другу, а одно из зеркал составляет угол $\alpha=30°$ с осью пучка. На каком расстоянии от фонарика сойдется теперь пучок?*

Ход лучей, испускаемых фонариком Ф, показан на рисунке. До помещения зеркал на пути лучей пучок сходился в точке A.

Рассмотрим ту часть лучей, которая сначала отражается от зеркала *1*. После отражения они идут так, как если бы их испустил фонарик Ф′, являющийся отражением фонарика Ф в зеркале *1*. Эти лучи пересеклись бы в точке A', если бы на их пути не стояло зеркало *2*. После отражения от него лучи идут так, как если бы их испустил фонарик Ф″, являющийся отражением Ф′ в зеркале *2*. Легко видеть, что Ф″ центрально симметричен Ф относительно точки O. В результате пучок сойдется в точке A'', центрально симметричной точке A и лежащей на оси пучка на расстоянии

$$x=R_0-2\,(R_0-r)=40\text{ см}$$

от фонарика.



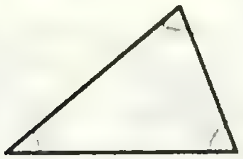
Аналогичные рассуждения показывают, что лучи, отражающиеся сначала от зеркала *2*, также пересекаются в точке A''. Положение этой точки, очевидно, не зависит от угла α.

М. М. Цыпин

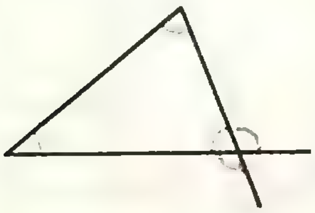
«Квант» улыбается

Сколько углов у треугольника?

— Конечно *три*. Называется-то он ТРЕугольник.



— Ну, в общем, внутренних угла — три. А если считать все углы треугольника, включая внешние, то их наберется *девять*.



— При чем тут внешние углы?

— При том, что спрашивается не «сколько внутренних углов?», а «сколько вообще углов у треугольника?». Внешний угол треугольника является видовым понятием по отношению к родовому понятию «угол треугольника», так что внешний угол является углом треугольника.

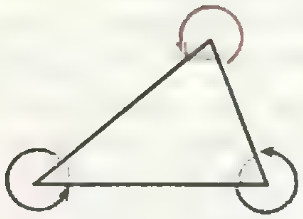
— Не согласен. Прибавление прилагательного к существительному не всегда выделяет частный случай. А то пришлось бы искать у треугольника двугранные углы, телесные углы и т. п.

— К тому же, когда чертят треугольник, то изображают только внутренние углы.

— Вы оба неправы. У треугольника *шесть* углов!

— Это почему же?

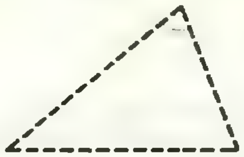
— Потому, что три угла изнутри, а еще три — извне. Они ведь изображены!



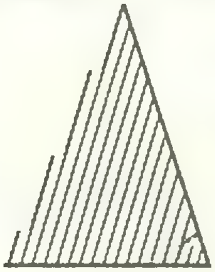
— Если считать углы по изображению, то треугольник вовсе не имеет углов, их число — *ноль*.

— Ноль?!

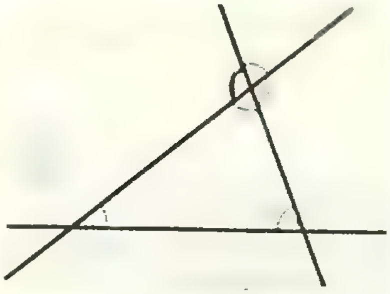
— Почему бы и нет? Вспомните определение: «Угол — это часть плоскости, ограниченной двумя лучами с общим концом». А в вашем изображении треугольника нет ни одного луча.



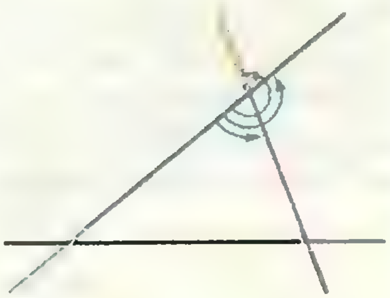
— Когда говорят «угол треугольника», то его стороны мысленно продолжают до луча.



— В таком случае у каждой вершины по 4, всего *двенадцать* углов.

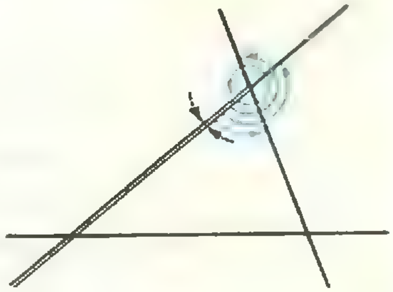


— А это смотря как считать: у каждой вершины можно увидеть до 12, всего *тридцать шесть* углов.



— Это уже чересчур!

— Вовсе нет. Если принять во внимание, что каждый луч определяет два угла с величинами 0° и 360°, то их наберется 60. *Шестьдесят!*



— Может быть, и этого вам мало?

— Да! У треугольника углов — тьма-тьмущая, *бесконечно много*.

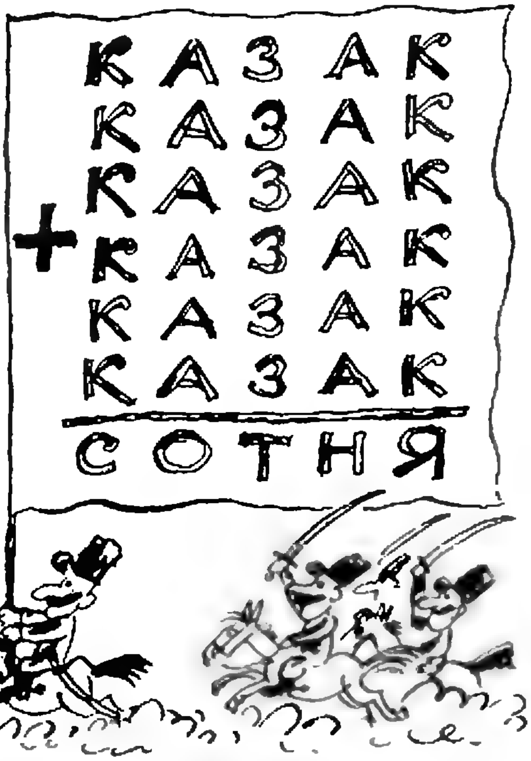
(Окончание см. на с. 56)

„Квант" для младших школьников

Задачи

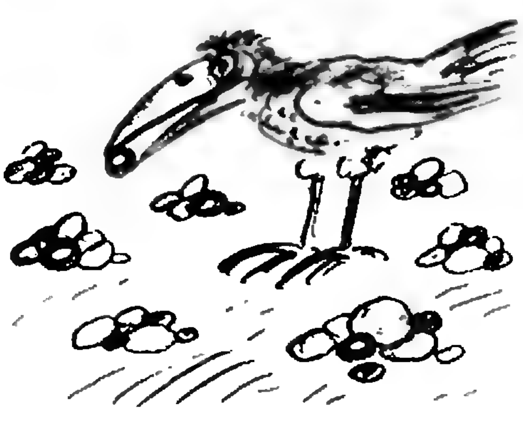
1. Найдите все представления числа 1988 в виде суммы последовательных натуральных чисел.

2. Решите арифметический ребус, заменив буквы цифрами. Одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, разным — разные.



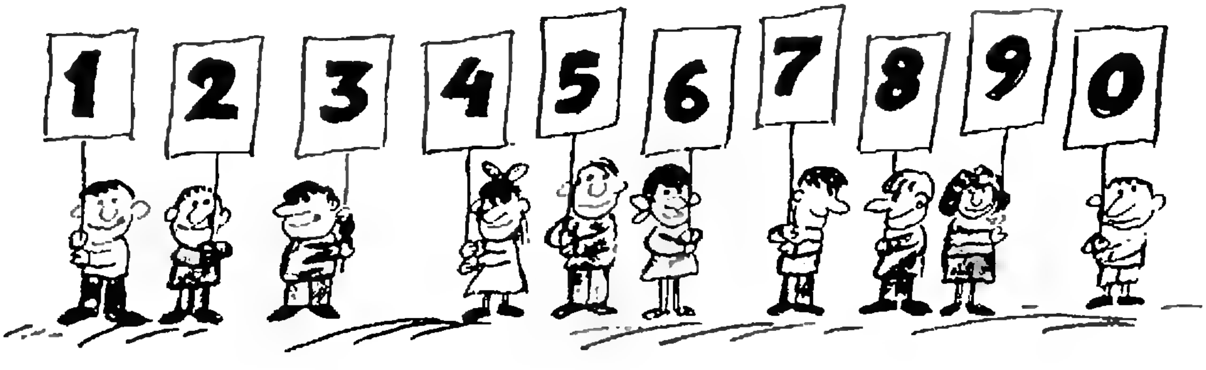
3. Два колеса покатились навстречу друг другу с одинаковой угловой скоростью. При столкновении они коснулись друг друга теми же точками, которыми касались земли в начале движения. Могут ли радиусы этих колес быть не одинаковыми?

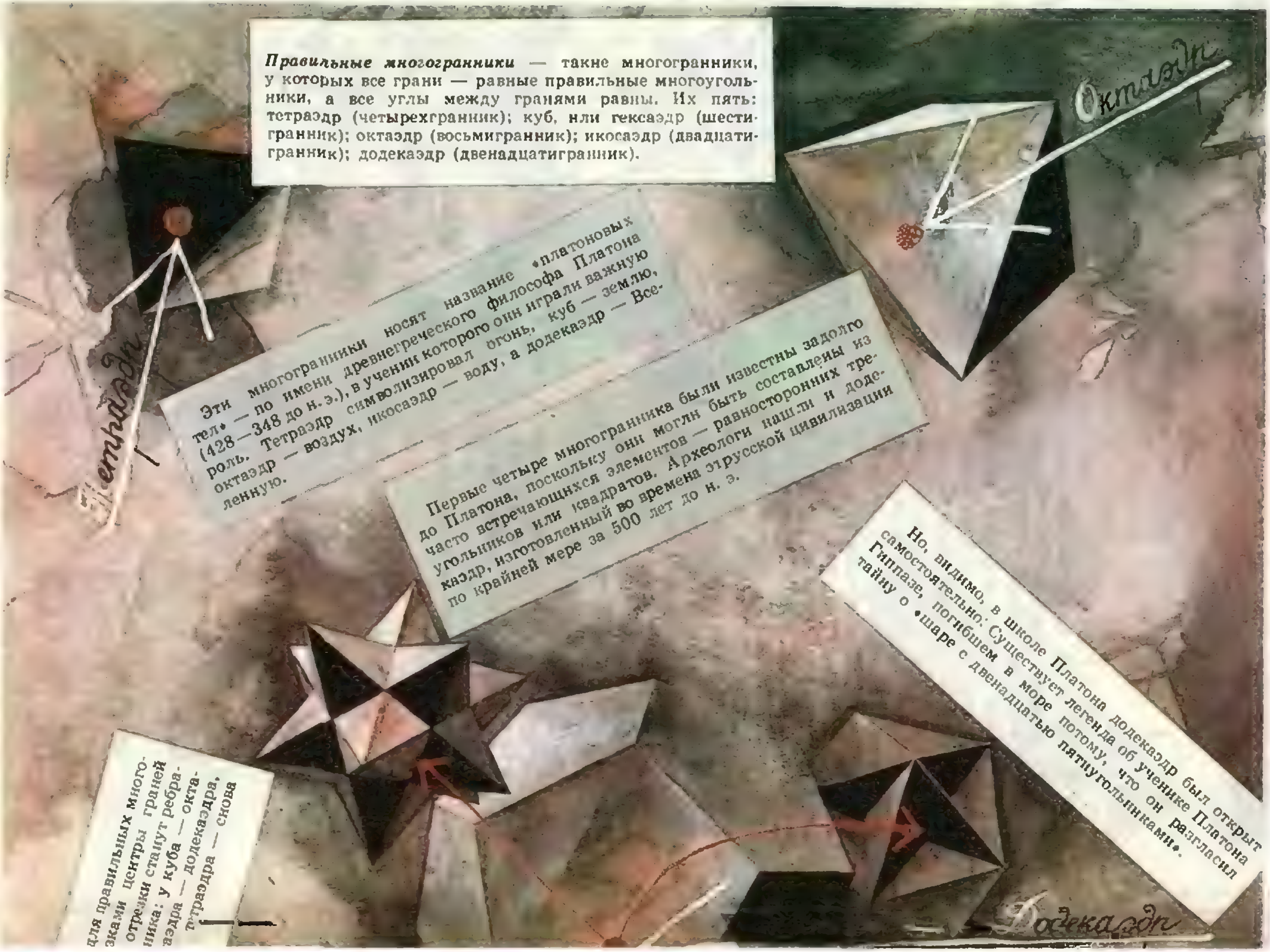
4. На столе лежит куча из 1001 камня. Из нее выкидывают камень и кучу делят на две. Затем из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, снова выкидывают камень, и снова делят одну из куч на две. И так далее. Можно ли через несколько ходов оставить на столе только кучи, состоящие из трех камней?



5. Имеется десять карточек с цифрами 1, 2, ..., 9, 0. Составьте из них три числа, которые относятся друг к другу как а) 1:3:5; б) 2:3:4. (Должны быть использованы все 10 карточек.)

Эти задачи нам предложили: *Н. К. Антонович, А. М. Домашенко, Н. Ю. Нецветаев, С. В. Рукшин, А. В. Швецов.*





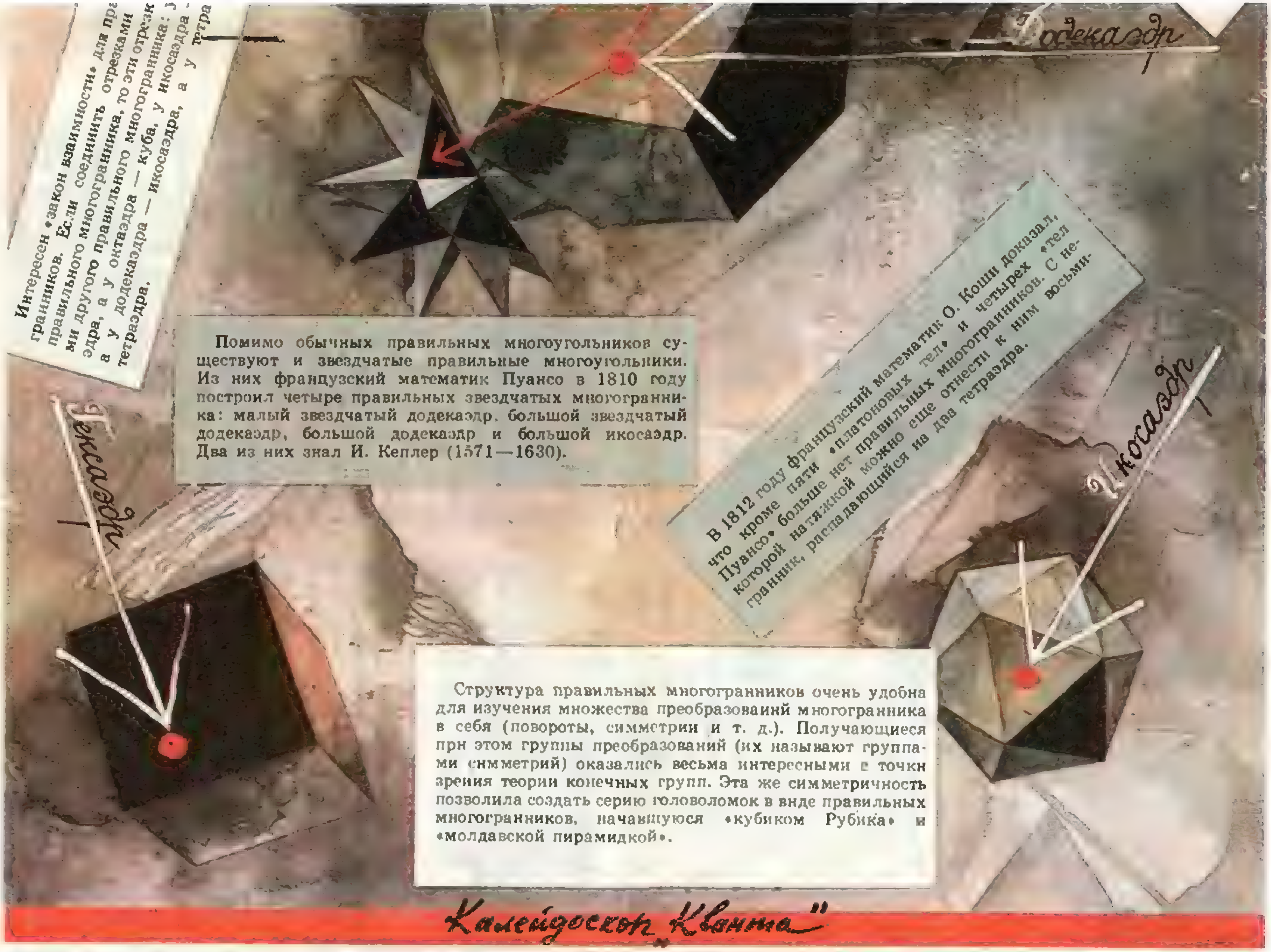
Правильные многогранники — такие многогранники, у которых все грани — равные правильные многоугольники, а все углы между гранями равны. Их пять: тетраэдр (четырехгранник); куб, или гексаэдр (шестигранник); октаэдр (восьмигранник); икосаэдр (двадцатигранник); додекаэдр (двенадцатигранник).

Эти многогранники носят название «платоновых тел» — по имени древнегреческого философа Платона (428—348 до н. э.), в учении которого они играли важную роль. Тетраэдр символизировал огонь, куб — землю, октаэдр — воздух, икосаэдр — воду, а додекаэдр — Вселенную.

Первые четыре многогранника были известны задолго до Платона, поскольку они могли быть составлены из часто встречающихся элементов — равносторонних треугольников или квадратов. Археологи нашли и додекаэдр, изготовленный во времена этрусской цивилизации по крайней мере за 500 лет до н. э.

Но, видимо, в школе Платона додекаэдр был открыт самостоятельно. Существует легенда об ученике Платона Гиппазе, погибшем в море потому, что он разгласил тайну о «шаре с двенадцатью пятиугольниками».

для правильных много-
зками центры граней
отрезки станут ребра-
ника: у куба — окта-
эдра — додекаэдра,
тетраэдра — снова

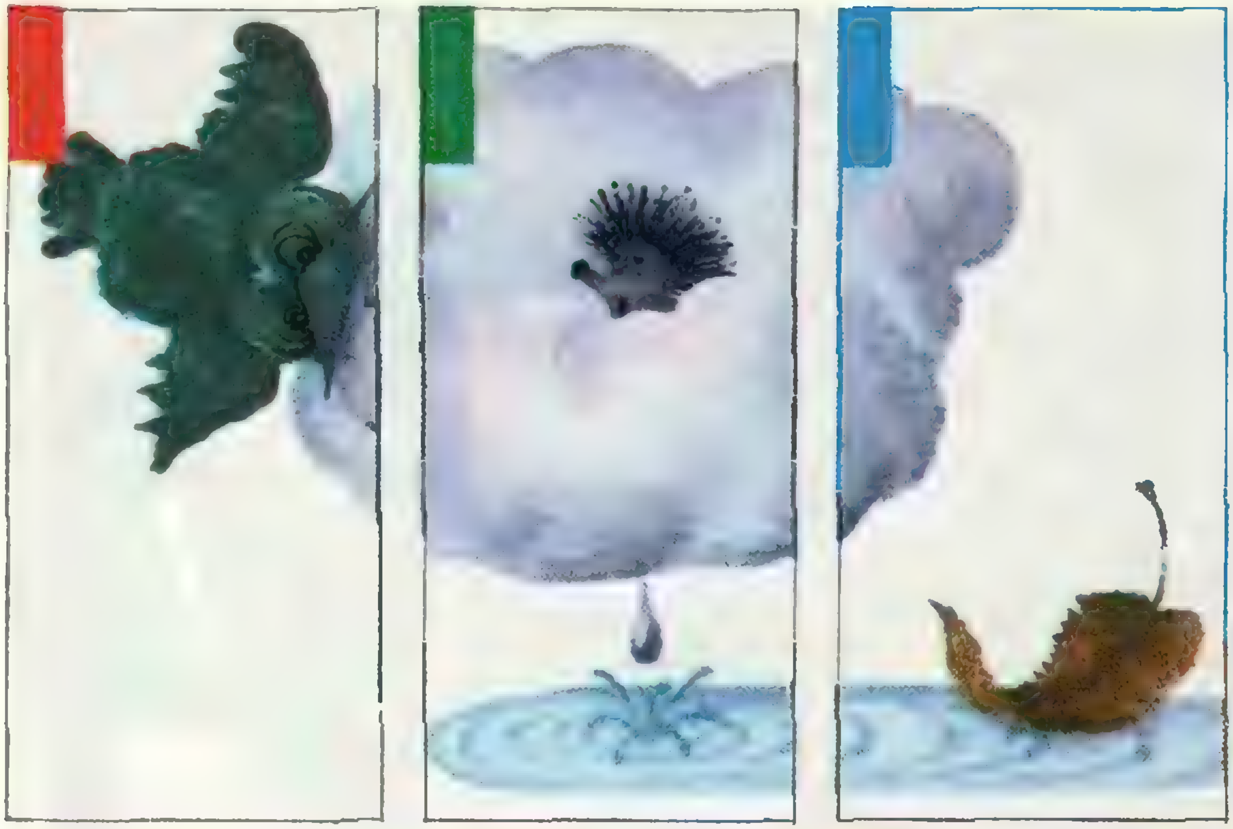


Интересен «закон взаимности» для пр
гранников. Если соединить отрезками
правильного многогранника, то эти отрезк
ми другого правильного многогранника: у
эдра, а у октаэдра — куба, у икосаэдра —
а у додекаэдра — икосаэдра, а у тетра
тетраэдра.

Помимо обычных правильных многоугольников существуют и звездчатые правильные многоугольники. Из них французский математик Пуансо в 1810 году построил четыре правильных звездчатых многогранника: малый звездчатый додекаэдр, большой звездчатый додекаэдр, большой додекаэдр и большой икосаэдр. Два из них знал И. Кеплер (1571—1630).

В 1812 году французский математик О. Коши доказал, что кроме пяти «платоновых тел» и четырех «тел Пуансо» больше нет правильных многогранников. С некоторой натяжкой можно еще отнести к ним восьмигранник, распадающийся на два тетраэдра.

Структура правильных многогранников очень удобна для изучения множества преобразований многогранника в себя (повороты, симметрии и т. д.). Получающиеся при этом группы преобразований (их называют группами симметрий) оказались весьма интересными с точки зрения теории конечных групп. Эта же симметричность позволила создать серию головоломок в виде правильных многогранников, начавшуюся «кубиком Рубика» и «молдавской пирамидкой».



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Равнодействующая — как ее найти?» предназначена восьмиклассникам, заметка «Реальный газ и его уравнение состояния» — девятиклассникам, «Принцип Гюйгенса» — десятиклассникам.

Равнодействующая — как ее найти?

Мы часто решаем задачи «с практическим содержанием», вовсе не отдавая себе отчета, насколько они сложны. Даже простой автомобиль содержит тысячи деталей, на каждую из которых действует множество сил. Просто перечислить их — и то трудно, а написать и решить столько уравнений... Однако мы умудряемся обойти это затруднение, вводя понятие равнодействующей силы. Поговорим об этом подробнее.

Для определения равнодействующей нужно все силы, действующие на тело, векторно сложить (не всегда это просто, но об этом чуть позже). Полученный суммарный вектор будет эквивалентен исходной системе сил.

Так уж и эквивалентен? Представьте, что лично вас тянут с силой 500 Н влево за левую руку и с такой же силой — вправо за правую руку. Сумма этих сил равна нулю, т. е. их как бы нет вовсе. Вам от этого легче?

На самом деле эквивалентность тут понимается в довольно узком смысле — при замене всех сил их равнодействующей не должно измениться движение тела, а вот о деформациях, разрывах и т. п. речи нет.

Какие же трудности могут возникнуть при сложении сил? Если все они приложены в одной точке — то никаких. И складывать легко, и ясно, куда приложить суммарный вектор — равнодействующую. А если силы приложены в разных точках (чаще всего так и бывает)? Тогда придется силы переносить. Как это можно сделать? Тут нам понадобится специальная физическая величина — *момент силы*.

Момент силы $\vec{F}$ относительно точки O (рис. 1) равен

$$M = Fr \sin \alpha,$$

где r — расстояние от точки O до точки приложения силы A. Можно сделать иначе — разложить силу $\vec{F}$ на две составляющие — вдоль r и перпендикулярно r. Вращающий момент создает только перпендикулярная составляющая $\vec{F}_2$:

$$M = F_2 r.$$

Конечно, это просто предыдущая формула, переписанная немного иначе, но во многих задачах удобнее пользоваться именно ею.

Легко видеть, что при переносе силы $\vec{F}$ вдоль линии ее действия момент силы не изменяется, поэтому такой перенос допустим. (Заметим, что деформации тела при переносе точки приложения силы изменяются. Это легко понять на простом примере. Потянем привязанную одним концом к стене резиновую ленту вначале за середину, а потом за второй конец — она растянется неодинаково.)

Теперь вернемся к равнодействующей. Если силы приложены в разных точках, но линии их действия пересекаются в одной,— опять все просто. Перенесем силы вдоль линий их действия в эту точку и сложим — все, как в первом случае. Если же линии действия сил не пересекаются в одной точке, задача нахождения равнодействующей усложняется.

Разберем для простоты частный случай, когда все векторы сил лежат в одной плоскости (плоская система сил). Можно попробовать решить задачу за несколько шагов — складывая силы попарно, как показано на рисунке 2. Вначале сложим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ — получим вектор $\vec{R}_1$, а потом сложим его с вектором $\vec{F}_3$. Равнодействующая $\vec{R}$ приложена в точке A.

Так можно получить ответ не во всех случаях. Проблемы возникают, если векторы сил параллельны. Рассмотрим пример: нужно найти равнодействующую параллельных сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 3). Ясно, что модуль равнодействующей равен сумме F_1 и F_2, а вот в какой точке должна быть приложена равнодействующая? Тут поможет простое рассуждение: какую бы точку приложения мы ни взяли, все равно момент равнодействующей относительно оси, проходящей через эту точку, равен нулю. Но при замене сил их равнодействующей моменты меняться не должны — значит, нужно взять такую точку, относительно которой суммарный момент исходной системы сил равен нулю. В нашем примере эту точку O можно найти из условия

$$F_1 \cdot AO = F_2 \cdot OB.$$

Если $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены в разные стороны, то точка O окажется за пределами отрезка AB, ближе к той из сил, которая по величине больше. (Убедитесь в этом самостоятельно.)

Задачи, где нужно находить равнодействующую параллельных сил, вы наверняка решали. Так, обычно силы тяжести, приложенные к разным частям тела, считают параллельными. Центр тяжести тела — это как раз и есть точка приложения равнодействующей этих сил. Вот почему, например, тело, закрепленное на оси, которая

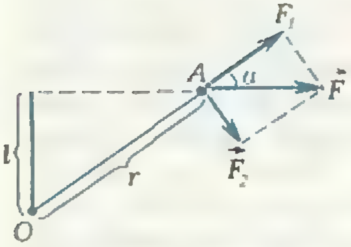


Рис. 1.

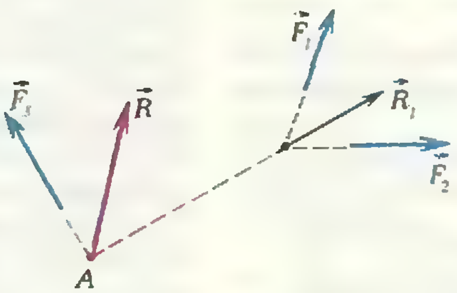


Рис. 2.

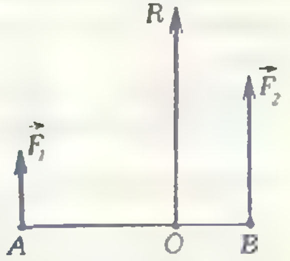


Рис. 3.

проходит через центр тяжести тела, находится в равновесии.

Есть один важный частный случай параллельной системы сил, когда равнодействующую найти нельзя. Так будет для двух параллельных сил, которые равны по величине и противоположны по направлению. Эту систему называют *парой сил*. Попытка найти точку приложения пары сил приводит к делению на нуль — найти эту точку не удается. У пары сил есть одно интересное свойство: ее момент одинаков относительно любой оси вращения (проверьте это). Оказывается, таким свойством обладает любая система сил, сумма которых равна нулю (пара сил — частный случай такой системы).

Но именно такими системами сил мы и интересуемся, когда говорим об условиях равновесия тел (статика). Одно из условий — сумма сил равна нулю. Отсюда вытекает важное следствие: уравнение моментов, т. е. второе условие равновесия — сумма моментов равна нулю, можно записывать в этом случае относительно *любой* точки, в том числе и не лежащей внутри тела. Эту точку следует выбирать из соображений простоты получающегося уравнения (удобно ее взять, например, на пересечении линий действия нескольких сил, особенно тех, которые мы не хотим находить).

А. Р. Зильберман

Реальный газ и его уравнение состояния

В известном стихотворении И. С. Никитина «Утро» есть такие красивые строки:

> ...Тишь — безлюдье вокруг.
> Чуть приметна тропинка
> росистая.
> Куст заденешь плечом — на
> лицо тебе вдруг
> С листьев брызнет роса
> серебристая.

Картина настолько знакома каждому, что обычно не вызывает никаких вопросов. А они существуют.

Откуда утром берется роса? Ни для кого не секрет — она образуется при ночном охлаждении из водяного пара, который всегда есть в воздухе. Но почему же тогда кислород и азот — основные газы атмосферы — не выпадают в виде росы? И вообще — любой ли газ может стать жидкостью? Если да, то при каких условиях?

Это — самые простые вопросы, но есть и довольно тонкие. Например, такой. Если считать водяной пар идеальным газом, то как объяснить его «перевоплощение» в состоящую из тех же молекул жидкость — воду? Ведь в идеальном газе молекулярное взаимодействие сводится к довольно редким столкновениям молекул друг с другом, а в жидкости это взаимодействие проявляется буквально на каждом шагу: практическая несжимаемость жидкости, ее поверхностное натяжение и т. п. Кроме того, водяной пар, азот, кислород и другие газы в модели идеального газа совершенно «на одно лицо», тем не менее росой утром становится только водяной пар. Почему? Все эти примеры показывают, что для объяснения превращения газа в жидкость следует «запастись» совершенно другой моделью газа.

Как вы знаете, модель идеального газа безотказно работает либо при высоких температурах, когда хаотическое тепловое движение столь интенсивно, что молекулы движутся, не обращая внимания друг на друга, либо при малых плотностях, когда между молекулами слишком большие расстояния, чтобы они могли друг друга «чувствовать». При охлаждении или сжатии газа влияние молекулярного взаимодействия становится более заметным, и именно тогда газ может превратиться в жидкость. Таким образом, чтобы перекинуть мостик от газа к жидкости, надо уже в газе учесть существование сил молекулярного взаимодействия. Соответствующая модель носит название реального газа. Уравнение состояния реального газа проще всего получить, введя поправки на взаимодействие молекул в уравнение Менделеева — Клапейрона.

Если расстояние между молекулами мало́, они резко отталкиваются друг от друга. (Именно поэтому, например, трудно сжать жидкость.) Это легко понять, представив молекулы в виде бильярдных шаров, обладающих собственным объемом. Итак, первая поправка — на размеры молекул.

Согласно уравнению идеального газа, объем V зависит от давления p по закону

$$V=\frac{\nu RT}{p},$$

где T — абсолютная температура, R — универсальная газовая постоянная, а ν — число молей газа. Значит, при очень большом давлении объем уменьшается практически до нуля. А бильярдные шары можно сжать лишь до некоторого минимального объема, который пропорционален их числу. Поэтому можно записать

$$V=\frac{\nu RT}{p}+\nu b.$$

Здесь b — константа, которая определяет суммарный объем всех «жестких» молекул, составляющих один моль данного газа (как показывают более точные расчеты, константа b равна учетверенному объему молекул). Теперь, как бы ни увеличивалось давление, объем моля газа никогда не станет меньше b.

Мы учли еще не все проявления молекулярного взаимодействия. Как бильярдные шары сами по себе не собираются в большие группы, так и молекулы газа никогда не собрались бы вместе, чтобы «организовать» плотную жидкость, если бы они друг к другу не притягивались (на расстояниях бо́льших, чем диаметр жесткого шара). Силы притяжения мешают молекулам разлететься и приводят к уменьшению давления по сравнению с тем, с которым газ действовал бы на стенки сосуда в их отсутствии. Обозначим это уменьшение давления через Δp. Тогда получаем

$$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\Delta p.$$

Попытаемся оценить Δp, полагая, что оно связано с изменением импульса (по сравнению со случаем отсутствия взаимодействия), передаваемого стенкам при ударе о них молекул газа. На подлетающие к стенкам молекулы действуют силы притяжения к остальным молекулам газа, направленные в глубь сосуда и уменьшающие поэтому их скорость. Эти силы, в первом приближении, пропорциональны плотности газа (при очень большом разрежении они вообще исчезают). Грубо можно считать, что и изменение импульса, передаваемого стенке при ударе одной молекулы, также пропорционально плотности. Но пропорционально плотности растет и среднее число ударов о стенки в единицу времени. Поэтому убыль давления Δp оказывается обратно пропорциональной объему сосуда:

$$\Delta p=\frac{a\nu^2}{V^2},$$

где a — постоянный для данного газа коэффициент.

Окончательно уравнение состояния реального газа принимает вид:

$$p=\frac{\nu RT}{V-\nu b}-\frac{a\nu^2}{V^2},$$

или, как его обычно записывают,

$$\left(p+a\frac{\nu^2}{V^2}\right)(V-\nu b)=\nu RT.$$

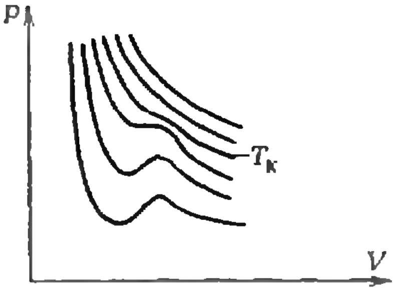
Это — знаменитое уравнение Ван-дер-Ваальса, впервые увидевшее свет в 1873 году в работе ученого «О непрерывности газообразного и жидкого состояния» (Нобелевская премия 1910 года).*)

В теории Ван-дер-Ваальса каждый газ характеризуется своими параметрами a и b, которые можно определить из эксперимента. Приведем их значения для некоторых газов:

Вещество	a, Н·м^4·моль$^{-2}$	b, м^3·моль$^{-1}$
вода H_2O	0,5464	$0{,}305\cdot10^{-4}$
азот N_2	0,1390	$0{,}391\cdot10^{-4}$
кислород O_2	0,1370	$0{,}318\cdot10^{-4}$
водород H_2	0,0244	$0{,}266\cdot10^{-4}$

---

*) Подробно о знаменитом голландском ученом и об уравнении, носящем его имя, вы можете прочитать в заметке Б. Е. Явелова «Ван-дер-Ваальс и его уравнение» («Квант», 1987, № 7).



Но не в этом главное достижение теории. Построим несколько изотерм Ван-дер-Ваальса, отвечающих разным температурам (см. рисунок). При высоких температурах изотерма Ван-дер-Ваальса мало отличается от изотермы Бойля — Мариотта. С понижением температуры различие становится все более и более заметным; наконец, при некоторой температуре зависимость $p(V)$ перестает быть монотонной. Образуется знаменитая «петля Ван-дер-Ваальса», когда при увеличении давления увеличивается и объем. Такого, конечно, быть не может. Появление петли показывает, что уравнение состояния реального газа перестает описывать действительную ситуацию. Это происходит как раз тогда, когда газ начинает превращаться в жидкость (реальная экспериментальная изотерма вместо петлеобразного участка содержит прямолинейный).

Таким образом, получается, что газ может превратиться в жидкость лишь при температуре ниже некоторой определенной температуры, называемой критической, при которой петля появляется впервые. Оказывается, критическую температуру $T_к$ можно выразить через параметры a и b, характеризующие газ:

$$T_к = \frac{1}{R}\frac{8a}{27b}.$$

Теперь у нас достаточно информации, чтобы ответить на вопросы, заданные в самом начале. Рассчитаем, пользуясь данными таблицы, критические температуры водяного пара, азота и кислорода:

$$T_{к\,H_2O} = 646\ К,\ T_{к\,N_2} = 128\ К,$$
$$T_{к\,O_2} = 155\ К.$$

Все сразу становится ясным. Критические температуры азота и кислорода слишком низки, чтобы из этих газов при ночном охлаждении могла выпасть роса. Именно поэтому мы можем по утрам любоваться безобидными водяными каплями, а не спасаться от потоков жидкого азота и кислорода.

А. С. Штейнберг

Принцип Гюйгенса

Этот принцип был сформулирован Христианом Гюйгенсом в его «Трактате о свете», опубликованном в 1690 году. В то время уже не возникало больших сложностей при описании движения частиц. В свободном пространстве частицы движутся прямолинейно и равномерно; под влиянием внешних воздействий они замедляются, ускоряются, меняют направление движения (преломляются или отражаются) — и все это можно рассчитать. Вместе с тем, законы распространения волн — отражение, преломление, огибание препятствий (дифракция) не находили объяснения. И Гюйгенс предложил принцип, на основании которого это можно было бы сделать.

Очевидно, на мысль его навели рассуждения о причинах распространения волновых процессов. От камня, брошенного в воду, по поверхности бегут круговые волны. Процесс этот продолжается и после того, как камень упал на дно, т. е. когда уже нет источника, породившего первые волны. Отсюда следовало, что источниками волн являются сами волновые

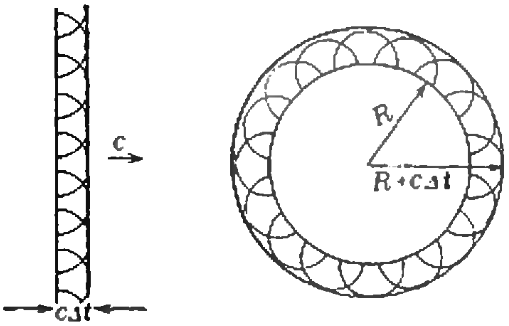


Рис. 1.

возбуждения. Гюйгенс сформулировал это следующим образом:

> Каждая точка, до которой доходит волновое возбуждение, является в свою очередь центром вторичных волн; поверхность, огибающая в некоторый момент времени эти вторичные волны, указывает положение к этому моменту фронта действительно распространяющейся волны.

Легко представить, например, как распространяются плоские и сферические волны (рис. 1). Огибающей вторичных волн через время Δt является для плоской волны плоскость, сдвинутая на расстояние $c\Delta t$, а для сферической — сфера радиусом $R+c\Delta t$, где c — скорость распространения вторичных волн, R — радиус первоначальной сферической волны.

По сути, принцип Гюйгенса в такой формулировке является просто геометрическим рецептом построения поверхности, огибающей вторичные волны. Эта поверхность отождествляется с волновым фронтом, и таким образом определяется направление распространения волны.

Гюйгенс первоначально сформулировал свой принцип для световых волн и применил его для вывода законов отражения и преломления света на границе раздела сред. Прежде всего, сам факт наличия отраженной и преломленной волн непосредственно следовал из принципа Гюйгенса, и это уже было большим успехом. По Гюйгенсу, каждая точка границы сред по мере достижения ее фронтом падающей волны становится источником вторичных волн, которые распространяются в обе граничащие среды. Результатом наложения этих вторичных волн в первой среде, из которой падает волна, является волна отраженная, а результатом наложения вторичных волн во второй среде — волна преломленная.

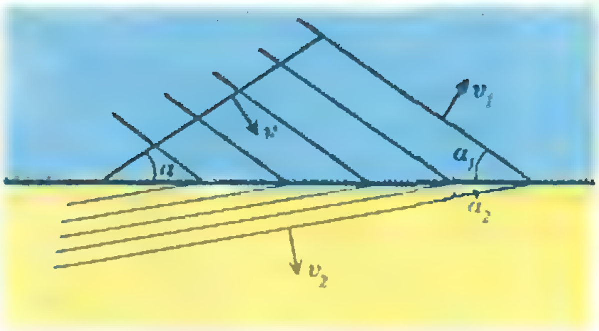


Рис. 2.

Конечно, мы на основании принципа Гюйгенса не можем ответить на вопрос об интенсивности отраженной и преломленной волн, поскольку для этого нужно знать хотя бы их физическую природу (которая в принципе Гюйгенса вообще не «участвует»). Но геометрические законы отражения и преломления совершенно не зависят ни от физической природы волн, ни от конкретного механизма их отражения и преломления. Они для всех волн одинаковы.

Пусть v — скорость плоской падающей волны, α — угол ее падения (рис. 2). Тогда фронт падающей волны бежит по границе раздела двух сред со скоростью $v/\sin\alpha$. И отраженная, и преломленная волны порождаются падающей, поэтому их фронты бегут вдоль границы с той же скоростью, т. е.

$$\frac{v}{\sin\alpha}=\frac{v_1}{\sin\alpha_1}=\frac{v_2}{\sin\alpha_2}.$$

Углы α_1 и α_2 определяют направления распространения фронтов отраженной и преломленной волн. Но так как в плоской волне лучи перпендикулярны волновым фронтам, то эти же соотношения выполняются и для отраженных и преломленных лучей.

Объяснение законов преломления и отражения явилось сильным аргументом в пользу справедливости принципа Гюйгенса. Однако, естественно, он вызывал и много сомнений и вопросов. Почему нет обратной волны (ведь вторичные источники испускают сферические волны, распространяющиеся и против фронта)? Почему свет проходит сквозь отверстие прямолинейно (ведь вторичные волны должны распространяться и в область геометрической тени)? Сам Гюйгенс считал, что все это связано с малой интенсивностью вторичных волн. Но ведь звуковые волны загибаются — мы слышим звук, источник которого находится за углом.

Ответы на эти и другие вопросы дал Огюстен Френель в начале XIX века. Он дополнил принцип Гюйгенса важным и естественным положением:

> **Результирующее волновое возмущение в данной точке пространства является следствием интерференции элементарных вторичных волн Гюйгенса.**

Вторичные волны испускаются «источниками», амплитуда и фаза колебаний которых определяются первоначальным возмущением, и поэтому такие источники когерентны. Совокупное действие этих источников, т. е. интерференционный эффект, заменяет идею Гюйгенса об огибающей, которая в теории Френеля приобрела ясный физический смысл как поверхность, где результирующая волна вследствие интерференции имеет заметную интенсивность. Модифицированный принцип Гюйгенса — Френеля позволяет более полно исследовать вопрос о распространении волн в неоднородной среде (в виду математической сложности этот вопрос выходит за рамки школьного курса физики).

Итак, надо ясно представлять как достоинства (простоту и наглядность), так и недостатки (отсутствие физического содержания) первого принципа теории распространения волн — принципа Гюйгенса.

С. А. Гордюнин

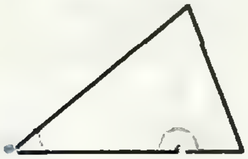
„Квант" улыбается

Сколько углов у треугольника?

(Начало см. на с. 46)

— Не бывает!

— Пожалуйста. Возьмем произвольную точку *на стороне*. *Ясно*, что треугольник имеет угол с вершиной в этой точке. Правда, он развернутый.



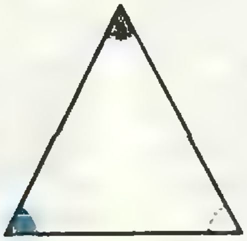
Но развернутый угол ничем не хуже неразвернутого.

— ...

— Оставим бесконечность в покое. У треугольника углов может быть от одного до трех.

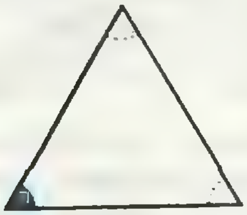
— ?!

— Возьмем, к примеру, равнобедренный треугольник. Два угла при основании равны — это ведь теорема. Но в математике равные не различаются. Так же как, например, множество $\{1, 2, 2\}$ состоит из двух элементов, а не из трех.



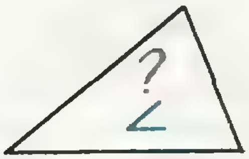
— Хотите сказать, что у равнобедренного треугольника только *два* угла?

— А у равностороннего — *один!*

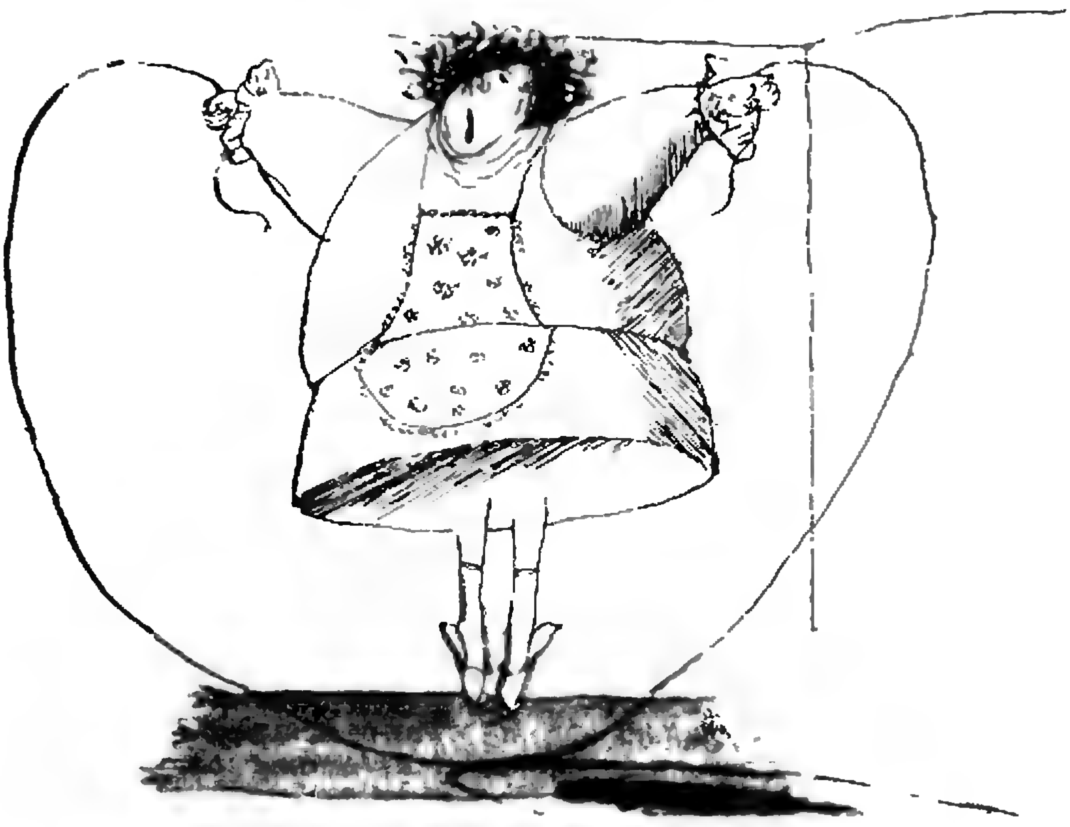


— Ну и ералаш!

Дорогой читатель, сколько, по-вашему, углов у треугольника?



А. А. Азамов



Лаборатория „Кванта"

Необычный маятник

Кандидат педагогических наук
А. И. АГАФОНОВ,
кандидат педагогических наук
С. И. СЕЛИЦЕР

Среди различных видов колебаний особое место занимают автоколебания. В механике типичным примером автоколебательной системы является маятник в часах. В электричестве широко известен ламповый генератор незатухающих колебаний.

Во многих книгах по физике можно встретить описание простой, но очень наглядной электромеханической автоколебательной системы. Предлагаем вам один из вариантов такой системы (рис. 1). Ее легко изготовить в домашних условиях из подручных материалов.

Спиральная пружина *1* выполнена из алюминиевой проволоки диаметром 1,8 мм, диаметр витка 35—40 мм, а вся длина пружины примерно 140—180 мм. Ее можно намотать, используя стеклянный баллон обычной лампы дневного света. На нижнем конце пружины укреплен электрический контакт *2*, выполненный из латуни; можно использовать также готовый контакт от какого-либо реле. Нижний контакт *3* сделан из латунной (или медной) фольги толщиной около 0,15 мм. Длину изогнутой (Г-образной) части этого контакта можно регулировать с помощью болта *4*, который зажимает латунную полоску (ее размеры в миллиметрах указаны на рисунке 2).

Источником тока *5* является батарея, составленная из девяти элементов «Сириус-373», соединенных в три параллельные группы из трех последовательно соединенных элементов каждая. Батарея дает напряжение 4,5 В,

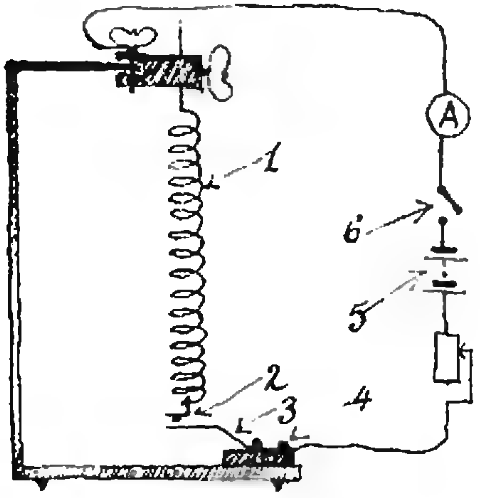


Рис. 1.

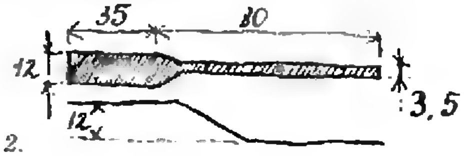


Рис. 2.

а ток, текущий в цепи, около 3 А. Вместо этой батареи можно использовать две аккумуляторные банки, соединенные последовательно.

Как же работает такой маятник?

В начальный момент ключ *6* разомкнут, и контакт *2* касается контакта *3*. При замыкании ключа по виткам пружины проходит ток, и действующая между витками сила Ампера заставляет их притягиваться друг к другу. В результате пружина сжимается, и цепь между контактами *2* и *3* разрывается. Теперь пружина начинает разжиматься, вновь замыкая цепь, и т. д. Таким образом происходят незатухающие колебания.

Как и в любой автоколебательной системе, здесь можно выделить следующие составные части:

1) постоянный источник энергии — батарея;

2) колеблющаяся система — пружина;

3) устройство, регулирующее поступление энергии в колеблющуюся систему,— пружина и контакты *2* и *3*, замыкающие цепь;

4) обратная связь — механизм, приводимый в действие внешней силой и воздействующий на источник тока. В данном случае обратная связь осуществляется так: электрический ток (внешняя сила) порождает магнитное поле, которое вызывает сжатие пружины и размыкание цепи. Появляющаяся при этом сила упругости (внутренняя сила) снова замыкает цепь.

Следует отметить, что сила тяжести пружины существенной роли не играет, поэтому такая система будет функционировать и в невесомости. Поступление энергии в колебательную систему равно потерям энергии за счет трения, поэтому такая система будет совершать незатухающие колебания до тех пор, пока не иссякнет источник энергии.

Вниманию наших читателей!

Магазин «Академкнига» г. Харькова высылает наложенным платежом книги издательства «Наука»:

Ахиезер А. И., Рекало М. П. *Элементарные частицы*.— 1986.— 85 к.

Кострикин А. И. *Вокруг Бернсайда*.— 1986.— 2 р. 60 к.

Майер В. В. *Полное отражение света в простых опытах*. (Библиотечка физико-математической школы).— 1986.— 25 к.

Никитин Е. М. *Теоретическая механика для техникумов*. Изд. 11-е, испр.— 1983.— 80 к.

Никифоровский В. А. *Великие математики Бернулли*. (История науки и техники).— 1984.— 60 к.

Ойхман Е. Г. *Графические системы для СМ ЭВМ. Интерактивные системы для проектирования печатных плат на СМ ЭВМ*. (Библиотечка программиста).— 1986.— 75 к.

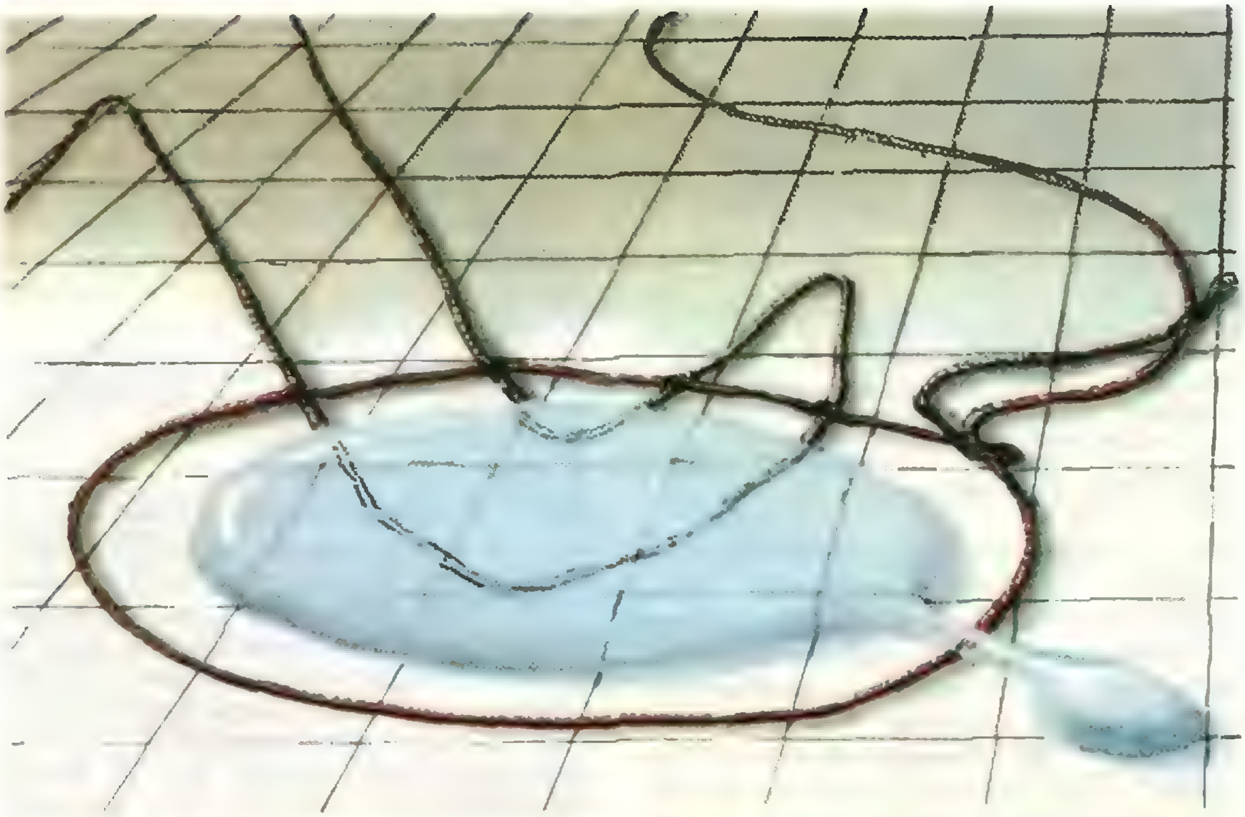
Силин А. А. *Трение и мы*. (Библиотечка «Квант»).— 1987.— 35 к.

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах*. (Библиотечка «Квант»).— 1986.— 35 к.

Успенский В. А. *Теорема Геделя о неполноте*. (Популярные лекции по математике).— 1982.— 15 к.

Успенский В. А. *Что такое нестандартный анализ?* — 1987.— 20 к.

Заказы на книги направляйте по адресу: 310078 г. Харьков, ул. Чернышевского, 87, магазин «Академкнига».



Математический кружок

О плоских кривых

Кандидат физико-математических наук
С. Л. ТАБАЧНИКОВ

Точки самопересечения, двойные касательные и точки перегиба

Бросьте на стол длинную веревочную петлю, и она образует замкнутую кривую. Такие кривые — наш основной предмет исследования.

Точки, в которых кривая пересекает себя, называются *точками самопересечения*. Например, у «восьмерки» такая точка одна, а у окружности их нет. *Двойной касательной* называется такая прямая, которая касается кривой дважды. Двойные касательные бывают двух видов: *внешние*, если небольшие кусочки кривых в точках касания лежат по одну сторону от касательной, и внутренние — если по разные стороны (рис. 1). Вся кривая вовсе не должна лежать по одну сторону внешней двойной касательной — этим свойством обладают лишь ее малые участки.

Нас будут интересовать еще *точки перегиба* кривой. Представим, что мы движемся по кривой и поворачиваем, например, влево — красный участок на рисунке 2. В некоторой точке направление поворота может измениться — синий участок. Эта точка, граничная между синим и красным участком, и называется точкой перегиба. Если у кривой нет точек перегиба, то она все время поворачивается в одну сторону (рис. 3).

Обойдем кривую, раскрашивая ее в два цвета, как на рисунке 2, и вернемся в исходную точку. Красные и синие участки чередуются, поэтому тех и других равное число. Количество точек перегиба равно общему числу красных и синих участков, т. е. четно. Мы доказали первую теорему о плоских замкнутых кривых:

число точек перегиба четно.

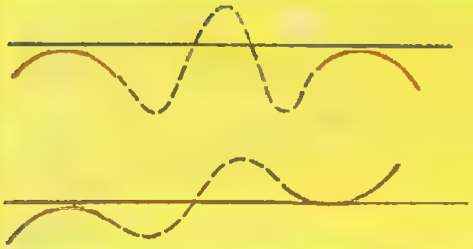


Рис. 1.

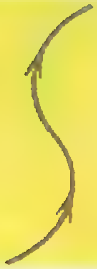


Рис. 2.

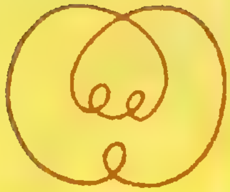


Рис. 3.

Упражнение 1. Заполните таблицу, в которой p — число внешних, q — внутренних двойных касательных, r — точек перегиба, n — точек самопересечения кривой.

Типичные кривые

Нас интересуют *типичные свойства* кривых, т. е. такие свойства, которые сохраняются, если кривую слегка «пошевелить». Например, если у кривой есть такая точка самопересечения, как на рисунке 4,*а* *(двойная точка)*, то при шевелении она не исчезнет. Если же кривая проходит через некоторую точку три раза, то при малом шевелении эта точка распадется на три двойные (рис. 4, *б*). Значит, двойные точки — типичные точки самопересечения, а тройные — нет. Точно так же малым шевелением можно устранить другие нетипичные ситуации — например, когда двойная касательная касается кривой еще в одной точке, т. е. является не двойной, а тройной касательной.

Упражнение 2. Что может произойти с точкой самопересечения на рисунке 4,*в* при малом шевелении?

Основная теорема

Надеюсь, что вы выполнили упражнение 1 и заполнили таблицу (если нет, посмотрите ответ в конце журнала). Числа в каждом столбце таблицы удовлетворяют уравнению

$$p = q + r/2 + n.$$

Наша основная теорема утверждает, что это соотношение выполнено для любой замкнутой плоской кривой.

Для доказательства нужно обойти кривую в двух противоположных направлениях. Начнем обход и будем следить за числом точек пересечения касательного луча с кривой (рис. 5). Как видно из рисунка 6, это число изменяется в следующих случаях:

при проходе двойной точки — *уменьшается на* 1;

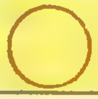
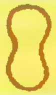
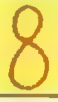
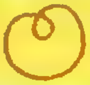
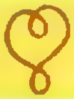
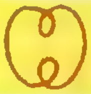
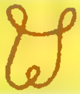
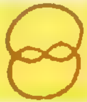
при проходе точки перегиба — уменьшается на 1;

при проходе точки касания внешней двойной касательной увеличивается на 2;

при проходе точки касания внутренней двойной касательной — уменьшается на 2.

Сделаем полный обход кривой и подсчитаем изменение числа пересечений касательного луча с кривой. Каждая точка перегиба уменьшает это число на 1, поэтому общий вклад точек перегиба равен ($-r$). Общий вклад двойных точек равен ($-2n$), так как каждую двойную точку мы

Таблица

								
p								
q								
r								
n								

проходим дважды. Чтобы подсчитать вклад двойных касательных, разобьем их общее число на три слагаемых в соответствии с рисунком 7. Вклад двойных касательных за обход окажется равным $2(p_1+2p_2)-2(q_1+2q_2)$. После обхода число точек пересечения луча с кривой не изменилось, поэтому

$$-r-2n+2p_1+4p_2-2q_1-4q_2=0.$$

Обойдем теперь кривую в противоположном направлении. При этом стрелки на рисунке 7 поменяют направления, т. е. числа p_2 и p_3, q_2 и q_3 поменяются местами. Мы получим уравнение

$$-r-2n+2p_1+4p_3-2q_1-4q_3=0.$$

Для доказательства теоремы остается сложить два полученные равенства и результат разделить на 4.

Эта теорема содержит необходимые условия того, что числа p, q, r и n равны числам внешних и внутренних двойных касательных, точек перегиба и двойных точек плоской кривой. А как обстоит дело с достаточностью? Пусть у кривой нет ни двойных точек, ни точек перегиба, т. е. $r=n=0$. Тогда кривая *выпуклая*, и у нее нет также и двойных касательных. Однако равенство $p=q+r/2+n$ не запрещает равных положительных p и q. Значит, условие теоремы не является достаточным.

Тем не менее, это условие становится достаточным, когда у кривой есть точки перегиба:

если r — четное положительное число и $p=q+r/2+n$, то существует замкнутая плоская кривая с данными p, q, r, n.

Случай кривых без точек перегиба более сложный:

если $r=0$, то число внутренних двойных касательных q четно и $q\leqslant(2n+1)(n-1)$;

если $q\leqslant n(n-1)$ и $p=q+n$, то существует замкнутая плоская кривая с $r=0$ и данными p, q, n.

Доказательства этих теорем выходят за рамки статьи. Сами результаты довольно «свежие» — они получены американским математиком Б. Гальперном около 10 лет назад. А основная теорема этого пункта до-

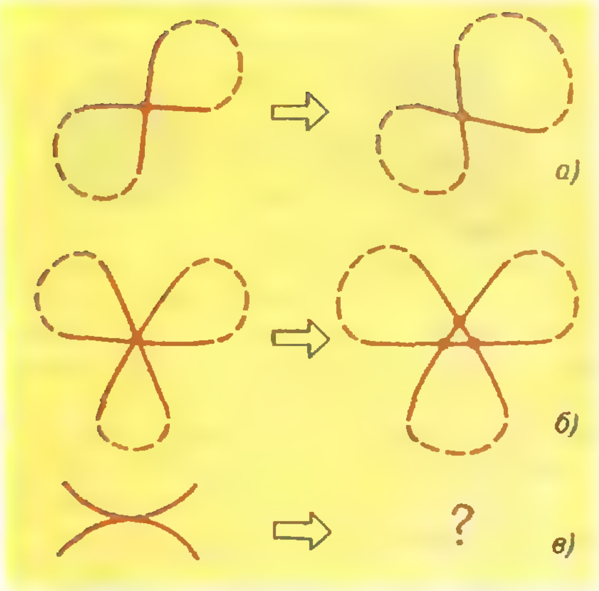


Рис. 4.

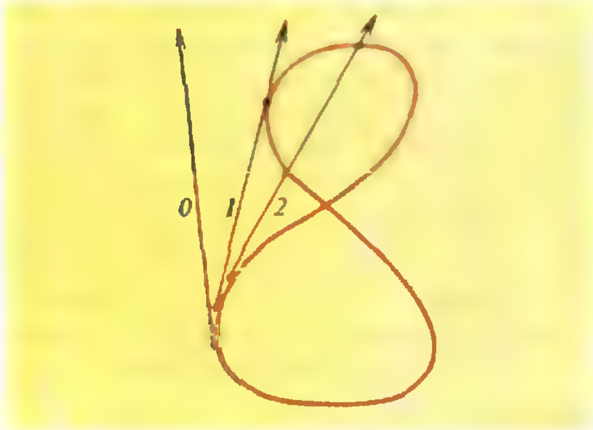


Рис. 5.

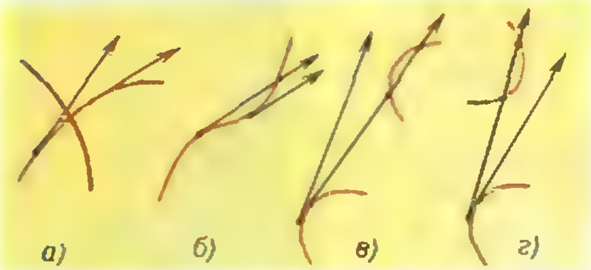


Рис. 6.

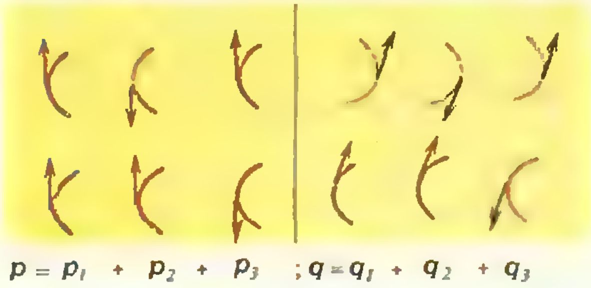


Рис. 7.

казана датским математиком Ф. Фабрициусом-Бьерре в 1962 году.

Упражнения

3. Придумайте кривую, у которой $p=3$, $q=0$, $r=2$, $n=2$.

4. Дана точка, не лежащая на плоской кривой. Докажите, что число касательных, проведенных через эту точку, четно. Подсказка: проведем прямую через точку и будем ее поворачивать.

5. Даны две плоские кривые. Пусть p — число их общих внутренних двойных касательных, а q — число внешних двойных касательных, n — число точек пересечения кривых. Докажите, что $p=q+n$.

Число вращения кривой

Обойдем плоскую кривую и вернемся в начальную точку. Во время обхода касательный вектор как-то поворачивался и в конце вернулся в исходное положение. Значит, касательный вектор совершил целое число поворотов. Это (неотрицательное целое) число называется *числом вращения кривой*. Например, число вращения окружности равно 1, а число вращения восьмерки равно нулю.

Упражнение 6. Чему равны числа вращения кривых из упражнения 1?

При непрерывном изменении кривой число вращения не меняется. Действительно, при малом шевелении число вращения может измениться только мало. Но число вращения целое, а целое число может измениться лишь скачком. Поэтому при непрерывном изменении кривой число вращения вообще не изменяется. Это свойство можно использовать при вычислении числа вращения. Например, кривую на рисунке 8 можно «раздуть» в окружность, поэтому ее число вращения такое же, как у окружности, т. е. 1.

Доказанная теорема доставляет необходимый признак того, что одну кривую можно деформировать в другую: их числа вращения должны быть равны. И здесь снова встает вопрос о достаточности: верно ли, что если числа вращения равны, то кривые можно продеформировать друг в друга? Ответ на этот вопрос положительный, но мы не будем этого доказывать.*)

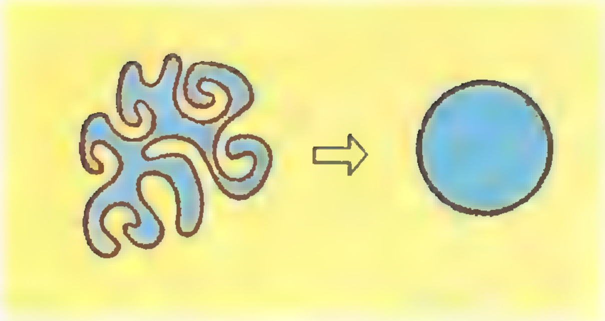


Рис. 8.

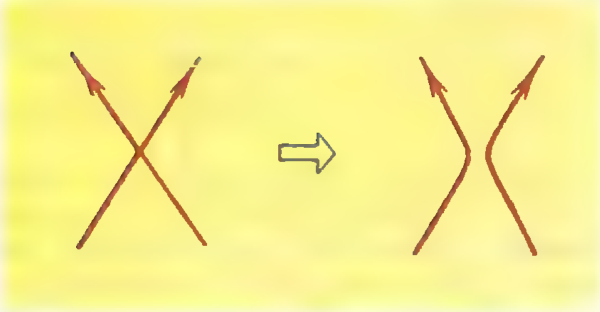


Рис. 9.

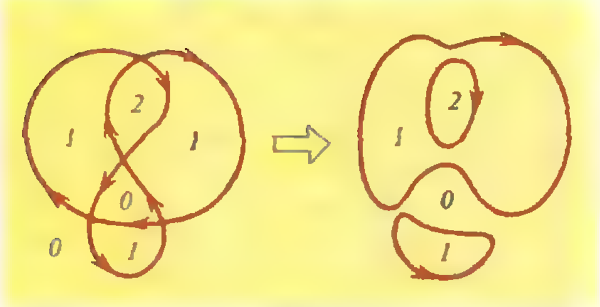


Рис. 10.

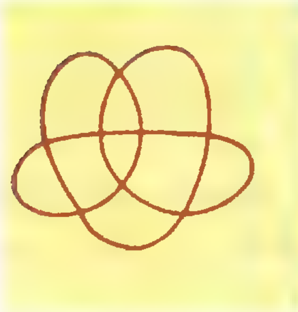


Рис. 11.

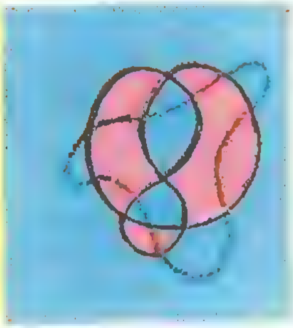


Рис. 12.

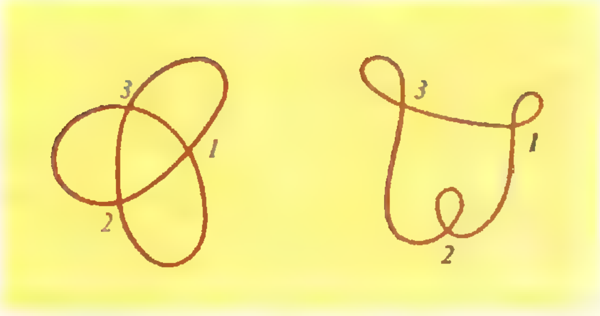


Рис. 13.

---

*) См., например, статью *С. В. Матвеева* «Расправление контуров на плоскости» («Квант», 1983, № 4).

Упражнения

7. Чему равно число вращения кривой без двойных точек?

8. Докажите, что если число вращения кривой равно нулю, то у кривой есть точки перегиба.

Существует другой способ, который почти автоматически приводит к вычислению числа вращения кривой. Выберем на кривой направление и сделаем в каждой двойной точке «перестройку», как изображено на рисунке 9. Кривая распадается на несколько непересекающихся кривых (рис. 10). Подсчитаем число таких кривых, ориентированных по и против часовой стрелке, и найдем модуль разности этих двух чисел. Это и есть число вращения исходной кривой. Например, для кривой на рисунке 10 число вращения равно 2—1=1.

Мы определили число вращения и показали, как его вычислять. А как оно связано с числом двойных точек кривой? Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что каждая перестройка увеличивает число кривых на рисунке не больше чем на 1. Поэтому если у исходной кривой было n двойных точек, то в конце получится не более $n+1$ кривых. Итак,

число вращения не превосходит числа ее двойных точек плюс 1.

Это неравенство получено знаменитым американским математиком Х. Уитни.

Упражнение 9. Докажите следующую теорему:

число вращения кривой имеет ту же четность, что и число ее двойных точек плюс 1

Степень кривой относительно точки

Плоская кривая делит плоскость на части. Возьмем точку O в одной из этих частей. Пусть точка A обходит кривую; будем следить за лучом OA. Когда точка A вернется в исходное положение, луч OA совершит целое число оборотов. Это (неотрицательное целое) число называется *степенью кривой относительно точки O*. Если точка O перемещается по плоскости, не попадая на кривую, то степень не меняется. Если же точка «перепрыгивает» через кривую, степень может измениться.

Применение перестроек из предыдущего пункта позволяет вычислять и степень кривой относительно точки. Делается это так же, как при вычислении числа вращения; — после перестроек кривая распадается на несколько непересекающихся кривых, а затем подсчитывается число этих кривых, содержащих внутри точку O и ориентированных по и против часовой стрелки. Модуль разности этих двух чисел и есть степень кривой. На рисунке 10 в каждой из частей, на которые кривая делит плоскость, написана степень относительно любой из точек, лежащих в этой части.

Упражнение 10. Расставьте степени кривой относительно точек на рисунке 11.

Раскрасим плоскость в два цвета: в синий — те части, в которых написано четное, а в красный — те, в которых написано нечетное значение степени (рис. 12). Пусть есть еще одна кривая, пересекающая данную. Эта вторая кривая тоже окажется окрашенной в два цвета, причем синие и красные участки на ней чередуются. Значит, тех и других равное число. Точки пересечения кривых разделяют разноцветные участки, поэтому их столько, сколько тех и других вместе. Следовательно,

число точек пересечения двух замкнутых плоских кривых четно.

Эта последняя теорема возвращает нас к началу статьи, где мы доказали четность числа точек перегиба. Кривая нашего рассказа замкнулась и нам пора ставить точку.

Упражнение 11. Занумеруем произвольным образом точки самопересечения кривой. Будем обходить кривую, записывая номера двойных точек в том порядке, в котором они встречаются при обходе. Например, кривым на рисунке 13 отвечают последовательности 123123 и 112233. В каждой подобной последовательности каждое число встречается дважды. Докажите, что *между любыми двумя одинаковыми числами стоит четное число членов последовательности* (теорема Гаусса).

Подсказка: сделайте одну перестройку и воспользуйтесь последней теоремой.

Практикум абитуриента

Гармонические колебания

Кандидат физико-математических наук
Е. Е. ГОРОДЕЦКИЙ

Механизм возникновения свободных гармонических колебаний в любой механической системе всегда один и тот же. Это появление возвращающей силы при отклонении системы от положения устойчивого равновесия. В этой статье речь пойдет только о гармонических колебаниях. Хотя природа возвращающей силы в каждом конкретном случае может быть своя, уравнения движения, описывающие колебания, одинаковы.

Большинство задач на колебания выглядят примерно так. Дана некоторая система, которая может совершать колебания около своего положения равновесия. Известен способ возбуждения колебаний, т. е. заданы начальные условия. Вопрос первый: найти частоту (или период) колебаний. Вопрос второй: найти их амплитуду и начальную фазу и записать зависимость колеблющейся величины от времени. Вопрос третий: найти, через какое время (или какую долю периода) колеблющаяся величина принимает заданное значение. Ответы на эти вопросы проиллюстрируем на хорошо известном примере пружинного маятника. Заодно сформулируем общий алгоритм решения задач такого типа.

Задача 1. *Дана система, изображенная на рисунке 1. Масса тела m, жесткость пружины k. Тело сместили из положения равновесия вправо на величину x_0 и толкнули влево, сообщив ему скорость v_0. Найдите частоту, амплитуду и начальную фазу колебаний. Трения нет.*

Запишем для тела второй закон Ньютона в проекциях на ось X:

$$F_{\text{упр}}=ma,$$

где $F_{\text{упр}}$ — сила упругости, действующая на тело со стороны пружины, a — ускорение тела. Если отклонение тела от положения равновесия в произвольный момент времени t равно x, то по закону Гука $F_{\text{упр}}=-kx$. Ускорение тела по определению равно второй производной координаты по времени: $a=x''$. Теперь уравнение движения тела можно записать в виде

$$mx''+kx=0.$$

Это уравнение, впрочем как и уравнение любых других колебаний, представляет собой сумму двух членов: один из них включает неизвестную функцию времени (в данном случае x), а другой — вторую производную этой функции по времени (x'').

Как известно, решением такого уравнения является гармоническая функция

$$x=x_m\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Здесь x_m — амплитуда, ω — частота (точнее — циклическая частота), φ_0 — начальная фаза колебаний. Непосредственной подстановкой решения в уравнение легко найти частоту колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Заметим (и это очень важно), что полученный ответ является частным случаем общего правила. Оно состоит в следующем. Если уравнение колебаний получено, то квадрат частоты колебаний равен отношению коэффициента при неизвестной функции (в данном случае $x(t)$) к коэффициенту при второй производной этой функции по времени ($x''(t)$).

А как же амплитуда x_m и начальная фаза φ_0? Для определения этих величин давайте снова вернемся к условию: тело сместили на x_0 вправо и толкнули со скоростью v_0 влево. Здесь речь идет о том, как именно возбудили колебания, т. е. о начальных условиях. В различных задачах они могут быть заданы по-разному, но смысл их всегда один и тот же: для начального момента времени заданы конкретные значения каких-то величин. В нашем случае заданы значения смещения тела и его скорости (точнее — проекции скорости на ось X):

$$\text{при } t=0 \quad x=x_0 \text{ и } v=-v_0.$$

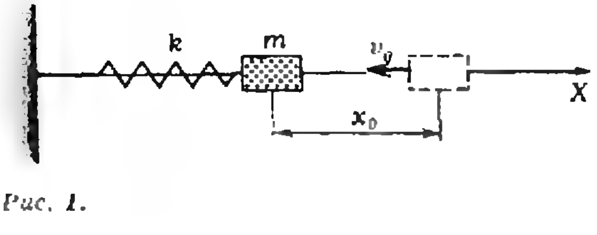


Рис. 1.

Так как зависимость смещения от времени нам уже известна:

$$x=x_m\sin(\omega t+\varphi_0),$$

нетрудно найти и скорость:

$$v=x'=x_m\omega\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Положим в этих выражениях $t=0$:

$$x_0=x_m\sin\varphi_0,$$

$$-\frac{v_0}{\omega}=x_m\cos\varphi_0.$$

Это два уравнения с двумя неизвестными: x_m и φ_0. Поделив одно уравнение на другое, получим

$$\operatorname{tg}\varphi_0=-\frac{x_0\omega}{v_0},$$

или

$$\varphi_0=\operatorname{arctg}\left(-\frac{x_0}{v_0}\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

Возведя оба уравнения в квадрат и сложив, найдем

$$x_m^2=x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2},$$

или

$$x_m=\sqrt{x_0^2+\frac{mv_0^2}{k}}.$$

Задача 2. *Телу на пружине (см. задачу 1), находящемуся в положении равновесия, сообщили направленную вправо скорость v_0. Найдите: а) через какую часть периода потенциальная энергия системы впервые станет в три раза больше кинетической, б) через какое время скорость тела впервые обратится в ноль.*

а) При колебаниях тела на пружине система обладает запасом потенциальной энергии упругой деформации

$$W_p=\frac{kx^2}{2}=\frac{kx_m^2\sin^2(\omega t+\varphi_0)}{2}$$

и кинетической энергии

$$W_k=\frac{mv^2}{2}=\frac{mx_m^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi_0)}{2}.$$

В искомый момент t

$$\frac{W_p}{W_k}=3.$$

Подставляя сюда выражения для потенциальной и кинетической энергии и учитывая, что $\omega^2=4\pi^2/T^2=k/m$, получим

$$\operatorname{tg}^2(\omega t+\varphi_0)=3,$$

или

$$\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0=\frac{\pi}{3}+\pi n.$$

Из начальных условий:

$$\text{при } t=0 \; x=0 \text{ и } v=v_0$$

получаем

$$x_m \sin\varphi_0=0 \text{ и } x_m\omega\cos\varphi_0=v_0.$$

Решая эти уравнения, находим

$$\varphi_0=0 \text{ и } x_m=\frac{v_0}{\omega}.$$

Отношение энергий впервые станет равным 3 при $n=0$, откуда окончательно имеем

$$t=\frac{T}{6}.$$

б) Мы уже использовали общее выражение для скорости

$$v=x_m\omega\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Подставляя сюда найденные значения амплитуды и начальной фазы, получим, что в нашем случае скорость меняется по закону

$$v=v_0\cos\omega t.$$

В искомый момент времени $v=0$, т. е.

$$\omega t=\frac{\pi}{2},$$

или

$$t=\frac{\pi}{2\omega}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Задача 3 (на первый взгляд совсем не относящаяся к делу). *Санки массой m и длиной l скользят со скоростью v_0 по гладкому льду. Неожиданно лед кончается, и санки въезжают на асфальт, где коэффициент трения равен μ. Известно, что санки заехали на асфальт лишь частично. Найдите время до полной остановки санок.*

Запишем второй закон Ньютона для санок в проекциях на ось X (рис. 2):

$$F_{\text{тр}}=ma.$$

В тот момент, когда на асфальте оказалась часть санок длиной x, действующая на санки сила трения равна

$$F_{\text{тр}}=-\mu\frac{m}{l}xg$$

(здесь mx/l — масса той части санок, которая находится на асфальте). Подставляя выражение для $F_{\text{тр}}$ в предыдущее равенство и учитывая, что $a=x''$, получим

$$mx''+\mu\frac{m}{l}gx=0.$$

Это точно такое же уравнение, как и для тела на пружине (роль жесткости пружины k играет величина $\mu mg/l$). В момент, когда санки начали переходить со льда на асфальт,

$$x=0 \text{ и } v=v_0.$$

Таким образом, наша задача свелась к последнему вопросу предыдущей задачи, где требовалось найти время обращения скорости в ноль. Там было получено, что искомое время

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Подставляя вместо k величину $\mu mg/l$, получим

$$t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

Задача 4. *На поверхности воды плавает прямоугольный брусок массой m и площадью поперечного сечения S (рис. 3). Ему толчком сообщают скорость v_0, направленную вниз. Найдите частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний.*

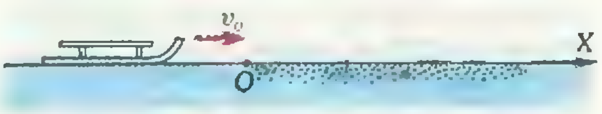


Рис. 2.

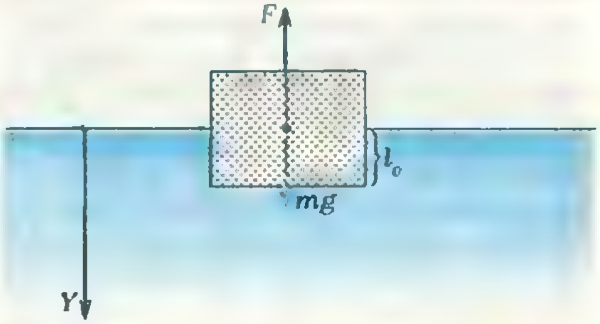


Рис. 3.

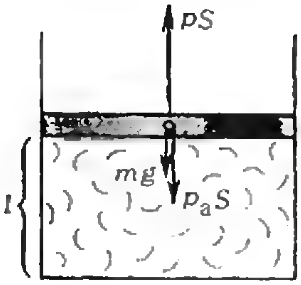


Рис. 4.

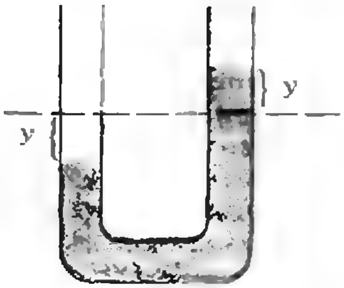


Рис. 5.

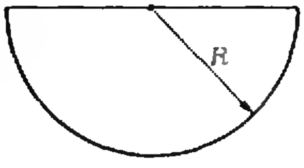


Рис. 6.

В положении равновесия глубина погружения тела в воду l_0 определяется равенством силы тяжести mg и выталкивающей силы $F=\rho_\text{в}Sl_0g$ (здесь $\rho_\text{в}$ — плотность воды):

$$mg=\rho_\text{в}Sl_0g.$$

При колебаниях, например в момент, когда глубина погружения тела равна l_0+y, второй закон Ньютона записывается в виде:

$$mg-\rho_\text{в}S(l_0+y)g=ma,$$

где $a=y''$. Вычитая из второго уравнения первое, получаем

$$-\rho_\text{в}Sgy=my'',$$

или

$$y''+\frac{\rho_\text{в}Sg}{m}y=0.$$

Это — уже знакомое вам уравнение колебаний. Его решение имеет вид:

$$y=y_m\sin(\omega t+\varphi_0),\text{ где }\omega=\sqrt{\frac{\rho_\text{в}Sg}{m}}.$$

Для определения амплитуды и начальной фазы обратимся к начальным условиям:

при $t=0$ $y=0$ и $v=v_0$.

Так как $v=y'=y_m\omega\cos(\omega t+\varphi_0)$, получаем

$y_m\sin\varphi_0=0$ и $y_m\omega\cos\varphi_0=v_0$.

Отсюда

$$\varphi_0=0\text{ и }y_m=\frac{v_0}{\omega}=v_0\sqrt{\frac{m}{\rho_\text{в}Sg}}.$$

Задача 5. *Цилиндрический сосуд с газом закрыт поршнем массой m и площадью поперечного сечения S (рис. 4). В равновесии поршень находится на высоте l от дна сосуда. В какой-то момент поршень смещают из положения равновесия вниз на величину h_0 и отпускают. Определите частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний. Атмосферное давление $p_\text{а}$ известно. Считать, что в процессе колебаний температура газа остается постоянной.*

Равновесие поршня описывается уравнением

$$mg+p_\text{а}S-pS=0,$$

где p — давление газа. При отклонении от равновесия, например при смещении поршня вниз на малую величину y, давление газа увеличилось и стало равным $p'=p+\Delta p$. Уравнение движения поршня можно записать в виде:

$$mg+p_\text{а}S-(p+\Delta p)S=ma.$$

Из двух уравнений получим

$$-\Delta p\,S=ma.$$

Теперь рассмотрим газ. Согласно закону Бойля — Мариотта,

$$pSl=(p+\Delta p)(l-y)S,$$

или, если пренебречь малой величиной Δpy,

$$\Delta pl-py=0,$$

откуда

$$\Delta p=\frac{py}{l}=\frac{(mg+p_\text{а}S)}{lS}y.$$

Учитывая, что $a=y''$, получаем

$$my''+\frac{mg+p_\text{а}S}{l}y=0,$$

т. е. уравнение колебаний. Из этого уравнения, зная начальные условия, находим частоту, начальную фазу и амплитуду колебаний:

$$\omega=\sqrt{\frac{mg+p_\text{а}S}{ml}},\ \varphi_0=\frac{\pi}{2},\ y_m=h_0.$$

Задача 6. *Найдите частоту колебаний жидкости, налитой в U-образную трубку (рис. 5). Масса жидкости m, плотность ρ, площадь сечения трубки S.*

Здесь проще всего воспользоваться энергетическими соображениями. Дело в том, что частоту колебаний можно определить не только из уравнения колебаний, но и из выражения для полной энергии системы.*) Поясним это на примере пружинного маятника.

При колебаниях тела на пружине (см. задачу 2) полная энергия системы складывается из потенциальной энергии пружины и кинетической энергии тела:

$$W=\frac{kx^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=\frac{kx^2}{2}+\frac{m(x')^2}{2}.$$

Частота колебаний такого маятника, как уже говорилось, равна $\omega=\sqrt{k/m}$, т. е. определяется отношением постоянных коэффициентов в выражениях для потенциальной и кинетической энергий.

Оказывается, это утверждение справедливо для любой колеблющейся системы: если полная энергия системы записана в виде суммы двух слагаемых, одно из которых пропорционально квадрату величины, характеризующей отклонение системы от положения равновесия (коэффициент пропорциональности k), а другое — квадрату производной этой величины по времени (коэффициент пропорциональности m), то частота колебаний системы

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Теперь вернемся к нашей задаче. Предположим, что в некоторый момент жидкость отклонилась от положения равновесия на величину y (см. рис. 5) и ее скорость равна v. Найдем полную энергию системы в этот момент.

Заметим, что изображенную на рисунке 5 конфигурацию можно получить, перенеся столбик жидкости высотой y и массой $\Delta m=\rho Sy$ из левого колена трубки в правое. При этом столбик жидкости приобретет потенциальную энергию $W_p=\Delta mgy=\rho Sgy^2$. Кинетическая энергия всей массы жидкости равна $W_k=mv^2/2=m(y')^2/2$. Таким образом, полная энергия системы равна

$$W=\rho Sgy^2+\frac{m(y')^2}{2},$$

откуда получаем, что частота колебаний

$$\omega=\sqrt{\frac{2\rho Sg}{m}}.$$

Упражнения

1. Запишите уравнение движения и выражение для полной энергии математического маятника и найдите частоту его колебаний.

2. Проволока, изогнутая в виде полукольца радиусом R, подвешена, как показано на рисунке 6. Найдите частоту колебаний такой системы.

---

*) Подробнее об этом можно прочитать в заметке «Гармонические колебания и равновесие», опубликованной в девятом номере «Кванта» за прошлый год. (*Примеч. ред.*)

Вниманию наших читателей

Заказы на следующие книги издательства «Наука» можно направлять по адресу: 117192 Москва, Мичуринский проспект, 12, магазин № 8 «Книга — почтой» «Академкнига». Книги высылаются наложенным платежом.

Готовятся к печати

Аленицын А. Г., Бутиков Е. И., Кондратьев А. С. Краткий физико-математический справочник. 20 л. 1 р. 20 к.

Власов В. К., Королев Л. Н., Сотников А. Н. Элементы информатики. (Библиотечка программиста). 20 л. 1 р. 30 к.

Задачи по физике. 26 л. 1 р. 10 к.

Информатика в рабочих профессиях. (Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения). 10 л. 50 к.

Информатика и компьютерная грамотность. 20 л. 1 р. 80 к.

Кетков Ю. Л. Диалог на бейсике для мини- и микроЭВМ. (Библиотечка программиста). 15 л. 1 р.

Персональный компьютер. Рабочее место профессионала. (Кибернетика: неограниченные возможности и возможные ограничения). 10 л. 50 к.

Пособие по математике для поступающих в вузы. 41 л. 1 р. 50 к.

Сена Л. А. Единицы физических величин и их размерности. 16 л. 1 р. 20 к.

Имеются в наличии

Волькенштейн М. В. Биофизика. 1988. 592 с. 3 р.

Ишлинский А. Ю. Классическая механика и силы инерции. 1987. 320 с. 2 р. 30 к.

25 лет Новосибирской ФМШ

В марте 1962 года во многих уголках Сибири и других районах страны появились плакаты с задачами заочного тура первой Всесибирской олимпиады. На решение задач давался определенный срок, к концу которого письма с решениями следовало отправить по адресу олимпиадного комитета в Новосибирск, в Академгородок. В июле несколько сотен школьников получили приглашения в областные центры на второй тур Всесибирской олимпиады, который проводили молодые научные сотрудники из Академгородка. И совершенно неожиданно для многих школьников, хорошо выступивших на олимпиаде, сразу после этого их собрали и повезли в Академгородок, где с 10 июля начала работать первая Летняя физико-математическая и химическая школа (ЛШ). Первая ЛШ была самой продолжительной — более 45 дней, и, может быть, это одна из причин, по которой 250 ее учащихся считают свою Летнюю школу самой насыщенной впечатлениями, событиями, различными встречами. В последние несколько дней всех участников ЛШ стала волновать идея образования физико-математической школы-интерната. Прошел третий заключительный тур Всесибирской олимпиады, со всеми школьниками ЛШ были проведены собеседования — и около сотни школьников, среди которых были и авторы статьи, получили приглашения в не существующую еще физматшколу.

Идея создания физико-математических школ (ФМШ) была выдвинута ведущими учеными страны, а в Сибири — академиками М. А. Лаврентьевым, С. Л. Соболевым, С. А. Христиановичем, членами-корреспондентами АН СССР А. А. Ляпуновым, Д. В. Ширковым и другими. При создании ФМШ преследовалось несколько целей:

во-первых, дать возможность школьникам развить свои способности, используя большой потенциал крупного научного центра; особенно это важно для школьников из сел, отдаленных поселков и небольших городов;

во-вторых, уже со школьной скамьи дать осязаемое представление о специальности исследователя и тем самым повысить эффективность подготовки научных кадров;

в-третьих, провести педагогический эксперимент по отработке новых методов обучения, которые в большей степени отвечают требованиям современности.

В 1963 году постановлением Совета Министров СССР было признано целесообразным организовать в порядке опыта при некоторых университетах специализированные школы-интернаты физико-математического профиля. Первая такая школа открылась в январе 1963 года в Новосибирске, а осенью еще три — в Москве, Ленинграде и Киеве.

Несмотря на то, что у Новосибирской ФМШ много общего с другими специализированными школами, она имеет и существенные отличия. Прежде всего, это — огромная территория, на которой проходит отбор учащихся: Сибирь, Дальний Восток, Средняя Азия и Казахстан. В школе ежегодно учатся представители свыше двадцати национальностей — можно встретить учеников и из небольшого якутского поселка, и из узбекского кишлака, и из чукотского оленеводческого совхоза. В школе нет конкурсных экзаменов, набор ведется через систему Всесоюзных олимпиад по математике, физике, химии, причем для проведения набора при Президиуме СО АН СССР организован специальный Комитет. Он формирует бригады из научных сотрудников и аспирантов, которые выезжают на областные, краевые и республиканские олимпиады Сибирской зоны, где оказывают методическую помощь местным органам народного образования в проведении олимпиад, а также проводят собеседования с участниками. Протоколы собеседования привозят в Академгородок, и ученые, члены олимпиадного комитета, из нескольких тысяч школьников отбирают шестьсот и приглашают их в Летнюю школу. Приглашаются не обязательно победители или призеры, а те, кто на собеседовании проявил умение рассуждать, мыслить, делать выводы. При прочих равных показателях предпочтение отдается ученикам из сел и небольших поселков, детям из семей рабочих и колхозников.

Как уже говорилось, Летняя физико-математическая и химическая шко-

Академик М. А. Лаврентьев.

Член-корреспондент АН СССР А. А. Ляпунов среди фымышат (60-е годы).

ла проводится с 1962 года. Участники Летней школы в течение первых трех недель августа слушают лекции ведущих ученых Сибири, занимаются с преподавателями — молодыми научными сотрудниками, посещают научно-исследовательские институты, отдыхают. В конце работы ЛШ приемная комиссия зачисляет 350—380 учащихся в школу-интернат на два различных потока: двухгодичный (в девятый класс) и одногодичный (в десятый класс).

В физико-математической школе постановка учебного процесса по профилирующим предметам (математика, физика, химия) приближена к вузовской. Каждый курс состоит из лекций, семинаров, лабораторных работ. Учебный год делится на два семестра, в конце каждого из которых сдаются письменные и устные экзамены по математике и физике, а в конце десятого класса проводятся выпускные экзамены за курс средней школы. Класс в физматшколе состоит не более чем из тридцати человек, а на семинарских занятиях по математике, физике, химии и на уроках по биологии, иностранному языку и физкультуре класс делится на две группы. На лекциях два-три параллельных класса объединяются в потоки. В четверг проводится не более двух обязательных уроков, а оставшееся время предоставляется для работы в институтах, в лабораториях, на спецкурсах и для самостоятельной работы учащихся. Кроме того, многие спецкурсы проводятся во второй половине дня и в другие дни.

Методическое руководство школой осуществляет Ученый совет, который по давней традиции возглавляет ректор НГУ, в настоящее время — член-корреспондент АН СССР Ю. Л. Ершов. Совет утверждает состав лекторов, ассистентов и воспитателей, программы по профилирующим предметам, рассматривает изменения в учебном плане, обсуждает вопросы воспитательной работы в школе.

Программы по профилирующим дисциплинам значительно углублены по сравнению с программами общеобразовательной школы и направлены на выработку научного мировоззрения, самостоятельности мышления, навыков исследовательской работы. Программы по непрофилирующим дисциплинам полностью соответствуют программам общеобразовательной школы. Однако углубленное преподавание точных наук отнюдь не влечет за собой ослабление внимания или, хуже того, пренебрежения к гуманитарным предметам. Мнение школьников и сравнение оценок позволяют утверждать, что требования учителей — «гуманитариев» выше, чем в большинстве школ, из которых прибыли ученики.

Со дня основания Новосибирская ФМШ была задумана как первая ступень в системе подготовки научных кадров. Тесная связь с университетом, научными подразделениями Академгородка — неотъемлемая и важнейшая особенность школы. Многие лекторы и преподаватели по математике, физике, химии и биологии являются научными сотрудниками или преподавателями университета. Это порождает определенные трудности — надо согласовывать основную работу с преподаванием в интернате. Однако, на наш взгляд непосредственный контакт ребят с активно работающим ученым компенсирует эти недостатки с лихвой.

Часто можно слышать, что у учеников ФМШ возникает чувство элитарности. В принципе такая опасность существует, потому что многие наши ученики в своих родных школах были лидерами, «звездами», а некоторые ходили чуть ли не в «гениях». Но переход в школу, где существенно выше требования, где все вокруг — «звезды», сам по себе способствует переоценке собственных притязаний. И здесь важнейшая задача педагогического коллектива — создать в школе атмосферу, в которой бы воспитывались уважение к успехам своих друзей, гражданская ответственность, коммунистическая нравственность, активная жизненная позиция. Комплексная программа воспитательной работы включает в себя много аспектов. Постоянно совершенствуется школьное самоуправление, система Ленинского зачета, регулярно организуется работа в экспериментальном хозяйстве СО АН СССР и многое другое. Большую роль в школе играют традиции. Это особенно важно, потому что ежегодно контингент учащихся обновляется на две трети. Традицией стала работа комсомольского отряда в ЛШ, в который входят выпускники школы, поступившие на первый курс университета. По словам самих ребят, одним из самых запоминающихся событий является торжественный обряд посвящения в «фымышата». Перед отъездом на зимние каникулы каждый комсомолец получает путевку с заданием рассказать в своих родных местах об Академгородке, ФМШ, университете, провести небольшую олимпиаду.

В терминальном классе ФМШ.

PHILLIPS
ANDOVER
Группа американских школьников в ФМШ.

В специализированной школе всегда есть опасность замкнуться на любимый предмет, и организаторы школы ясно видели эту опасность с самого начала. Уже в первые годы А. А. Ляпунов и другие ученые проводили с ребятами беседы о литературе, музыке, изобразительном искусстве. Внимание к эстетическому воспитанию не ослабевает и в наши дни. В школе активно работают литературный, музыкальный и киноклуб, ряд гуманитарных факультативов. Уже много лет в школе читается курс «основы искусств». Предмет этот особый — по нему не ставят оценок. И хотя только первые несколько занятий — обязательные, а потом они становятся факультативными, число учащихся при этом меняется незначительно.

Очень большое внимание уделяется физкультуре и спорту. Силами самих ребят и преподавателей физкультуры оборудованы залы гимнастики, настольного тенниса, атлетической гимнастики. Команды ФМШ по футболу, баскетболу, волейболу, легкой атлетике почти всегда занимают первые места среди школ района, а выступая в соревнованиях университета на правах факультета, оказываются не на последнем месте, а иногда бывают и на первом. За хорошую постановку спортивно-массовой работы ФМШ была награждена вымпелом ЦК ВЛКСМ.

В этом году ФМШ исполнилось двадцать пять лет. За прошедшие годы школу окончило 6116 человек. Приблизительно две трети из них поступили и большинство успешно окончили НГУ. Остальные поступают в другие вузы страны — МФТИ, МГУ, ЛГУ. Мы не сумели, к сожалению, проследить судьбу каждого выпускника. Но сегодня, по неполным данным, десятки из них стали докторами, сотни — кандидатами наук. Бывших фымышат можно встретить в самых разных местах: в Москве — доктора наук С. Манакова, в Новосибирске — доктора наук Е. Кузнецова, в Омске — декана математического факультета ОмГУ Г. Кукина, в Красноярске — заведующего кафедрой Н. Носкова, в Барнауле — заведующего кафедрой Ю. Мальцева и так далее. Уже в студенческие годы научная работа многих выпускников ФМШ получает высокую оценку, включая медали АН СССР. Среди выпускников школы — ряд лауреатов премии Ленинского комсомола: физики О. Сушков и В. Фламбаум, химики А. Галль и И. Горшкова. Лауреатом Государственной премии СССР стал М. Перельройзен.

Разумеется, не следует думать, что поступление или даже окончание специализированной школы автоматически ведет в науку. Некоторая часть выпускников поступает в технические вузы, кто-то — в медицинские институты, а единицы становятся гуманитариями. Более того, и поступив в университет, нужно приложить немало усилий, чтобы через несколько лет после окончания стать высококлассным специалистом.

Важнейшим итогом двадцатипятилетней деятельности специализированных школ-интернатов является утверждение самой идеи их существования. Сегодня специализированные школы есть во многих городах страны, еще больше специализированных классов. Широкое распространение получили факультативные курсы в общеобразовательных школах. Все это безусловно способствовало повышению уровня преподавания точных наук во многих школах страны.

Опытом работы Новосибирской ФМШ постоянно интересуются зарубежные специалисты. Трудно сказать, из каких уголков земного шара не было у нас гостей. Посетившая Академгородок еще в 1973 году делегация ЮНЕСКО в Книге почетных гостей школы оставила запись: «Школа производит впечатление, так как в ней основное внимание уделяется эксперименту установления связи между школой, высшим образованием, исследованием. Этот опыт достоин изучения органами образования других стран». Активно изучается опыт ФМШ в Японии, тесные контакты у нас с педагогами и учеными Венгрии и Болгарии. С 1987 года организован регулярный обмен школьниками с одной из самых престижных школ США — Академией Филлипс (г. Андовер, штат Массачусетс). Об этом обмене рассказано в «Кванте» № 9 за 1987 год и № 6 за 1988 год.

Педагогический эксперимент продолжается уже двадцать пять лет. Но и сегодня нельзя считать, что все формы, методы работы определены до конца. ФМШ не стоит на месте. Периодически изменяются программы, пересматривается учебный план, совершенствуются методы воспитательной работы в условиях интерната, где живут свыше пятисот юношей и девушек. Школой накоплен большой опыт, который в ближайшем будущем предстоит рассмотреть, переосмыслить с тем, чтобы будущие поколения могли его использовать в интересах нашей страны.

С декабря 1981 года Новосибирская ФМШ с гордостью носит имя ее основателя, выдающегося советского ученого академика М. А. Лаврентьева. В одном из последних своих выступлений Михаил Алексеевич сказал:

«Сейчас уже стало очевидным, что подготовка научных кадров должна начинаться со средней школы... Выход я вижу в раннем определении склонностей ребят с помощью олимпиад, собеседований с учеными и дальнейшем специализированном обучении. Это позволит резко ускорить массовую подготовку научных и инженерных кадров. Опыт работы физико-математической школы в Новосибирске, физико-математических школ и классов в Москве, Ленинграде и Киеве показывает, что такой метод позволяет гораздо лучше развить способности молодежи».

Выпускники первого набора в Новосибирскую
ФМШ, заместитель директора
Новосибирской ФМШ *В. Харитонов*
и учитель математики *Ю. Михеев*

Конференция в Ставрополе

В один из первых майских дней этого года внимание контролеров московского аэропорта Внуково привлек юноша, пытавшийся пронести на борт самолета подозрительный агрегат. К счастью, рейс задерживать не пришлось: агрегат оказался самодельным прибором ночного видения, а юноша — учеником ФМШ № 18 при МГУ. Вместе с командой своей школы он отправлялся в Ставрополь, где на базе Педагогического института и городского Дворца пионеров проводилась физико-математическая конференция школьников.

На конференцию прибыли ребята и из других ведущих физико-математических школ страны: интернатов при Ленинградском и Новосибирском университетах, московской школы № 542 при МИФИ. И пусть их было не так уж и много, но как говорится, «туристов» в командах не было — все привезли доклады, а кое-кто даже по два. Рассказать обо всех трех десятках докладов здесь невозможно. Упомянем те, что вызвали, пожалуй, наибольший интерес слушателей — студентов пединститута и учащихся школ города. Это «Исследование распада струи и столкновения капель воды» ленинградцев Вадима Мороза и Сергея Белоусова, которые продемонстрировали в действии свою экспериментальную установку, выступление Антона Кузьмина из школы при МИФИ, предложившего оригинальный способ повышения качества цветного телевизионного изображения, доклад самых младших участников — семиклассников из Ставрополя Николая Онежко и Виталия Самонова «Кольца Марангони» об эффектах, возникающих при падении капель на тонкий слой жидкости. В дисплейном классе хозяева конференции показали в работе ряд обучающих и игровых программ.

Конечно, программа встречи не ограничивалась докладами. Запомнился гостям и вечер дружбы, и трехсторонний физматбой. А на прощание участники конференции получили чудесный подарок — интереснейшую поездку по дорогам Ставрополья и Карачаево-Черкессии в предгорья Кавказа, туда, где построены радиотелескоп РАТАН-600 и оптический телескоп БТА.

Организаторы ставропольской конференции, среди которых первым нужно назвать подлинного энтузиаста этого дела, заведующего кафедрой теоретической физики пединститута В. С. Игропуло, считают ее главными задачами возрождение интереса к физике и математике, поиск и воспитание юных талантов, пропаганду современных форм работы со школьниками (кстати, в этом им помогает краевое телевидение). По примеру завоевавшего высокую репутацию праздника юных математиков в Батуми они планируют сделать конференцию традиционной, расширить состав участников. Пожелаем им удачи и будем надеяться, что эстафету Батуми и Ставрополя подхватят другие города нашей страны.

В. Н. Дубровский

XXII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО

Заключительный этап XXII Всесоюзной математической олимпиады школьников состоялся в апреле 1988 года в Донецке. В нем участвовали 29 команд: 14 команд союзных республик, по одной команде от каждой из четырех зон РСФСР, команды Москвы, Ленинграда, Донецка и 8 команд специализированных школ-интернатов при ведущих университетах страны — всего 172 школьника (51 восьмиклассник, 56 девятиклассников и 65 десятиклассников).

Как обычно, участникам олимпиады было предложено на двух турах по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов.

Каждая задача олимпиады оценивалась в баллах с тем расчетом, чтобы суммарное число баллов в туре по каждому классу было равно тридцати (см. таблицу 1).

Таблица 1.

Задачи Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
8	6	7	7	10	6	7	7	10
9	6	6	8	10	6	6	8	10
10	5	8	7	10	6	7	9	8

Распределение баллов жюри олимпиады проводило уже после того, как работы участников были проверены, и поэтому оно отражает реальную трудность задач. Впрочем, эти данные лишь незначительно отличаются от априорных оценок жюри. О том, как участники справились с задачами олимпиады, можно узнать из таблицы 2, в которой приведено число решивших каждую из задач.

Таблица 2.

Задачи Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
8	35	29	24	4	24	23	21	9
9	23	26	14	5	24	27	3	0
10	59	27	28	3	48	34	14	35

Пожалуй, стоит отметить, что, видимо, задачи 7 и 8 в девятом классе были чрезмерно трудными, а задачи 1 и 5 в десятом классе — слишком простыми для участников олимпиады. В восьмом и десятом классах первая премия присуждалась за решение 7—8 задач, а в девятом классе — за решение 6—7 задач. Третья премия присуждалась школьникам восьмого класса, набравшим по итогам обоих туров не менее 29 баллов, девятого класса — не менее 21 балла, десятого класса — не менее 34 баллов. Таблица 3 показывает количество призеров по каждому классу.

Таблица 3.

Класс Премия	8	9	10
I	6	3	2
II	10	6	9
III	10	7	16
Грамота	6	4	5

Организационный комитет по проведению заключительного этапа Всесоюзной математической олимпиады возглавлял заведующий Донецким областным отделом народного образования И. М. Сахно. Почетным председателем жюри был академик АН УССР, профессор МГУ Б. В. Гнеденко, председателем жюри — ректор Донецкого государственного университета, профессор В. П. Шевченко, а его заместителями — декан математического факультета ДГУ доцент П. М. Величко и доцент МГУ В. В. Вавилов. Олимпиада проводилась на базе санаторной школы-интерната № 8 и средней школы № 96 Донецка. С большой теплотой и заботой относились хозяева олимпиады к участникам олимпиады и членам жюри. Всем им большое спасибо.

В свободное время школьники знакомились с историей Донецка, его достопримечательностями, побывали в Донецком театре оперы и балета, цирке. Интересно прошла встреча с членами редколлегии журнала «Квант».

Состоялся и традиционный математический бой между командами школьников и жюри. В этом увлекательном, по-существу театрализованном, представлении участвовали сразу три команды — две команды школьников и команда жюри. Задачи в этот раз были довольно простыми (примерно уровня раздела «Квант» для младших школьников»), зато их было довольно много (около 30) и отвечать надо было быстро. Победила команда школьников, которую возглавлял Виталий Вологодский (Омск, с. ш. № 99), а команда жюри заняла второе место.

Вот несколько задач этого состязания.

1. Постройте восьмизвенную замкнутую ломаную, пересекающую каждое свое звено ровно один раз.

2. Что больше: площадь круга, вписанного в квадрат площадью 1, или площадь квадрата, вписанного в круг площадью 1?

3. Одному мальчику на покупку мороженого не хватило 12 коп., а другому — 1 коп. Когда они сложили свои деньги, то оказалось, что денег на покупку одного мороженого все равно не хватает. Сколько стоит мороженое?

4. Какой из городов находится восточнее: Владивосток или Хабаровск? Какой из городов находится севернее: Москва или Петропавловск-Камчатский?

5. Продолжите последовательность:

111, 213, 141, 516, 171,...

6. Часы отбивают 6 ударов за 30 секунд. Сколько времени они отбивают 12 ударов?

7. Постройте 7 точек так, чтобы среди любых трех точек нашлись две, расстояние между которыми равно 1 см.

Теперь приведем задачи заключительного тура.

Задачи

Первый день

8 класс

1. Книга состоит из 30 рассказов объемом 1, 2, ..., 30 страниц. Рассказы печатаются с первой страницы, каждый рассказ начинается с новой страницы. Какое наибольшее количество рассказов может начинаться с нечетной страницы?

Н. Нецветаев

2. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Рассмотрим два новых выпуклых четырехугольника F_1 и F_2, у каждого из которых две противоположные вершины — середины диагоналей $ABCD$, а две другие вершины — середины противоположных сторон $ABCD$. Известно, что площади четырехугольников F_1 и F_2 равны. Докажите, что одна из диагоналей четырехугольника $ABCD$ делит его площадь пополам.

А. Анджанс

3. Докажите, что уравнение

$$x-y+z=1$$

имеет бесконечно много решений среди таких попарно различных натуральных чисел x, y, z, что произведение любых двух из них делится на третье.

Д. Митькин

4.*) В первой строке написаны 19 натуральных чисел, не превосходящих 88, а во второй строке — 88 натуральных чисел, не превосходящих 19. Назовем отрезком одно или несколько подряд написанных чисел одной строки. Докажите, что из данных строк можно выбрать по отрезку так, что суммы чисел, входящих в эти отрезки, будут равны.

А. Анджанс

9 класс

1. Решите в целых числах уравнение

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}=\left(1+\frac{1}{1988}\right)^{1988}$$

Б. Кукушкин

2. Докажите, что для углов α, β, γ произвольного треугольника справедливо неравенство

$$2\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}\right)\leqslant\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\sin\alpha+\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha}\right)\sin\beta+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\sin\gamma.$$

Д. Терешин

3. В школе нужно организовать дежурство так, чтобы одновременно дежурил ученик 9 «А» и ученик 9 «Б» классов и чтобы каждый день заменялся ровно один из дежурных. Ученики каждого класса выходят на дежурство по очереди в соответствии со списками в классных журналах, причем после последнего по списку снова дежурит первый. Можно ли составить график дежурства пар учеников так, чтобы в течение некоторого промежутка времени каждый ученик из 9 «А» отдежурил в паре с каждым учеником из 9 «Б» ровно один раз и чтобы затем дежурила первая пара, если в 9 «А» 29 учеников, а в 9 «Б» — 32?

К. Черанс

---

*) Задачи, обозначенные звездочкой, вошли в «Задачник «Кванта».

4. На стороне BC тупоугольного треугольника ABC с тупым углом при вершине C выбрана точка D, отличная от B и C. Через точку M, лежащую внутри отрезка BC и отличную от D, проводится прямая AM, которая пересекает окружность S, описанную около треугольника ABC, в точке N. Через точки M, D и N проводится окружность, пересекающая окружность S, кроме точки N, еще в точке P. Найдите положение точки M, при котором длина отрезка MP будет наименьшей.

И. Шарыгин

10 класс

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF=DG$.

С. Струков

2. Найдите наименьшее значение выражения

$$S=\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}$$

при условии, что x, y, z — положительные числа, сумма квадратов которых равна единице.

Л. Курляндчик

3. Ломаная, все вершины которой лежат на поверхности куба с ребром 2 и каждое звено которой равно 3, соединяет две наиболее удаленные вершины куба. Какое наименьшее число звеньев может иметь такая ломаная?

С. Дужин

4.* Пусть n, m, k — натуральные числа, $m\geqslant n$. Докажите, что если

$$1+2+\ldots+n=mk,$$

то числа 1, 2, ..., n можно разбить на k групп так, чтобы суммы чисел в каждой группе были равны m.

А. Анджанс

Второй день

8 класс

5. Докажите, что у всех трапеций с боковой стороной a, вписанных в данную окружность, отношение высоты к средней линии одно и то же.

Б. Чиник

6.* На доске написаны числа 1 и 2. Разрешается дописывать новые числа следующим образом: если на доске имеются числа a и b, то можно дописать число $ab+a+b$. Можно ли этим способом получить

а) число 13121;

б) число 12131?

А. Берзиньш

7. Пусть рациональные числа x, y удовлетворяют уравнению

$$x^5+y^5=2x^2y^2.$$

Докажите, что $1-xy$ — квадрат рационального числа.

Б. Кукушкин

8.* В стране 21 город. Авиационное сообщение между ними осуществляют несколько авиакомпаний, каждая из которых попарно связывает беспосадочными авиалиниями пять городов (при этом между двумя городами могут летать самолеты нескольких компаний). Каждые два города связаны по крайней мере одной беспосадочной авиалинией. При каком наименьшем количестве авиакомпаний это возможно?

Д. Фомин

9 класс

5. Докажите, что в последовательности с общим членом $a_n=1+2^2+3^3+\ldots+n^n$ бесконечно много составных нечетных чисел.

Д. Митькин

6.* Около остроугольного треугольника ABC описана окружность. Касательные к окружности, проведенные в точках A и C, пересекают касательную, проведенную в точке B, соответственно в точках M и N. В треугольнике ABC проведена высота BP (точка P лежит на стороне AC). Докажите, что прямая BP является биссектрисой угла MPN.

Б. Чиник

7. Неотрицательные числа a и d и положительные числа b и c удовлетворяют условию $b+c\geqslant a+d$. Какое наименьшее значение при этом может принимать выражение $\dfrac{b}{c+d}+\dfrac{c}{a+b}$?

Д. Тамаркин, Д. Терешин, А. Черных

8. В квадратной таблице размером $n\times n$ записаны действительные числа, причем сумма чисел в любой строке и в любом столбце равна нулю. С таблицей можно проводить следующую операцию: какую-нибудь строку поэлементно прибавить к одному из столбцов и вычесть из другого столбца (i-й элемент строки прибавляется (вычитается) к i-му элементу столбца; элементы в строках нумеруются слева направо, в столбцах — сверху вниз). Докажите, что при помощи нескольких таких операций можно получить таблицу, составленную из одних нулей.

Б. Меркулов

10 класс

5. Незамкнутая ломаная с конечным числом звеньев вписана в параболу так,

Почетный председатель жюри, академик АН УССР Б. В. Гнеденко беседует с участниками олимпиады.

что начало ее совпадает с вершиной параболы и любые два звена, образующие вершину ломаной, составляют равные углы с касательной к параболе в этой вершине. Докажите, что такая ломаная расположена по одну сторону от оси параболы.

А. Борисов

6. При каком наименьшем значении n система

$$\begin{cases} \sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n=0, \\ \sin x_1+2\sin x_2+\ldots+n\sin x_n=100 \end{cases}$$

имеет решение?

А. Азамов

7.* Последовательность $\{a_n\}$ задана соотношениями

$$a_0=0,\ a_n=P(a_{n-1}),\ n=1,\ 2,\ \ldots,$$

где $P(x)$ — многочлен с натуральными коэффициентами. Докажите, что для любых натуральных чисел m и k с наибольшим общим делителем d наибольший общий делитель чисел a_m и a_k равен a_d.

В. Лев

8.* Докажите, что для любого тетраэдра имеет место неравенство

$$r<\frac{ab}{2(a+b)},$$

где a, b — длины двух скрещивающихся ребер, а r — радиус вписанного шара.

И. Шарыгин

XXII Всесоюзная олимпиада по физике

Доктор физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
М. М. ЦЫПИН

Заключительный этап Всесоюзной физической олимпиады школьников проходил в этом году с 13 по 20 апреля в столице Грузии — Тбилиси. На итоговые соревнования приехали 46 восьмиклассников, 51 девятиклассник и 60 десятиклассников — победители предыдущих этапов олимпиады этого года и призеры прошлогодней Всесоюзной олимпиады.

Теоретический тур проводился 15 апреля в физико-математической школе-интернате им. Комарова (где, кстати, и жили участники олимпиады). Традиционно восьмиклассникам было предложено 4 задачи (на решение которых отводилось 4 часа), а девяти- и десятиклассникам — по 5 задач (на 5 часов). Приведем их условия (некоторые задачи опубликованы в «Задачнике «Кванта» в 9 и 10 номерах журнала).

Задачи теоретического тура

8 класс

1. Разгоняясь с максимально возможным ускорением на прямом участке шоссе, гоночный автомобиль увеличивает скорость от 10,0 до 10,5 м/с за 0,1 с. За какое время он смог бы сделать то же самое на кольцевом участке шоссе с радиусом 30 м? При каком радиусе кольца он вообще не смог бы увеличить скорость выше 10 м/с? Плоскость шоссе горизонтальна.

2. Плот оттолкнули от берега реки, сообщив ему скорость 0,3 м/с в направлении, перпендикулярном берегу. На рисунке 1 изображен начальный участок траектории движения плота. На каком расстоянии от берега будет в конце концов плыть плот? Скорость течения реки 0,3 м/с. Сила сопротивления движению плота пропорциональна его скорости относительно воды.

3. В калориметре медленно остывает расплав исследуемого вещества. Удельная теплота плавления этого вещества (она была определена в предыдущих опытах) 200 кДж/кг. По графику зависимости температуры вещества от времени (рис. 2) определите удельные теплоемкости вещества в твердом и жидком состояниях. Теплоемкостью калориметра пренебречь.

4. В схеме, приведенной на рисунке 3, амперметры показывают токи 0,2 А и 0,3 А. После того как два резистора в схеме поменяли местами, показания амперметров не изменились. Какой ток течет через батарею? Считать напряжение батареи неизменным. Сопротивления амперметров пренебрежимо малы.

9 класс

1. Исследуя вновь открытую планету, имеющую форму шара радиусом 6400 км и покрытую по всей поверхности океаном глубиной 10 км (из обычной воды), ученые установили, что ускорение свободного падения с большой степенью точности (не хуже 10^{-5}) остается неизменным при погружении в океан на различные глубины. Определите по этим данным ускорение свободного падения на этой планете. Гравитационная постоянная $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

2. Горизонтальная площадка с лежащей на ней монетой совершает круговое поступательное движение в горизонтальной плоскости так, что все точки площадки описывают окружности радиусом R с угловой скоростью ω. Коэффициент трения между площадкой и монетой равен μ. Каким будет установившееся движение монеты? Какой след «вычерчивает» она на площадке?

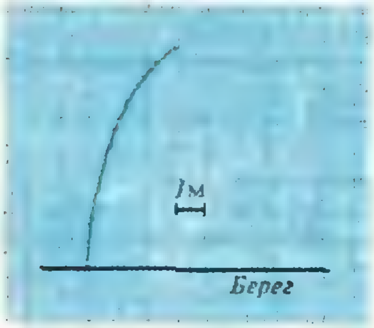


Рис. 1.

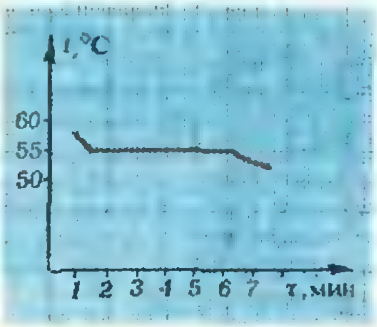


Рис. 2.

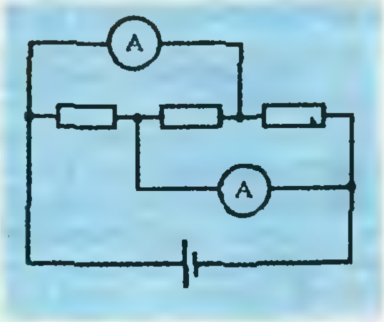


Рис. 3.

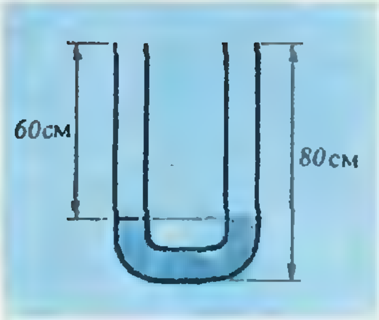


Рис. 4.

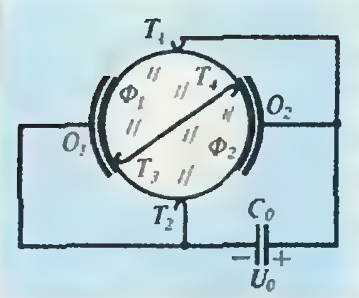


Рис. 5.

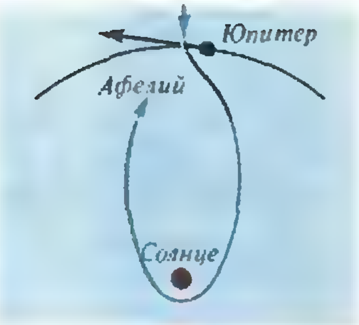


Рис. 6.

3. U-образная стеклянная трубка частично заполнена водой (рис. 4). Верхние концы трубки закрывают и нагревают правое колено трубки до температуры +100 °С, а левое — до +99,5 °С. Определите установившуюся разность уровней воды в коленах трубки. Справка: на высоте 23 этажа (70 м над землей) температура кипения воды на 0,25 градуса ниже, чем на земле. Тепловым расширением стекла при расчетах пренебречь. На уровне первого этажа условия нормальные.

4. Модель электрофорной машины (рис. 5) состоит из непроводящего цилиндра, на который наклеены плоскости фольги $Ф_1$ и $Ф_2$, наружных обкладок O_1 и O_2, неподвижных токосъемников T_1 и T_2 снаружи и неподвижной перемычки внутри с токосъемниками T_3 и T_4. В исходном положении полоски фольги находятся напротив наружных обкладок и образуют с ними конденсаторы емкостью C_1 каждый. К внешним обкладкам подключен конденсатор емкостью C_0, заряженный предварительно до напряжения U_0. Каким станет это напряжение после N оборотов цилиндра по часовой стрелке? Емкость между обкладками и полосками фольги в раздвинутом состоянии пренебрежимо мала.

5. На некотором расстоянии от катушки *1*, по которой течет ток I_1, укреплена замкнутая накоротко катушка *2*, сделанная из материала, находящегося в сверхпроводящем состоянии при комнатной температуре. В данный момент через катушку *2* ток не течет. При увеличении тока через катушку *1* в два раза в катушке *2* появился ток $I_2=0{,}2I_1$. Каким станет этот ток, если ток катушки *1* увеличить еще в два раза? Опыт проводится при комнатной температуре.

10 класс

1. Образование кометного семейства Юпитера описывается следующей схемой. Комета падает с большого удаления без начальной скорости на Солнце и пролетает недалеко от Юпитера (рис. 6). После прекращения заметного влияния поля тяготения Юпитера комета вновь движется в поле Солнца, причем ее скорость оказывается направленной противоположно скорости Юпитера, а афелий новой орбиты кометы располагается вблизи орбиты Юпитера, т. е. на расстоянии 5,2 а. е. от Солнца. На каком расстоянии от Солнца будет располагаться перигелий орбиты такой кометы?

2. Заряженная частица попадает в среду, где на нее действует сила сопротивления, пропорциональная скорости. До полной остановки частица проходит путь 10 см. Если в среде имеется некоторое магнитное поле, перпендикулярное скорости частицы, она при той же начальной скорости останавливается на расстоянии 6 см от точки входа в среду. На каком расстоянии от точки входа в среду остановилась бы частица, если бы индукция магнитного поля была в два раза меньше?

3. В замкнутой полости объемом 3 см^3 находится капелька воды в равновесии с паром. При каком радиусе капельки это равновесие будет устойчивым? Стенки полости считать несмачиваемыми, других капелек и центров конденсации нет. Температура постоянна (293 К). График зависимости избыточного давления насыщенных паров над выпуклой поверхностью воды от радиуса кривизны этой поверхности $\Delta p = p_{\text{нас}}(r) - p_{\text{нас}}(\infty)$ приведен на рисунке 7. Насыщенный пар считать идеальным газом.

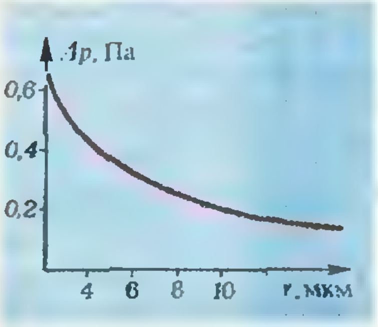


Рис. 7.

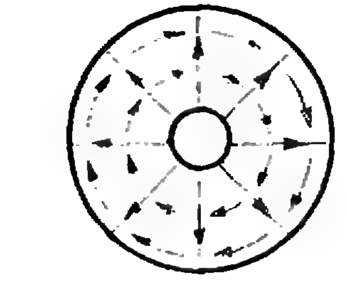


Рис. 8.

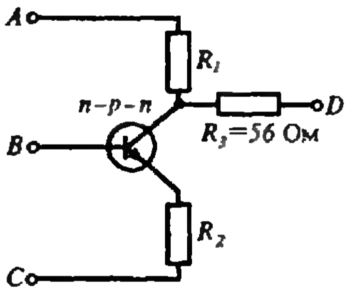


Рис. 9.

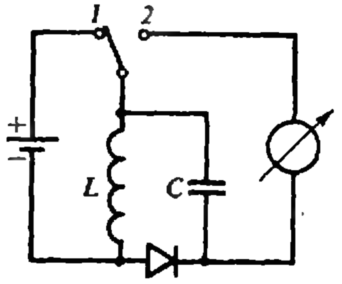


Рис. 10.

4. Плоский воздушный конденсатор, площадь пластин которого S, а расстояние между пластинами d_0, подключен к батарее с напряжением U_0 последовательно с резистором сопротивлением R. Одна из пластин конденсатора начинает колебаться, оставаясь параллельной другой пластине, так что расстояние между пластинами изменяется со временем по закону $d=d_0(1+m\sin\omega t)$, где $m\ll 1$. Определите среднюю мощность P, выделяющуюся на резисторе при низкой частоте колебаний $\left(\omega\ll\frac{1}{RC}\right)$ и при высокой частоте $\left(\omega\gg\frac{1}{RC}\right)$. Постройте по этим результатам качественный график зависимости P от ω.

5. В настоящее время в связи с открытием явления высокотемпературной сверхпроводимости изучается вопрос о создании линии передачи постоянного тока без потерь энергии на джоулево тепло. Предполагается использовать для передачи постоянного тока коаксиальный кабель, состоящий из внутренней цилиндрической жилы и наружной цилиндрической оболочки, выполненных из сверхпроводника. Электрическое и магнитное поля в такой системе изображены на рисунке 8. Известно, что индукция магнитного поля у поверхности сверхпроводника не может превышать некоторого значения B_{max}, иначе разрушается сверхпроводимость, а напряженность электрического поля не должна превышать E_{max}, иначе происходит электрический пробой изолирующей прослойки кабеля. Определите, во сколько раз изменится максимальная мощность постоянного тока, передаваемая по такому кабелю, если диаметры внутренней и внешней оболочек увеличить в два раза. Какую максимальную мощность можно передать по кабелю с диаметрами оболочек $D=8$ см и $d=3$ см, если $E_{max}=20$ кВ/см и $B_{max}=5\cdot 10^{-2}$ Тл? Примечание: индукция магнитного поля в пространстве между цилиндрическими проводниками совпадает с полем прямого проводника с током I и равна $B=\mu_0 I/(2\pi r)$, где $\mu_0=4\pi\cdot 10^{-7}$ Н/А^2 — магнитная постоянная.

В тот же день жюри приступило к проверке работ теоретического тура, которая продолжалась до позднего вечера. В составе жюри были представители Тбилиси и Москвы, Долгопрудного и Ленинграда, Еревана и Новосибирска. Каждая работа проверялась минимум два раза, причем особое внимание уделялось тому, чтобы за одинаковые решения (и одинаковые ошибки) оценки были одинаковыми.

Самыми трудными задачами по результатам проверки оказались: в 8 классе — задача 2, в 9 классе — задачи 2 и 3, в 10 классе — 1 и 2. Отвечая на вопрос о том, какие задачи им больше всего понравились, школьники назвали как раз эти задачи (за исключением задачи 3 в 9 классе) плюс задачу 4 в 9 классе и задачу 3 в 10 классе.

16 апреля участники олимпиады приняли участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике, а в воскресенье 17 апреля они работали над выполнением заданий экспериментального тура (2 задачи на 4 часа), подготовленных учеными Института физики Академии наук ГрССР.

Расскажем немного об этих задачах.

В первой задаче для 8 класса требовалось определить плотность пластмассы, из которой изготовлено лекало. На столе стоял сосуд с водой, но слишком маленький, чтобы целиком погрузить в него лекало. Надо было догадаться измерить уменьшение веса лекала при его частичном погружении в воду, используя для этого самодельные рычажные весы из подвешенной на нити линейки.

Любопытно, что налипшие на лекало пузырьки воздуха могли бы изменить ответ в полтора-два раза. На это следовало обратить внимание и избавиться от пузырьков.

Во второй задаче надо было найти массу деревянного кубика, используя гирьку (массой 50 г) с полированной поверхностью и деревянную линейку. Для контрольного измерения предлагалось использовать линейку в качестве рычага.

Задачу можно было решить, измеряя сначала угол наклона линейки, при котором кубик начинает скользить по ней, а затем уменьшение этого угла, если позади кубика положить на бок гирьку.

В первой задаче для 9 класса нужно было определить заряд электрона, проводя электролиз раствора NaCl. Следовало собрать выделяющийся на катоде водород и измерить его объем. Наличие амперметра и часов позволяло определить прошедший через раствор заряд.

Для некоторых участников оказалось неожиданным отсутствие выделения хлора на аноде (дело в том, что хлор сразу же вступает в реакцию с медным анодом).

Во второй задаче требовалось: а) определить соответствие выводов черного ящика схеме, изображенной на рисунке 9; б) найти величины R_1 и R_2; в) подав на клеммы AC напряжение 9 В (от батарейки), построить график зависимости выходного напряжения $u_{\text{вых}}=u_{DC}$ от входного $u_{\text{вх}}=u_{BC}$ и определить коэффициент усиления $k=\Delta u_{\text{вых}}/\Delta u_{\text{вх}}$. В распоряжении участников были две батарейки, ампервольтметр и реостат.

В первой задаче для 10 класса надо было найти массу двух одинаковых грузов на концах легкого стержня, который может вращаться вокруг горизонтальной оси. В набор оборудования входили: кусок пластилина (массой 20 г), линейка и математический маятник. Надо было измерить период колебаний стержня без пластилина и с прилепленным к одному из грузов пластилином. В качестве часов следовало использовать математический маятник.

Вторая задача заключалась в определении емкости конденсатора и индуктивности катушки (с известным сопротивлением $R=7{,}5$ Ом). В распоряжении участников были: стрелочный гальванометр (микроамперметр), конденсаторы (2 мкФ и 4 мкФ), диод, переключатель и две батарейки.

Емкость неизвестного конденсатора можно было определить, сравнивая отбросы гальванометра при разрядке конденсаторов неизвестной и известной емкостей. Для определения индуктивности катушки следовало собрать схему, приведенную на рисунке 10. Вначале переключатель ставят в положение *1*, заряд на конденсаторе при этом равен нулю. Затем при размыкании ключа энергия $LI^2/2$, запасенная в катушке, переходит в энергию заряженного конденсатора $Q^2/(2C)$ (диод препятствует обратному разряду конденсатора через катушку). Переводя переключатель в положение *2*, по отбросу гальванометра определяется заряд конденсатора.

Пожалуй, наиболее сложным при решении этой задачи было догадаться использовать диод для того, чтобы не допустить разряда конденсатора.

Участники олимпиады высказали пожелания, чтобы апелляции проводились не только после теоретического тура, но и после экспериментального. Они хотели бы также, чтобы общение с жюри было более живым и непосредственным.

Участники олимпиады не только решали задачи. Гостеприимные хозяева познакомили школьников с замечательными памятниками древней культуры Грузии, ребята побывали в лабораториях Института физики Академии наук ГрССР. В программе олимпиады были и вечера отдыха, и встречи с победителями олимпиад прошлых лет.

19 апреля состоялась церемония закрытия олимпиады и награждение победителей. Список призеров олимпиады, получивших дипломы I, II и III степени, приведен ниже. Кроме того, было много специальных призов: за лучшее решение задач теоретического тура, экспериментального тура, самому молодому участнику олимпиады и т. д. Еще один специальный приз — подшивку журнала «Квант» за 1987 год с автографами членов редколлегии — получил «самый удаленный» участник олимпиады Ю. Филиппов из Южно-Сахалинска.

Надеемся, что XXII Всесоюзная олимпиада школьников по физике станет для ее участников первым шагом на пути в большую науку.

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

А. Н. ВИЛЕНКИН

Заключительный этап I Всесоюзной олимпиады школьников по информатике был проведен в Свердловске с 13 по 20 апреля 1988 года. 80 школьников из всех союзных республик собрались вместе, чтобы помериться силами.

Торжественное открытие олимпиады состоялось 14 апреля во Дворце культуры «Урал» — современном, просторном и удобном. Участников олимпиады приветствовали заведующий отделом науки и учебных заведений обкома КПСС А. Г. Жданович, академик Г. С. Поспелов, представитель центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников Т. А. Сарычева и другие. Жюри олимпиады возглавлял академик Н. Н. Красовский, оргкомитет — зам. председателя Свердловского облисполкома А. А. Леонов. В тот же день школьники начали знакомиться с вычислительной техникой, на которой им предстояло работать. Свердловчане предоставили для проведения олимпиады более 80-ти компьютеров «Роботрон—1715». Практически все приехавшие школьники раньше на компьютерах этого типа не работали, что поставило участников олимпиады в равное положение. С другой стороны, эти компьютеры близки к тем, с которыми участники олимпиады общались раньше, и за два дня (14 и 16 апреля) техника была вполне освоена.

Олимпиада проходила в два тура. Теоретический тур состоялся 15 апреля. Были предложены 4 задачи, на решение которых отводилось три с половиной часа. При этом алгоритмы разрешалось писать на любом достаточно распространенном языке программирования (алгоритмический язык курса информатики, Паскаль, Рапира, Бейсик, Алгол, Фортран, Си и др.). Задача на составление алгоритма считалась решенной, если представленный алгоритм был правильным. Дополнительные баллы присуждались за простоту и оригинальность алгоритма, обоснование его правильности, наличие комментариев и за эффективность (малое время работы, используемый объем памяти). При проверке задачи оценка (0—5 баллов) умножалась на коэффициент, характеризующий трудность задачи (он зависел от числа участников, решивших эту задачу); этот коэффициент приведен в скобках после номера задачи.

Задачи теоретического тура

Т1 (*7). Дан алгоритм:

```
алг задача1 (цел n)
арг n
нач цел k, i
  k:=n
  i:=2
  пока k≠1
  нц
    если остаток (k, i)=0
         то печать (i)
            k:=k/i
         иначе i:=i+1
    все
  кц
кон
```

Команда печать (i) печатает число i; остаток (k, i) — остаток от деления k на i. Какие числа будут напечатаны при исполнении алгоритма задача1 (n) для целого $n \geqslant 1$? Обоснуйте ответ.

Т2 (*6). Прямоугольник, стороны которого параллельны осям координат, будем задавать координатами его левого нижнего и правого верхнего углов. (Всего, таким образом, для задания прямоугольника понадобятся 4 числа). Заданы два прямоугольника Пр1 и Пр2. Определите площадь той части прямоугольника Пр1, которая не входит в Пр2. (Алгоритм должен быть пригоден для всех вариантов расположения Пр1 и Пр2.)

Т3 (*9). В стране имеется n городов, пронумерованных от 1 до n; между некоторыми из них налажено самолетное сообщение. Таблица есть_рейс [1:n, 1:n], содержит информацию о рейсах: есть_рейс [i, j] равно 1, если $i \neq j$ и из города i есть рейс в город j, и равно 0 в противном случае. (Рейсы проходят без промежуточных посадок; наличие рейса из i в j не гарантирует наличия рейса из j в i). Известно, что:

1) из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками);

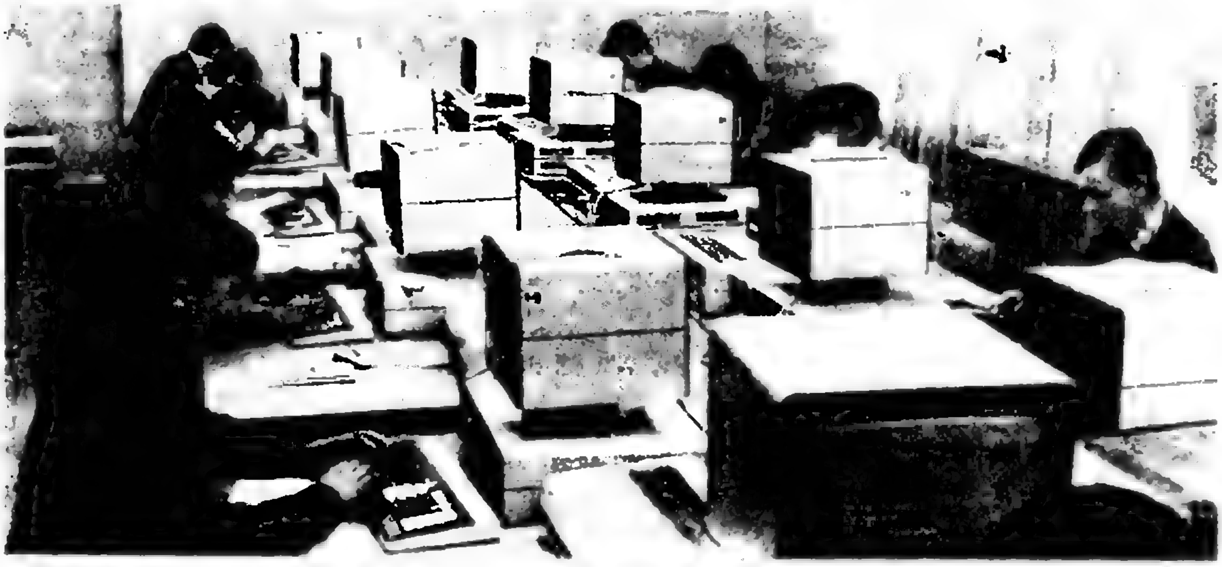
2) в любой город прибывает столько же рейсов, сколько вылетает (в i-м столбце таблицы есть_рейс столько же единиц, сколько в i-й строке).

Доказать, что можно вылететь из некоторого города и, воспользовавшись ровно

Теоретический тур.

Машинный тур.

Победители олимпиады и призеры премии «Кванта» (слева направо): С. Ковалев, В. Калашников, В. Завалишин, Г. Нишанов, И. Овчаренко, С. Калиниченко, М. Плукас, А. Ващиляо.



по одному разу каждым рейсом, вернуться в этот же город. Составить алгоритм нахождения такого маршрута.

(Существует алгоритм, требующий выполнения не более Cn^4 команд для некоторой константы C, не зависящей от n.)

Т4 (*10). 3 000 000 человек с различными фамилиями выстроились в затылок друг другу. Каждый, кроме первого, написал на листке бумаги фамилию стоящего перед ним и свою фамилию. Все 2 999 999 листков бумаги перемешали и информацию (упорядоченные пары фамилий) записали на магнитную ленту. Как возможно быстрее узнать фамилию 1 234 567-го человека? В вашем распоряжении ЭВМ с небольшой оперативной памятью (64 Кб) и ограниченным количеством магнитофонов ($\leqslant 32$).

Машинный тур был проведен 17 апреля на базе учебно-производственного комбината № 9 и Уральского государственного университета, программы можно было писать на Бейсике или Паскале. В задачах машинного тура оценивался достигнутый результат; использование компьютера было лишь средством. Дополнительными баллами оценивалось изложение метода решения, его обоснование, комментарии к программе и т. п.

Задачи машинного тура

М1 (* 3). Последовательность целых положительных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots$ строится так: если a_n четно, то $a_{n+1} = a_n/2$; если a_n нечетно, то $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

Найти минимальное n, для которого $a_n = 1$, если

а) $a_0 = 27$;

б) $a_0 = 2\,000\,007$.

М2 (*13). Для каждого целого положительного числа n будем рассматривать всевозможные его представления в виде суммы одного или нескольких целых положительных слагаемых. Составить таблицу, в которой для каждого n указано число таких представлений (без учета порядка: представления $3=2+1$ и $3=1+2$ считаются одинаковыми). Например, для $n=4$ таких представлений 5 (4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$). (Чем дальше будет заполнена таблица, тем выше будет оцениваться работа.)

Разбор задач был проведен 18 апреля утром, вечером того же дня рассматривались апелляции. 19 апреля во Дворце культуры «Урал» состоялся компьютерный фестиваль. Участники олимпиады, конечно же, привезли с собой много гибких дисков и кассет с программами, и им хотелось показать свои программы, посмотреть чужие и, возможно, обменяться программными продуктами. Именно это и происходило на фестивале. Организаторы предоставили школьникам и руководителям команд самые разные компьютеры, и все имеющиеся программы были продемонстрированы в действии. Устроители олимпиады показали также свои программные разработки для средней школы.

Культурная программа включала посещение свердловских музеев и театров, цирка, поездку на границу «Европа-Азия».

Награждение победителей и закрытие олимпиады состоялось вечером 19 апреля. 5 школьников получили дипломы I степени (они набрали 125—156 баллов), 9 школьников — дипломы II степени (87—116 баллов) и 15 школьников — дипломы III степени (59—78 баллов). 10 участников олимпиады были награждены специальными призами научных и общественных организаций, в том числе призами журнала «Квант» за высокую математическую культуру работы — Завалишин В. (Москва, с. ш. № 542), Калиниченко С. (Киев, с. ш. № 145), Ковалев С. (Горький, с. ш. № 40) и Овчаренко И. (Хабаровск, с. ш. № 32).

Что же еще остается сказать об этой, первой Всесоюзной олимпиаде школьников по информатике? Надо, прежде всего, поздравить и поблагодарить всех, кто хоть в какой-то мере помог преодолеть все трудности, организовать и провести олимпиаду. Надо поздравить победителей, они самыми первыми стали первыми. И, наконец, можно надеяться, что теперь в самых разных уголках нашей страны активизируется олимпиадная работа и в области информатики. Вершина олимпиадной лестницы обозначена.

Призеры XXII Всесоюзной олимпиады школьников по математике и физике

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Абрамов Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Зарубин Н. (Харьков, с. ш. № 27),
Малинникова Е. (Ленинград, с. ш. № 239),
Пихурко О. (Нестерово, с. ш. № 1),
Симановскис Р. (Рига, ФМШ № 1),
Смотровс Ю. (Рига, ФМШ № 1);

по 9 классам —
Виро А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Рагулин В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —
Кокорев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Хохлов Ю. (Ленинград, с. ш. № 30).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Аржанцев И. (Киев, с. ш. № 145),
Барановский В. (Омск, с. ш. № 115),
Бачурин А. (Стерлитамак, с. ш. № 20),
Белянкина З. (Жодино, с. ш. № 7),
Городецкий А. (Саратов, с. ш. № 13),
Иванов А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Мавлютов Р. (Набережные Челны, с. ш. № 12),
Насыров А. (Обнинск, с. ш. № 11),
Разин М. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Острик В. (Жданов, с. ш. № 64);

по 9 классам —
Андрианов Н. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Иванов Д. (Москва, с. ш. № 57),
Процан В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Рогинская М. (Ленинград, с. ш. № 239),
Скопенков А. (Саратов, с. ш. № 13),
Шумакович А. (Ленинград, с. ш. № 239);

по 10 классам —
Анисов С. (Харьков, с. ш. № 142),
Баран А. (Минск, с. ш. № 6),
Варшавский Я. (Харьков, с. ш. № 27),
Глуцюк А. (Харьков, с. ш. № 27),
Румынин Д. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Туляков Д. (Жданов, с. ш. № 7),
Хованов М. (Москва, с. ш. 57),
Филонов Н. (Ленинград, с. ш. № 30),
Эфендиев Я. (Баку, с. ш. № 82).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Богданов А. (Старый Оскол, с. ш. № 3),
Волченко К. (Донецк, с. ш. № 17),
Давыденко Д. (Назаров, с. ш. № 8),
Озолс М. (Алукене, с. ш. № 1),
Потапов С. (Тамбов, с. ш. № 29),
Федотов А. (Красноярск, с. ш. № 41),
Цейтлин Л. (Харьков, с. ш. № 1),
Чижиков В. (Винница, с. ш. № 6),
Щук С. (Ржев, с. ш. № 10),
Эгамов А. (Гороховец, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Демченко В. (Казань, с. ш. № 131),
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Гольднер В. (Кишинев, с. ш. № 40),
Зелик С. (Краматорск, с. ш. № 35),
Ли Р. (Бердск, с. ш. № 2),
Скворцов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Фельдман Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Акопян В. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Баррис Я. (Рига, ФМШ № 1),
Берлов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Бессолицын М. (Киров, с. ш. № 30),
Валиуллин М. (Казань, с. ш. № 94),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Вольфович Л. (Бельцы, с. ш. № 16),
Гороховский А. (Киев, с. ш. № 79),
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 27),
Гринер Р. (Львов, с. ш. № 62),
Жарков И. (Свердловск, с. ш. № 130),
Коврижкин О. (Майкоп, с. ш. № 7),
Назарян А. (Тбилиси, с. ш. № 42),
Прокофьев Д. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Слитинский В. (Киев, с. ш. № 296),
Христенко О. (Караганда, с. ш. № 63).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Грязных Д. (Челябинск, с. ш. № 127),
Заркевич Н. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Чокин Д. (Алма-Ата, РФМШ),
Шеянов В. (Ленинград, с. ш. № 202),
Энтин М. (Тула, с. ш. № 36);

по 9 классам —
Атамелишвили Т. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Зуев К. (Вологда, с. ш. № 8),
Сажин Д. (Свердловск, с. ш. № 43),
Терещенко В. (Киев, ФМШ № 145);

по 10 классам —
Мазуренко А. (Минск, с. ш. № 10),
Малкин А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Мороз В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Пушкин А. (Москва, с. ш. № 57).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Вердиньш Р. (Рига, с. ш. № 1),
Высоцкий В. (Киев, с. ш. № 77),
Датуашвили Г. (Тбилиси, с. ш. № 25),
Заимкин О. (Бухара, с. ш. № 1),
Ким В. (Ангрен, с. ш. № 33),
Кузьменко В. (Ивано-Франковск, с. ш. № 1),
Разилов Р. (Новосибирск, с. ш. № 88),
Савченков А. (Таганрог, с. ш. № 5),
Усинский А. (Ровенская обл., Вербская школа-интернат);

по 9 классам —
Бережной Д. (Запорожье, с. ш. № 28),
Бескровный В. (Донецк, с. ш. № 20),
Коршиков А. (Мозырь, с. ш. № 8),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Макеев В. (Алма-Ата, РФМШ),
Мороз М. (Киев, ФМШ № 145),
Нестеров И. (Челябинск, с. ш. № 31),
Уваров Ю. (Ленинград, с. ш. № 239),
Фалькович Д. (Москва, с. ш. № 57);

по 10 классам —
Жуков В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Какушадзе З. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Новоселов А. (Минск, с. ш. № 137),
Ольховец В. (Киев, ФМШ № 145),
Пенанен К. (Одесса, с. ш. № 63).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Гайцгори Д. (Душанбе, с. ш. № 1),
Карпачев А. (Алма-Ата, с. ш. № 8),
Молодов П. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Новоселов Р. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Орловский А. (Киев, ФМШ № 145),
Смирнов Р. (Уссурийск, с. ш. № 4),
Сунгатуллов Р. (п. Руэм МарАССР, с. ш. № 1),
Тевзадзе А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Трощенко А. (п. Чернышевский ЯкАССР, с. ш. № 3),
Хейнла А. (Таллин, с. ш. № 9);

по 9 классам —
Жданов А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Львовский А. (Москва, с. ш. № 57),
Малков Р. (Саратов, с. ш. № 13),
Медоян А. (п. Апаран АрмССР, с. ш. № 2),
Меликян А. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Старокольцев Е. (Днепропетровск, с. ш. № 37),
Толкунов Е. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Турлаков М. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Хозреванидзе Г. (п. Хуло АджАССР, с. ш. № 1),
Цыдынжапов Т. (Новосибирск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Дробышев М. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кияшко К. (Коммунарск, с. ш. № 7),
Кравченко Ю. (Москва, с. ш. № 820),
Панафидин С. (Ленинград, с. ш. № 30).

Призеры I Всесоюзной олимпиады школьников по информатике

Дипломы I степени получили

Ващилло А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Завалишин В. (Москва, с. ш. № 542),
Калашников В. (Москва, с. ш. № 57),
Нишанов Г. (Фрунзе, с. ш. № 61),
Плукас М. (Каунас, с. ш. № 8).

Дипломы II степени получили

Анспер А. (п. Ныо ЭстССР, с. ш. № 1),
Жильцов И. (Свердловск, с. ш. № 37),
Зотов С. (Пермь, с. ш. № 9),
Калиниченко С. (Киев, с. ш. № 145),
Ковалев С. (Горький, с. ш. № 40),
Копелев А. (Свердловск, с. ш. № 130),
Никифорович П. (Рига, с. ш. № 79),
Питеркин А. (Москва, с. ш. № 406),
Шаров А. (Ленинград, с. ш. № 30).

Дипломы III степени получили

Байметов И. (Ижевск, с. ш. № 30),
Белоусов С. (Петрозаводск, с. ш. № 30),
Видунас Р. (Друскининкай, с. ш. № 3),
Гончаров А. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Копенкин В. (Донецк, с. ш. № 35),
Косенко А. (Воронеж, с. ш. № 86),
Кярнер К. (Вильянди, с. ш. № 5),
Овчаренко И. (Хабаровск, с. ш. № 32),
Рентц И. (Якутск, с. ш. № 15),
Согалов И. (Черновцы, с. ш. № 2),
Халлик В. (Пярну, с. ш. № 2),
Химорода А. (Петропавловск, с. ш. № 3),
Цыганок А. (Кишинев, с. ш. № 3),
Чяпайтис А. (Каунас, с. ш. № 28),
Шулаков В. (Фрунзе, с. ш. № 61).

Международные олимпиады

Летом этого года, как обычно, проходили международные олимпиады школьников по математике и физике.
Подробно об этих олимпиадах будет рассказано в одном из следующих номеров журнала, а пока мы поздравляем наших олимпийцев с удачным выступлением и желаем им дальнейших творческих успехов.

XXIX Международная математическая олимпиада проходила в столице Австралии Канберре с 9 по 21 июля. Премьер-министр Австралии Р. Хоук в своей речи назвал олимпиаду самым крупным событием в праздновании двухсотлетия Австралии. Председателем жюри олимпиады был профессор Р. Поттс. В олимпиаде приняли участие 58 стран (из них 8 были представлены наблюдателями).

В составе советской команды выступали
Сергей Берлов (Ленинград),
Дмитрий Иванов (Долгопрудный Московской области),
Сергей Иванов (Ленинград),
Дмитрий Туляков (Жданов Донецкой области),
Николай Филонов (Ленинград),
Юрий Хохлов (Ленинград).

Все члены команды награждены золотыми или серебряными медалями. В неофициальном командном зачете наша команда заняла первое место (217 баллов из 252 возможных). Следующие три места распределились так: Китай (201), Румыния (201), ФРГ (174).

Задачи, предложенные на олимпиаде, были труднее задач предыдущей XXVIII ММО. Пять из них (кроме первой) по традиции включены в «Задачник «Кванта» (М1131—М1135), а условие первой задачи мы приводим здесь:

На плоскости даны две окружности с общим центром, радиусы которых соответственно равны r и R, $r<R$. Пусть P — фиксированная точка на меньшей окружности и B — переменная точка на большей окружности. Прямая BP пересекает второй раз большую окружность в точке C. Перпендикуляр l к прямой BC, проходящий через точку P, пересекает второй раз меньшую окружность в точке A (в случае, если l — касательная к окружности, считаем, что $A=P$).

а) Найдите множество значений выражения $BC^2+CA^2+AB^2$.

б) Найдите множество середин отрезков AB.

XIX Международная физическая олимпиада проходила с 23 июня по 2 июля в Австрии, в городе Бад-Ишль. Сюда съехались школьники из 27 стран.

Австрия известна миру именами как блестящих музыкантов, художников и поэтов, так и не менее блестящих ученых-физиков. Среди них Х. Доплер, И. Лошмидт, Л. Больцман, В. Гесс, Э. Шредингер, Э. Мах и другие. Наверное, не случайно на эмблеме олимпиады изображен хорошо известный физикам «конус Маха».

В команду СССР вошли
Юрий Кравченко (Москва),
Александр Мазуренко (Минск),
Антон Малкин (Ленинград),
Вадим Мороз (Ленинград),
Константин Пенанен (Одесса).

Соревнования проходили, как всегда, в два тура. На теоретическом туре школьникам было предложено три задачи, на экспериментальном — две. Надо сказать, что все пять задач по своему содержанию существенно выходят за рамки программы основного курса физики нашей общеобразовательной школы, а в ряде задач — и за пределы программ факультативного курса физики.

Как же справились с предложенными задачами советские школьники? За первую задачу они набрали 41 балл из 50 (каждая задача оценивалась в 10 баллов), за вторую — 43 балла, за третью — 25,5 балла, за четвертую — 14 баллов и за пятую — 32,13 балла. По общей сумме баллов (155,63) команда СССР, в неофициальном зачете, оказалась второй — после команды Румынии (166,75). Следующие три места распределились так: Венгрия (153,25), ФРГ (152,26), Китай (148,25). По личным результатам все пять наших школьников получили медали — серебряные или бронзовые.

Кто и как читает «Квант»

В этом номере, как и раньше в конце года, мы публикуем «Анкету «Кванта». Ваши ответы помогают нам выбирать темы, подыскивать авторов, находить новые способы подачи материалов.

На анкеты, опубликованные в последние годы, ответов было получено не слишком много, но оказалось, что результаты статистической обработки анкет разных лет очень близки. И хотя мы не можем считать, что ответы присылались равномерно всеми категориями читателей, анализ мнений наиболее активной части читателей представляет большой интерес.

Каков же по этим данным среднестатистический читатель «Кванта»? Журнал читают от 5-классников до пенсионеров. Больше всего тех, на кого журнал рассчитан — учащихся старших классов. Среди читателей: учащихся 5—7 классов — 11 %, 8 класса — 25 %, 9 класса — 23 %, 10 класса — 21 %, учащихся техникумов и студентов — 5 %, учителей — 11 %, прочих («взрослых» любителей математики и физики) — 4 %. В городах распространяется 84 % тиража журнала, в сельской местности — 16 %. Один экземпляр журнала читают в среднем 5 человек, причем в городе — 3 человека, а в сельской местности, как и журнал, выписываемый учителем,— целый класс.

Школьники выписывают журнал в основном с 8 класса, многие учителя имеют подшивки «Кванта» с момента его основания.

Математикой интересуются 84 % читателей, физикой — 64 %, стало быть, и тем, и другим,— 48 %. Анализ распределения интереса читателей к рубрикам журнала показал, что каждая рубрика имеет своего читателя. Анкеты, присланные победителями конкурса «Задачник «Кванта» (они опрашивались отдельно), были выделены в отдельную группу; относящиеся к ним данные приводятся в скобках.

Наиболее популярные рубрики: «Школа в «Кванте», ею интересуются 54 % (46 %) читателей, причем 36 % — 8-классников, 54 % 9-классников (71 %) и 67 % 10-классников (39 %); «Калейдоскоп» — 50 % (29 %); «Задачник «Кванта» — 45 % (78 %); «Практикум абитуриента» — 41 % (52 %); «Искусство программирования» — 39 % (19 %); «Олимпиады» — 38 % (41 %); «Лаборатория «Кванта» — 36 % (28 %); «Математический кружок» — 34 % (37 %). Остальными рубриками интересуются от 35 до 20 % читателей (каждой). Наиболее активно читают «Квант» 9-классники, их интересует содержание более 7 основных рубрик журнала, 10-классников — 6 рубрик, 8-классников — лишь 5 рубрик. Интерес к рубрике «Квант» для младших школьников» падает от 83 % у 5—7-классников до 8 % у 10-классников, к рубрикам «Практикум абитуриента» и «Варианты вступительных экзаменов» растет от 20 % у 8-классников до 60 % у 10-классников. «Искусство программирования» интересует в основном 9-классников — 62 % (41 %), а 10-классников меньше — 25 % (13 %) и вызывает много нареканий: материалы слишком просты.

Лучшими статьями 1987 года чаще других назывались по физике: «Встреча с кометой Галлея состоялась», «Оптическая электроника при свечах»; по математике: «Загадка Рамануджана», «Лучшее пари для простаков», «Конечные группы» (последняя вызвала и много отрицательных откликов).

Что касается обложек, то всем понравилась обложка № 10, большинству — № 2 и № 5, не понравились — № 6 и № 4.

Среди тем, предложенных для статей на будущие годы, оказались представленными большинство разделов математики и физики, а также космические исследования и программирование. Читатели просят заранее информировать их о выходящей научно-популярной литературе, больше писать о современных открытиях в математике, физике и астрономии. Много нареканий вызвали поздние сроки выхода журнала.

Часть пожеланий нам удалось удовлетворить, часть — нет. Сроки выхода журнала связаны с типографией, выпускающей и много других журналов. Вы держите в руках сдвоенный номер журнала: 11—12 (увеличенными были и номера 2, 4, 6, 9). Оказалось, что это самый простой способ согласовать номер журнала с месяцем его выпуска в свет. Теперь № 1 за 1989 год пойдет по графику бывшего № 12 и выйдет в начале января.

Часть тем, подсказанных читателями, была отражена в журнале, некоторые темы были интересны лишь узкому кругу читателей, иногда не удавалось найти автора, который взялся бы достаточно популярно и интересно раскрыть данную тему, а чаще всего — просто не хватало журнальных страниц, и многими темами приходилось жертвовать. Решая эту проблему, редакция приняла меры к увеличению в новом году числа страниц журнала до 80 в каждом номере. Больше внимания будет уделяться вопросам исследования космического пространства, астрономии. Увеличится раздел «Искусство программирования», в котором основное внимание будет уделяться общим вопросам программирования (формализация задач, подготовка их к постановке на ЭВМ и т. п.). Опыт показывает, что те, кто имеет доступ к программируемому вычислительному устройству (от микрокалькулятора до персонального компьютера), очень быстро осваивают технику программирования, т. е. путь от алгоритма до программы. Сложнее оказывается путь от неформальной формулировки задачи до алгоритма.

Мы надеемся, что наши читатели еще активнее ответят на вопросы публикуемой ниже анкеты. При этом мы предлагаем вам провести небольшой эксперимент. Возьмите монетку и подбросьте ее 9 раз (ровно девять!), записывая при этом, что окажется наверху — герб или цифра. Если все 9 раз наверху будет герб, то обязательно пришлите нам анкету (хотя бы кратко ответив на все вопросы). Таким образом, «нулевым» вопросом анкеты будет следующий: сколько раз у вас выпал герб при 9 бросаниях.

Примечание. Каждый читатель этого номера журнала цикл из 9 бросаний монеты выполняет один раз.

А. Н. Виленкин

Наша анкета

Дорогие читатели! Для того чтобы при подготовке материалов к публикации в «Кванте» редакция могла учесть ваши интересы, уровень подготовки и вкусы, просим вас ответить на вопросы нашей традиционной анкеты.

Ответы высылайте на отдельном листе бумаги, сохранив нумерацию вопросов, до 10 января 1989 года. Наш адрес: 103006 Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». На конверте сделайте пометку: «Анкета—88».

1. Фамилия, имя (не обязательно). Место учебы (город, село; учебное заведение, класс, курс) или работы (профессия, специальность). Выписываете вы журнал или берете у знакомых или в библиотеке?

2. Круг интересов (математика, физика, информатика, астрономия). С какого года вы читаете наш журнал? Сколько человек читают ваши экземпляры «Кванта» (для подписчиков)?

3. Наиболее и наименее интересные статьи по математике из числа опубликованных в 1988 году.

4. Наиболее и наименее интересные статьи по физике из числа опубликованных в 1988 году.

5. Самая удачная и самая неудачная обложка журнала в 1988 году; ваше мнение об оформлении журнала.

6. Какие разделы журнала вам нравятся, а какие — нет? Какие новые разделы следовало бы ввести?

7. Какие материалы, опубликованные в «Кванте» в 1988 году, помогли в вашей работе или учебе, что вы искали в «Кванте», но не нашли?

8. Общее мнение о журнале. О чем бы вы хотели прочитать на страницах нашего журнала в 1989—1990 годах?

Ответы, указания, решения

О плоских кривых

1. См. таблицу.
2. См. рис. 1.
3. См. рис. 2.
4. Число точек пересечения прямой и кривой изменяется на 2 в момент касания. После поворота на 180° это число останется прежним. Если сумма чисел, равных ±2, равна нулю, то чисел четное число.
5. Обойдем каждую из кривых в двух направлениях и будем следить за числом точек пересечения касательного луча с другой кривой. Это число меняется при проходе точек пересечения кривых и точек касания двойных касательных с кривой. После обхода число точек пересечения не изменится. Получаем 4 равенства, сумма которых дает искомое соотношение.
6. Числа вращения равны 1, 1, 0, 2, 1, 3, 0, 0.
7. Кривую можно «раздуть» в окружность; число вращения равно 1.
8. Если точек перегиба нет, то кривая все время поворачивается в одну сторону и число вращения положительно.
9. При каждой перестройке четность числа кривых меняется. Поэтому четность числа кривых k, на которые распадается данная кривая, совпадает с четностью числа $n+1$, где n — число двойных точек. Четность числа вращения совпадает с четностью числа k.
10. См. рис. 3.
11. Каждое число встречается дважды, так как через каждую двойную точку мы проходим дважды. Выберем двойную точку с номером k и сделаем в этой точке перестройку. Кривая распадется на две, и число их точек пересечения будет четным. В последовательности между двумя числами k будут стоять по одному разу как раз номера точек пересечения этих двух кривых.

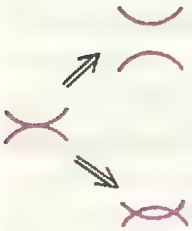


Рис. 1.

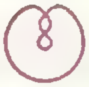


Рис. 2.

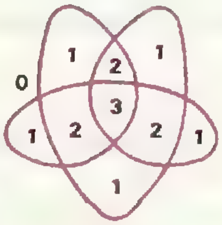
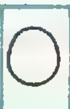
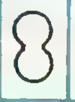
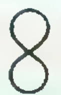
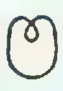
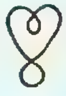
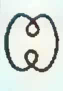
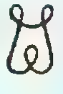
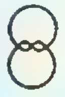


Рис. 3.

Таблица.

								
p	0	2	2	1	5	4	8	4
q	0	0	0	0	2	2	4	0
r	0	4	2	0	2	0	2	2
n	0	0	1	1	2	2	3	3

Гармонические колебания

1. $x+\frac{g}{l}x'=0.$ $W=\frac{mg}{2l}x^2+\frac{m}{2}(x')^2,$ $\omega=\sqrt{g/l}.$
2. [illegible] $=\sqrt{2g/(\pi R)}.$

XXIII Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

1. Ответ: 23 рассказа. Указание. После каждого рассказа с нечетным числом страниц меняется четность начальной страницы следующего рассказа, так что четность начальной страницы меняется не меньше 14 раз.
2. Пусть [Ф] — площадь фигуры Ф. Обозначим точки, как показано на рисунке 4. Так как средняя линия треугольника отсекает одну четвертую его площади,

$$[NSLT]=[ABCD]-\frac{3}{4}[ABC]-\frac{3}{4}[BCD]-$$
$$-\frac{1}{4}[ACD]-\frac{1}{4}[ABD],\ [MSKT]=[ABCD]-$$
$$-\frac{3}{4}[ABC]-\frac{1}{4}[ACD]-\frac{1}{4}[BCD]-\frac{3}{4}[ABD].$$

Из равенства $[NSLT]=[MSKT]$ получаем нужное утверждение: $[BCD]=[ABD]$.

3. Пусть $x=mn$, $y=nk$, $z=mk$, где m, n и k — натуральные числа. Тогда должно быть $n(k-m)=mk-1$. Положив $k-m=1$, получаем бесконечную серию решений:

$$x=m(m^2+m-1),\ y=(m+1)(m^2+m-1);$$
$$z=m(m+1).$$

4. См. решение задачи М1115а).
5. Указание. Это отношение равно тангенсу угла, образуемого диагональю с бо́льшим основанием трапеции.
6. См. решение задачи М1112.
7. Указание. Если $xy\neq0$, то $1-xy=$ $=\left(\frac{x^5-y^5}{2x^2y^2}\right)^2.$
8. См. решение М1113.

9 класс

1. Ответ. $m=-1989$. Указание. Уравнение приводится к виду

$$\frac{1989^{1988}}{1988^{1988}}=\frac{(m+1)^{m+1}}{m^{m+1}}.$$

Обе дроби несократимы, так что $m^{m+1}=$ $=1988^{1988}$. Если $m\geqslant1988$, то $m^{m+1}>1988^{1988}$. Если же $0<m<1988$, то $m^{m+1}<1988^{1988}$. Если $m<-1$, то при $n=-(m+1)$ получим $1988^{1988}=n^{n}$, откуда $n=1988$.

2. Указание. В треугольнике больший угол имеет больший синус, поэтому, например, $(\alpha-\beta)(\sin\alpha-\sin\beta)\geqslant0$, или $\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)(\sin\alpha-$ $-\sin\beta)\geqslant0$.
3. Ответ. Нельзя. Предположим, что требуемый график дежурств существует. Пусть согласно этому графику a раз меняются ученики 9 «А» и b раз — ученики 9 «Б». Тогда, поскольку по условию задачи каждый ученик

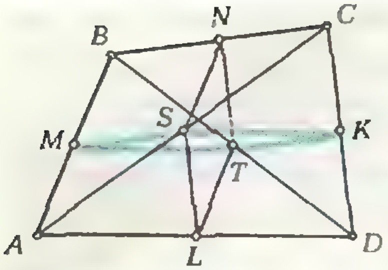


Рис. 4.

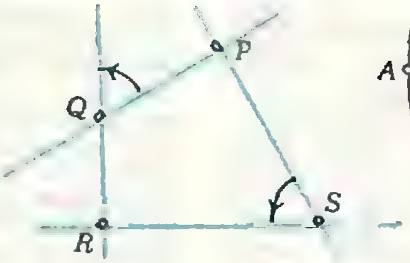


Рис. 5.

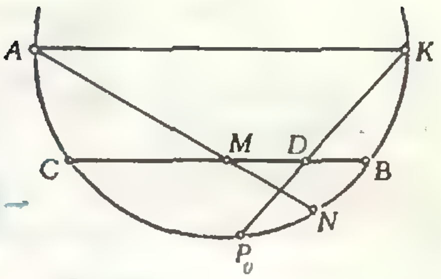


Рис. 6.

9 «А» должен отдежурить с каждым учеником 9 «Б», выполняется равенство $a+b=32\cdot 29$. При этом, поскольку по условию в конце должна выходить на дежурство первая пара, число a кратно 32, а число b кратно 29. Следовательно, $a=32\cdot 29-b$ кратно 29. Отсюда следует, что a кратно $32\cdot 29$, а так как, очевидно, $a>0$, то $a\geqslant 32\cdot 29$. Аналогично устанавливается, что $b\geqslant 32\cdot 29$, что противоречит равенству $a+b=32\cdot 29$.

4. Обозначим через $(\widehat{l, n})$ наименьший угол, на который надо повернуть прямую l против часовой стрелки, чтобы она стала параллельна прямой n.

Лемма. Точки P, Q, R, S, не лежащие на одной прямой, лежат на одной окружности тогда и только тогда, когда $(\widehat{QP, QR})=(\widehat{SP, SR})$ (рис. 5).

Доказательство следует из теоремы о свойствах углов, вписанных в окружность.

Проведем теперь прямую AK, параллельную прямой BC (точка K принадлежит окружности S, рис. 6). Продолжим отрезок KD за точку D до пересечения с окружностью S в точке P_0. Докажем, что для каждой точки M, удовлетворяющей условию задачи, точка P совпадает с P_0. Возможны два случая.

1) Точки N и P_0 различны. Так как точки A, K, P_0, N лежат на окружности S, то $(\widehat{AK, KP_0})=(\widehat{AN, NP_0})$. Поскольку прямые BC и AK параллельны, $(\widehat{AK, KP_0})=(\widehat{BC, KP_0})$. Значит,

$$(\widehat{MD, DP_0})=(\widehat{MN, NP_0}),$$

т. е. точки M, N, P_0, D лежат на одной окружности и, следовательно, $P_0=P$.

2) Точки N и P_0 совпадают. При гомотетии с центром в точке P_0, переводящей точку K в точку D, прямая AP_0 переходит в себя, а прямая AK — в прямую MD (поскольку $AK\parallel MD$). Значит, точка A переходит в точку M. Поэтому окружность S переходит в окружность, описанную около треугольника NMD. Поскольку центром гомотетии является точка $P_0=N$, больше у этих окружностей общих точек нет, т. е. $P=P_0$.

Теперь очевидно, что искомая точка M есть проекция точки P_0 на прямую BC. Эта проекция лежит внутри отрезка BC (угол A острый) и не совпадает с точкой D, так как угол $\angle KDC=\angle DKB+\angle KBD$ — тупой.

5. **Указание.** При $n=4k+1$ числа a_n нечетны. Рассматривая остатки от деления a_n на 6, убедитесь, что a_n, например при $n=36p+17$ делится на 3.

6. См. решение M1111.

7. **Ответ:** $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$. **Указание.** Можно считать, что $a+b\geqslant c+d$.

Тогда $b+c\geqslant\frac{1}{2}(a+b+c+d)$ и

$$\frac{b}{c+d}+\frac{c}{a+b}=\frac{b+c}{c+d}-c\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\frac{1}{2}\frac{a+b+c+d}{c+d}-(c+d)\left(\frac{1}{c+d}-\frac{1}{a+b}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{a+b}{c+d}+\frac{c+d}{a+b}-\frac{1}{2}\geqslant\sqrt{2}-\frac{1}{2}.$$

Значение $\sqrt{2}-\frac{1}{2}$ принимается, например, при $a=\sqrt{2}+1$, $b=\sqrt{2}-1$, $c=2$, $d=0$.

8. Перенумеруем строки таблицы сверху вниз, столбцы — слева направо. Обозначим через $o^i_{j,k}$ операцию прибавления i-ой строки к j-му столбцу и вычитания этой строки из k-го столбца.

Применяя к данной таблице последовательно операции $o^1_{n,1}, o^2_{n,2}, \ldots, o^{n-1}_{n,n-1}$, мы получим таблицу, в которой все диагональные элементы, кроме стоящего в n-ой строке и в n-ом столбце, равны нулю.

Рассмотрим последовательность операций

$$o^j_{1,i},\ o^i_{n,1},\ o^l_{1,n},\ o^i_{n,j},\ o^i_{j,n}.$$

Как нетрудно проверить, применение таких операций к полученной таблице приводит к новой таблице, в которой число, стоящее в i-ой строке и j-ом столбце, равно нулю, а остальные числа, не стоящие в последней строке или в последнем столбце, не изменились.

Применяя такие последовательности операций для всех $i=1, 2, \ldots, n-1$ и $j=1, 2, \ldots, n-1$, мы получим таблицу, в которой числа, отличные от нуля, могут находиться только в последней строке или в последнем столбце. Но так как сумма чисел в любой строке и в любом столбце равна нулю (это свойство сохраняется при применении операций), то в последней строке и в последнем столбце тоже стоят нули.

10 класс

1. **Указание.** Точки B, E, D, C лежат на окружности с центром O и диаметром BC, а перпендикуляр OH из O на ED делит этот отрезок пополам.

2. **Ответ.** $\sqrt{3}$. **Указание.** Рассмотрите S^2 и трижды примените неравенство о среднем арифметическом для двух чисел.

3. **Ответ:** 6 звеньев. **Указание.** Пусть ломаная начинается в вершине A и кончается в вершине C. Сфера радиусом 3 с центром в точке A пересекает поверхность

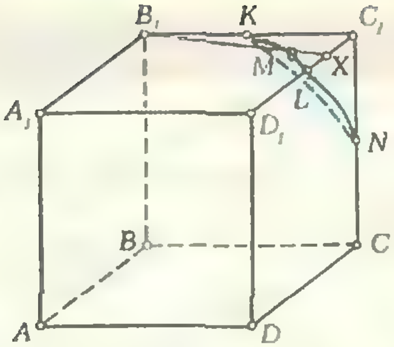


Рис. 7.

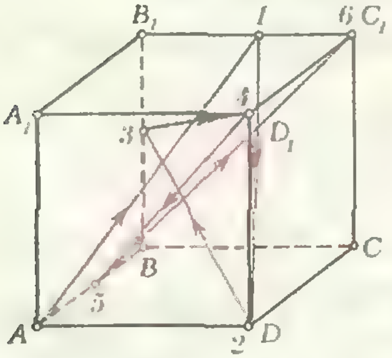


Рис. 8.

куба по трем дугам: KL, LN и KN, где точки K, L, N — середины соответствующих ребер (рис. 7). Если точка M не совпадает с K, L, N и лежит на одной из дуг, то сфера радиусом 3 с центром в M проходит через точку A, в остальные точки куба содержит внутри себя. Поэтому ломаная должна проходить через одну из точек K, L, N. На рисунке 8 показан пример ломаной из шести звеньев.

4. См. решение М1115 б).

5. Указание. Без ограничения общности можно считать, что парабола имеет уравнение $y=ax^2$, а ломаная имеет *хотя бы одну вершину* с положительной абсциссой. Докажите, что вершина с *наибольшей* положительной абсциссой обязательно является конечной вершиной ломаной.

6. Ответ: $n=20$. Указание. Если $n \lesssim 20$, то, вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 10, получим, что модуль левой *части нового уравнения меньше 100.*

7. См. решение М1120 а).

8. См. решение М1114.

[illegible]есоюзная олимпиада школьников по ин[illegible]матике

Т1. Будут напечатаны в неубывающем порядке простые числа, произведение которых равно n, т. е. *разложение n на простые делители* (с учетом кратности).

Т2. Надо из площади Пр1 вычесть площадь пересечения Пр1 и Пр2, которое либо пусто, либо является прямоугольником, координаты левого нижнего и правого верхнего углов которого находятся как максимумы или минимумы соответствующих координат Пр1 и Пр2.

Т3. Назовем *маршрутом* следующий набор: пункт отправления, последовательность рейсов (пункт отправления каждого из которых совпадает с пунктом прибытия предыдущего, первого — с пунктом отправления маршрута), конец маршрута (пункт прибытия последнего рейса). Начав с «пустого» маршрута (город [1], город [1]), будем проделывать следующую операцию: если из конца маршрута выходит неиспользованный рейс, то вставляем его в маршрут; если такого рейса нет (это возможно только если начало и конец маршрута *совпадают), то переносим начало и* конец маршрута по первому рейсу, а первый рейс ставим последним. Когда число рейсов в маршруте сравняется с числом всех рейсов, будет найден кольцевой маршрут.

Т4. При решении задачи надо исходить из того, что ЭВМ работает быстро, а перемотка ленты на магнитофоне — медленно, но в память ЭВМ весь файл пар фамилий не поместится. Участниками олимпиады были предложены разные алгоритмы. Возможен такой. Используя два магнитофона и держа в памяти *ЭВМ 1000* пар фамилий, по исходному файлу пар фамилий людей, стоящих на «расстоянии» 1 друг от друга, создается файл пар фамилий людей, стоящих на «*расстоянии» 2 (при наличии пар* Ф1, Ф2 и Ф2, Ф3 в новый файл записывается Ф1, Ф3). Из него — файл пар фамилий людей, стоящих на «расстоянии» 4, потом 8 и т. д. Под конец используется двоичное разложение числа 1234567.

М1. а) 111; б) 259. Основная трудность этой задачи — в точном представлении больших целых чисел. Оказалось, что если переменная описана как целая, но в процессе вычислений ее значение превосходит допустимые пределы, то «Роботрон» (и, кстати, большинство других компьютеров) переделывают ее в вещественную, теряя при этом знаки, и последовательность искажается. И еще оказалось, что испорченная таким способом последовательность приводит к тому же (верному) ответу: 259, найденному многими участниками олимпиады, но не всеми «с гарантией». При решении этой задачи надо было сделать специальную программу работы с большими целыми числами и контролировать величину получающихся в процессе вычислений чисел (см. также «Квант», 1988, № 7, с. 59).

М2. Естественная идея — зафиксировать наибольшее слагаемое в сумме и взять из предыдущих вычислений (для меньших чисел) число представлений остальной части суммы. Пусть $P(n, k)$ — число разбиений n на слагаемые, не превосходящие k (искомое число — $P(n, n)$). Тогда $P(n, k)=P(n, k-1)+P(n-k, k)$. Строится таблица $P(n, k)$ и из нее находится число представлений для постепенно возрастающих n. Без специальной арифметики больших целых чисел удается добраться примерно до $n=37$, с такой арифметикой — до $n=100$.

[illegible]ант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. Если обозначить через x стоимость фруктового мороженого, то сливочное будет стоить

BeatriceGloria_personal library

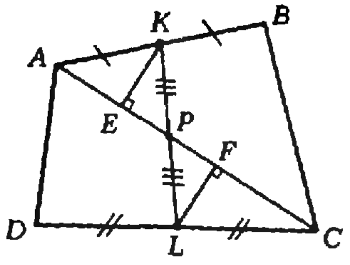


Рис. 9.

$x+10$, а шоколадное — $x+20$. Общая цена взятого мороженого — 240 копеек, и в то же время $4(x+x+10+x+20)=12x+120$. Получаем, что $x=10$, следовательно, порция фруктового мороженого стоит 10 копеек, сливочного — 20 копеек, шоколадного — 30 копеек.

2. Заметим, что $a=2^{5\cdot 9}=32^9$, $b=3^{4\cdot 9}=81^9$, $c=4^{3\cdot 9}=64^9$, $d=5^{2\cdot 9}=25^9$. Отсюда $d<a<c<b$.

3. Снег — пластинки льда, поэтому отражение от снега солнечных лучей аналогично отражению света от огромного количества небольших зеркал. В глаза наблюдателя попадают лучи от некоторых из них, причем при движении — от все новых и новых. Тем самым создается впечатление вспыхивающих искр.

4. Несложно выписать (особенно, если под руками есть микрокалькулятор) все пары однозначных чисел таких, что при возведении одного из них в степень, равную другому, получается пятизначное число: $3^9=19\,683$, $4^7=16\,384$, $4^8=65\,536$, $5^7=78\,125$, $6^6=46\,656$, $7^5=11\,907$, $7^6=83\,349$, $8^5=32\,768$, $9^5=59\,049$. Из этих чисел только $5^7=78\,125$ удовлетворяет условию задачи.

5. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из середин сторон AB и CD четырехугольника на его диагональ AC (рис. 9). Поскольку $KP=PL$, треугольники PKE и PLF равны, значит, $KE=LF$. Высоты треугольников ABC и ACD, опущенные на их общую сторону AC, равны соответственно $2KE$ и $2LF$, значит, равны и площади этих треугольников.

[illegible]ейдоскоп «Кванта»
[illegible] *«Квант» № 10)*

Вопросы и задачи

1. В растворе молекулы воды и спирта «упакованы» плотнее за счет того, что между молекулами воды и спирта, взятыми по отдельности, существуют промежутки.

2. Из-за разности давлений внутри шарика и снаружи молекулы воздуха «просачиваются» через оболочку шарика и давление в нем падает.

3. Молекулы компонентов с меньшей молярной массой подвижнее более массивных молекул и поэтому чаще проходят сквозь поры трубы.

4. Медленнее всего продвигаются ионы наиболее массивного изотопа $^1_1$H.

5. Общее давление на омедненную часть пластинки примерно в два раза меньше, чем на вторую половину, из-за неупругого столкновения молекул хлора и меди.

6. Ударами молота достигается хороший контакт привариваемых кусков. При температуре белого каления взаимная диффузия частиц происходит с большой скоростью и на большую глубину.

7. При равных давлении и температуре в равных объемах содержится одинаковое число молей любого газа. Средняя молярная масса воздуха больше средней молярной массы смеси воздуха с водяным паром. Поэтому сосуд с влажным воздухом легче сосуда с сухим.

8. На больших высотах, так как там воздух разрежен.

9. Частица при столкновении с молекулами газа расходует свою кинетическую энергию на ионизацию молекул.

Микроопыт

Сам водяной пар невидим. При выключении газа исчезают струи нагретого воздуха, обтекавшие чайник. Выходящий из чайника водяной пар охлаждается и конденсируется. Мы наблюдаем возникающее при этом облако мельчайших капель.

Напечатано в 1988 году

К 80-летию со дня рождения Исаака Константиновича Кикоина	3	2
Интервью с профессором Рональдом Грэхемом	4	21
Беседа с академиком В. П. Масловым	5	2
Памяти Л. Д. Ландау	8	2
Сергей Львович Соболев	10	17
А. Н. Колмогоров в воспоминаниях учеников	11—12	2

Статьи по математике

Башмаков М. И. Математические образы в поэзии	2	14
Болтянский В. Г. Программы перебора	1	3
Вайнштейн Ф. В. Разбиение чисел	11—12	19
Винниченко А. П. Простые числа, математическая статистика и... ЭВМ	8	19
Виро О. Я., Дроботухина Ю. В. Сплетения скрещивающихся прямых	3	12
Гарднер М. Рамсеевская теория графов	4	14
Долбилин Н. П. Жесткость выпуклых многогранников	5	6
Дубровский В. Н. Как возникает распределение Пуассона	8	23
Ефремович В. А. Что такое непрерывность	6	22
Козлов В. В. Соударение тел	9	30
Панов А. А. Флексагоны, флексоры, флексманы	7	10
Табачников С. Л. Геометрия		

уравнений	10	10
Фукс Д. Б. О стихотворных размерах	2	17
Фукс Д. Б. Геометрия листа бумаги	9	17
Чукова Ю. П. Распределение Пуассона	8	15
Яглом И. М. Якоб Штейнер	7	2
Ярский А. С. Числа и функции	6	12

Статьи по физике

Абрикосов А. А. Сверхпроводимость: история, современные представления, последние успехи	6	2
Абрикосов А. А. (мл.). История росинки	7	24
Борин А. А. Полет птицы и полет человека	9	9
Бубнов Б. М. Поговорим немного о погоде...	11—12	26
Бялко А. В. Химическое разнообразие небесных тел	9	24
— » —	10	18
Геллер А. Б. Нужна ли альпинисту физика?	1	16
Грызлов С. В. Давление света	6	19
Зельдович Я. Б., Хлопов М. Ю. Пути электромагнитной теории	2	2
Каганов М. И. Много или мало?	1	8
Кремер А. А. О рассеянии, или Как измерить жирность молока?	8	9
Львов Ю. М., Фейгин Л. А. Ленгмюровские пленки — путь к молекулярной электронике?	4	9
Митрофанов А. В. Поговорим про вчерашний снег	8	26
Новиков И. Д. Вселенная как тепловая машина	4	2
Носов Ю. Р. Молнии в кристалле	11—12	12
Пайерлс Р. Ранние годы квантовой механики	10	2
Прудковский Б. А. О консервной банке, пружине и прокатном стане	2	9
Стасенко А. Л. Коридор входа	5	15
Френкель В. Я. Александр Александрович Фридман	9	2
Чернин А. Д. Космические иллюзии и миражи	7	15
Штейнберг А. С. Рождение сплава	5	25

Новости науки

Музыкальные пульсары	6	11
Супервытянутые ядра	11—12	32

Лаборатория «Кванта»

Агафонов А. И., Селицер С. И. Необычный маятник	11—12	57
Белоусов С. М., Герасимов Р. Н. Наблюдение и фотосъемка быстропротекающих процессов	2	46
Гегузин Я. Е. Кто творит радугу?	6	46
Мазин И. И. Простые опыты с кипятком	8	48
Майер В. В., Майер Р. В. Искусственная радуга	6	48
Утешев В. В. Жидкий азот и медная гайка	9	63
Яковлев В. Ф. «Физика для дураков»	4	44

Математический кружок

Волков М. В., Силкин Н. Н. Кого послать на Марс?	8	51
Львовский С. М., Тоом А. Л. Разберем все варианты	1	42
Табачников С. Л. О плоских кривых		
Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. Основной принцип дифференциального исчисления. Часть I: Линейная функция	3	46
Фаддеев Д. К., Никулин М. С., Соколовский И. Ф. Основной принцип дифференциального исчисления. Часть II: Свойства производной	4	48
Шевелев В. С. Три формулы Рамануджана	6	52

Наш календарь

Генрих Герц и электромагнитные волны	1	48

Школа в «Кванте»

Физика 8, 9, 10:		
Об одной удивительно живучей ошибке	1	36
Проводники в электростатическом поле	1	38
Интерференция и интерферометры	1	39
Что такое центр масс	3	39
Как в металле протекает электрический ток?	3	41
О машине времени и теории относительности	3	44
Закон сохранения энергии	5	45
Правило Ленца	5	47
О швартовке, трении и формуле Эйлера	5	49
Основная задача кинематики	9	58
Абсолютная температура	9	60
Равнодействующая — как ее найти?	11—12	50
Реальный газ и его уравнение состояния	11—12	52
Принцип Гюйгенса	11—12	54
Математика 8, 9, 10:		
Сумма углов	2	50
О разрезаниях многоугольников и теореме Эйлера	2	52
Сумма углов сферического многоугольника	2	55
Ферма ищет экстремумы...	10	45
Избранные школьные задачи	2, 4, 8, 10	

«Квант» для младших школьников

Задачи	1—12	
Буздин А. И., Кротов С. С. Что и как мы видим	3	34
Коваленко М. Д. Градусник для Солнца	10	40
Петрова Т. С. Из жизни молекул	7	46

Розенталь А. Л. Правило крайнего	9	52
Савин А. П. Десять цифр	4	38
Тихомирова С. А. Архимедова сила в литературных произведениях	5	41
Штейнберг А. С. Коротко о тепловом расширении	8	44
Ярский А. С. О пользе математики для ковбоев	2	38

Калейдоскоп «Кванта»

Отражение и преломление	2	40
Замечательные числа. Числа Фибоначчи	3	32
Простые машины	4	40
Замечательные линии и точки. Циклоида	5	32
Подборка физических задач	6	40
Игра-загадка	7	32
Колебания	8	32
Замечательные числа. Дружественные числа и простые числа-близнецы	9	40
Насколько малы молекулы?	10	32
Правильные многогранники	11—12	48

Задачник «Кванта»

Победители конкурса «Задачник «Кванта»	3	20
Задачи М1081 — М1140, Ф1093 — Ф1147	1—12	
Решения задач М1061 — М1115, Ф1073 — Ф1127	1—12	
Список читателей, приславших правильные решения	3, 6, 9	
Самопересечения замкнутой ломаной	1	30

Искусство программирования

О дальнейшей работе Заочной школы программирования	1	47
Дуванов А. А., Первин Ю. А. Язык Лого. Урок 4	1	51
Касаткин В. Н. Сколько цифр в числе 100!?	7	57
Рождественский В. В., Хлебутин С. Г. Структурный подход и язык программирования Бейсик	3	51
Щеголев А. Г. Рисует школьная ЭВМ	5	51
Щеголев А. Г. Школьная ЭВМ рисует окружность	6	56

Практикум абитуриента

Буздин А. И., Кротов С. С. Поверхностное натяжение и капиллярные явления	4	56
Варламов А. А. Парообразование. Свойства паров	6	61
Габович И. Г., Горнштейн П. И. Решения нестрогих неравенств	6	59
Гордюнин С. А., Горьков П. Л. Преломление света	10	49
Городецкий Е. Е. Гармонические колебания	11—12	64
Зильберман А. Р. Расчет электрических цепей	8	58
Либерзон М. Р. Стереометрические задачи с шарами	2	63
Матизен В. Э., Дубровский В. Н. Из геометрии тетраэдра	9	66
Петров В. А. Неравенства и графики	4	54
Черноуцан А. И. Кинематические связи в задачах динамики	2	57

Варианты вступительных экзаменов

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1987 году	6	71
Ленинградский государственный педагогический институт	4	63
Ленинградский государственный университет	4	62
Ленинградский политехнический институт	4	64
Ленинградский электротехнический институт	4	65
Московский авиационный институт	4	66
Московский авиационный технологический институт	5	54
Московский государственный педагогический институт	1	57
Московский государственный университет	2	66
Московский инженерно-физический институт	3	56
Московский институт нефти и газа	5	60
Московский институт радиотехники, электроники и автоматики	3	58
Московский институт стали и сплавов	3	57
Московский станкоинструментальный институт	5	57
Московский институт электронного машиностроения	1	56
Московский институт электронной техники	5	59
Московский физико-технический институт	1	55
Московский энергетический институт	4	67
Московское высшее техническое училище	5	55
Новосибирский государственный университет	3	54

Олимпиады

Задачи LI Московской городской математической олимпиады	9	72
Избранные задачи Московской городской олимпиады по физике	9	73
Всесоюзная заочная физико-математическая олимпиада МВТУ им. Н. Э. Баумана	9	74
XIV Всероссийская олимпиада школьников	10	56
XXII Всесоюзная олимпиада по математике	11—12	74
XXII Всесоюзная олимпиада по физике	11—12	78
I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике	11—12	82

Международные олимпиады 11—12 87

Информация

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу 1 57
Новый прием на заочное отделение Малого мехмата 1 58
Заочная физико-техническая школа при МИСиСе 1 59
Компьютерный клуб «СПРАЙТ» 2 45
Новые книги издательства «Наука» 3, 7—10
Заочная физическая школа при МГУ 4 68
Омскому НОУ — 20 лет 4 69
Новосибирск — Айдовер. Продолжение обмена 6 67
Заочная школа при НГУ 7 60
XI Турнир юных физиков 8 61
Вечерняя физическая школа при МГУ 8 14
III Научно-техническая конференция школьников в МФТИ 10 54
Всесоюзный конкурс «Юный программист» 10 63
25 лет Новосибирской ФМШ 11—12 69
Конференция в Ставрополе 11—12 73

Игры и головоломки 1—12 4-я с. обл.

* * *

Гарднер М. Нульсторонний профессор 6 36
Гарднер М. Остров пяти красок 7 50

«Квант» улыбается

Велосипед придумали давно 1 60
Технические новинки 4 61
Оригинальные часы 6 70
Сколько углов у треугольника? 11—12 46

Смесь

Мартовская лыжня 2 25
Задача на исследование 2 36
Геометрия «счастливых» билетов 4 72
От «Востока» — до «Веги-2» 5 16
Зачем нужна математика? 5 44
Сколько денег в кошельке? 6 51
В чем фокус? 7 44
Как взвесить гиппопотама 8 47
Нам пишут 8 50
—•— 10 23

Шахматная страничка

Новые рекорды 1 3-я с. обл.
Пешечное противостояние 2 »
Две игры 3 »
Блуждающий квадрат 4 »
Серийные квартеты 5 »
Компьютер опровергает 6 »
Чемпион мира за компьютером 7 »
Король превращается... в дамку 8 »
Коллекционер шахматных компьютеров 9 »
Одна позиция — а сколько заданий!? 10 »
Близнецы 11—12 »

Наша анкета 11—12 88

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко,
В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин,
В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков,
А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, Т. С. Петрова, М. К. Потапов,
В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов,
А. П. Савин, Я. А. Смородинский,
А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, Л. В. Кардасевич,
И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, С. Л. Табачников,
В. А. Тихомирова

Номер оформили:
М. Б. Дубах, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина,
П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представили:
Ю. Г. Анциферов, Р. И. Ахмеров,
А. Н. Виленкин

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Корректор Н. Б. Румянцева

Сдано в набор 15.09.88. Подписано к печати 21.10.88
Т-20526. Бумага 70×100/16. Печать офсетная
Усл. кр.-отт. 32,25. Усл. печ. л. 7,74. Уч.-изд. л. 9,62
Тираж 190281 экз. Цена 80 коп. Заказ 2399

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

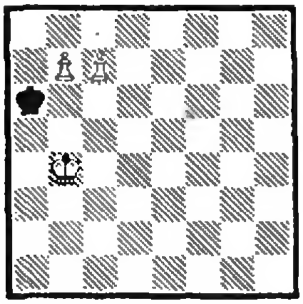
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Шахматная страничка

БЛИЗНЕЦЫ

Оценка позиции может измениться на противоположную, если переставить одну из фигур или пешек. В этом нет ничего удивительного, ведь в шахматах значение имеет не только материальное соотношение сил, но и конкретное расположение фигур. Но все же если у одной из сторон подавляющий материальный перевес, то перестановка фигур редко влияет на исход борьбы. Шахматные проблемисты, которые всякую тему любят облечь в необычную форму, придумали немало задач, в которых при перестановке всего одной фигуры или пешки результат действительно не меняется, но само решение претерпевает удивительное изменение. Речь идет о так называемых задачах-близнецах: внешне они почти не отличаются друг от друга, а решения их принципиально разные.

Вот четыре задачи-близнеца: одна изображена на диаграмме, три другие получаются при перестановке белого короля или пешки. В решении одна из пешек всюду превращается в ферзя, а другая — в ферзя, ладью, коня или слона! И авторы близнецов разные.

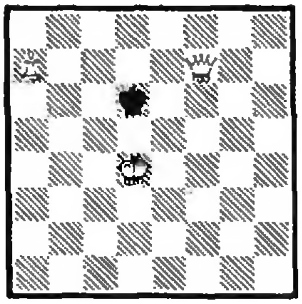


1. Диаграмма. Мат в 2 хода. (О. Делер, 1925 г.). 2. Переставить пешку с c7 на g7. Мат в 3 хода. (Х. Штаудте, 1965 г.). 3. Переставить (в исходной позиции) короля с b4 на b3. Мат в 3 хода. (В. Шпекман, 1964 г.). 4. Переставить (в исходной позиции) пешку с b7 на a7. Мат в 3 хода. (Л. Куббель, 1940 г.).

Решения. 1) 1. c8Ф и 2. b8Ф×. 2) **1. b8Л!** (1. b8Ф пат) 1... Кра7 2. g8Ф Кра6 3. Фa2×. Любопытно, что этот близнец придуман через 40 лет после задачи Делера! 3) **1. b8Ф** Кра5 2. c8К! Кра6 3. Фb6×. 4) **1. a8С!** На любой ответ — 2. c8Ф и 3. Фb7×.

Если бы решение мало измененной задачи мало отличалось от решения исходной, мы бы говорили, пользуясь математическим языком, о «непрерывной» зависимости решения задачи от позиции. Однако в данном случае эта зависимость как раз является разрывной! В математике непрерывные функции — нечто естественное, а разрывные — особый случай. Шахматные задачи-близнецы иллюстрируют «разрывность» на шахматной доске, причем самым парадоксальным образом.

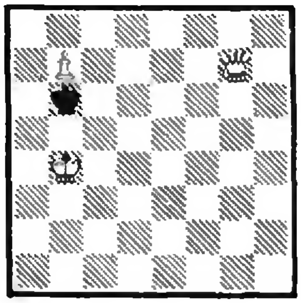
Слабое превращение пешки (не в ферзя, а в другую, не столь мощную фигуру) украшает задачу, а часто и составляет ее суть. Вот еще один набор близнецов, в которых перестановки ферзя и пешки белых приводят к четырем различным превращениям. На сей раз все задачи принадлежат одному композитору и все они — двухходовки.



В. Шпекман, 1965 г. Мат в 2 хода. 1. Диаграмма. 2. Фf7→h7, пa7→c7. 3. Фf7→g7, пa7→e7. 4. Фf7→a7, пa7→g7.

Решения: 1) **1. a8К!** (1. a8Ф пат) 1... Крc6 2. Фd5×. 2) **1. c8Л!** Крe6 2. Лc6×. 3) **1. e8С!** Крe6 2. Фe5×. 4) **1. g8Ф** (наконец-то) 1... Крc6 2. Фd5×.

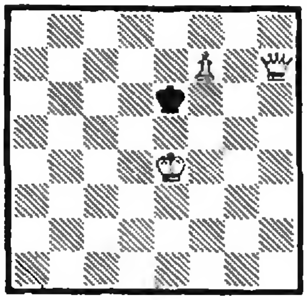
В следующей уникальной двухходовке объединены сразу шесть близнецов!



К. Ханнеман, 1972 г. Мат в 2 хода. 1. Диаграмма. 2. пb7→c7. 3. пb7→a7. 4. Крb6→a7. 5. Крb6→h1. 6. Фg7→b8.

Решения. 1) **1. b8Ф+** Крc6 (a6) 2. Фgb7×. 2) **1. c8Л!** Крa6 2. Лc6×. 3) **1. a8С!** Крa6 2. Фb7×. 4) **1. Фc7!** Крa6 2. b8К×! 5) **1. b8Л!** Крh2 2. Лh8×. 6) **1. Фc8!** Крa6 (a7) 2. b8Ф×. Итак, дважды пешка превращалась в ферзя и ладью и по одному разу — в слона и коня.

В рассмотренных задачах перемещалась белая пешка. Следующие четыре близнеца примечательны тем, что на другие поля перемещаются все фигуры кроме пешки, но именно эта белая пешка вынуждена всякий раз превращаться в новую фигуру. В данном примере переставленная фигура остается на новом месте, а вслед за ней переставляется следующая.



В. Шпекман, 1963 г. Мат в 2 хода. 1. Диаграмма. 2. Фh7→a7. 3. Далее Крe6→c6. 4. Далее Крe4→c4.

Решения. 1) **1. f8С!** Крf6 2. Фf5×. 2) **1. f8Л!** Крd6 2. Лf6×. 3) **1. f8Ф!** Крb5 2. Фfc5×. 4) **1. f8К!** Крd6 2. Фc5×.

Е. Я. Гик